ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: INFORMATYKA z. 30 Nr kol. 1315

Tadeusz CZACHÓRSKI
Michał PASTUSZKA

APROKSYMACJA DYFUZYJNA W MODELOWANIU STANÓW NIEUSTALONYCH MULTIPLEKSERA ATM

Streszczenie. Artykuł przedstawia model multipleksera ATM. Wzięto pod uwagę model on-off aktywności poszczególnych źródeł przesyłanej informacji, wykorzystano aproksymację dyfuzyjną do opisu stanów nieustalonych kolejki komórek czekających w multiplekserze na wysłanie. Określono rozkład zapełnienia bufora i prawdopodobieństwo strat w funkcji czasu.

DIFFUSION APPROXIMATION MODEL FOR THE ANALYSIS OF TRANSIENT STATES OF AN ATM MULTIPLEXER

Summary. The article presents the use of diffusion approximation to analyze the transient behaviour of an ATM multiplexer. The model considers multiple on-off sources of cells in time-varying traffic and estimates a buffer queue and cell loss probabilities as a function of time.

APPROXIMATION DE DIFFUSION DANS L'ANALYSE DES ETATS TRANSITOIRES D'UN MULTIPLEXEUR ATM

Résumé. On propose l'utilisation de l'approximation de diffusion dans l'analyse des performances d'un multiplexeur ATM. Le modèle decrive etats transitoires et considère les sources type on-off des cellules. On determine la distributin du nombre des cellules dans le tampon et la probabilité des pertes en fonction du temps.

Niniejszy tekst został opracowany częściowo w ramach Projektu Badawczego KBN nr 8 T11C 032 08.

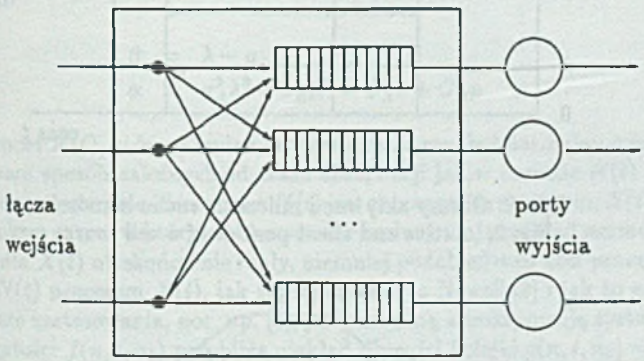
1. Wstęp

Strumienie informacji przesyłane w szerokopasmowych sieciach o zintegrowanych usługach (b-ISDN), w tym w sieciach o standardzie ATM (Asynchronous Transfer Mode), mają niejednorodny charakter. Wszystkie typy informacji przesyłane są w ten sam sposób — w przypadku ATM za pomocą małych jednostek, zwanych komórkami (cells) o ustalonejej długości 53 bajtów, kierowanych tą samą drogą do miejsca przeznaczenia. Niektóre z nich — do takich należy np. przesył głosu – mają stałe natężenie, spowodowane charakterem źródła lub osiągnięte przez wprowadzenie buforów wygładzających zmiany intensywności wysyłanej informacji — tym można przydzielić stałą przepustowość łącz sieci, co nazywamy usługami typu CBR (Constant Bit Rate). Inne — jak przesył ruchomych obrazów (video), rozproszone obliczenia i związana z nimi wymiana danych, połączenia pomiędzy sieciami lokalnymi poprzez sieć ATM, dostęp do multimedialnych baz danych — charakteryzują się bardzo zmiennym natężeniem przepływu informacji; maksymalne natężenie przesyłanych komórek przekracza wielokrotnie lub wiele dziesiątków razy wartość średnią natężenia. Przydział takim źródłom przepustowości odpowiadającej ich maksymalnym potrzebom oznaczałby bardzo nieracjonalną gospodarkę zasobami linii. Dlatego wprowadza się w sieci usługi VBR (variable bit rate), przydzielając źródłom przepustowości w miarę ich potrzeb, przy czym przepustowość łącza jest znacznie mniejsza niż suma maksymalnych natężeń emitowanych przez źródła. Zakłada się, że prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia w wypadkowym strumieniu i nałożenia się na siebie szczytowych potrzeb dwu lub więcej źródeł jest małe. Ruch sieci podlega więc losowym fluktuacjom, a jego średnie natężenie powinno być na tyle duże, by zapewnić wysokie wykorzystanie sieci. Polityka VBR niesie ze sobą ryzyko występowania przeciążeń. W momentach wzrostu natężenia ruchu rosną kolejki komórek czekających w węzłach sieci na wysłanie. Rozmiary buforów powinny być tak dobrane, by umożliwić, przy określonych statystycznych własnościach strumienia zapamiętanie piętrzących się w okresie nasilenia ruchu komórek i by prawdopodobieństwo strat wynikających z przepełnienia buforów było mniejsze od założonej, będącej elementem jakości usług sieci, wielkości. Artykuł przedstawia model pozwalający w przybliżony sposób określić zmienną w funkcji czasu liczbę komórek czekających na wysłanie w buforach multipleksera (przełącznika) statystycznego sieci ATM i dzięki temu oszacować również zmienne w czasie prawdopodobieństwo strat komórek wynikające z przepełnienia buforów. Nieregularność natężenia strumienia i związane z tym zmiany czasów oczekiwania komórek na wysłanie wprowadzają też nieregularność ich nadchodzenia (tzw. *jitter*) do miejsca przeznaczenia. Model pozwala ocenić ten efekt, wskazując rozkład czasu przejścia przez przełącznik sieciowy.

Analiza działania multiplekserów ATM jest też ważna przy projektowaniu mechanizmów sterowania natężeniem ruchu, jakie mogą być uwzględnione w sieci.

Powstało już niemało modeli, np. [10, 7, 11, 8], jednak ocena zachowania się bufora w funkcji czasu, przy obciążeniu o zmiennych w czasie parametrach, nie została w nich wykonana. Przedstawiony tutaj model bierze pod uwagę konfigurację przełącznika przedstawioną na rys. 1. Model zakłada, że szybkość działania przełącznika jest większa niż łączy na jego wejściu i wyjściu, można więc pominąć w modelu kolejkowanie komórek na wejściach, przed ich skierowaniem do odpowiednich portów wyjściowych przełącznika.

natomiast wąskie gardło układu stanowią kolejki komórek na jego wyjściu, zgrupowanych już według kierunku, w którym mają być wysłane i oczekujących na emisję. Ponieważ brak szczegółów odróżniających od siebie te kolejki, model ogranicza się do analizy jednego bufora, a jego wyniki odnoszą się do wszystkich kolejek.



Rys. 1. Model multipleksera
Fig. 1. Multiplexer model

W sekcji 2. omówiono model strumienia wejściowego multipleksera, w sekcji 3. przedstawiono metodę aproksymacji dyfuzyjnej, będącą podstawą analizy, w sekcji 4. przedstawiono zastosowanie tej metody w modelu multipleksera, a w sekcji 5. opisano przykłady numeryczne.

2. Model strumienia komórek

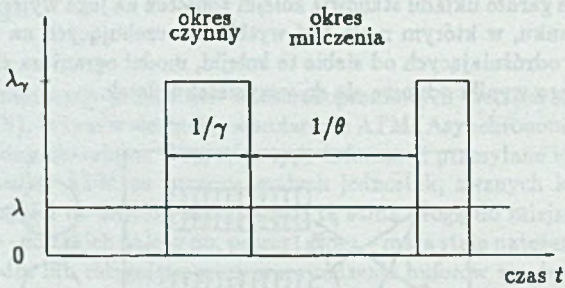
Zakładamy, że źródło charakteryzuje się następującymi po sobie okresami aktywności i bezczynności, oba o rozkładzie wykładniczym z parametrem odpowiednio γ i θ — rys. 2. W okresach aktywności źródło wysyła komórki z intensywnością λ_γ, w okresie bezczynnym — milczy. Aktywność źródła jest więc regulowana dwustanowym procesem Markowa, który „włącza" i „wyłącza" pracę źródła, rys. 3.

Biorąc pod uwagę okresy aktywności i milczenia źródła łącznie, dystrybuanta rozkładu odstępów czasu pomiędzy emisją kolejnych komórek ma postać [7]:

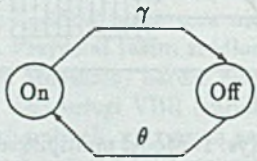
$$F_X(x) = [(1 - \frac{\gamma}{\lambda_\gamma}) + \frac{\gamma}{\lambda_\gamma}(1 - e^{-\theta(x-1/\lambda_\gamma)})]1(x - 1/\lambda_\gamma)\,, \tag{1}$$

gdzie $1(x)$ jest funkcją skoku jednostkowego. Na podstawie rozkładu (1) można obliczyć średnią intensywność nadchodzenia komórek (średnią ich liczbę w jednostce czasu)

$$\lambda = E[X]^{-1} = \frac{\theta}{\gamma + \theta}\lambda_\gamma \tag{2}$$



Rys. 2. Okresy aktywne i milczenia ruchu komórek
Fig. 2. Active and silent periods of a cell source



Rys. 3. Proces Markowa regulujący aktywność źródła
Fig. 3. Markov process underlying source activities

oraz współczynnik zmienności rozkładu $F(x)$,

$$C_X^2 = \frac{Var[X]}{E[X^2]} = \frac{1-(1-\gamma/\lambda_\gamma)^2}{(\gamma/\lambda_\gamma+\theta/\lambda_\gamma)^2} \tag{3}$$

Strumień komórek dochodzących do bufora jest superpozycją strumieni pochodzących z wielu źródeł. Będziemy zakładać, że jest K strumieni o paramtrach $\lambda^{(k)}$, $C^{(k)2}$.

3. Opis aproksymacji dyfuzyjnej

Zasadą aproksymacji dyfuzyjnej jest założenie, że proces losowy $N(t)$, którego wartość odpowiada liczbie zadań w systemie obsługi (w naszym przypadku liczbie komórek w buforze), można opisać procesem dyfuzji $X(t)$. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x,t;x_0)$ tego procesu, $f(x,t;x_0)dx = P[x \leqslant X(t) < x+dx \mid X(0)=x_0]$, jest zdefiniowana równaniem dyfuzji

$$\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 f(x,t;x_0)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x}, \tag{4}$$

a proces ma tę własność, że jego infinitezymalne zmiany $dX(t)$

$$dX(t) = X(t+dt) - X(t)$$

mają rozkład normalny o średniej βdt i wariancji αdt. Dobierając współczynniki równania dyfuzji (4) jako

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda - \mu \\ \alpha &= \sigma_A^2\lambda^3 + \sigma_B^2\mu^3 = C_A^2\lambda + C_B^2\mu \end{aligned} \tag{5}$$

otrzymamy proces $X(t)$, którego zmiany w czasie mają rozkład normalny o średniej i wariancji w ten sam sposób zależnych od czasu obserwacji jak w procesie $N(t)$ [4]. Procesy $N(t)$ i $X(t)$ nie są oczywiście identyczne: $N(t)$ jest procesem dyskretnym, $X(t)$ jest procesem ciągłym, okres czasu, w którym obserwowane zmiany mają rozkład normalny, jest dla $N(t)$ długi, a dla $X(t)$ nieskończenie mały, niemniej podobieństwo obu procesów istnieje i zastąpienie $N(t)$ procesem $X(t)$, jak zaproponował to Newell [9] i jak to potwierdzają liczne późniejsze zastosowania, por. np. [3], jest rozsądną aproksymacją systemu obsługi.

Funkcja gęstości $f(n,t,n_0)$ przybliża rozkład długości kolejki $p(n,t,n_0) = Pr[N(t) = n|N(0) = n_0]$. W interesującym nas modelu dopuszczalna liczba komórek może się zmieniać pomiędzy minimalną wartością 0 i maksymalną N. Trzeba więc ograniczyć proces dyfuzji do przedziału $x \in [0,N]$ dobierając dlań odpowiednie warunki brzegowe. Posłużymy się tu warunkami wprowadzonymi przez Gelenbego [4]. Gdy proces dyfuzji dochodzi do $x = 0$, zachowuje tę wartość przez czas, który jest wielkością losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_0, a następnie proces rozpoczyna się w punkcie x wylosowanym według rozkładu prawdopodobieństwa o funkcji gęstości $h(x)$. Czas, przez który $X(t) = 0$, odpowiada okresowi bezczynnemu, w którym w stanowisku nie ma zadań, a powrót na półoś $x > 0$ odpowiada rozpoczęciu nowego okresu czynnego. Ponieważ wiąże się to z nadejściem jednej komórki, przyjmiemy, że skoki procesu z $x = 0$ będą się zawsze odbywać do punktu $x = 1$; $h(x) = \delta(x-1)$. Będziemy dalej zakładać w przybliżeniu, że $\lambda_0 = \lambda$. Druga bariera jest umieszczona w $x = N$. Gdy proces dochodzi do niej, pozostaje w $x = N$ przez czas określony rozkładem wykładniczym o parametrze λ_N, po czym rozpoczyna się w punkcie $x = N-1$. Czas pobytu w tej barierze odpowiada czasowi, przez który kolejka jest pełna i nadchodzące zadania są gubione; skok do $x = N-1$ odpowiada odejściu obsługiwanego zadania (wysłaniu komórki) — stanowisko (bufor) znów może przyjmować zgłoszenia. Jako wartość λ_N wybieramy $\lambda_N = \mu$.

Równania dyfuzji przy opisanych warunkach brzegowych mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 f(x,t;x_0)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x} + \\ &\quad + \lambda_0 p_0(t)\delta(x-1) + \lambda_N p_N(t)\delta(x-N+1) \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\alpha}{2}\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x} - \beta f(x,t;x_0)\right] - \lambda_0 p_0(t) \\ \frac{dp_N(t)}{dt} &= -\lim_{x\to N}\left[\frac{\alpha}{2}\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x} - \beta f(x,t;x_0)\right] - \lambda_N p_N(t)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $p_N(t) = P[X(t) = N]$.

W stanie ustalonym równania (6) stają się zwykłymi równaniami różniczkowymi, a ich rozwiązanie dla $\varrho = \lambda/\mu \neq 1$, to [4]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda p_0}{-\beta}(1 - e^{sx}) & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \frac{\lambda p_0}{-\beta}(e^{-s} - 1)e^{sx} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant N-1 \\ \frac{\mu p_N}{-\beta}(e^{s(x-N)} - 1) & \text{dla} \quad N-1 \leqslant x < N\,, \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $z = \frac{2\beta}{\alpha}$, a p_0, p_N są określone przez warunek normalizacyjny.

W stanie nieustalonym, postępując zgodnie z metodą zaproponowaną w [2], rozpatrujemy najpierw proces dyfuzji rozpoczęty w chwili $t = 0$ w punkcie $x = x_0$ i ograniczony dwiema barierami pochłaniającymi w $x = 0$ i $x = N$. Funkcja gęstości tego procesu $\phi(x, t; x_0)$ ma postać [1]:

$$\phi(x,t;x_0) = \begin{cases} \delta(x - x_0) & \text{dla} \quad t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\Pi\alpha t}} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\frac{\beta x_n'}{\alpha} - \frac{(x - x_0 - x_n' - \beta t)^2}{2\alpha t}\right] \right. & \\ \qquad \left. - \exp\left[\frac{\beta x_n''}{\alpha} - \frac{(x - x_0 - x_n'' - \beta t)^2}{2\alpha t}\right] \right\} & \text{dla} \quad t > 0\,, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $x_n' = 2nN$, $x_n'' = -2x_0 - x_n'$.

Jeżeli warunek początkowy jest określony przez funkcję $\psi(x)$, $x \in (0, N)$, $\lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to N}\psi(x) = 0$, to funkcja gęstości ma postać:

$$\phi(x,t;\psi) = \begin{cases} \psi(x) & \text{dla} \quad t = 0 \\ \int_0^N \phi(x,t;\xi)\psi(\xi)d\xi & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Oznaczając $A(s) = \sqrt{\beta^2 + 2\alpha s}$, transformata Laplace'a funkcji $\phi(x, t; x_0)$ wyraża się jako:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x,s;x_0) &= \frac{\exp[\frac{\beta(x-x_0)}{\alpha}]}{A(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{|x - x_0 - x_n'|}{\alpha} A(s)\right] \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[-\frac{|x - x_0 - x_n''|}{\alpha} A(s)\right] \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{\phi}(x,s;\psi) = \int_0^N \bar{\phi}(x,s;\xi)\psi(\xi)d\xi \tag{11}$$

Funkcja gęstości $f(x, t; \psi)$ procesu dyfuzji z powrotami elementarnymi zawiera funkcję $\phi(x, t; \psi)$, która reprezentuje wpływ warunku początkowego oraz kompozycje funkcji $\phi(x, t-\tau; 1)$, $\phi(x, t-\tau; N-1)$, które są funkcjami procesów dyfuzji z barierami pochłaniającymi w punktach $x = 0$ i $x = N$, rozpoczętymi wcześniej, w czasie τ, w punktach $x = 1$ i $x = N - 1$, odpowiednio z intensywnością $g_1(\tau)$ i $g_{N-1}(\tau)$:

$$f(x,t;\psi) = \phi(x,t;\psi) + \int_0^t g_1(\tau)\phi(x,t-\tau;1)d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\phi(x,t-\tau;N-1)d\tau \tag{12}$$

Funkcje gęstości $\gamma_0(t)$, $\gamma_N(t)$ prawdopodobieństwa, że w chwili t proces dochodzi do barier w $x = 0$ i $x = N$, to

$$\begin{aligned}
\gamma_0(t) &= p_0(0)\delta(t) + \left[1 - p_0(0) - p_N(0)\right]\gamma_{\psi,0}(t) + \\
&\quad + \int_0^t g_1(\tau)\gamma_{1,0}(t-\tau)d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\gamma_{N-1,0}(t-\tau)d\tau \\
\gamma_N(t) &= p_N(0)\delta(t) + \left[1 - p_0(0) - p_N(0)\right]\gamma_{\psi,N}(t) + \int_0^t g_1(\tau)\gamma_{1,N}(t-\tau)d\tau + \\
&\quad + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\gamma_{N-1,N}(t-\tau)d\tau\,, \qquad (13)
\end{aligned}$$

gdzie $\gamma_{1,0}(t)$, $\gamma_{1,N}(t)$, $\gamma_{N-1,0}(t)$, $\gamma_{N-1,N}(t)$ są funkcjami gęstości czasu przejścia pomiędzy odpowiednimi punktami, np.

$$\gamma_{1,0}(t) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\phi(x,t;1)}{\partial x} - \beta\phi(x,t;1)\right]$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to 0}\phi(x,t;x_0) = \lim_{x\to N}\phi(x,t;x_0) = 0\,,$$

więc:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,0}(t) &= \lim_{x\to 0}\tfrac{\alpha}{2}\tfrac{\partial\phi(x,t;1)}{\partial x} & \gamma_{N-1,0}(t) &= \lim_{x\to 0}\tfrac{\alpha}{2}\tfrac{\partial\phi(x,t;N-1)}{\partial x} \\
\gamma_{1,N}(t) &= -\lim_{x\to N}\tfrac{\alpha}{2}\tfrac{\partial\phi(x,t;1)}{\partial x} & \gamma_{N-1,N}(t) &= -\lim_{x\to N}\tfrac{\alpha}{2}\tfrac{\partial\phi(x,t;N-1)}{\partial x}
\end{aligned} \qquad (14)$$

Funkcje $\gamma_{\psi,0}(t)$, $\gamma_{\psi,N}(t)$ oznaczają gęstości prawdopodobieństwa, że procesy rozpoczęte w $t = 0$ w punkcie ξ z intensywnością $\psi(\xi)$ zakończą się w chwili t, dochodząc odpowiednio do bariery w $x = 0$ lub $x = N$.

Intensywności $g_1(t)$, $g_N(t)$ możemy wyrazić za pośrednictwem funkcji $\gamma_0(t)$ i $\gamma_N(t)$:

$$\begin{aligned}
g_1(\tau) &= \int_0^\tau \gamma_0(t)l_0(\tau - t)dt \\
g_{N-1}(\tau) &= \int_0^\tau \gamma_N(t)l_N(\tau - t)dt
\end{aligned} \qquad (15)$$

Transformaty Laplace'a równań (13,15) dają nam $\bar{g}_1(s)$ oraz $\bar{g}_{N-1}(s)$:

$$\begin{aligned}
\bar{g}_1(s) &= \Big\{ p_0(0) + \left[1 - p_0(0) - p_N(0)\right]\bar{\gamma}_{\psi,0}(s) + \\
&\quad + \left[p_N(0) + \left(1 - p_0(0) - p_N(0)\right)\bar{\gamma}_{\psi,N}(s)\right]\frac{\bar{l}_N(s)\bar{\gamma}_{N-1,0}(s)}{1 - \bar{l}_N(s)\bar{\gamma}_{N-1,N}(s)} \Big\} \times \\
&\quad \times \frac{\bar{l}_0(s)}{1 - \bar{l}_0(s)\bar{\gamma}_{1,0}(s)}\left[1 - \frac{\bar{l}_0(s)\bar{\gamma}_{1,N}(s)}{1 - \bar{l}_0(s)\bar{\gamma}_{1,0}(s)}\frac{\bar{l}_N(s)\bar{\gamma}_{N-1,0}(s)}{1 - \bar{l}_N(s)\bar{\gamma}_{N-1,N}(s)}\right]^{-1} \\
\bar{g}_{N-1}(s) &= \frac{\bar{l}_N(s)}{1 - \bar{l}_N(s)\bar{\gamma}_{N-1,N}(s)}\left[p_N(0) + \left(1 - p_0(0) - p_N(0)\right)\bar{\gamma}_{\psi,N}(s) + \bar{g}_1(s)\bar{\gamma}_{1,N}(s)\right],
\end{aligned}$$

co pozwala nam określić transformatę Laplace'a poszukiwanej funkcji gęstości $f(x,t;\psi)$ dla procesu dyfuzji z powrotami

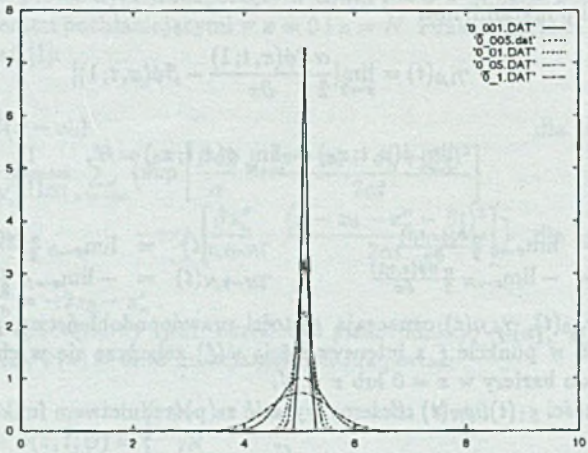
$$\bar{f}(x,s;\psi) = \bar{\phi}(x,s;\psi) + \bar{g}_1(s)\,\bar{\phi}(x,s;1) + \bar{g}_{N-1}(s)\,\bar{\phi}(x,s;N-1) \qquad (16)$$

Prawdopodobieństwa, że w chwili t proces ma wartość $x = 0$ lub $x = N$, to:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0(s) &= \frac{1}{s}\left[\bar{\gamma}_0(s) - \bar{g}_1(s)\right] \\ \bar{p}_N(s) &= \frac{1}{s}\left[\bar{\gamma}_N(s) - \bar{g}_{N-1}(s)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Oryginały tak określonych transformat znajdujemy numerycznie.

Rysunki 4,5,6 przedstawiają przykładowe rozwiązanie dyfuzji — funkcję gęstości dla różnych czasów przy warunku początkowym $x_0 = 5$ i barierach ograniczających proces do odcinka $x \in [0, 10]$.

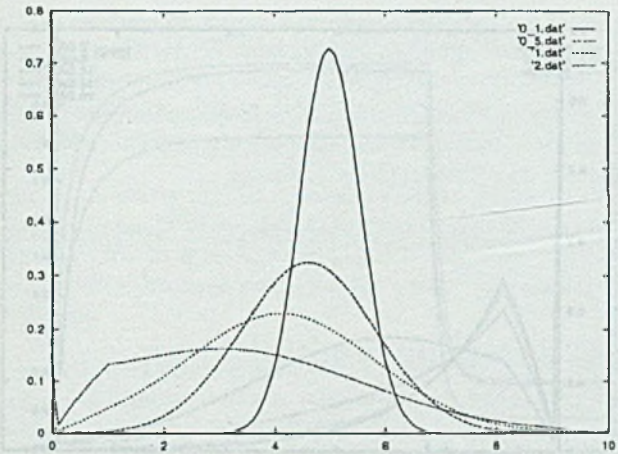


Rys. 4. Rozwiązanie równania dyfuzji w funkcji czasu, $t = 0.001$, $t = 0.005$, $t = 0.01$, $t = 0.05$, $t = 0.1$; $N = 10$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$

Fig. 4. Diffusion density as a function of time, $t = 0.001$, $t = 0.005$, $t = 0.01$, $t = 0.05$, $t = 0.1$; $N = 10$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$

Rysunek 7 pokazuje prawdopodobieństwo pełnej kolejki (pełnego bufora) w funkcji czasu uzyskane przez model dyfuzyjny i porównane z wynikami dokładnymi, uzyskanymi numerycznie dla tego samego przypadku.

Rysunki 8,9 przedstawiają zmiany długości średniej kolejki przy skokowych zmianach intensywności strumienia wejściowego w stanowisku ze stałym czasem obsługi (równym tutaj jednostce czasu). Na rys. 8 w chwili początkowej, w której panuje stan ustalony, intensywność zmienia wartość z $\lambda = 0.5$ na $\lambda = 0.8$ i wraca do $\lambda = 0.5$ w chwili $t = 200$. Długość średniej kolejki została obliczona jako $E[N(t)] = \sum_{n=0}^{100} p(n,t)n$, gdzie $p(n,t) = f(n,t)$ (rezultaty oznaczone „dyfuzja1") oraz $p(n,t) = \int_{n-1}^{n} f(x,t)dx$ („dyfuzja2"). Rysunek 9 przedstawia analogiczne rezultaty dla bardziej złożonych zmian strumienia wejściowego, włączając w to okres, gdy kolejka destabilizuje się. Rezultaty aproksymacji dyfuzyjnej porównano z wynikami symulacji. Te ostatnie otrzymano uśredniając 60 000 niezależnych realizacji procesu $N(t)$.



Rys. 5. Rozwiązanie równania dyfuzji w funkcji czasu, $t = 0.1$, $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$; $\lambda = 1$, $\mu = 2$

Fig. 5. Diffusion density as a function of time, $t = 0.1$, $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$; $\lambda = 1$, $\mu = 2$

Jak widać, zmiany długości kolejki przewidziane przez aproksymację dyfuzyjną dobrze pokrywają się z wynikami dokładnymi zarówno co do wartości, jak i dynamiki zmian. Uogólnijmy powyższe wyniki na przypadek wielu klas klientów. Niech stanowisko obsługuje K klas klientów. Każda klasa jest opisana przez swój strumień wejściowy, w którym zgłoszenia następują w odstępach czasu podlegającym rozkładowi $A^{(k)}(x)$, i ma czas obsługi o rozkładzie $B^{(k)}(x)$. Strumień wejściowy klasy k, $k = 1, \ldots, K$ jest opisany rozkładem $A^{(k)}(x)$, (o wartości średniej $1/\lambda^{(k)}$ i wariancji $\sigma_A^{(k)^2}$), a czas obsługi klientów tej klasy ma rozkład $B^{(k)}(x)$ o wartości średniej $1/\mu^{(k)}$ i wariancji $\sigma_B^{(k)^2}$. Funkcje gęstości tych rozkładów oznaczamy odpowiednio przez $a^{(k)}(x)$ i $b^{(k)}(x)$. Regulamin kolejki jest naturalny, przynależność do klasy nie wpływa na kolejność obsługi.

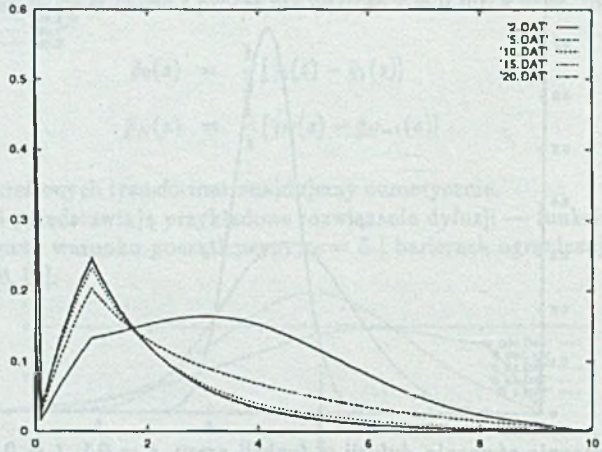
Dla wypadkowego strumienia klientów, zawierającego wszystkie klasy klientów, funkcje gęstości wynoszą:

$$a(x) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda} a^{(k)}(x) ,$$

$$b(x) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda} b^{(k)}(x) ,$$

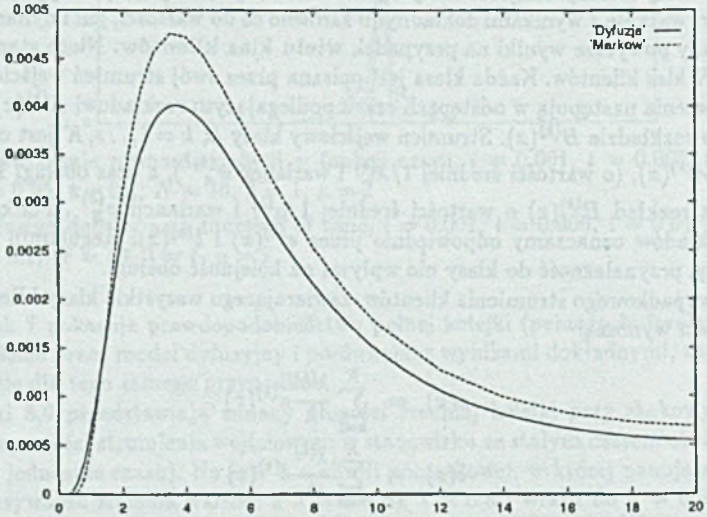
gdzie $\lambda = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k$, a $\lambda^{(k)}/\lambda$ jest prawdopodobieństwem, że dany klient należy do klasy k, pozwalają wyznaczyć wypadkowe parametry [5]:

$$C_A^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda} C_A^{(k)^2} \qquad \frac{1}{\mu} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda} \frac{1}{\mu^{(k)}} \tag{18}$$

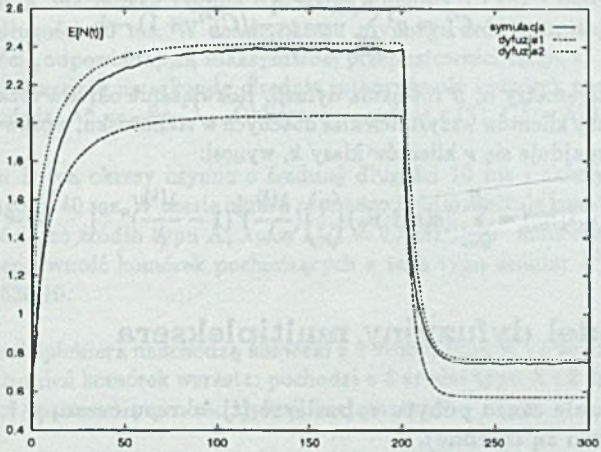


Rys. 6. Rozwiązanie równania dyfuzji w funkcji czasu, $t = 2$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$ $t = 20$; $\lambda = 1$, $\mu = 2$

Fig. 6. Diffusion density as a function of time, $t = 2$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$ $t = 20$; $\lambda = 1$, $\mu = 2$

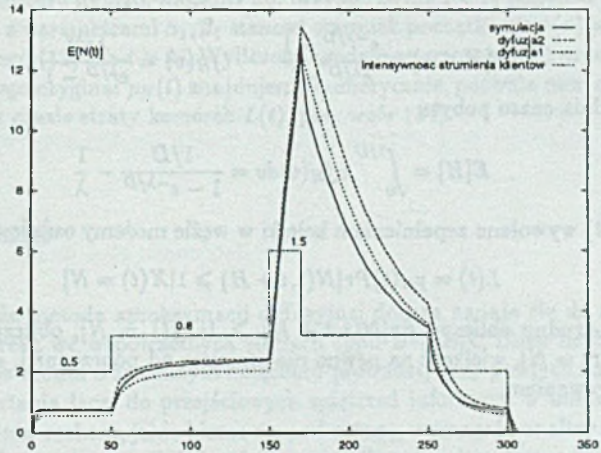


Rys. 7. Prawdopodobieństwo $p(10, t)$ (prawdopodobieństwo przepełnienia bufora) obliczone numerycznie za pomocą modelu markowowskiego i modelem dyfuzyjnym



Rys. 8. Średnia długość kolejki w funkcji zmian intensywności poissonowskiego strumienia wejściowego λ – porównanie rezultatów aproksymacji dyfuzyjnej i symulacji; czas obsługi jest stały i równy jednostce czasu

Fig. 8. Mean queue length as a function of tine-dependent input stream intensity – diffusion approximation and simulation results; service time is constant and equal the time unit



Rys. 9. Średnia długość kolejki w funkcji zmian intensywności poissonowskiego strumienia wejściowego λ – porównanie rezultatów aproksymacji dyfuzyjnej i symulacji; czas obsługi jest stały i równy jednostce czasu

$$C_B^2 = \mu^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda} \frac{1}{\mu^{(k)^2}} (C_B^{(k)^2} + 1) - 1 \tag{19}$$

a następnie parametry α, β równania dyfuzji. Rozwiązanie określa rozkład $p(n,t,n_0) \approx f(n,t,n_0)$ liczby klientów wszystkich klas obecnych w stanowisku, a prawdopodobieństwo, że w kolejce znajduje się ν klientów klasy k, wynosi:

$$p^{(k)}(\nu,t;n_0) = \sum_{n=\nu}^{N} [p(n,t;n_0) \binom{n}{\nu} (\frac{\lambda^{(k)}}{\lambda})^{\nu} (1 - \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda})^{n-\nu}] \qquad k = 1,...,K \tag{20}$$

4. Model dyfuzyjny multipleksera

Oszacowanie czasu pobytu w barierze (tj. okresu czasu, w którym nadchodzące komórki są tracone).

Czas wysyłu komórki jest stały i wynosi $1/D$. Załóżmy, że transmisja zaczyna się w chwili t i że $X(t) = N - 1$. W pewnej chwili $t + Z$, przed $t + 1/D$, przychodzi następna komórka i $X(t + 1/D) = N$. Czas H pobytu w barierze, jeżeli proces nadejść jest poissonowski z parametrem λ, jest określony rozkładem:

$$Pr[H \leqslant v] = Pr[\frac{1}{D} - Z \leqslant v \,\Big|\, Z \leqslant \frac{1}{D}] = \frac{Pr[\frac{1}{D} - v \leqslant Z \leqslant \frac{1}{D}]}{Pr[Z \leqslant \frac{1}{D}]} = \frac{e^{-\lambda/D}[e^{\lambda v} - 1]}{1 - e^{-\lambda/D}}, \tag{21}$$

czyli

$$Pr[H \leqslant v] = \frac{e^{-\lambda/D} - 1}{e^{\lambda/D} - 1} \qquad f_H(v) = \frac{\lambda e^{\lambda v}}{e^{\lambda/D} - 1} \tag{22}$$

i wartość średnia czasu pobytu

$$E[H] = \int_0^{1/D} v f_H(v) dv = \frac{1/D}{1 - e^{-\lambda/D}} - \frac{1}{\lambda} \tag{23}$$

Straty $L(t)$ wywołane zepełnieniem kolejki w węźle możemy oszacować jako:

$$L(t) = p_N(t) Pr[N(t, t+H) \geqslant 1 | X(t) = N] \tag{24}$$

Ponieważ trudno obliczyć $Pr[N(t,t+H) \geqslant 1|X(t) = N]$, obliczamy $Pr[N(t,t+1/D) \geqslant 1|X(t) = N]$, wielkość na pewno nie mniejszą od poprzedniej, a więc będącą jej górnym oszacowaniem.

5. Obliczenia numeryczne

Przyjmijmy, że przepustowość łącza wynosi 150 Mbitów/s. Emisja komórki o wymiarze 53 bajtów trwa więc $\frac{53 \times 8}{150 \times 10^6}$ sekundy. Przyjmijmy też, że strumień jest superpozycją dwu typów źródeł:

- Źródło typu A ma okresy czynne o średniej długości 10 ms i okresy milczenia o średniej długości 90 ms. W czasie okresu czynnego źródło emituje komórki z intensywnością odpowiadającą maksymalnej przepustowości łącza, tj. $\lambda_A = 1/D = 0.3537 \times 10^6$ komórek na sekundę. Średnia intensywność komórek pochodzących z tego typu źródła: $\lambda^A = \frac{0.1}{0.1+0.9}\lambda_A$. Obliczamy, zgodnie z (3), $C_A^2 = 5731.67$.

- Źródło typu B ma okresy czynne o średniej długości 10 ms i okresy milczenia o średniej długości 40 ms. W czasie okresu czynnego źródło emituje komórki z tą samą intensywnością co źródło typu A, $\lambda_B = 1/D = 0.3537 \times 10^6$ komórek na sekundę. Średnia intensywność komórek pochodzących z tego typu źródła: $\lambda^B = \frac{0.1}{0.1+0.4}\lambda_B$ oraz $C_B^2 = 530.10$.

Początkowo do multipleksera nadchodzą komórki z 3 źródeł typu A i 1 ze źródła typu B, w chwili $t = t_1$ strumień komórek wzrasta: pochodzi z 4 źródeł typu A i 2 źródeł typu B. Dla czasu $t < t_1$ parametry procesu dyfuzji mają wartość

$$\alpha_1 = 3\lambda^A C_A^2 + \lambda^B C_B^2 = 645\,687\,456\,, \qquad \beta_1 = 3\lambda^A + \lambda^B - D = -360\,150\,,$$

a dla czasu $t \geqslant t_1$

$$\alpha_2 = 4\lambda^A C_A^2 + 2\lambda^B C_B^2 = 885\,916\,289\,, \qquad \beta_1 = 4\lambda^A + 2\lambda^B - D = -70\,740$$

Wyznaczone współczynniki α_1, β_1 i α_2, β_2 pozwalają uzyskać rozwiązanie w postaci funkcji gęstości procesu dyfuzji. Możemy np. przyjąć, że dla $t < t_1$ panował stan ustalony i rozwiązanie (7) z parametrami α_1, β_1 stanowi warunek początkowy $\psi(x)$ w rozwiązaniu stanu nieustalonego (12) dla $t > t_1$. Wyliczone zgodnie ze wzorem (17) prawdopodobieństwo $\bar{p}_N(s)$, którego oryginał $p_N(t)$ znajdujemy numerycznie, pozwala nam oszacować dla $t > t_1$ zmienne w czasie straty komórek $L(t)$, por. wzór (24).

6. Wnioski

Wydaje się, że metoda aproksymacji dyfuzyjnej dobrze nadaje się do analizy ruchu pakietów (komórek) we współczesnych sieciach typu B-ISDN. Duża liczba informacji, generowana przez źródła o zmiennym natężeniu prowadzi, przy polityce zmierzającej do dużego wykorzystania łącz, do przejściowych spiętrzeń informacji w buforach sieci. Algorytmy sterowania ruchem, jakie bierze się pod uwagę, wymagają analizy stanów przejściowych. Metoda aproksymacji dyfuzyjnej w sposób naturalny dostarcza opisu stanów nieustalonych i jest dokładniejsza niż stosowana często w takich przypadkach metoda tzw. aproksymacji płynnej, która traktuje ruch strumienia informacji jak rozpływ cieczy w sieci rurociągów (i uwzględnia jedynie średnie wartości przesyłu), a mniej skomplikowana i wymagająca stosunkowo mniejszych (choć niemałych) nakładów obliczeniowych, niż modele markowowskie, prowadzące do bardzo dużych układów równań różniczkowych, wymagających numerycznego rozwiązania.

LITERATURA

[1] Cox R. P., Miller H. D.: The Theory of Stochastic Processes. Chapman and Hall, London 1965.

[2] Czachórski T.: A method to solve diffusion equation with instantaneous return processes acting as boundary conditions. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Technical Sciences 41 (1993), no. 4.

[3] Czachórski T.: Modele kolejkowe systemów komputerowych. Skrypt Politechniki Śląskiej, nr 1844, Gliwice 1994.

[4] Gelenbe E.: On Approximate Computer Systems Models. J. ACM, vol. 22, no. 2, 1975.

[5] Gelenbe E., Pujolle G.: The Behaviour of a Single Queue in a General Queueing Network. Acta Informatica, Fasc. 7, 1976.

[6] Gelenbe E., Mang X., Feng Y.: A diffusion cell loss estimate for ATM with multiclass bursty traffic. in: D. D. Kouvatsos (Editor), Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, Vol. 2, Chapman and Hall, London 1996 (in print).

[7] Heffes H., Lucantoni D. M.: A Markov modulated characterization of packetized voice and data traffic and related statistical multiplexer parformance. IEEE J. SAC, SAC-4(6), pp. 856-867, 1986.

[8] Nagai K., Akimaru H., Okuda T.: A simplified performance evaluation for bursty multiclass traffic in ATM systems. IEEE Transactions on Communications, COM-42 No. 5, pp. 2078-2083, 1994.

[9] Newell G. F.: Applications of Queueing Theory. Chapman and Hall, London 1971.

[10] Kobayashi H., Ren Q.: A diffusion approximation analysis of an ATM statistical multiplexer with multiple state solutions: Part I: Equilibrium state Solutions. Proc. ICC'93, pp. 1047-1053, 1993.

[11] Sriram K., Whitt W.: Characterizing superposition arrival processes in packet multiplexers for voice and data. IEEE J. SAC, SAC-4(6), pp. 833-846, 1986.

Recenzent: Prof. dr inż. Stefan Węgrzyn

Wpłynęło do Redakcji 27 grudnia 1995r.

Abstract

The article presents a model of statistical multiplexer in ATM network. Multiple types of transfers performed via a B-ISDN network, e.g. image file transfer, encoded video, multimedia database access, distributive computing have large maximum-to-average bit rate ratio, which reacheng the order of tens or hundreds. To achieve high resource utilisation, it is possible to reserve less bandwith in the network than the application's peak

bit rate. However, as the arrival rate of cells at a particular outgoing link may exceed the link bandwith, the danger of overflows arises. The queueing model is based on diffusion approximation and reduces the analysis of the multiplexer to the solution of a multiclass single server queueing model with general input, limited queue and constant service time (G/D/1/N model). The input streams are characterized by on-off models. Diffusion approximation gives us a tool to obtain transient solution of the whole model and to predict the time-varying distribution of the number of cells in the multiplexer output ports as well as the probability that the output buffer is full and the incoming cells are lost. The results prove that the diffusion approximation is suitable tool to evaluate transient states of the multiplexer but its implementation needs some careful programming and the time of computing the results is not negligable.