ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 16 Nr kol. 308

ANDRZEJ FLISOWSKI

O OGRANICZONOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO DRUGIEGO RZĘDU

Streszczenie. W artykule tym, korzystając z warunku i metody podanej w [1], przedstawione zostaną uogólnienia twierdzeń, dotyczących równań różniczkowych, opisujących ruch mechaniczny modelu ciała stałego niesprężystego. Równania te zostały zbadane przez autorów prac [2][3][4][5][6]. Pokażemy, że wyniki podane w wyżej wymienionych pracach można uzyskać w sposób bardzo prosty i przy znacznie słabszych założeniach.

1. Zakłada się, że czytelnikowi znane są oznaczenia przyjęte w [1]

Zajmiemy się najpierw równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + f(x)g(\dot{x}) + x = 0 \tag{1}$$

Równanie to zostało zbadane przez S. Ziembę w [2].

Jest ono równoważne układowi:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -f(x)g(y) - x. \tag{1'}$$

Wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA A

1° funkcje $f(x)$ i $g(y)$ są funkcjami ciągłymi,

2° $f(-x) = f(x) > 0$ dla każdego $x \neq 0$,

3° $g(-y) = -g(y)$ $g(0) = 0$,

$g(y) > 0$ dla $y > 0$,

4° rozwiązania równania (1) są jednoznaczne.

Z założeń tych wynika, że (0,0) jest jedynym punktem osobliwym układu (1') oraz że trajektorie tego układu "nawijają się".

Warunek $H_1(x,y)$ zdefiniowany w pracy [1] dla układu (1') ma postać

$$H_1(x,y) = y\left[-f(x)g(-y)-x\right] - y\left[-f(x)g(y) - x\right] = 2y\, f(x)g(y)$$

Widzimy, że $H_1(x,y) > 0$ dla $x,y \neq 0$

oraz, że $H_1(x,y) = 0$ dla $x = 0$ lub $y = 0$.

Stąd na podstawie Twierdzenia 1 z [1] wynika wchodzenie trajektorii w obszar S, a ze względu na to, że $H_1(x,y) > 0$ dla $x \neq 0$, $y \neq 0$ mamy stabilność asymptotyczną, czyli ruch gasnący.

W ten sposób udowodniliśmy

TWIERDZENIE 1

Jeśli spełnione są założenia Hipotezy A, to ruch punktu po trajektoriach układu (1') jest gasnący i zmierza do położenia równowagi.

Uwaga 1. W pracy [2] dla wykazania analogicznego twierdzenia, obok założeń Hipotezy A, potrzebne były jeszcze następujące założenia:

dla $0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2$ jest $g(\dot{x}_2) \geq g(\dot{x}_1) \geq 0$,

a dla $0 \leq |x_1| < |x_2|$ jest $0 \leq |f(x_1)| < |f(x_2)|$.

W naszym wypadku założenia te okazały się zbędne.

2. Rozpatrzmy obecnie równanie

$$\ddot{x} + R(x,\dot{x}) + S(x) = 0 \tag{2}$$

Równanie to zostało zbadane przez S. Ziembę w pracy [3]. Jest ono równoważne układowi

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -R(x,y) - S(x) \tag{2'}$$

Wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA B

1° funkcje $R(x,y)$ i $S(x)$ są funkcjami ciągłymi,

2° $x \cdot S(x) > 0$ dla $x \neq 0$,

$$\int_{0}^{\pm\infty} S(x)\, dx \neq +\infty,$$

3° $R(x, -y) = -R(x,y)$ dla $x \neq 0$,

$y\, R(x,y) > 0$ dla $y > 0$,

$R(x, 0) = 0$ dla każdego x,

$R(-x,y) = R(x,y)$ dla wszystkich x,y,

4° rozwiązania równania (2) są jednoznaczne.

Z założeń Hipotezy B wynika, że (0,0) jest jedynym punktem osobliwym układu (2') oraz że trajektorie tego układu "nawijają się". Warunek $H_1(x,y)$ dla układu (2') przyjmuje postać

$$H_1(x,y) = y\left[-R(x,-y)-S(x)\right] - y\left[-R(x,y) - S(x)\right] = 2y\, R(x,y)$$

Widzimy, że $H_1(x,y) > 0$ dla $x,y \neq 0$,

oraz, że $H_1(x,y) = 0$ dla $x,y = 0$.

Stąd znowu na podstawie Twierdzenia 1 z [1] wynika wchodzenie trajektorii w obszar S, a ze względu na to, że $H_1(x,y) > 0$ dla $x,y \neq 0$ mamy stabilność asymptotyczną, czyli ruch gasnący.

W ten sposób udowodniliśmy

TWIERDZENIE 2

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy B, to ruch punktu po trajektoriach układu (2') jest gasnący i punkt ten dąży do położenia równowagi.

Uwaga 2. W pracy [3] dla wykazania analogicznego twierdzenia, obok założeń Hipotezy B, potrzebne były jeszcze następujące założenia:

$$\frac{dR(x,y)}{dy} \geqslant 0, \quad S(-x) = -S(x), \quad \frac{ds(x)}{dx} \geqslant 0 \text{ dla każdego } x$$

które, jak się okazuje, nie są istotne.

3. Zajmiemy się teraz równaniem

$$\ddot{x} + \dot{x}|\dot{x}| + \alpha x|x| = 0 \tag{3}$$

Równanie to rozważane było przez K. Szpunara i W. Bogusza w pracy [4]. Jest ono równoważne układowi:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -y|y| - \alpha x|x| \tag{3'}$$

Jak widać, (0,0) jest jedynym punktem osobliwym tego równania. Warunek $H_1(x,y)$ ma postać:

$$H_1(x,y) = y\left[y|-y| - \alpha x|x|\right] - y\left[-y|y| - \alpha x|x|\right] = 2y^2|y|,$$

$$H_1(x,y) > 0 \quad \text{dla} \quad y \neq 0$$

oraz

$$H_1(x,y) = 0 \quad \text{dla } y = 0.$$

Analogicznie jak w punkcie 1 i 2 dowodzimy, że ruch jest gasnący i punkt ruchowy dąży do położenia równowagi.

4. Korzystając z warunku $H_1(x,y)$ można łatwo wykazać istnienie trajektorii okresowej równania

$$\ddot{x} - \varepsilon\left[1 - g(x,\dot{x})\right]\dot{x} + h(x) = 0 \tag{4}$$

Równaniem tym zajmowali się T.K. Caughey i R.K. Malhotra w pracy [5]. Równanie (4) równoważne jest układowi

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \varepsilon\left[1 - g(x,y)\right]y - h(x) \tag{4'}$$

Oznaczmy przez $H(x) = \int_0^x h(s)ds$

Wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA C

1° $g(x,y) = 1$ określa krzywą Jordana ograniczającą obszar wypukły,

2° $g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y) = g(-x,-y) > 0$ dla $x,y \neq 0$,

3° $x \cdot h(x) > 0$ dla $x \neq 0$

$H(x) \to +\infty$ gdy $x \to \pm\infty$,

4° $\varepsilon > 0$,

5° zapewnione jest istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (4).

Z założeń tych wynika, że (0,0) jest jedynym punktem osobliwym układu (4') oraz że trajektorie "nawijają się".

Oznaczmy przez D_1 obszar zawarty wewnątrz krzywej $g(x,y) = 1$, a przez D_2 obszar na zewnątrz tej krzywej.

Warunek $H_1(x,y)$ będzie miał postać:

$$H_1(x,y) = y\left\{-\varepsilon\left[1 - g(x,-y)\right] \cdot y - h(x)\right\} - y\left\{\varepsilon\left[1 - g(x,y)\right] y - h(x)\right\} =$$

$$= -2\, y^2 \varepsilon\left[1 - g(x,y)\right].$$

Widzimy, że $H_1(x,y) \geqslant 0$ dla $(x,y) \in D_2$ oraz

$$H_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad (x,y) \in D_1.$$

Istnienie w obszarze D_1 trajektorii δ_1 "oddalającej się" od początku układu, a w obszarze D_2 trajektorii δ_2 zbliżającej się do początku układu dowodzimy w sposób analogiczny jak w pracy [1].

Stąd wynika już

TWIERDZENIE 3

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy C, to równanie (4) ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

5. Śledząc sposób wyprowadzenia warunku $H(x,y)$ z [1] przekonujemy się z łatwością, że podobny warunek można wyprowadzić odbijając trajektorię równolegle do osi y względem prostej $y = n\,x$, gdzie $n < 0$.

Odpowiednie twierdzenie wypowiemy odnośnie układu

$$\dot{x} = f(x,y), \qquad \dot{y} = g(x,y) \tag{a}$$

Wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA D

Funkcje $f(x,y)$ i $g(x,y)$ są określone i ciągłe w całej płaszczyźnie, rozwiązania układu (a) są jednoznaczne. $O(0,0)$ jedyny punkt osobliwy.

Niech łuk s o równaniu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in J$ jest łukiem trajektorii układu (a), przy czym $y(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$ i $x'(t) \geqslant 0$ lub $y(t) \leqslant 0$, $x(t) \leqslant 0$ i $x'(t) \leqslant 0$.
Załóżmy, że łuk s można przedstawić także równaniem $y = \varphi(x)$, $x \in \Delta$.

Oznaczmy przez $\tilde{s}$ krzywą o równaniu $y = -\varphi(x) + 2\,n\,x$ $x \in \Delta$ oraz przez S zbiór punktów

$$S = (x,y)\left\{ x \in \Delta, \begin{array}{ll} -\varphi(x) + 2\,n\,x \leqslant y \leqslant \varphi(x) & \text{dla } \varphi(x) \geqslant 0 \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant -\varphi(x) + 2\,n\,x & \text{dla } \varphi(x) \leqslant 0. \end{array} \right\}$$

Połóżmy $W(x,y) = f(x,-y + 2\,nx)\left[g(x,y) - 2\,nf(x,y)\right] +$

$$+ g(x,-y + 2\,n\,x)\,f(x,y)$$

TWIERDZENIE 4

Jeżeli założenia Hipotezy D są spełnione, to przy powyższych oznaczeniach trajektoria $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ układu (a) zaczynająca się przy $t = \bar{t}$ na $\tilde{s}$ jest dla $t > \bar{t}$ i $\bar{x}(t) \in \Delta$ zawarta w $\bar{S}$ lub leży poza S odpowiednio do tego czy $W(x,y) \geqslant 0$ lub $W(x,y) \leqslant 0$ na łuku $\tilde{s}$.

Jeżeli przy tym nierówności te są spełnione silnie, to trajektoria, o której mowa jest dla $t > \bar{t}$ zawarta w S lub odpowiednio poza $\bar{S}$.

Twierdzenie powyższe można sformułować znacznie ogólniej, jednak w naszym przypadku nie jest to potrzebne.

Rozpatrzmy obecnie równanie:

$$\ddot{x} + \alpha(x,\dot{x},t)\,\dot{x} + \beta(x,\dot{x},t)\,x = 0 \tag{5}$$

i wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA E

1° istnieją takie dodatnie liczby p i a, że dla $|\dot{x}| > p$ jest $\alpha > a$,

2° istnieje taka dodatnia liczba M, że dla każdego $(x,\dot{x},t)$ jest $\alpha > -M$,

3° funkcje α i β określone są w $\Omega = E^2 \times I$, gdzie E^2: $\left\{-\infty < x,\dot{x} < +\infty\right\}$ I: $\left\{t \geqslant t_0\right\}$, t_0 - liczba nieujemna,

4° funkcje α i β spełniają założenia gwarantujące istnienie rozwiązań równania (5) dla dowolnych warunków początkowych z Ω,

5° istnieją stałe dodatnie b i B, tak że dla każdego $(x,\dot{x},t)$ jest $b < \beta < B$,

6° $a^2 > B - b$.

Przy tych założeniach pokażemy, że wszystkie rozwiązania równania (5) są ograniczone.

Równanie (5) równoważne jest układowi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha(x,y,t)y - \beta(x,y,t)x, \end{cases} \tag{5'}$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha(x,y,t) - \beta(x,y,t)\frac{x}{y} \tag{6}$$

Równanie (6) w poszczególnych częściach płaszczyzny x,y zmajoryzujemy równaniami o stałych współczynnikach w następujący sposób:

A) dla $\begin{matrix} x > 0 \\ y > p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < -a - b\frac{x}{y}$,

B) dla $\begin{matrix} x > 0 \\ 0 < y < p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < M - b\frac{x}{y}$,

C) dla $\begin{matrix} x > 0 \\ y < -p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < -a - B\frac{x}{y}$,

D) dla $\begin{matrix} x > 0 \\ -p < y < 0 \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < M - B\frac{x}{y}$,

E) dla $\begin{matrix} x < 0 \\ y < -p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < -a - b\frac{x}{y}$,

F) dla $\begin{matrix} x < 0 \\ -p < y < 0 \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < M - b\frac{x}{y}$,

G) dla $\begin{matrix} x < 0 \\ 0 < y < p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < M - B\frac{x}{y}$,

H) dla $\begin{matrix} x < 0 \\ y > p \end{matrix}$ $\frac{dy}{dx} < -a - B\frac{x}{y}$.

Dla poszczególnych punktów od A do H rozpatrzmy więc równania:

dla A i E równanie $\ddot{x} + a\dot{x} + b x = 0,$ (7)

dla B i F równanie $\ddot{x} - M\dot{x} + b x = 0,$ (8)

dla C i H równanie $\ddot{x} + a\dot{x} + B x = 0,$ (9)

dla D i G równanie $\ddot{x} - M\dot{x} + B x = 0.$ (10)

Dla $x>0$, $y>p$ równanie $\ddot{x} + a\dot{x} + b x = 0$ równoważne jest układowi

$$\dot{x} = k y \qquad \dot{y} = \frac{1}{k}\left[- a k y - b x\right].$$

Podobnie dla $x>0$, $y<-p$ równanie $\ddot{x} + a\dot{x} + B x = 0$ równoważne jest układowi

$$\dot{x} = k y \qquad \dot{y} = \frac{1}{k}\left[- a k y - B x\right].$$

W obszarze $x>0$, $y>p$ weźmy trajektorie równania (7) i odbijmy równolegle do osi y względem prostej $y = n x$, $n<0$. Funkcja $W(x,y)$ ma wówczas postać:

$$W(x,y) = 2 y^2(k a + n k^2) - 2 n b x^2 + xy (b-B-4 n ak -4 n^2k^2) \quad (11)$$

i jest dodatnią dla każdego $x>0$, $y>0$, gdy

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - (B - b)}}{- 2 k} \leqslant n \leqslant \frac{a - \sqrt{a^2 - (B - b)}}{- 2 k}$$

W pasie $x>0$, $0 \leqslant y \leqslant p$ równanie $\ddot{x} - M\dot{x} + b x = 0$ równoważne jest układowi $\dot{x} = ky$ $\dot{y} = \frac{1}{k}(M k y - b x)$ natomiast dla $x>0$, $y<0$ równanie $\ddot{x} - M\dot{x} + B x = 0$, zastępujemy układem $\dot{x} = ky$, $\dot{y} = \frac{1}{k}(M k y - B x)$.

Trajektorię równania (8) leżącą w obszarze $x>0$ $0<y<p$ odbijamy równolegle do osi y względem prostej $y = n x$.

Warunek $W(x,y)$ ma teraz postać:

$$W(x,y) = -2\,n\,b\,x^2 + xy(b-B+4\,n\,M\,k-4\,n^2\,k^2)+2y^2(n\,k^2-M\,k) \tag{12}$$

Niech x_0 będzie większym pierwiastkiem równania $W(x,y) = 0$, w którym to równaniu y traktujemy jako znaną $(y<p)$.

Łatwo widać, że dla $x > x_0$ $W(x,y) \geqslant 0$ $(x>0,\ y>0)$.

Oznaczmy $x_1 = \max\left[x_0, \frac{M\,p\,k}{b}\right]$

Przyjmujemy $k = 1$ $\quad n = \frac{2a - \sqrt{a^2 - (B-b)}}{-4}$

Z punktu (x_1, p) buduję trajektorię lewą równania $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ aż do przecięcia z dodatnią częścią osi y oraz trajektorię prawą równania $\ddot{x} - M\dot{x} + bx = 0$ do przecięcia z dodatnią częścią osi x.

Otrzymaną w ten sposób trajektorię oznaczam literą l. Konstrukcja ta jest możliwa ze względu na przyjęte założenia odnośnie a, b, M, x_1.

Odbijam trajektorię l równolegle do osi y względem prostej $y = nx$, gdzie $n = \frac{2a - \sqrt{a^2 - (B-b)}}{-4}$.

Otrzymuję krzywą $\tilde{l}$, na której $W(x,y) \geqslant 0$.

Obrazem symetrycznym trajektorii l względem początku układu współrzędnych jest krzywa l_1, będąca dla $x<0$, $y<-p$ trajektorią równania $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ oraz dla $x<0$, $-p<y<0$ trajektorią równania $\ddot{x} - M\dot{x} + bx = 0$. Trajektorię l_1 odbijam równolegle do osi y względem prostej $y = nx$ gdzie $n = \frac{2a - \sqrt{a^2 - (B-b)}}{-4}$.

Otrzymuję krzywą $\tilde{l}_1$, na której $W(x,y) \geqslant 0$.

Oznaczmy przez S krzywą składającą się z l, $\tilde{l}$, l_1 i $\tilde{l}_1$ oraz odpowiednich dwóch odcinków prostopadłych do osi x. Pierwszy w punkcie przecięcia l z dodatnią częścią osi x do przecięcia z krzywą $\tilde{l}$, drugi w punkcie przecięcia l_1 z ujemną częścią osi x do przecięcia z $\tilde{l}_1$.

Przy spełnieniu założeń Hipotezy E z twierdzenia 4 oraz punktów A do H wynika, że trajektoria równania (5') zaczynająca się w chwi-

li $t = t_1$ na S jest dla $t > t_1$ zawarta we wnętrzu krzywej S, a więc rozwiązania są ograniczone.

Jeśli $x_1 \to +\infty$ otrzymujemy, że wszystkie rozwiązania są ograniczone.

Uwaga 3. W naszym przypadku przyjęliśmy $k = 1$.

Dobierając k i n tak, aby w (11) $W(x,y) \geqslant 0$ dla $x>0$ $y>p$ oraz w (12) $W(x,y) \geqslant 0$ dla $x>x_1$ można osłabić, a nawet pominąć założenie 6^0 Hipotezy E. Obliczenia są wówczas bardzo żmudne ze względu na ogólność stałych.

Ograniczoność rozwiązań równania (5) rozpatrywana była w [6] inną metodą.

6. UWAGI KOŃCOWE

Rozważania w tym artykule opierają się na warunku $H_1(x,y)$ podanym i sformułowanym w [1], służąc jako przykład jego dość szerokiego zastosowania. Wyniki uzyskane w punktach 1 i 2 osiągnięte zostały jak podałem w Uwagach 1 i 2, przy znacznie mniej krępujących założeniach, niż w pracach 2 i 3.

W punkcie 3, 4 i 5 uzyskałem wyniki analogiczne do wyników prac [4], [5], [6], ale przy znacznie mniejszym nakładzie środków rachunkowych.

W pracy [5] w porównaniu z punktem 4 niniejszej noty przy dodatkowych założeniach udowodniono jeszcze jednoznaczność rozwiązania okresowego równania (4).

Wpłynęło do Redakcji 3.II.71 r.

LITERATURA

[1] KLUCZNY Cz., FLISOWSKI A. - "O rozwiązaniach okresowych równania różniczkowego $\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka, Fizyka, 15, 1970.

[2] ZIEMBA S. - Tarcie wewnętrzne przy uwzględnieniu mikroodkształceń plastycznych. Zagadnienia Drgań Nieliniowych PWN Warszawa, 1, 1960.

[3] ZIEMBA S. - Vibrations of mechanical systems with one degree of freedom and generalized forces not depending in an explicit manner on time, Archiwum Mechaniki Stosowanej 5,10(1958).

[4] SZPUNAR K., BOGUSZ W. - A single - degree - of - freedom mechanical vibrating system with damping and restoring forces proportional to square of velocity and displacement. Zagadnienia Drgań Nieliniowych PWN Warszawa, 6, 1966.

[5] CAUGHEY T.K., MALHOTRA R.K. - A generalization of the Van der Pol and Rayleigh equations. Zagadnienia Drgań Nieliniowych PWN Warszawa, 6, 1966.

[6] МУШИНСКАЯ А., МУШИНСКИЙ Е.: О некотором критерии ограниченности решений псевдолинейного дифференциального уравнения второго порядка с частично отрицательной диссипацией. Zagadnienia Drgań Nieliniowych PWN Warszawa,6,1966.

О ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В этой работе даны некоторые обобщения теорем касающихся ограниченности и угасания решении дифференциальных уравнений второго порядка. Кроме того для одного из уравнений показано существование по крайней мере одного периодического решения. Всё это показано при помощи условия сформулированного и выведённого в работе [1].

ON BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

In this note are presented generalizations of theorems concerning boundedness and fading of solutions of second order differential equations. Moreover for one equation the existence of at least one periodic solution has been proved. All this has been proved on the basis of a condition given in note [1].