

CZESŁAW KLU CZNY

O PEWNEJ METODZIE OBLICZENIOWEJ
W ZAGADNIENIACH STEROWANIA LINIOWEGO

Streszczenie. W pracy niniejszej opisano przy pomocy prostych przykładów pewną metodę obliczeniową, która może być stosowana przynajmniej do pewnej grupy zadań z teorii sterowania liniowego czasowo-optimalnego. Sprowadza się ona do rozwiązania pewnych układów równań algebraicznych i nierówności, z których otrzymujemy od razu czas minimalny i chwilę przełączeń, omijając wyznaczanie samych trajektorii, które w zastosowaniach często jest bez znaczenia. Zresztą po uzyskaniu okresów sterowania wyznaczenie trajektorii nie sprawia już trudności. Metoda ta nie czyni użytku z zasady maksimum Pontriagina, ani nie jest metodą programowania dynamicznego, natomiast podstawowym pojęciem jest tu, jak w metodzie pola orientacyjnego pojęcie strefy emisji.

1. Rozważmy zagadnienie sterowania opisane równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ są macierzami stałymi, pierwsza o wymiarach $n \times n$, druga $n \times m$, x i u są macierzami stałymi o 1 kolumnie, pierwsza o n składowych x_i , druga o m składowych u_j , przy czym zakłada się, że $\alpha_1 \leq u_1 \leq \beta_1$, α_1 i β_1 stałe, $i = 1, 2, \dots, m$. Chodzi o to, by wychodząc z punktu $x = 0$ w chwili $t = 0$ osiągnąć punkt x^0 o składowych x_i^0 w najkrótszym czasie.

U w a g a. Wychodzimy z początku układu i sterujemy do punktu x^0 a nie na odwrót, jak to się zwykle czyni, ponieważ rachunki są łat-

twiejsze. Obydwa zadania są zresztą równoważne. Jeżeli funkcja $x(t)$ realizuje nasze zadanie, a więc $x(0) = 0$ i $x(T) = x^0$, przy funkcji sterującej $u(t)$, to $x_1(t) = x(T-t)$ spełnia równanie $\dot{x} = -Ax + Bu$ z funkcją sterującą $u(T-t)$, przy czym $x_1(0) = -x^0$ i $x_1(T) = 0$. Jeżeli np. sterowanie $u(t)$ było typu min-max z przełączeniem w chwili t_1 , to sterowanie $u(T-t)$ jest typu max-min z przełączeniem w chwili $T-t_1$. W związku z tym znane twierdzenia dotyczące drugiego z tych zadań przenoszą się w sposób oczywisty na zadanie nasze. Jeżeli np. w takim twierdzeniu zakładało się, że pierwiastki charakterystyczne macierzy są ujemne, to w naszym przypadku trzeba założyć, że są one dodatnie.

Przez $E(P_0)$, $P_0 = (t_0, x^0)$ rozumiemy strefę emisji prawej, to znaczy dla $t \geq t_0$, a przez $E(P_0, t_1)$ jej przekrój hiperpłaszczyzną $t = t_1$. Podobnie, przez $e(P_0)$ rozumiemy brzeg zbioru $E(P_0)$, a przez $e(P_0, t_1)$ przekrój brzegu $e(P_0)$ hiperpłaszczyzną $t = t_1$.

Jest jasne, że jeżeli punkt x^0 jest osiągalny z początku układu O , a $E(0)$ jest zbiorem domkniętym, to punkt x^0 będzie osiągnięty w najkrótszym czasie przez tę trajektorię, która dociera do punktu przecięcia się prostej $x = x^0$ ze zbiorem $e(0)$. Wiadomo, że w rozważanym przez nas przypadku trajektoria taka idzie cały czas po brzegu emisji i że wymaga sterowania wartościami ekstremalnymi parametrów u_i z pewną skończoną liczbą przełączeń. Tak np., jeżeli macierz A ma tylko pierwiastki charakterystyczne rzeczywiste, to do punktu osiągalnego można dotrzeć sterowaniem z $n-1$ zmianami. Jeżeli chwile przełączeń oznaczmy przez t_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ a dla wygody, czas optymalny przez t_n (zamiast T), to mamy do wyznaczenia n niewiadomych. Tu dochodzimy do istoty metody, którą chcemy opisać. Wyznaczymy $e(0)$ jako funkcję n parametrów t_1, t_2, \dots, t_{n-1} a następnie rozwiążemy układ n równań

$$e(0, t_n) = x^0 \quad (2)$$

Jak zapowiedzieliśmy ograniczymy opis metody do przykładów i to tylko do układów dwóch równań różniczkowych. Okaże się przy tym, że i w przypadku pierwiastków charakterystycznych nierzeczywistych, gdy ilość przełączeń zależy od punktu docelowego x^0 , liczba nie-wiadomych w naszych równaniach będzie zawsze równa 2 (mówimy o przypadku dwóch równań różniczkowych).

Poza przykładami będziemy przy sposobności wypowiadali uwagi o charakterze ogólniejszym.

U w a g a 2. W przykładzie 2 rozważonym niżej zobaczymy, że niektóre punkty płaszczyzny można osiągnąć w tym samym czasie minimalnym dwoma różnymi trajektoriami idącymi po brzegu emisji. Z odpowiadających im sterowań jedno jest ekstremalne z jedną zmianą, a drugie stałe, ale nie ekstremalne. To drugie sterowanie potrafimy także wyznaczyć, ponieważ część zbioru $e(0)$ możemy przedstawić przy pomocy parametrów u i t , wobec czego wartość u sterowania stałego i czas T określić będzie można z równania $e(u, T) = x^0$. Podobnie w przypadku dowolnego n zadanie optymalnego sterowania można będzie rozwiązać, jeżeli brzeg emisji będzie można przedstawić przy pomocy n parametrów, (z których jednym jest t), które wyznaczają trajektorię docierającą do punktu określonego tymi parametrami.

W związku z tym nasuwa się uwaga ogólniejsza. Przypuśćmy, że chodzi o zadanie na sterowanie optymalne przedstawione równaniem (1) lub ogólniejszym równaniem nieliniowym, przy czym jest określony zbiór $U(t)$ funkcji sterowania dopuszczalnych. Założmy jeszcze, że emisja jest zbiorem domkniętym. Jeżeli z rodziny $U(t)$ można wybrać $(n-1)$ parametrową klasę sterowań, której emisja zawiera zbiór $e(0)$, to zadanie da się rozwiązać w podobny sposób. Warunek domkniętości emisji nie zawsze jest spełniony. Nie jest np. spełniony, gdy zbiór $U(t)$ jest zbiorem funkcji ciągłych o wartościach z określonego zbioru zwartego. Można wtedy szukać $(n-1)$ -parametrowej klasy $U_1(t)$ funkcji będących granicami pewnych ciągów funkcji należących do $U(t)$ takiej, by jej emisja zawierała zbiór $e(t)$. Rozwiązanie zadania op-

tymalnego sterowania dla równania (1) ze zbiorem funkcji dopuszczalnych $U_1(t)$ byłoby wtedy w podobny sposób możliwe, a jego związek z otrzymaniem rozwiązania przybliżonego dla tegoż równania przy dopuszczeniu zbioru $U(t)$ jest oczywisty.

2. Przechodząc do przykładów przypomnimy, że rozwiązaniem równania (1) z warunkiem początkowym $x(\bar{t}) = \bar{x}$ przy sterowaniu wektorem stałym u jest

$$x(t) = e^{A(t-\bar{t})}\bar{x} + K(t-\bar{t})u \quad (3)$$

gdzie

$$K(t) = \int_0^t e^{As} B ds \stackrel{\text{df}}{=} \bar{K}(t)B, \quad (\bar{K}(t) = \int_0^t e^{As} ds) \quad (4)$$

Jeżeli przy tym kolumnami macierzy B są B_1, B_2, \dots, B_m , to

$$K(t) = K_1 + K_2 + \dots + K_m, \quad K_1 = \int_0^t e^{As} B_1 ds \quad (5)$$

Przykład 1

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad a \ll u \ll b,$$

Jeżeli do chwili t_1 sterujemy wartością u_1 , a następnie do chwili t wartością u_2 , to jak wynika z (3) i (4) dojdziemy do punktu

$$x(t_1, t) = u_1 e^{A(t-t_1)} K(t_1) + u_2 K(t-t_1) = u_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t_1^2 + t_1(t-t_1) \\ t_1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t-t_1)^2 \\ t-t_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jeżeli we wzorze (6) położymy raz $u_1 = a$, $u_2 = b$, a drugim razem $u_1 = b$, $u_2 = a$, to przy warunku $0 \leq t_1 \leq t$, otrzymamy przedstawienie parametryczne dwóch płatów brzegu emisji z punktu 0, a przy

ustalonym $t = T$ dwa łuki zbioru $e(0, T)$. Aby więc wyznaczyć sterowanie optymalne do punktu $x^0(x_1^0, x_2^0)$, trzeba rozwiązać układ równań

$$x(t_1, T) = x^0, \quad 0 \leq t_1 \leq T \quad (7)$$

Jeżeli $a < 0 < b$, to układ ten będzie posiadał przy każdym x^0 rozwiązanie. Jeżeli jednak a i b są tego samego znaku, np. dodatnie, to zbiór punktów osiągalnych, który jest sumą zbiorów $e(0, T)$ jest zawarty w pierwszej ćwiartce płaszczyzny fazowej.

Przyjmujemy dalej, że $a = -1$, $b = +1$, i opuszczam przy x_1^0, x_2^0, x^0 znaczek u góry. Układ (7) przyjmie postać:

$$x_1 = t_1^2 - 2Tt_1 + \frac{1}{2}T^2, \quad x_2 = -2t_1 - T, \quad 0 \leq t_1 \leq T, \quad (7.1)$$

dla sterowania min-max, to znaczy, gdy $u_1 = -1$, $u_2 = +1$ oraz

$$x_1 = -t_1^2 + 2Tt_1 - \frac{1}{2}T^2, \quad x_2 = 2t_1 - T, \quad 0 \leq t_1 \leq T \quad (7.2)$$

dla sterowania max-min.

Kładąc $t_1 = T$, czyli przy sterowaniu bez zmiany, otrzymujemy z tych układów wierzchołki zbiorów $e(0, T)$

$$W_1(-\frac{1}{2}T^2, -T), \quad W_2(\frac{1}{2}T^2, T)$$

odpowiadające odpowiednio sterowaniom stałym $u = -1$, $u = +1$. Miejscem geometrycznym tych wierzchołków dla $T \geq 0$ są półparabole, które w sumie dają krzywą K_1OK_2 przedstawioną na rysunku 1. Krzywa ta rozdziela płaszczyznę na dwa obszary D_+ górny i D_- dolny.

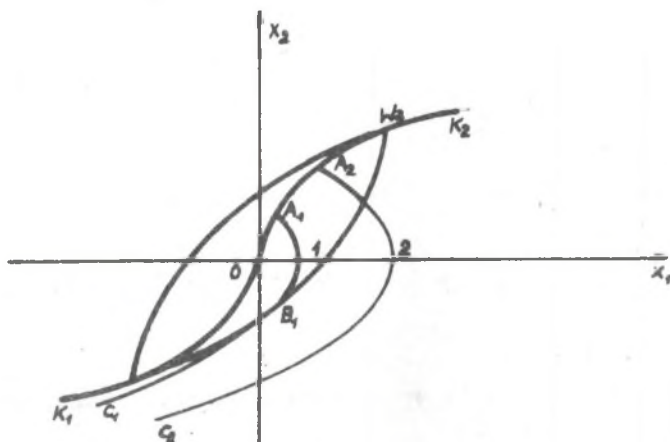
Z (7.1) otrzymujemy

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_1}, \quad T = x_1 + 2t_1$$

Z uwagi na warunek $0 \leq t_1 \leq T$ daje to rozwiązanie w przypadku, gdy punkt x należy do obszaru D_- . Punkty tego obszaru są więc osiągalne sterowaniem min-max. Podobnie punkty obszaru D_+ osiągamy sterowaniem max-min, przy czym

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 + x_1}, \quad T = 2t_1 - x_1.$$

Na rysunku zaznaczono jeszcze zbiór $e(0,2)$, który jest sumą 2 łuków o wspólnych końcach W_1 i W_2 oraz trajektorie $OA_1B_1C_1, OA_2B_2C_2$ osiągnące po drodze punkty B_1 i B_2 należące do $e(0,2)$.



Rys. 1

Przykład 2. $\dot{x}_1 = x_2 + v$, $\dot{x}_2 = u$, $-1 \leq u, v \leq +1$.

Zapiszmy ten układ w postaci $\dot{x} = Ax + B'u + B''v$. Każde rozwiązanie tego układu, wychodzące z początku układu w chwili $t = 0$ jest sumą rozwiązań $x^i(t)$ układu $\dot{x} = Ax + B'u$ i $x''(t)$ układu $\dot{x} = Ax + B''v$ spełniających ten sam warunek początkowy. Układ dla $x^v(t)$ rozważyliśmy w przykładzie 1. Łatwo także widać, że

$$x''(t_1, T) = \pm \begin{bmatrix} T-2t_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

przy czym znak + odpowiada sterowaniu max-min, a znak - sterowaniu min-max. Z (8), z uwagi na $0 \leq t_1 \leq T$ wynika, że zbiór $E'(0, T)$ jest odcinkiem osi x_1 o końcach $-T$ i $+T$. Ponieważ $T = 2t_1 \pm x_1$, to gdy $x = (x_1, 0)$ i $x_1 > 0$, otrzymujemy $T_{\min} = x_1$ przy $t_1 = 0$, co oznacza, że punkt x może być osiągnięty sterowaniem stałym maksymalnym. Jeżeli $x_1 < 0$, to $T_{\min} = -x_1$ i sterowanie minimalne.

Z uwagi na to, że przekrój emisji $E(0, T)$ jest zbiorem punktów $x = x' + x''$, gdzie x', x'' należą odpowiednio do $E'(0, T)$ i $E''(0, T)$, to uwzględniając wyniki z przykładu 1 wnioskujemy, że w naszym przypadku zbiór $e(0, T)$ składa się z 4 łuków (z których dwa są odcinkami) i razem tworzą obwód o 4 wierzchołkach:

$$W_1(\frac{1}{2}T^2 + T, T), \quad W_2(\frac{1}{2}T^2 - T, T), \quad W_3(-\frac{1}{2}T^2 - T, -T), \quad W_4(-\frac{1}{2}T^2 + T, -T),$$

osiąganych sterowaniami stałymi, określonymi odpowiednio równościami: $u = v = 1$, $v = -1$ a $u = 1$, $v = u = -1$, $v = 1$ i $u = -1$. Równania poszczególnych łuków zbioru $e(0, T)$ są następujące:

$$W_1W_2 : x_2 = T, \quad \frac{1}{2}T \leq x_1 \leq \frac{3}{2}T$$

$$W_2W_3 : x_1 = -T + t_1^2 - 2t_1T + \frac{1}{2}T^2, \quad x_2 = -2t_1 + T$$

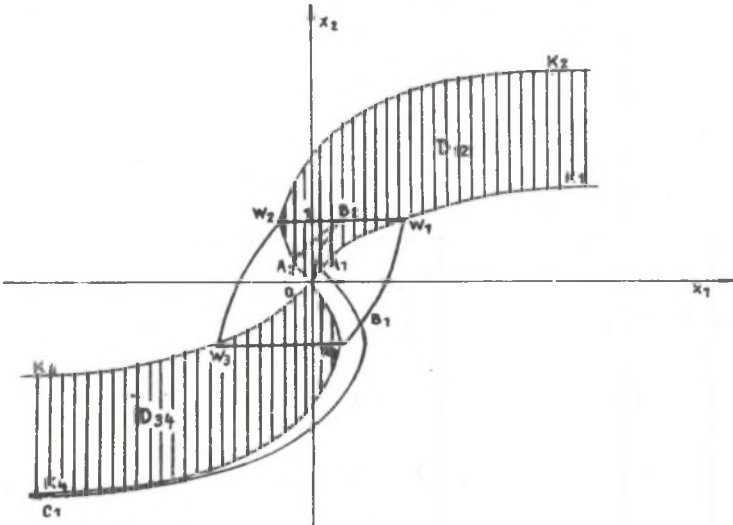
$$W_3W_4 : x_2 = -T, \quad -\frac{3}{2}T \leq x_1 \leq \frac{1}{2}T,$$

$$W_4W_1 : x_1 = T - t_1^2 + 2t_1T - \frac{1}{2}T^2, \quad x_2 = 2t_1 - T.$$

Podobnie jak w przykładzie 1 cztery krzywe K_1, \dots, K_4 o początku w punkcie 0 , będące miejscami geometrycznymi wierzchołków W_1, W_2, W_3, W_4 rozdzielają płaszczyznę fazową na 4 obszary $D_{12}, D_{23}, D_{34}, D_{41}, D_{ij}$ między K_i a K_j . Wszystkie punkty jednego z tych obszarów mają ten sam rodzaj sterowania, a mianowicie:

- dla D_{12} sterowanie $u = 1$ stałe w $\langle 0, T \rangle$, v z jedną zmianą
- dla D_{23} " " " $v = -1$ " " " " " " " dla u zmiana z -1 na $+1$,

dla D_{34} sterowanie $u = -1$ stałe w $\langle 0, T \rangle$, v z jedną zmianą,
 dla D_{41} " " $v = 1$ " " " " " " " " dla u zmiana z $+1$ na -1 .



Rys. 2

W pierwszym i trzecim z tych obszarów zmiana v może odbyć się z $+1$ na -1 lub odwrotnie, co tłumaczy się tym, że odpowiedni łuk W_1W_2 czy W_3W_4 jest odcinkiem, w pozostałych obszarach tylko zmiana u podana wyżej daje potrzebną wypukłość zbioru $E(0, T)$.

Aby określić sterowanie optymalne do punktu x należącego do obszaru D_{12} należy więc rozwiązać następujący układ równań

$$D_{12}: \quad x_1 = \frac{1}{2} T^2 + T - 2t_1, \quad x_2 = T,$$

w wyniku czego otrzymujemy:

$$t_1 = \frac{1}{4}(x_2^2 + 2x_2 - 2x_1), \quad T = x_2.$$

Podobnie dla pozostałych obszarów

$$D_{23}: \quad x_1 = -T + t_1^2 - 2t_1 T + \frac{1}{2} T^2, \quad x_2 = -2t_1 + T,$$

$$t_1 = -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2} x_2^2 - x_2 - x_1}, \quad T = 2t_1 + x_2,$$

$$D_{34}: \quad x_1 = -\frac{1}{2}T^2 + T - 2t_1, \quad x_2 = -T,$$

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_2^2 + x_2 - x_1\right), \quad T = -x_2,$$

$$D_{41}: \quad x_1 = T - t_1^2 + 2t_1T - \frac{1}{2}T^2, \quad x_2 = 2t_1 - T.$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2 + x_1}, \quad T = 2t_1 - x_2.$$

U w a g a. Jak wiadomo, jeżeli sterowaniami $u_1(t)$ i $u_2(t)$ osiągamy w chwili T punkty x^1 i x^2 , to sterowaniem $ku_1 + (1-k)u_2$, $0 \leq k \leq 1$ osiągamy punkty odcinka łączącego x^1 z x^2 . Wynika stąd, że punkty łuków W_1W_2 i W_3W_4 można osiągnąć sterowaniem stałym w $\langle 0, T \rangle$, a mianowicie: dla łuku W_1W_2 sterowaniem $u = 1$, $v = \text{constans}$, a dla W_3W_4 sterowaniem $u = -1$, $v = \text{const}$. Znaczy to, że dla punktów obszarów D_{12} i D_{34} istnieją po dwa sterowania optymalne. Aby określić drugie z nich, trzeba wyznaczyć trajektorię $x(v, t)$ wychodzącą z początku układu i odpowiadającą sterowaniu $u = \pm 1$, $v = v$, a następnie rozwiązać układ $u(v, T) = x^0$, co daje:

$$\text{dla } D_{12}: \quad x_1 = \frac{1}{2}T^2 + vT, \quad x_2 = T, \quad \text{skąd } v = \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}x_2,$$

$$\text{dla } D_{34}: \quad x_1 = -\frac{1}{2}T^2 + vT, \quad x_2 = -T, \quad \text{skąd } v = -\frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}x_2.$$

Na rys. 2 zaznaczono krzywe K_i , obszary D_{ij} , obwód $W_1W_2W_3W_4$, przedstawiający zbiór $e(0,1)$ oraz trajektorię optymalną $OA_1B_1C_1$ docierającą po drodze do punktu B_1 należącego do $e(0,1)$ oraz części dwóch trajektorii także optymalnych OA_2B_2 i OE_2 docierających do punktu B_2 odcinka W_1W_2 będącego częścią zbioru $e(0,1)$.

Przykład 3. $\dot{x}_1 = u + v$, $\dot{x}_2 = x_2 + v - u$, $-1 \leq u, v \leq 1$.

Obszarem wartości sterowania jest kwadrat o wierzchołkach

$$A_1(2,0), \quad A_2(0,2), \quad A_3(-2,0), \quad A_4(0,-2)$$

Jest
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & e^t \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}(t) = \int_0^t e^{As} ds = \begin{bmatrix} t, & 0 \\ 0, & e^t - 1 \end{bmatrix}$$

Dla wierzchołków W_i zbioru $e(0, T)$ mamy równości $W_i = \tilde{K}(T) \cdot A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, a zatem $W_1 = (2T, 0)$, $W_2 = (0, 2e^T - 2)$, $W_3 = -W_1$, $W_4 = -W_2$.

Sprawdzimy za chwilę, że 4 łuki dające razem zbiór $e(0, T)$ otrzymamy sterując najpierw wektorem A_2 dla łuków zawierających wierzchołek W_2 oraz wektorem A_4 dla łuków W_4W_1 i W_4W_3 . Tak więc dla W_1, W_2 mamy równanie

$$x(t_1, T) = e^{A(T-t_1)} W_2(t_1) + W_1(T-t_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & e^{T-t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{t_1} - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2T - 2t_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} T - t_1 \\ e^{T-t_1} - e^{T-t_1} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenia, o którym mowa można dokonać obliczając współrzędne punktu pośredniego, dla $t_1 = \frac{1}{2}T$: Otrzymamy

$$x\left(\frac{1}{2}T, T\right) = \begin{bmatrix} T \\ 2e^{T/2} - 2e^{0,5T} \end{bmatrix}$$

i jak widać punkt ten leży zewnątrz rombu $W_1W_2W_3W_4$, a zatem łuk W_1W_2 jest wypukły.

W podobny sposób otrzymamy równania pozostałych łuków W_2W_3, W_3W_4, W_4W_1 w postaci

$$x(t_1, T) = 2 \begin{bmatrix} t_1 - T \\ e^{T-t_1} - e^{T-t_1} \end{bmatrix}, \quad x(t_1, T) = -2 \begin{bmatrix} T - t_1 \\ e^{T-t_1} - e^{T-t_1} \end{bmatrix}, \quad x(t_1, T) = -2 \begin{bmatrix} t_1 - T \\ e^{T-t_1} - e^{T-t_1} \end{bmatrix}$$

Z równań dla wierzchołków W_i widać, że obszarami D_{12}, D_{23}, \dots (por. przykład 2) są kolejne ćwiartki płaszczyzny fazowej. Mamy więc do rozwiązania następujące układy równań:

$$\text{Dla } D_{12}: \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 = 2T - 2t_1, \quad x_2 = 2e^T - 2e^{T-t_1}$$

skąd otrzymujemy

$$T = \ln(e^{0,5x_1} + 0,5x_2), \quad t_1 = T - 0,5x_1.$$

$$\text{Dla } D_{23}: \quad x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad D_{34}: \quad x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad D_{41}: \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0$$

mamy kolejno:

$$x_1 = 2t_1 - 2T, \quad x_2 = 2e^T - 2e^{T-t_1}, \quad T = \ln(e^{-0,5x_1} + 0,5x_2), \quad t_1 = T + 0,5x_1,$$

$$x_1 = 2t_1 - 2T, \quad x_2 = 2e^{T-t_1} - 2e^T, \quad T = \ln(e^{-0,5x_1} - 0,5x_2), \quad t_1 = T + 0,5x_1,$$

$$x_1 = 2T - 2t_1, \quad x_2 = 2e^{T-t_1} - 2e^T, \quad T = \ln(e^{0,5x_1} - 0,5x_2), \quad t_1 = T - 0,5x_1.$$

U w a g a. W przykładzie 3 pierwiastkami charakterystycznymi macierzy A były liczby 0 i 1. Gdybyśmy macierz A zastąpili przez $-A$ zmieniając w ten sposób znaki pierwiastków charakterystycznych, to nie wszystkie punkty płaszczyzny fazowej byłyby osiągalne. Miejscem geometrycznym wierzchołków W_1 byłaby oś x_1 i odcinek $-2 < x_2 < 2$ osi x_2 , a zbiór punktów osiągalnych byłby pasem ograniczonym prostymi $x_2 = -2$ i $x_2 = 2$ z wyłączeniem tych prostych.

Przykład 4. $\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = u^2, \quad -1 \leq u \leq 1.$

Jest $e^{At} = J, \quad \tilde{K}(t) = Jt$, gdzie J oznacza macierz jednostkową.

Niech podstawowym zbiorem sterowań będzie zbiór $P(t)$ funkcji przedziałami ciągłych $u(t)$, $-1 \leq u(t) \leq 1$. Wektor sterujący o składowych $u(t), u^2(t)$ przyjmuje wartości z łuku ξ paraboli o równaniu $x_2 = x_1^2, -1 \leq x_1 \leq 1$. Emisja przy zbiorze sterowań $P(t)$ zawiera w szczególności emisję sterowań wektorami stałymi (u, u^2) , $-1 \leq u \leq 1$, a domknięcie emisji zbioru $P(t)$ pokrywa się z emisją zbioru sterowań przedziałami stałych z jedną zmianą od dowolnego

takiego wektora (u_1, u_1^2) do drugiego (u_2, u_2^2) . Punkty zbioru $E(0, T)$, które w ten sposób można osiągnąć spełniają równanie

$$x(t_1, T) = e^{A(T-t_1)} \tilde{K}(t_1) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} + \tilde{K}(T-t_1) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 - u_2)t_1 + u_2 T \\ (u_1^2 - u_2^2)t_1 + u_2^2 T \end{bmatrix},$$

skąd widać, że tworzą odcinek łączący punkty (u_1, u_1^2) , (u_2, u_2^2) łuku L . Wynika stąd, że domknięcie emisji przy zbiorze $P(t)$ sterowań dopuszczalnych jest identyczne z emisją zbioru sterowań stałych o wartościach ze zbioru Z ograniczonego łukiem L i odcinkiem łączącym końce tego łuku, a wobec tego zbiór $e(0, T)$ pokrywa się z emisją zbioru sterowań stałych w $\langle 0, T \rangle$ o wartościach z brzegu zbioru Z .

Po tym ustaleniu rozwiązanie naszego zadania nie przedstawia już trudności. Zbiór $e(0, T)$ składa się z dwóch części odpowiadających sterowaniom wektorami z łuku L i z domykającego go odcinka. Części te mają równania:

$$x(u, T) = JT \begin{bmatrix} u \\ u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uT \\ u^2 T \end{bmatrix}, \quad -1 \leq u \leq 1.$$

oraz

$$x(u, T) = JT \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uT \\ T \end{bmatrix}, \quad -1 \leq u \leq 1.$$

Mamy więc do rozwiązania następujące układy równań

$$\text{I.} \quad x_1 = uT, \quad x_2 = u^2 T,$$

$$\text{II.} \quad x_1 = uT, \quad x_2 = T.$$

Jak widać, w obu przypadkach może być tylko $x_2 \geq 0$, a więc zbiorem punktów osiągalnych jest górna półpłaszczyzna. W przypadku II mamy

$$T = x_2 \quad \text{i} \quad u = \frac{x_1}{x_2},$$

a obszar tego sterowania jest określony nierównością $x_2 \geq |x_1|$.

W przypadku I obszarem sterowania jest reszta górnej półpłaszczyzny, i

$$T = \frac{x_1^2}{x_2} \quad \text{i} \quad u = \frac{x_2}{x_1}.$$

U w a g a. Gdybyśmy zamiast układu rozważonego w tym przykładzie mieli układ $\dot{x}_1 = f(u)$, $\dot{x}_2 = g(u)$, to i w tym przypadku łuk należący do zbioru $E(0, T)$ otrzymany sterowaniami z jedną zmianą między dwoma punktami byłby odcinkiem. Przyczyna tego leży w tym, że w obu przypadkach macierz A jest zerowa. Zadanie optymalnego sterowania sprowadziłoby się więc do zadania sterowaniami stałymi o wartościach z najmniejszej otoczki wypukłej linii $x_1 = f(u)$, $x_2 = g(u)$.

Przykład 5. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, $-1 \leq u \leq 1$.

$$\text{Jest } e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad K(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B ds = \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy za znane, że sterowanie optymalne jest sterowaniem ekstremalnym ze skończoną liczbą zmian, a wykażemy, że długość każdego przedziału stałego sterowania nie może być większa od π , a jeżeli liczba przełączeń jest większa niż jeden, to wszystkie takie przedziały z wyjątkiem, być może pierwszego i ostatniego mają długość równą π .

Jeżeli chwile przełączeń oznaczymy przez t_1, t_2, \dots , to

$$x(t) = \pm K(t) \quad \text{w przedziale } \langle 0, t_1 \rangle,$$

$$x(t) = e^{A(t-t_1)} x(t_1) \pm (-1) K(t-t_1) \quad \text{w } \langle t_1, t_2 \rangle \quad (Q)$$

i ogólnie

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} x(t_k) \pm (-1)^k K(t-t_k) \quad \text{w } \langle t_k, t_{k+1} \rangle,$$

przy czym należy wziąć znak $+$ lub $-$ zależnie od tego czy sterowanie w pierwszym przedziale jest maksymalne, czy minimalne.

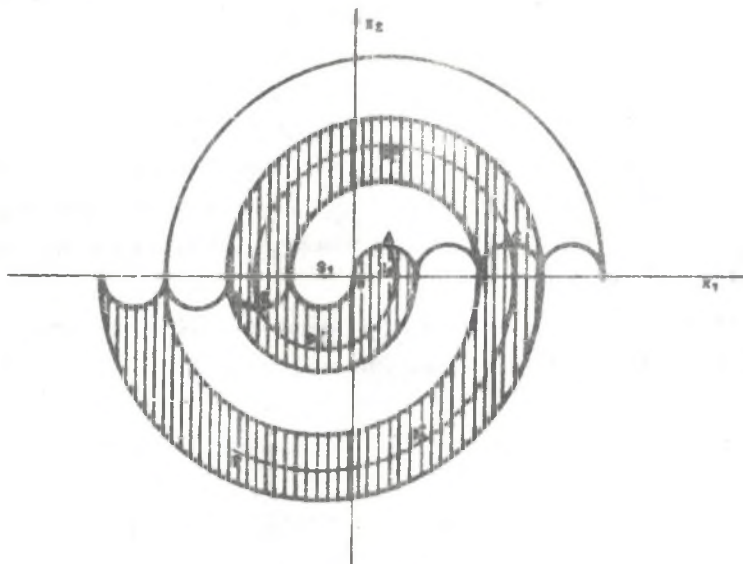
W dalszym ciągu przez $x(t)$ oznaczać będziemy ruch zaczynający się sterowaniem maksymalnym, drugie przez $\bar{x}(t)$. Jest $\bar{x}(t) = -x(t)$, jeżeli chwile przełączeń są te same.

W pierwszym przedziale mamy więc $x_1 = 1 - \cos t$, $x_2 = \sin t$, a więc ruch odbywa się po okręgu o środku $S_2(1,0)$, promieniu równym 1 i w kierunku dodatnim. W drugim przedziale, czyli dla $t_1 \leq t \leq t_2$ jest

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t-t_1), \sin(t-t_1) \\ -\sin(t-t_1), \cos(t-t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \cos t_1 \\ \sin t_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \cos(t-t_1) \\ \sin(t-t_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos(t-t_1) - \cos t - 1 \\ -2 \sin(t-t_1) + \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i ruch odbywa się po okręgu o środku w punkcie $S_1(-1,0)$ i promieniu równym odległości punktu $x(t_1)$ od S_1 . Łatwo sprawdzić rachunkiem, że w następnych przedziałach ruch będzie się odbywał po okręgach o środkach w S_1 lub S_2 zmieniających się wraz z przełączeniem, tak że w przedziale $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ środkiem okręgu będzie punkt $[(-1)^k, 0]$, a promieniem odległość tego punktu od punktu $x(t_k)$. Sterowaniem maksymalnym stałym można więc osiągnąć tylko punkty leżące na okręgu $K(S_2, 1)$, przy czym tylko dla $0 \leq t \leq \pi$ będzie to sterowanie optymalne. Punkt $x(\tilde{t})$, $\pi < \tilde{t} \leq 2\pi$ można bowiem osiągnąć sterowaniem z jedną zmianą w chwili $t_1 = 2\pi - \tilde{t}$ w czasie krótszym niż \tilde{t} . Wynika to stąd, że odległości punktów $x(2\pi - \tilde{t})$ i $x(\tilde{t})$ są sobie równe i większe niż 1, a kąt obrotu oznacza czas. Wobec tego, przy sterowaniu z jedną zmianą pierwszy przedział czasowy nie może być większy niż π . Przypuśćmy teraz, że przy sterowaniu z jedną zmianą w chwili t_1 , $t_1 \leq \pi$ osiągamy punkt $x(\tilde{t})$, $\tilde{t} > \pi + t_1$. Do punktu tego można dotrzeć w krótszym czasie sterowaniem z dwoma zmianami w chwilach t_1 i t_2 , $t_2 < t_1 + \pi$. Chwilę t_2 wyznaczyć trzeba z porównania odległości punktu S_2 od $x(\tilde{t})$ i od $x(t_2)$. Otrzymane równanie ma rozwiązanie dzięki temu, że odległość punktu S_2 od $x(\tilde{t})$ jest mniejsza od odległości S_2 od $x(t_1 + \pi)$. Nie znaczy to, że sterowanie do punktu $x(\tilde{t})$ z przełączeniami w t_1 i tak wyznaczonym t_2 jest optymalne, znaczy jednak, że w sterowaniu optymalnym do punktu $x(\tilde{t})$ z jedną zmianą nie może być $\tilde{t} > \pi + t_1$. W ten sposób stero-

waniem z jedną zmienną, maksymalnym w pierwszym przedziale można osiągnąć punkty obszaru D_1^+ (rys. 3) ograniczonego trzema półokręgami o promieniu 1, z których pierwszy ma środek w S_2 i jest położony w górnej półpłaszczyźnie, pozostałe leżą w dolnej półpłaszczyźnie i mają środki w S_1 i w punkcie $(-3,0)$, i czwartym półokręgiem o środku w $(-3,0)$, promieniu 3 położonym w dolnej półpłaszczyźnie. Łatwo także widzieć, że sterowanie z jedną zmienną, w którym $t_1 \leq \pi$ do któregośkolwiek punktu tego obszaru jest optymalne. Rozumując podobnie wyznaczmy obszary D_2^+, D_3^+, \dots , takie że punkty obszaru D_s^+ są osiągalne sterowaniem optymalnym przy s przełączeniach w chwilach $t_1, t_1 + \pi, t_1 + 2\pi, \dots, t_1 + (s-1)\pi$.



Rys. 3

Aby określić sterowanie optymalne do punktu x , wystarczy więc wyznaczyć liczbę przełączeń s , chwilę t_1 i czas sterowania T . Zamiast s wyznaczać można liczbę $m=s-1$, oznaczającą ilość przedziałów wewnętrznych o długości π .

Jeśli chodzi o wyznaczenie m , to można postąpić w sposób następujący. Oznaczmy przez k_1^+ część koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(1+2i, 0)$ zawartą w górnej półpłaszczyźnie, a przez k_1^- część

koła o promieniu 1 i środku $(-1-2i, 0)$ zawartą w dolnej półpłaszczyźnie, $i = 1, 2, \dots$. Jeżeli punkt x , do którego sterujemy należy do k_m^+ lub do k_m^- , to osiągamy go sterowaniem z $(m+1)$ -s zmianami przy czym sterowanie w przedziale $\langle 0, t_1 \rangle$ jest minimalne, gdy x należy do k_m^- i m jest liczbą parzystą lub x należy do k_m^+ i m jest nieparzyste. W pozostałych przypadkach sterowanie w pierwszym przedziale jest maksymalne. Jeżeli punkt x nie należy do żadnego k_1^+ ani k_1^- , to m wyznaczymy z nierówności

$$2m+1 < \varrho(x, S_1) < 2m+3,$$

($\varrho(A, B)$ oznacza odległość od A do B), o ile $x_2 < 0$ lub z nierówności

$$2m + 1 < \varrho(x, S_2) < 2m+3,$$

o ile $x_2 > 0$. Jak poprzednio $m+1$ oznacza ilość zmian i sterowanie zaczyna się od minimalnego, gdy $x_2 < 0$ i m jest nieparzyste lub $x_2 > 0$ i m parzyste. W pozostałych przypadkach sterowanie zaczyna się od maksymalnego.

Aby wyznaczyć t_1 i T zauważmy, że ze związków (Q) przy uwzględnieniu równości $e^{A\mathcal{H}} = J$, otrzymujemy kolejno

$$x(t_1) = K(t_1), \quad x(t_1 + \mathcal{H}) = -K(t_1) - K(\mathcal{H}), \quad x(t_1 + 2\mathcal{H}) = (-1)^2 (K(t_1) + 2K(\mathcal{H})), \dots, \quad x(t_1 + m\mathcal{H}) = (-1)^m (K(t_1) + K(\mathcal{H}))$$

i wreszcie

$$x(T) = (-1)^{\frac{T}{\mathcal{H}}} e^{A(T-t_1 - \frac{T}{\mathcal{H}}\mathcal{H})} (K(t_1) + mK(\mathcal{H})) + (-1)^{m+1} K(T-t_1 - m\mathcal{H}),$$

czyli

$$x(T) = \begin{bmatrix} \cos(T-t_1) & \sin(T-t_1) \\ -\sin(T-t_1) & \cos(T-t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m+1-\cos t_1 \\ \sin t_1 \end{bmatrix} + (-1)^{2m+1} \begin{bmatrix} 1-\cos(T-t_1) \\ \sin(T-t_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (2m+2)\cos(T-t_1) - \cos T - 1 \\ -(2m+2)\sin(T-t_1) + \sin T \end{bmatrix}.$$

Niewiadome t_1 i T wyznaczymy więc z układu równań

$$(2m+2)\cos(T-t_1) - \cos T - 1 = \pm x_1$$

$$-(2m+2)\sin(T-t_1) + \sin T = \pm x_2$$

biorąc po prawej stronie znak $+$ lub $-$ zależnie od tego czy sterowanie zaczyna się od maksymalnego, czy od minimalnego oraz pamiętając o tym, że $0 < t_1 \leq \pi$, $m\pi \leq T-t_1 \leq (m+1)\pi$. Tak np. jeżeli $x(3, -3\sqrt{3})$, to ponieważ $x_2 < 0$ i $5 < \varrho(x, S_1) < 7$, to $m=4$ i trzeba rozwiązać układ równań

$$6 \cos(T-t_1) - \cos T - 1 = 3$$

$$-6\sin(T-t_1) + \sin T = -3\sqrt{3},$$

z którego otrzymujemy $T-t_1 = 2\pi + \pi$ i $t_1 = \frac{2}{3}\pi$.

Wzory (Q) pozwalają wyznaczyć już i trajektorię, po której osiągniemy punkt x .

Na rysunku 3 zaznaczono obszary D_k^+ , których punkty można osiągnąć sterowaniem optymalnym z k zmianami zaczynając od maksymalnego.

Uwagi końcowe

Rozważone przykłady dotyczyły sterowania liniowego. Istota przedstawionej metody leżała w tym, by znaleźć $(n-1)$ -parametrowy pod-

zbiór $U_1(t)$ zbioru sterowań dopuszczalnych $U(t)$, taki że jego emisja pokrywałaby brzeg $e(0)$ emisji $E(0)$ odpowiadającej zbiorowi $U(t)$. Tu możliwe są następujące modyfikacje: zbiór $U_1(t)$ nie musi być podzbiorem $U(t)$, a całki odpowiadające sterowaniom z tego zbioru nie muszą iść cały czas po brzegu $E(0)$. Jeżeli przez $E_1(0)$ oznaczymy emisję zbioru $U_1(t)$, to wystarczy, by spełniony był warunek $e(0) \subset E_1(0) \subset \bar{E}(0)$; to znaczy, by emisja zbioru $U_1(t)$ zawierała brzeg, a mieściła się w domknięciu emisji zbioru $U(t)$.

Byłoby interesujące znaleźć sensowne wykorzystanie tych modyfikacji w sterowaniu liniowym czy nieliniowym. Gdy zbiór $E(0)$ nie jest zbiorem domkniętym, to zastąpienie $U(t)$ przez $U_1(t)$ spełniające powyższy warunek prowadziłoby do rozwiązania przybliżonego, o jakie może w tym przypadku chodzić. Otrzymana wartość na T byłaby kresem dolnym chwil, w których można się znaleźć w sąsiedztwie punktu docelowego. Wreszcie, w przypadku gdy $U_1(t)$ nie jest podzbiorem zbioru $U(t)$ ani jego domknięcia, to rozwiązanie zadania z $U_1(t)$ zamiast $U(t)$ nie byłoby jeszcze rozwiązaniem zadania wyjściowego. Jeżeli sterowanie $u_1(t)$ należące do $U_1(t)$ jest rozwiązaniem pierwszego z tych zadań i $u_1(T) = x^0$, to pozostałoby jeszcze w zbiorze $U(t)$ znaleźć funkcję $u(t)$, dla której byłoby także $u(T) = x^0$. Z prostym przypadkiem tego rodzaju spotkaliśmy się w zadaniu 4.

W naszych przykładach zakładaliśmy, że zbiór $U(t)$ jest zbiorem funkcji przedziałami ciągłych. Aby uzyskać tę samą emisję można byłoby ograniczyć się do zbioru funkcji przedziałami stałych, a dla otrzymania brzegu emisji wystarczyłyby sterowania o wartościach przedziałami ekstremalnych. W praktyce będziemy mieli do czynienia z przypadkami, gdy zbiór funkcji dopuszczalnych jest szczuplejszy. Mogą to być, np. funkcje różniczkowalne lub dwukrotnie różniczkowalne z ograniczoną pierwszą czy drugą pochodną. W tych przypadkach zastąpienie zbioru $U(t)$ zbiorem funkcji przedziałami stałych poszerzyłoby emisję i w konsekwencji mogłoby prowadzić do błędnych wyników. Powstaje więc pytanie, jak w takich przypadkach wygląda $(n-1)$ parametrowa rodzina $U_1(t)$ sterowań, o której mowa.

Jak widać z przedstawioną w tej pracy metodą wiążą się zagadnienia, które mogą mieć znaczenia zarówno dla teorii jak i praktyki.

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1970 r.

LITERATURA

- [1] PONTRIAGIN L.S., BOLTIANSKIJ W.G., GAMKRELIDZE R.W., MISZCZENKO E.F. - Matematyčeskaja teorija optimalnych proceŝsow, Moskwa, 1969.
- [2] TUROWICZ A., GÓRECKI H. - Sterowanie optymalne. Wiadomości Matematyczne, Seria II, XII, 1, Warszawa 1969.
- [3] KIJCZNY Cz. - Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires I, Annales UMCS, Sectio A, XV, 2, Lublin 1961.

ОБ ОДНОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Резюме

В работе представлено описание одного вычислительного метода оптимального управления в смысле быстрогодействия, ограничиваясь до примеров. Он связан с идеей ориентирного поля принадлежащую Т. Зажевскому. В случае, когда он применим, мы получаем сперва управляющую функцию и кратчайшее время, затем траекторию.

ON SOME CALCULATING METHOD OF OPTIMAL CONTROL

S u m m a r y

In this paper we present some calculating method in linear optimal control, by solving simple examples. It is connected with the notion of orientor-field due to T. Ważewski. By this method, where it is possible to be used, we obtain the time of control and control function without fixing the trajectory, what after this is no problem.