ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 16 Nr kol. 308

KAROL BOJDA

SZEREGI RÓŻNICZKOWE

Streszczenie. W pracy podane jest twierdzenie pozwalające rozwijać funkcje rzeczywiste - spełniające pewne warunki - w szeregi funkcyjne, iloczyny, itp. Dalej scharakteryzowane są tylko szeregi typu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)g^{(n)}(x)$$

nazwane szeregami różniczkowymi, podane są także ich zastosowania, głównie do rozwiązywania równań różniczkowych następujących typów:

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n(x)y^{(n+r)}$$

1. Zbiór różniczkowy

1.1. Określenie zbioru różniczkowego

Zbiór R funkcji rzeczywistych określonych we wspólnym przedziale, posiadający następujące własności:

1. W zbiorze R istnieją dwa działania: $\square$ i $\otimes$,
2. Zbiór R jest grupą względem działania $\square$, a działanie $\otimes$ jest wewnętrzne.

3. W zbiorze R istnieje operacja B spełniająca warunki:

3.1. $\bigwedge_{f} \left[(f \in R) \Rightarrow (B\, f \in R) \right]$

3.2. $B(f_1 \otimes f_2) = (f_1 \otimes Bf_2) \square (B\, f_1 \otimes f_2)$

4. W zbiorze R określona jest rodzina operacji $\left\{ B_{\lambda}^{-1} \right\}_{\lambda \in L}$ spełniająca warunki:

4.1. $\bigwedge_{\lambda \in L} \; \bigwedge_{f \in R} \; (B\, B_{\lambda}^{-1}\; f = f)$

4.2. $\bigwedge_{\lambda \in L} \; \bigwedge_{f} \left[(f \in R) \Rightarrow (B_{\lambda}^{-1}\; f \in R) \right]$

nazwijmy zbiorem różniczkowym.
L jest dowolnym zbiorem wskaźników.
Może także zachodzić

$$B_{\lambda}^{-1}\, B\, f \neq f$$

Działanie $\otimes$ nie musi być rozdzielne względem działania $\square$. Zbiór różniczkowy nie musi więc być pierścieniem względem działań $\square$ i $\otimes$. Operację B nazwijmy operacją różniczkową względem działań $\square$ i $\otimes$.

1.2. Twierdzenie o rozwijaniu

Przyjmijmy następującą notację:

$$BBf \overset{\text{def}}{=} B^2 f, \qquad BB^{k-1}\, f \overset{\text{def}}{=} B^k\, f$$

Element neutralny grupy oznaczmy przez $\otimes$.
Element przeciwny w grupie do elementu f oznaczmy przez -f oraz

$$(-1)\, f = -\, f$$

Ponadto przyjmijmy, że symbol "lim" w założeniach odpowiada pewnemu typowi zbieżności ciągu funkcyjnego. O tym samym typie zbieżności jest wtedy mowa w tezie twierdzenia.

1. <u>Twierdzenie</u> (o rozwijaniu)

Załóżmy że istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty} f_n, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n, \qquad \lim_{n\to\infty} (f_n \square g_n)$$

przy czym

$$\lim_{n\to\infty} (f_n \square g_n) = \lim_{n\to\infty} f_n \square \lim_{n\to\infty} g_n. \tag{1}$$

Jeżeli dla pewnych k,l całkowitych i nieujemnych oraz f_1 i $f_2 \in R$ jest

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}(B^{k+n} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_n} B^{-1}_{\lambda_{n-1}} \cdots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2) = \Theta \tag{2}$$

to

$$B^k f_1 \otimes B^l f_2 = \mathop{\square}_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B(B^{k+n-1} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_n} B^{-1}_{\lambda_{n-1}} \cdots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2)$$

Dowód. Zgodnie z własnością (3.2)

$$\mathop{\square}_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B(B^{k+n-1} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_n} B^{-1}_{\lambda_{n-1}} \cdots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2) =$$

$$= \mathop{\square}_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\Big[(B^{k+n-1} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_{n-1}} B^{-1}_{\lambda_{n-2}} \cdots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2) \square$$

$$\square (B^{k+n} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_n} B^{-1}_{\lambda_{n-1}} \cdots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2)\Big].$$

Wystarczy teraz zbadać do jakiej granicy dąży wyrażenie

$$S_q = \mathop{\Box}_{n=1}^{q} (-1)^{n-1}\Big[(B^{k+n-1} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_{n-1}} B^{-1}_{\lambda_{n-2}} \dots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2) \Box$$

$$\Box (B^{k+n} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_n} B^{-1}_{\lambda_{n-1}} \dots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2)\Big].$$

gdy $q \to \infty$

Kolejne elementy występujące pod znakiem $\mathop{\Box}_{n=1}^{q}$ redukują się do Θ. Nie odnosi się to do elementu pierwszego

$$B^k f_1 \otimes B^l f_2$$

oraz ostatniego

$$(-1)^{q-1}(B^{k+q} f_1 \otimes B^{-1}_{\lambda_q} B^{-1}_{\lambda_{q-1}} \dots B^{-1}_{\lambda_1} B^{l} f_2),$$ który dąży do Θ,

gdy $q \to \infty$.

Wobec czego $\lim\limits_{q \to \infty} S_q = B^k f_1 \otimes B^l f_2$, co dowodzi twierdzenie.

Przykład

Jako zbiór R przyjmijmy zbiór F funkcji rzeczywistych f określonych i całkowalnych w sensie Riemanna w pewnym wspólnym przedziale (a,b), $0<a<b$ lub $a<b<0$.

Jako działanie $\Box$ przyjmijmy zwykłe dodawanie funkcji f, a działanie $\otimes$ "splot" funkcji f określony wzorem

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(x-u)\, f_2(u)\, du$$

Tak określone działanie * nie jest przemienne.
Zbiór F jest grupą względem dodawania funkcji.
Za operację różniczkową B przyjmijmy pochodną algebraiczną

$$D_a f(x) = -x\, f(x),$$

która posiada wszystkie własności operacji różniczkowej względem dodawania i "splotu".
Jedyna operacja odwrotna jest określona wzorem

$$D_a^{-1}\, f(x) = -\frac{1}{x}\, f(x)$$

Zbiór F jest zbiorem różniczkowym.
Wprowadzając notację

$$D_a^{-1}\, D_a^{-1}\, f = D_a^{-2}\, f, \qquad D_a^{-1}\, D_a^{-(k-1)} = D_a^{-k}\, f$$

i korzystając z twierdzenia o rozwijaniu otrzymujemy

$$D_a^{k}\, f_1(x) * D_a^{l}\, f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, D_a\left[D_a^{k+n-1}\, f_1(x) * D_a^{l-n}\, f_2(x)\right]$$

gdy

$$\lim_{n\to\infty}\left[D_a^{k+n}\, f_1(x) * D_a^{l-n}\, f_2(x)\right] = 0(x).$$

Symbol "lim" odpowiada dowolnemu typowi zbieżności ciągu funkcyjnego, spełniającemu warunek (1).
Dla $k = 0$, $l = 0$, $f_1(x) = 1(x)$, $f_2(x) = \varphi(x)$

(gdzie $1(x)$ jest funkcją stałą tożsamościowo równą 1)
mamy

$$1(x) * \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (-x)\left[(-x)^{n-1}\; 1(x) * (-x)^{-n}\, \varphi(x)\right]$$

Czyli

$$\int_{x_o}^{x} \varphi(u)\, d\, u = x \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_o}^{x} \frac{(u-x)^{n-1}}{u^n} \varphi(u)\, du$$

gdy

$$\lim_{n \to \infty} (x^n * x^{-n} \varphi(x)) = O(x).$$

Przyjmując $\varphi(x) = \frac{d\,\psi(x)}{dx}$.

otrzymujemy

$$\psi(x) = \psi(x_o) + x \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_o}^{x} \frac{(u-x)^{n-1}}{u^n} \psi'(u)\, du$$

Przykład ten miał tylko pokazać jak można stosować twierdzenie o rozwijaniu do konkretnych zbiorów różniczkowych.
Przykładów operacji różniczkowych można by podać wiele. Taką jest, jak łatwo sprawdzić, operacja L_m określona wzorem

$$L_m f = f \cdot \ln f,$$

jeżeli za zbiór R weźmiemy zbiór funkcji rzeczywistych f określonych w pewnym przedziale, o wartościach większych od e w każdym punkcie tego przedziału, ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem.

Przy pomocy twierdzenia o rozwijaniu można otrzymać inne szeregi funkcyjne, które nazwiemy szeregami różniczkowymi.
Szeregom różniczkowym i ich zastosowaniom będzie poświęcony dalszy ciąg niniejszej pracy.

2. Szeregi różniczkowe

2.1. Ogólne równanie

Jako zbiór R przyjmijmy zbiór Φ funkcji rzeczywistych f klasy C^∞ określonych w pewnym wspólnym przedziale. Za działania $\square$

i $\otimes$ przyjmijmy zwykłe dodawanie i mnożenie, a za B operację różniczkowania $Df = f'$ i dla λ rzeczywistych połóżmy

$$D^{-1}_{x_o\lambda} f(x) = \lambda + \int_{x_o}^{x} f(u)\, du$$

Zbiór ϕ jest zbiorem różniczkowym.
Łatwo wykazać, że stosując do niego twierdzenie o rozwijaniu otrzymamy wyrażenie, które nazwiemy ogólnym równaniem

$$D^k f_1(x) D^l f_2(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} D \left[D^{k+n-1} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_o \lambda_n} D^{-1}_{x_o \lambda_{n-1}} \cdots D^{-1}_{x_o \lambda_1} D^l f_2(x) \right] \quad (3)$$

Równość (3) jest prawdziwa, gdy spełniony jest warunek (2), który w tym przypadku ma postać

$$\lim_{n \to \infty} \left[D^{k+n} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_o \lambda_n} D^{-1}_{x_o \lambda_{n-1}} \cdots D^{-1}_{x_o \lambda_1} D^l f_2(x) \right] = 0 \quad (4)$$

Jeżeli warunek (4) jest spełniony, przy czym zbieżność jest jednostajna, to szereg (3) jest jednostajnie zbieżny do $D^k f_1(x) \cdot D^l f_2(x)$.
W dalszym ciągu niniejszej pracy symbol "lim" będzie odpowiadał zawsze zbieżności jednostajnej.

2.2. Szczególny szereg różniczkowy

Załóżmy, że szereg (3) jest jednostajnie zbieżny.
Wyrazy jego stanowią pochodne wyrażenia

$$(-1)^{n-1} D^{k+n-1} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_o \lambda_n} D^{-1}_{x_o \lambda_{n-1}} \cdots D^{-1}_{x_o \lambda_1} D^l f_2(x)$$

Załóżmy ponadto, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[D^{k+n-1} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_o \lambda_n} D^{-1}_{x_o \lambda_{n-1}} \cdots D^{-1}_{x_o \lambda_1} D^l f_2(x) \right]$$

o wyrazach różniczkowalnych jest zbieżny chociażby w jednym punkcie. Zachodzi wtedy równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}D\left[D^{k+n-1} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_0\lambda_n} D^{-1}_{x_0\lambda_{n-1}} \dots D^{-1}_{x_0\lambda_1} D^{l} f_2(x)\right] =$$

$$= D\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[D^{k+n-1} f_1(x) . D^{-1}_{x_0\lambda_n} D^{-1}_{x_0\lambda_{n-1}} \dots D^{-1}_{x_0\lambda_1} D^{l} f_2(x)\right] \qquad (5)$$

Korzystając z równości (5) można ogólne równanie zapisać następująco:

$$D^k f_1(x) D^l f_2(x) =$$

$$= D\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[D^{k+n-1} f_1(x) . D^{-1}_{x_0\lambda_n} D^{-1}_{x_0\lambda_{n-1}} \dots D^{-1}_{x_0\lambda_1} D^{l} f_2(x)\right] \qquad (6)$$

Całkując obustronnie równość (6) i oznaczając całką nieoznaczoną przez D^{-1} otrzymujemy:

$$D^{-1}\left[D^k f_1(x) . D^l f_2(x)\right] =$$

$$= C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} D^{k+n-1} f_1(x) \cdot D^{-1}_{x_0\lambda_n} D^{-1}_{x_0\lambda_{n-1}} \dots D^{-1}_{x_0\lambda_1} D^{l} f_2(x) \qquad (7)$$

Stała C nie może być dowolna, lecz musi być tak dobrana, aby równość (7) była prawdziwa.

Przyjmując w (7) $l=0$, $k=1$, $f_1(x) = g(x)$ i $f_2(x) = 1$, otrzymujemy

$$g(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[D^{n}g(x) \cdot D^{-1}_{x_0\lambda_n} D^{-1}_{x_0\, n-1} \dots D^{-1}_{x_0\lambda_1} 1\right] \qquad (8)$$

Stosując podstawienia: $\lambda_1 - x_o = C_1$,

$$\lambda_2 - \frac{x_o^2}{2} - C_1 x_o = C_2$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n - \frac{x_o^n}{n!} - C_1 \frac{x_o^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - C_{n-1} x_o = C_n$$

równość (8) można zapisać w postaci

$$g(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g^{(n)}(x) \left[\frac{x^n}{n!} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n \right] \qquad (9)$$

Przyjmując $C_i = 0$ dla $i = 1,2\ldots$
otrzymujemy z (9)

$$g(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(x), \qquad (10)$$

a z (10) $g(0) = C$.

Więc
$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(x) \qquad (11)$$

gdy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} g^{(n+1)}(x) = 0$$

Rezultat ten można ująć w następujące twierdzenie:

2. Twierdzenie

Jeżeli g jest funkcją klasy C^{∞} określoną w przedziale zawierającym zero oraz jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} g^{(n+1)}(x) = 0$$

to

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(x).$$

Oszacujmy resztę szeregu (11).
Można napisać

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{q}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}g^{(n)}(x) + R_q(x) \qquad (12)$$

Wyznaczając z (12) $R_q(x)$ oraz różniczkując obustronnie otrzymujemy

$$R_q'(x) = g'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(x) + \frac{x^n}{n!}g^{(n+1)}(x)\right].$$

Pod znakiem sumy kolejne składniki redukują się oprócz ostatniego

$$(-1)^q\frac{x^q}{q!}g^{(q+1)}(x)$$

więc

$$R_q'(x) = (-1)^q\frac{x^q}{q!}g^{(q+1)}(x) \qquad (13)$$

Całkując równość (13) obustronnie w granicach od 0 do x i uwzględniając, że $R_q(0) = 0$
otrzymujemy

$$R_q(x) = (-1)^q\int_0^x\frac{u^q}{q!}g^{(q+1)}(u)du \qquad (14)$$

Szereg (11) nazwijmy szczególnym szeregiem różniczkowym, a wyrażenie (14) q - tą resztą tego szeregu.
Niech dany będzie szereg

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}g^{(n)}(x)$$

Kładąc $g(x) = \psi'(x)$ otrzymujemy

$$\psi'(x) = \psi'(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\psi^{(n+1)}(x)$$

Analogicznie można wykazać równość

$$\psi^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\psi^{(n+m)}(x), \tag{15}$$

która jest prawdziwa, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}\psi^{(n+m+1)}(x) = 0.$$

K-tą resztę szeregu (15) oznaczmy przez ${}^{m}R_k(x)$
Jest więc

$${}^{m}R_k(x) = (-1)^k\int_0^x \frac{u^k}{k!}\psi^{(k+m+1)}(u)du.$$

Do tych samych wyników można by dojść wychodząc od wzoru na całkowanie przez część w granicach od 0 do x.
Jednak przytoczone na wstępie twierdzenie o rozwijaniu, od którego wyszliśmy, jest o wiele ogólniejsze, gdyż jest słuszne także dla tych operacji, dla których

$$(B_{\lambda}^{-1}\, B\, f) - (B\, B_{\lambda}^{-1}\, f) \neq \mathrm{const},$$

a więc dla których może nie istnieć wzór analogiczny do wzoru na całkowanie przez części.

2.3. Ogólny szereg różniczkowy

3. Twierdzenie

Jeżeli g jest funkcją klasy C^{∞} określoną w przedziale zawierającym zero oraz jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n+1)}(x)\left[\frac{x^n}{n!} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}\cdot x + C_n\right] = 0$$

to

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n C_n g^{(n)}(0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} g^{(n)}(x)\left[\frac{x^n}{n!} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}\cdot x + C_n\right] \tag{16}$$

Dowód.

Załóżmy, że dla pewnej wartości stałej C i stałych C_i dla i = 1,2,... zachodzi (9).

Kładąc w tej równości x = 0 mamy

$$g(0) = C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} g^{(n)}(0) C_n \tag{17}$$

Wyznaczając z (17) stałą C i wstawiając do (9) otrzymamy (16). Wyrażenie (16) przedstawia jedną funkcję niezależną od stałych C_i (i = 1,2,...).

Oszacujmy resztę szeregu (16).

W tym celu zbadajmy sumę częściową S_q tego szeregu.

$$S_q = g(0) + \sum_{n=1}^{q}(-1)^n C_n g^{(n)}(0) + \sum_{n=1}^{q}(-1)^{n-1} g^{(n)}(x)\left[\frac{x^n}{n!} + \right.$$

$$\left. + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}\cdot x + C_n\right].$$

Grupując wyrazy z tą samą stałą i korzystając z równości

$$g(0) + \sum_{n=1}^{q}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(x) = g(x) - R_q(x),$$

$$-C_1 g'(0) + C_1 g'(x) - C_1 \sum_{n=1}^{q-1}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n+1)}(x) = C_1 \cdot {}^1R_{q-1}(x), \dots,$$

$$-1^m C_m g^{(m)}(0) + (-1)^{m-1} C_m g^{(m)}(x) + (-1)^m C_m \sum_{n=1}^{q-m}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n+m)}(x)$$

$$= (-1)^{m-1} C_m \cdot {}^mR_{q-m}(x)$$

mamy

$$S_q = g(x) - R_q(x) + C_1 \cdot {}^1R_{q-1}(x) - C_2\, {}^2R_{q-2}(x) +$$

$$+ \dots + (-1)^{m-1} C_m\, {}^mR_{q-m}(x) + \dots + (-1)^{q-1} C_{q-1}\, g^{(q-1)}(0) +$$

$$+ (-1)^{q-2} C_{q-1}\, g^{(q-1)}(x) + (-1)^{q-1} C_{q-1} g^{(q)}(x) \cdot x + (-1)^q C_q\, g^{(q)}(0) +$$

$$+ (-1)^{q-1} C_q\, g^{(q)}(x).$$

Ponieważ

$$R_q(x) = (-1)^q \int_0^x \frac{u^q}{q!}\, g^{(q+1)}(u)du,$$

$${}^1R_{q-1}(x) = (-1)^{q-1} \int_0^x \frac{u^{q-1}}{(q-1)!}\, g^{(q+1)}(u)du, \dots ,$$

$${}^mR_{q-m}(x) = (-1)^{q-m} \int_0^x \frac{u^{q-m}}{(q-m)!}\, g^{(q+1)}(u)du$$

oraz

$$(-1)^{q-1} C_q\, g^{(q-1)}(0) + (-1)^{q-2} C_{q-1}\, g^{(q-1)}(x) +$$

$$+ (-1)^{q-1} C_{q-1}\, g^{(q)}(x) \cdot x = (-1)^{q-1} C_{q-1} \int_0^x u\, g^{(q+1)}(u)\, du$$

a

$$(-1)^q C_q\, g^{(q)}(0) + (-1)^{q-1} C_q\, g^{(q)}(x) = (-1)^{q-1} C_q \int_0^x g^{(q+1)}(u)\, du$$

więc czyniąc odpowiednie podstawienia do wyrażenia na S_q i przekształcając do prostszej postaci otrzymujemy

$$S_q = g(x)-(-1)^q \int_0^x g^{(q+1)}(u) \Big[\frac{u^q}{q!} + C_1 \frac{u^{q-1}}{(q-1)!} + \ldots +$$

$$+ C_m \frac{u^{q-m}}{(q-m)!} + \ldots + C_{q-1} \cdot u + C_q \quad du.$$

Przyjmując oznaczenie

$$R_q(x, C_1, C_2, \ldots, C_q) =$$

$$= (-1)^q \int_0^x g^{(q+1)}(u) \left[\frac{u^q}{q!} + C_1 \frac{u^{q-1}}{(q-1)!} + \ldots + C_{q-1} \cdot u + C_q \right] du \tag{18}$$

mamy

$$g(x) = S_q + R_q (x, C_1, C_2, \ldots, C_q) \tag{19}$$

Wyrażenie (18) nazwijmy q-tą resztę szeregu (16).
Wyrażenie (19) pozwala również ustalić warunek konieczny i wystarczający na to, aby szereg (16) przedstawiał funkcję g.
Trzeba aby

$$\lim_{q \to \infty} S_q = g(x)$$

a to zachodzi gdy

$$\lim_{q \to \infty} R_q(x, C_1, C_2, \ldots, C_q) = 0$$

czyli gdy

$$\lim_{q \to \infty} g^{(q+1)}(x) \left[\frac{x^q}{q!} + C_1 \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + \ldots + C_{q-1}(x) + C_q \right] = 0.$$

Twierdzenie 4

Jeżeli g jest funkcją klasy C^{∞} określoną w przedziale zawierającym zero i taką, że

$$\bigwedge_{n}(g^{(n)}(0) = 0)$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

jest szeregiem zbieżnym w tym przedziale i jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} \; g^{(n+1)}(x) = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) g^{(n+1)}(x) = 0$$

to

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \; g^{(n)}(x) \tag{21}$$

przy czym prawa strona jest zbieżna jednostajnie niezależnie od typu zbieżności lewej strony.
We wzorach (20) oraz (21)

$$b_n(x) = (-1)^{n-1}\left[\frac{x^n}{n!} + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{h_m(x)\; x^{n-m}}{(n-m)!\; g^{(m)}(0)}\right]$$

a

$$a_n(x) = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \; \frac{h_m(x)\; x^{n-m}}{(n-m)!\; g^{(m)}(0)} \tag{22}$$

Dowód:

Stałe $C_{i(i=1,2,\dots)}$ w (16) można uzmienić.

Istotnie:

Po uzmiennieniu stałych

$$S_q = g(x) - R_q(x, C_1(x), C_2(x), \dots, C_q(x))$$

a gdy

$$\lim_{q\to\infty} R_q(x, C_1(x), C_2(x), \dots, C_q(x)) = 0$$

to $\lim\limits_{q\to\infty} S_q = g(x)$

Przyjmijmy

$$C_n = C_n(x) = (-1)^n \frac{h_n(x)}{g^{(n)}(0)}$$

oraz załóżmy, że $\bigwedge_n (g^{(n)}(0) \neq 0)$ i wstawmy do (16).

Po doprowadzeniu do prostszej postaci i oznaczeniu

$$b_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{m=1}^{n} (-1) \frac{h_m(x)\, x^{n-m}}{(n-m)!\, g^{(m)}(0)}$$

otrzymujemy

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) g^{(n)}(x) \tag{23}$$

Odejmując stronami (23) od (11)

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, g^{(n)}(x)$$

gdzie:

$$a_n(x) = \left[(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} - b_n(x)\right] = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{h_m(x) x^{n-m}}{(n-m)!\, g^{(m)}(0)}$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)g^{(n)}(x)$$

nazwijmy ogólnym szeregiem różniczkowym.

2.4. Potęgowy szereg różniczkowy

5. Twierdzenie

Jeżeli g jest funkcją klasy C^{∞} określoną w przedziale I zawierającym zero i taką, że $\bigwedge_n (g^{(n)}(0) \neq 0)$
a ciąg

$$\left\{b_n \cdot x^n g^{(n+1)}(x)\right\}$$

jest jednostajnie zbieżny do zera w I i jeżeli

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot x^n$$

jest szeregiem zbieżnym w I
to

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n g^{(n)}(x) + h_n)\, x^n \tag{24}$$

gdzie:

$$b_n = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m \frac{h_m}{(n-m)!\; g^{(m)}(0)}\right] \tag{25}$$

Dowód:
Połóżmy w (23)

$$h_n(x) = h_n \cdot x^n$$

a otrzymane szeregi zapiszemy pod jednym znakiem sumy to otrzymamy (24).

Przyjmując w szeregu (24) za h_n dane liczby współczynniki b_n obliczamy z (25),

a przyjmując za b_n dane liczby współczynniki h_n obliczamy następująco

$$h_1 = (1 - b_1)\, g'(0)$$

$$h_n = (-1)^{n-1} g^{(n)}(0)\left[\frac{1}{n!} + (-1)^n b_n + \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \frac{h_m}{(n-m)!\, g^{(m)}(0)}\right]$$

Szereg (24) stanowi uogólnienie zarówno szczególnego szeregu różniczkowego, jak i szeregu Maclaurina.

Szczególny szereg różniczkowy otrzymujemy przyjmując $\bigwedge_n (h_n = 0)$, a szereg Maclaurina przyjmując $\bigwedge_n (b_n = 0)$.

Aby można było także rozwijać w otrzymany szereg funkcje, dla których $\bigvee_n (g^{(n)}(0) = 0)$, szereg (24) można przedstawić w postaci

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\delta_n\, g^{(n)}(x) + \gamma_n\, g^{(n)}(0)\right) x^n$$

gdzie:

$$\delta_n = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{\gamma_m}{(n-m)!}\right]$$

6. Twierdzenie

Jeżeli ψ jest funkcją rozwijalną w przedziale I w szereg Maclaurina g jest funkcją klasy C^{∞} określoną w I i taką, że

$$\bigwedge_n (g^{(n)}(0) \neq 0), \text{ a ciąg } \left\{a_n \cdot x^n\, g^{(n+1)}(x)\right\}$$

jest jednostajnie zbieżny w I do zera, to

$$\psi(x) = \psi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n\, g^{(n)}(x) \tag{26}$$

gdzie:

$$a_n = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{\psi^{(m)}(0)}{m!(n-m)!\, g^{(m)}(0)} \tag{27}$$

Dowód.

Połóżmy w wyrażeniach (21) i (22)

$$h_n(x) = h_n \cdot x^n$$

otrzymamy wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n g^{(n)}(x) \tag{28}$$

i

$$a_n = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{h_m}{(n-m)!\, g^{(m)}(0)} \tag{29}$$

a jeżeli

$$\psi(x) = \psi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

to gdy

$$h_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \tag{30}$$

wtedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot x^n = \psi(x) - \psi(0) \tag{31}$$

Wstawiając (31) do (28) a (30) do (29) otrzymujemy (26) i (27). Nazwijmy potęgowym szeregiem różniczkowym szereg (26). Zanotujmy jeszcze następujący wzór wynikający bezpośrednio z (26)

$$g^{(k)}(x) = g^{(k)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot x^n g^{(n)}(x)$$

gdzie:

$$\eta_n = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{g^{(m+k)}(0)}{m!\,(n-m)!\,g^{(m)}(0)}$$

3. Zastosowanie szeregów różniczkowych

3.1. Obliczanie sum niektórych szeregów liczbowych

Jak można stosować szeregi różniczkowe do obliczenia sum szeregów liczbowych pokażemy na przykładzie.

Np. obliczmy sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+k)}{2^n} \tag{32}$$

Szereg (32) jest równy szeregowi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(n+k)!}{(x+1)^n}$$

gdy położymy $x=1$.

Ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(n+k)!}{(x+1)^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^{n+k}(n+k)!}{(x+1)^{n+k+1}} (x+1)^{k+1} (-1)^{k+1} =$$

$$= (-1)^{k+1} (x+1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(x+1)^{n+k+1}}$$

a szereg w ostatnim wyrażeniu jest zbieżny do k-tej pochodnej funkcji $\frac{1}{1+x}$ pomniejszonej o wartość tej pochodnej w punkcie $x = 0$.

Zachodzi więc równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n+k)!}{(x+1)^n} =$$

$$= (-1)^{k+1}(x+1)^{k+1}\left[(-1)^k\frac{k!}{(x+1)^{k+1}} - (-1)^k k!\right]$$

Co dla $x = 1$ da:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{2^n} = (2^{k+1} - 1)k!$$

3.2. Rozwiązywanie niektórych typów równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach

3.2.1. Obliczanie całek szczególnych równań niejednorodnych

7. Twierdzenie

Jeżeli

$$\bigwedge_n\left[S_n = \frac{h_n(x)}{H_n(x)} = \mathrm{const}\right] \tag{33}$$

a szereg

$$Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cdot \frac{x^n}{n!} \tag{34}$$

jest zbieżny w przedziale I, to równanie

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x), \quad a_0(x) \neq 0 \tag{35}$$

posiada całkę szczególną

$$y = Y_1$$

określoną w I.

Dowód.

Połóżmy w równości (21)

$$y(x) = \frac{d\,g(x)}{dx}$$

oraz zmieńmy indeksy bieżące tak, aby przyjmując że dla $n>k$ $a_n(x)=0$ otrzymać

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x) y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \tag{36}$$

Równość (36) można interpretować jako równanie różniczkowe rzędu k. Dla równania (36) zależność (22) ma postać

$$a_n(x) = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} \frac{h_m(x) \cdot x^{n-m}}{(n-m)!\, y^{(m)}(0)} \tag{37}$$

Kładąc w (37)

$$h_n(x) = H_n(x) \cdot y^{(n)}(0) \tag{38}$$

mamy

$$a_n(x) = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} \frac{H_m(x)\, x^{n-m}}{(n-m)!}$$

Stąd

$$H_o(x) = a_o(x)$$

$$H_n(x) = a_n(x) + (-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m+1} H_m(x) \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \tag{39}$$

z (38) otrzymujemy

$$y^{(n)}(0) = \frac{h_n(x)}{H_n(x)} = S_n$$

Jeżeli $\bigwedge_{n} (S_n = \text{const})$, to funkcję y można przedstawić w postaci szeregu (35), o ile ten szereg jest zbieżny.

Przykład 1.

$$6y + y'' \text{arc sin } x - y''' x^3 - \frac{1}{2} y^{(4)} x^2 \text{ arc sin} x = 2 x \arcsin x + \\ + 3x + 6x^4 \tag{40}$$

Mamy

$$H_o(x) = 6, \quad H_1(x) = 6x, \; H_2(x) = \arcsin x + 3x^2$$

$$H_3(x) = x\arcsin x, \qquad H_4(x) = -\frac{3}{4} x^4,$$

a także

$$h_o(x) = 0, \quad h_1(x) = 3x, \quad h_2(x) = 0, \quad h_3(x) = 2 \; x\arcsin x$$

$$h_4(x) = 6 \; x^4, \quad h_5(x) = h_6(x) = \dots h_n(x) = \dots = 0$$

Wtedy

$$S_o = 0, \quad S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 2$$

$$S_4 = -8, \; S_5 = S_6 = \dots S_n = \dots = 0,$$

więc

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^4.$$

jest całką szczególną równania (40)

8. Twierdzenie

Jeżeli $\bigwedge_n \left[T_n = \frac{N_n(x)}{H_n(x)} = \text{const} \right],$ (41)

a szereg

$$Y_2 = \sum_{n=0} T_n \, g^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \tag{42}$$

jest zbieżny w przedziale I, to równanie

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x) y^{(n)} = \sum_{n=0}^{ł} b_n(x) g^{(n)}(x), \quad a_o(x) \neq 0 \tag{43}$$

posiada całkę szczególną

$$y = Y_2$$

określoną w I gdzie: g jest znaną funkcją, a $H_n(x)$ jest dane przez (39).

$$N_o(x) = b_o(x)$$

$$N_n(x) = b_n(x) + (-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m+1} N_m(x) \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

Dowód:

Napiszmy

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) y^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{k} a_n(x) y^{(n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n(x) g^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{ł} b_n(x) g^{(n)}(x).$$

Z tych wzorów oraz z równania (43) wynika równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) y^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(x) g^{(n)}{}_0,$$

która zachodzi, gdy

$$H_n(x)y^{(n)}(0) = N_n(x)g^{(n)}(0) \tag{44}$$

Z (44) otrzymujemy

$$y^{(n)}(0) = \frac{N_n(x)}{H_n(x)}\, g^{(n)}(0) = T_n\, g^{(n)}(0)$$

Jeżeli $\bigwedge_n (T_n = \text{const})$, to funkcję y można przedstawić w postaci szeregu (42) o ile ten szereg jest zbieżny.

Przykład 2.

$$y + x^4 \cdot y^{(4)} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \tag{45}$$

mamy

$$g(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad g^{(n)}(0) = n!$$

$$H_o(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = \frac{x^2}{2}, \quad H_3(x) = \frac{x^3}{6},$$

$$H_4(x) = x^4 + \frac{x^4}{24}, \ \ldots, \ H_n(x) = \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-4)!}\right) x^n$$

$$N_o(x) = 1, \quad N_1(x) = 2x, \quad N_2(x) = \frac{3}{2}x^2, \ldots, \ N_n(x) = \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)x^n$$

stąd

$$T_n = \frac{1+n}{1+n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

Więc

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot x^n$$

jest całką szczególną równania (45).

Warunki (33) i (41) ograniczają zastosowania twierdzeń (7) i (8) gdyż na ogół $S_n = const$ i $T_n = const$. Niemniej istnieje obszerna klasa równań, dla których warunki te zachodzą.
Między innymi, gdy

$$a_n(x) = a_n \cdot x^n, \quad b_n(x) = b_n \cdot x^n, \quad h_n(x) = h_n \cdot x^n$$

Istotnie, jeżeli napiszemy

$$\sum_{n=0}^{k} a_n \cdot x^n y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cdot x^n, \quad a_0 \neq 0 \tag{46}$$

to

$$a_n = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} \frac{h_m}{(n-m)!\ y^{(m)}{}_0} \tag{47}$$

Gdy wyznaczymy z (47) $y^{(n)}(0)$ i wstawimy do szeregu Maclaurina, to otrzymamy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n \cdot x^n}{a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \ldots + n\ldots [n-(k-1)]\, a_k} \tag{48}$$

Zatem wyrażenie (48) przedstawia całkę szczególną równania (46). Podobnie wychodząc od zależności pomiędzy szeregiem potęgowym a potęgowym szeregiem różniczkowym można uzyskać całkę szczególną równania

$$\sum_{n=0}^{k} a_n \cdot x^n \cdot y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n \cdot x^n g^{(n)}(x), \quad a_0 \neq 0 \tag{49}$$

Jest nią funkcja

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\, g^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \tag{50}$$

gdzie: g jest znaną funkcją a

$$E_n = \frac{b_o + nb_1 + \dots + n(n-1) \dots [n-(\ell-1)]\ b_\ell}{a_o + na_1 + \dots + n(n-1) \dots [n-(k-1)]\ a_k} \tag{51}$$

Przykład 3

$$y + 2x^3\ y^{(3)} + 5x^7\ y^{(7)} = \sin^4 x - 2x \sin 4x + \cos^4 x$$

Mamy

$$g(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad g(0) = 1$$

a także

$$g^{(n)}(x) = 4^{\,n-1} \cos\left(4x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

więc

$$g^{(n)}(0) = 4^{n-1} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

z (51) mamy

$$E_n = \frac{1 + 2.n}{1 + 2n(n-1)(n-2) + 5n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$$

więc

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 2n)4^{n-1} \cdot \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{1+2n(n-1)(n-2)+ 5n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)n!}\ x^n$$

Także równanie (45) stanowi szczególny przypadek równania (49), więc całkę szczególną tego równania można natychmiast otrzymać przy pomocy (51) i (50).

3.2.2. Obliczanie całek szczególnych lub ogólnych równań jednorodnych

9. Twierdzenie

Jeżeli
$$\bigwedge_{n}\left[K_n = \frac{H_n(x)}{N_n(x)} = \text{const}\right] \tag{52}$$

a szereg

$$Y_3 = \sum_{m=0}^{r-1} C_m \cdot \left[\frac{x^m}{m!} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1} K_{ir+m}\right)\cdot\frac{x^{nr+m}}{(nr+m)!}\right] \tag{53}$$

jest w przedziale I zbieżny, to równanie

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n(x)y^{(n+r)}; \quad b_o(x) \neq 0 \tag{54}$$

posiada całkę szczególną lub ogólną

$$y = Y_3$$

określoną w I. Szereg (53) przedstawia całkę ogólną, gdy r jest równe rzędowi rozwiązywanego równania, a całkę szczególną, gdy r jest mniejsze od rzędu rozwiązywanego równania.

Dowód:

Jeżeli w równaniu (43) położymy $g^{(n)}(x) = y^{(n+r)}$, gdzie r jest liczbą naturalną, to otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n(x)y^{(n+r)}$$

Wtedy wyrażenie (44) posiada postać

$$H_n(x)y^{(n)}(0) = N_n(x)y^{(n+r)}(0)$$

stąd

$$y^{(n+r)}(0) = \frac{H_n(x)}{N_n(x)} y^{(n)}(0) = K_n\, y^{(n)}(0) \tag{55}$$

Przyjmując

$$y(0) = C_0; \quad y'(0) = C_1, \dots, y^{(r-1)}(0) = C_{r-1}$$

dalsze wartości pochodnych funkcji y w punkcie zero znajdziemy z wyrażenia (55), jeżeli $\bigwedge_n (K_n = \text{const})$.

Wstawiając obliczone $y^{(n)}(0)$ do szeregu Maclaurina otrzymujemy szereg (53).

Warunek (52) ogranicza stosowanie twierdzenia (9). Jednak istnieje klasa równań, dla których warunek ten jest zawsze spełniony. Między innymi są to równania typu:

$$\sum_{n=0}^{k} a_n \cdot x^n \cdot y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n \cdot x^n \cdot y^{(n+r)}, \quad b_0 \neq 0 \tag{56}$$

To, że dla tego równania warunek (52) jest zawsze spełniony, wynika natychmiast z zależności pomiędzy szeregiem potęgowym a potęgowym szeregiem różniczkowym.

Ta uwaga pozwala stwierdzić, że jeżeli szereg

$$Y_4 = \sum_{m=0}^{r-1} C_m \left[\frac{x^m}{m!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} M_{ir+m} \right) \frac{x^{nr+m}}{(nr+m)!} \right] \tag{57}$$

jest zbieżny w przedziale I, to równanie (56) posiada całkę szczególną lub ogólną

$$y = Y_4$$

określoną w I gdzie:

$$M_n = \frac{a_o + na_1 + \dots + n \dots [n - (k-1)] a_k}{b_o + nb_1 + \dots + n \dots [n - (l-1)] b_l} \tag{58}$$

Szereg (57) jest całką szczególną, gdy r jest mniejsze od rzędu rozwiązywanego równania, a całką ogólną, gdy r jest równe rzędowi rozwiązywanego równania.

Przykład 5

$$y + 3xy' + 4x^2 y'' + x^3 y''' = y' + xy'' + x^2 y'''$$

Dla tego równania rzędu trzeciego r = 1, więc z (58) otrzymamy tylko całkę szczególną

$$y = C_o \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=o}^{n-1} M_i \right) \frac{x^n}{n!} \right] \quad \text{gdzie} \quad M_i = 1+i$$

więc

$$y = \frac{C_o}{1-x}$$

Równanie (56) obejmuje wielką ilość ważnych przypadków szczególnych, a jego rozwiązanie dużą liczbą funkcji specjalnych.
Rozwiążmy równanie

$$ay + bxy' + cx^2y'' = y''$$

tu

$$M_n = a + nb + n(n-1)c$$

więc

$$y = C_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(a+2ib + 2i(2i-1)c)\right)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] +$$

$$+ C_1\left[x + \sum_{n=1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(a + (2i+1)b + 2i(2i+1)c)\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \tag{59}$$

Zbieżność szeregów w (59) zależy od wartości a, b i c.
Dla $a = -k(2p+k)$, $b=2p+1$, $c=1$, $C_o = C_1 = 1$.
(gdzie: $k = 0,1,2,\ldots$, p- jest dowolną liczbą) z (59) otrzymujemy wielomiany

$$c_W p_k(x) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\frac{k}{2}}\left(\prod\limits_{i=0}^{n-1}(2i(2p+2i)-k(2p+k))\right)\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{dla k parzystych} \\ x + \sum\limits_{n=1}^{\frac{k-1}{2}}\left(\prod\limits_{i=0}^{n-1}((2i+1)(2p+2i+1)-k(2p+k))\right)\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{dla k nieparzystych.} \end{cases}$$

Wielomiany $c_W p_k(x)$ różnią się co najwyżej o czynnik stały od ortogonalnych wielomianów Gegenbauera C_k^p. Przy $p = \frac{1}{2}$ z (60) otrzymujemy wielomiany różniące się co najwyżej o czynnik stały od wielomianów Legendre'a.
Dla $a = -k^2$, $b=1$, $c=1$, $C_o = C_1 = 1$
z (59) otrzymujemy wielomiany

$$T_{W_k}(x) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{k/2}\left(\prod\limits_{i=0}^{n-1}((2i)^2 - k^2)\right)\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{dla k parzystych} \\ x + \sum\limits_{n=1}^{(k-1)/2}\left(\prod\limits_{i=0}^{n-1}((2i+1)^2-k^2)\right)\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{dla k nieparzystych} \end{cases}$$

Wielomiany ${}^{T}W_k(x)$ różnią się o czynnik stały od wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_k(x)$, które można otrzymać z (61) następująco

$$T_k(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot {}^{T}W_k(x) & \text{dla } k \text{ parzystych} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot k \cdot {}^{T}W_k(x) & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Dla $a = -2k$, $b = 2$, $c = 0$, $C_o = C_1 = 1$.

z (59) otrzymujemy wielomiany

$${}^{H}W_k(x) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\frac{k}{2}} \left(\prod\limits_{i=0}^{n-1} (4i-2k) \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{dla } k \text{ parzystych} \\ x + \sum\limits_{n=1}^{\frac{k-1}{2}} \left(\prod\limits_{i=0}^{n-1} (4i+2-2k) \right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

które różnią się co najwyżej o czynnik stały od wielomianów Hermite'a.

Dla równania

$$-ky + xy = (p+1)y' + xy''$$

$$M_n = \frac{n-k}{p+n+1}$$

stąd

$$y = {}^{L}W_k^p(x) = C_o \left[1 + \sum_{n=1}^{k} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{i-k}{p+i+1} \right) \frac{x^n}{n!} \right] \tag{62}$$

Wielomiany ${}^{L}W_k^p(x)$ różnią się o czynnik stały od wielomianów Laguerre'a L_k^p. Przy $p = 0$ i $C_o = 1$ z (62) otrzymujemy

$$ {}^{L}W_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \left(\prod_{i=o}^{n-1} \frac{i-k}{i+1} \right) \frac{x^n}{n!} $$

a

$$ L_k(x) = k!\ {}^{L}W_k(x) $$

Dla równania

$$ -k\,(p+k)y + (p+1)\,xy' + x^2y'' = qy' + xy'' $$

$$ M_n = \frac{n(p+n) - k(p+k)}{q+n} $$

Z (57) dla $C_o = 1$ otrzymujemy

$$ y = G_k(p,q,x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \left(\prod_{i=o}^{n-1} \frac{i(p+i)-k(p+k)}{q+i} \right) \frac{x^n}{n!} $$

są to wielomiany Jacobiego.

Przedstawiając równanie hipergeometryczne w postaci

$$ \alpha\beta\, y + (\alpha+\beta+1)\, xy' + x^2\, y'' = \gamma\, y' + xy'' $$

mamy

$$ M_n = \frac{\alpha\beta + n(\alpha+\beta+n)}{\gamma + n} $$

Z (57) dla $C_0 = 1$ otrzymujemy natychmiast szereg hipergeometryczny

$$y = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha\beta+i(\alpha+\beta+i)}{\gamma+i}\right)\frac{x^n}{n!},$$

a pisząc równanie hipergeometryczne zdegenerowane w postaci

$$\alpha y + xy' = \gamma y' + xy''$$

mamy

$$M_n = \frac{\alpha+n}{\gamma+n}$$

Z (57) dla $C_0 = 1$ otrzymujemy funkcję hipergeometryczną zdegenerowaną

$${}_1F_1(\alpha,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha+i}{\gamma+i}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1970 r.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Р е з ю м е

В работе подана теорема которая делает возможным представление в виде функциональных рядов произведении и т.п. вещественных функций (при некоторых условиях).

Охарактеризовано ряды типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\ y^{(n)}\ (x)$$

которые названо дифференциальными рядами.

Поданы тоже приложения - главным образом к решению дифференциальных уравнении следующих типов:

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)\ y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)\ y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} h_n(x)\ y^{(n+r)}$$

DIFERENTIAL SERIES

S u m m a r y

In this paper is given a theorem that enables to develop real functions - under certain conditions in functional series prodects etc.

Next series of type $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\ g^{(n)}(x)$

are characterized. We call them differential series.

There are also given their applications - mainly to the following equations:

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{k} a_n(x)y^{(n)} = \sum_{n=0}^{l} b_n(x)y^{(n+r)}$$