

Tadeusz CZACHÓRSKI

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN

Tülin ATMACA, Badii JOUABER

Institut National des Télécommunications, Evry, France

Jean-Michel FOURNEAU, Leïla KLOUL

PRiSM, Université de Versailles, France

Ferhan PEKERGIN

LIPN, Université Paris-Nord, France

## KOLEJKOWANIE PAKIETÓW W WĘZŁACH SIECI – MODELE DYFUZYJNE

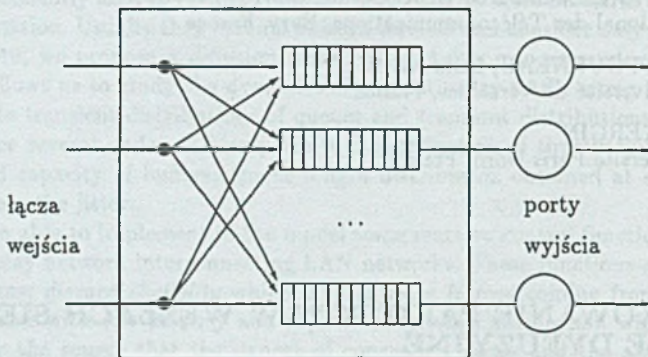
**Streszczenie.** Artykuł rozpatruje kilka opartych na teorii dyfuzji modeli szeregowania pakietów czekających na wysłanie w kolejce przełącznika sieci. Rozpatrzono m.in. stosowane obecnie regulaminy z wypychaniem i progowy. Szczególną uwagę poświęcono analizie stanów nieustalonych, pozwalającą wyznaczyć prawdopodobieństwo strat pakietów przy zmiennym w czasie ich natężeniu.

## QUEUEING PACKAGES IN NETWORK NODES – DIFFUSION MODELS

**Summary.** The article considers several queueing models based on diffusion theory and evaluating various algorithms of queueing packages waiting to be transmitted in a multiplexer buffer. Among others, the models of push-out and threshold queueing policies are presented. Particular attention was paid to the transient state analysis giving estimation of cell loss for time-dependent intensity of cell stream.

## 1. Wstęp

Przedstawione w artykule modele analizują pracę różnych mechanizmów szeregowania pakietów w przełączniku (multiplexerze) sieciowym. Pakiety przychodzą do przełącznika z różnych kierunków i są kolejgowane w buforach zgodnie z kierunkiem ich dalszego przesłania, rys. 1.



Rys. 1. Model multiplexera

Fig. 1. Multiplexer model

Modele pozwalają określić w przybliżeniu zmienną w funkcji czasu liczbę komórek czekających na wysłanie, a przez to oszacować również zmienne w czasie prawdopodobieństwo strat komórek wynikające z przepelnienia buforów. Nieregularność natężenia strumienia pakietów (komórek) pociąga za sobą konieczność analizy stanów niestabilnych. Analiza działania multiplexerów ATM jest też ważna przy projektowaniu mechanizmów sterowania natężeniem ruchu, jakie mogą być uwzględnione w projektowanej sieci.

Model zakłada, że szybkość działania przełącznika jest większa niż łączy na jego wejściu i wyjściu, można więc pominąć w modelu kolejgowanie komórek na wejściach, przed ich skierowaniem do odpowiednich portów wyjściowych przełącznika — natomiast wąskie gardło układu stanowią kolejki komórek na jego wyjściu, zgrupowanych już według kierunku, w którym mają być wysłane i oczekujących na emisję. Danemu kierunkowi odpowiada jedna kolejka. Ze względu na symetrię opisu, rozważania można ograniczyć do jednej kolejki. Do konstrukcji modeli wykorzystano aproksymację dyfuzyjną. Wprowadzenie do tej aproksymacji zawiera artykuł [7] znajdujący się w tym samym numerze Zeszytów Naukowych. Notacja wykorzystana w niniejszym artykule jest w pełni zgodna z wprowadzoną w [7]. Szerszy opis aproksymacji dyfuzyjnej zawierają m.in. [16, 9, 5]. Aproksymacja ta jest stosowana głównie z dwu powodów: (a) pozwala na przyjęcie ogólnych założeń co do strumienia nadchodzących pakietów (nie musi to być strumień Poissona) i co do czasu transmisji (nie musi to być czas opisany rozkładem wykładniczym, w szczególności może to być czas stały). Kolejne paragrafy rozpatrują różne regulaminy



szeregowania pakietów. Rezultaty w nich zebrane były częściowo publikowane przez autorów w pracach [3, 4, 6]. Najwięcej uwagi poświęcono dwu regulaminom: regulaminowi progowemu (*threshold*) i regulaminowi z wypychaniem (*push-out*), stosowanym obecnie w sieciach typu ATM i Frame Relay i należących do tzw. klasy regulaminów przestrzennie priorytetowych (*space priority*). Zakładamy, że istnieją dwie klasy pakietów (komórek) – klasa pierwsza, priorytetowa i klasa druga o niższym priorytecie.

## 2. Przełącznik z regulaminem progowym

Działanie regulaminu progowego kolejki jest następujące: jeżeli liczba komórek  $n$  w węzle nie przekracza wartości progowej  $N_1$ , obie klasy komórek (priorytetowa i zwykła) są przyjmowane; gdy liczba komórek przekracza  $N_1$ , przyjmowane są tylko komórki o wyższym priorytecie, a pozostałe są tracone. Modele opisujące ten mechanizm wykorzystują zwykle łańcuchy Markowa [12, 14, 15].

Oznaczmy przez  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  intensywność strumieni komórek klasy pierwszej i drugiej. Strumień efektywny, przechodzący przez węzeł ma wartość  $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}$ , gdy  $n \leq N_1$ , oraz  $\lambda^{(1)}$ , gdy  $n > N_1$ . Ponieważ efektywny strumień wejściowy jest zależny od stanu kolejki, wykorzystamy model dyfuzyjny z parametrami  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  zależnymi od wartości procesu. Trzeba odpowiednio dobrać postać  $\alpha(x)$  i  $\beta(x)$ , tak by opisywały one zależność strumienia wejściowego od kolejki; przyjmijmy tutaj

$$\beta(x) = \begin{cases} \beta_1 = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} - \mu & \text{dla } 0 < x \leq N_1, \\ \beta_2 = \lambda^{(1)} - \mu & \text{dla } N_1 < x < N, \end{cases}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 = \lambda^{(1)}C_A^{(1)2} + \lambda^{(2)}C_A^{(2)2} + \mu C_B^2 & \text{dla } 0 < x \leq N_1, \\ \alpha_2 = \lambda^{(1)}C_A^{(1)2} + \mu C_B^2 & \text{dla } N_1 < x < N. \end{cases} \quad (1)$$

Niech  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  oznaczają odpowiednio funkcję gęstości prawdopodobieństwa w przedziałach  $x \in (0, N_1]$  i  $x \in [N_1, N)$ . Otrzymujemy

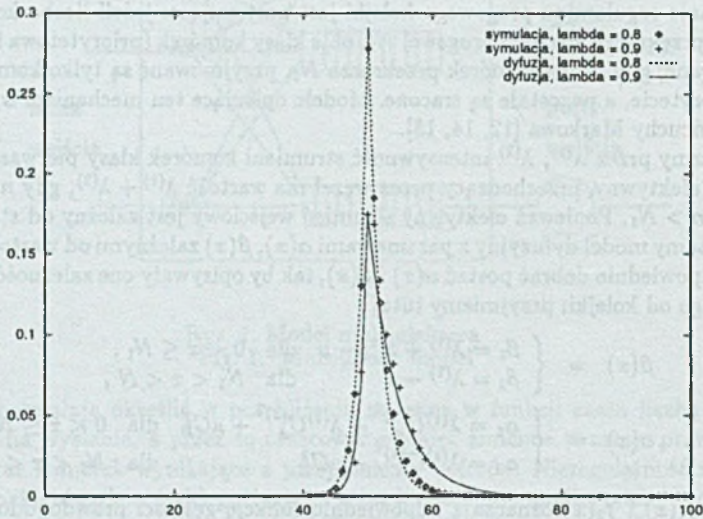
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{[\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}]p_0}{-\beta_1} (1 - e^{z_1 x}) & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ \frac{[\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}]p_0}{-\beta_1} (1 - e^{z_1}) e^{z_1(x-1)} & \text{dla } 1 \leq x \leq N_1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(N_1) e^{z_1(x-N_1)} & \text{dla } N_1 \leq x \leq N-1, \\ \frac{\mu p_N}{\beta_2} [1 - e^{z_1(x-N)}] & \text{dla } N-1 \leq x < N, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie  $z_n = \frac{2\beta_n}{\alpha_n}$ ,  $n = 1, 2$ . Prawdopodobieństwa  $p_0$ ,  $p_N$  są wyznaczone z warunku normalizacji. Współczynnik strat  $L^{(1)}$ , czyli prawdopodobieństwo straty komórki klasy pierwszej, wyraża się przez prawdopodobieństwo  $p_N$ , współczynnik  $L^{(2)}$  przez prawdopodobieństwo

$$P[x > N_1] = \int_{N_1}^N f_2(x) dx + p_N.$$

Przykład numeryczny. Załóżmy, że długość bufora wynosi  $N = 100$ , a próg ma wartość  $N_1 = 50$ . Rozkład łącznej liczby pakietów obu klas określony rozwiązaniem (2) i wynikający z symulacji podany jest, dla kilku intensywności strumieni wejściowych, w skali liniowej na rys. 2 i w skali logarytmicznej na rys. 3. Niektóre rezultaty są porównane z wynikami symulacji – było to możliwe dla relatywnie dużych wartości prawdopodobieństw, dla pozostałych czas potrzebnej symulacji przekraczał rozsądne granice. Na rys. 4 zaznaczono prawdopodobieństwo, że bufor jest pełen, oraz prawdopodobieństwo, że próg jest przekroczony – to ostatnie porównano z prawdopodobieństwami strat komórek klasy 2 otrzymanymi drogą symulacji (prawdopodobieństwa strat komórek klasy 1 były zbyt małe, by otrzymać je symulacyjnie).

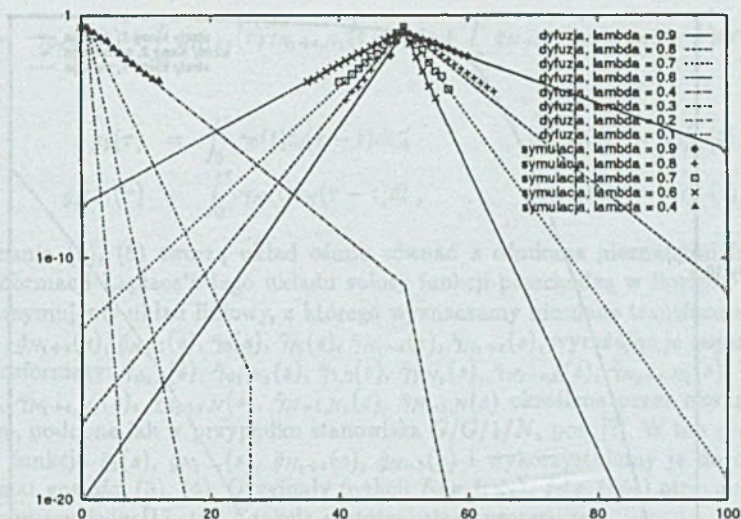


Rys. 2. Rozkład w stanie ustalonym łącznej liczby komórek dla parametrów strumienia wejściowego  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.8, 0.9$ ; rezultaty modelu dyfuzyjnego i symulacji

Fig. 2. Steady state distribution of the number of cells for traffic densities  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.9, 0.9$ ; diffusion and simulation results

Opisując stan nieustalony posłużymy się tą samą techniką co w przypadku stonowiska  $G/G/1/N$ , por. [7]. Ponieważ obecnie mamy dwa przedziały dyfuzji o różnych parametrach, w stanie nieustalonym istnieje między nimi przepływ masy prawdopodobieństwa, który zbilansujemy ustawiając na granicy obu przedziałów, tj. w  $x = N_1$ , dodatkową barierę. Rozważmy dwa oddzielne procesy dyfuzji  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , określone odpowiednio na przedziałach  $x \in (0, N_1)$  i  $x \in (N_1, N)$ . W  $x = 0$  jest bariera z czasem pobytu określonym funkcją gęstości  $l_0(t)$  i powrotami do  $x = 1$ . W  $x = N_1$  umieszczona jest bariera absorbująca proces  $X_1(t)$ . Oznaczmy przez  $\gamma_{N_1}^+(t)$  funkcję gęstości prawdopodobieństwa, że proces  $X_1(t)$  osiąga tę barierę w chwili  $t$ . Proces jest generowany na nowo w punkcie  $x = N_1 - \varepsilon$  z intensywnością  $g_{N_1-\varepsilon}(t)$ .





Rys. 3. Rozkład w stanie ustalonym łącznej liczby komórek dla parametrów strumienia wejściowego  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.1 - 0.9$ ; rezultaty modelu dyfuzyjnego i symulacji przedstawione w skali logarytmicznej

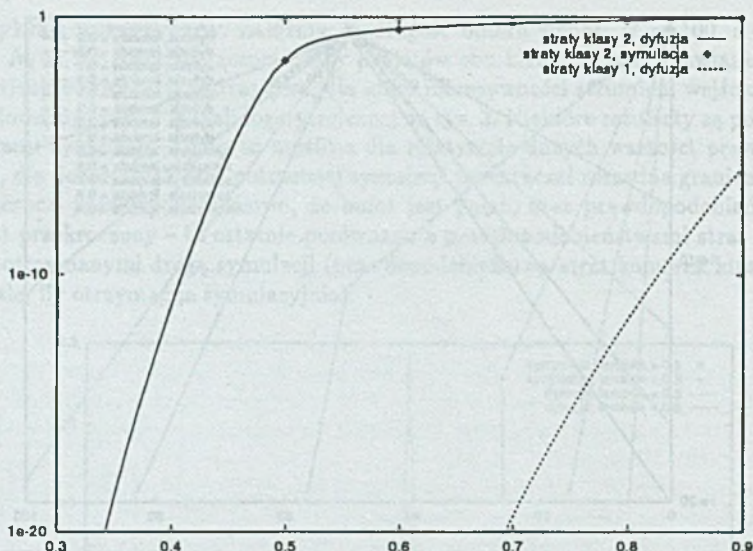
Fig. 3. Steady state distribution of the number of cells for traffic densities  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.1 - 0.9$ ; diffusion and simulation results in logarithmic scale

Proces  $X_2(t)$  jest ograniczony od góry barierą w  $x = N$  z czasem pobytu o gęstości  $l_N(t)$  i powrotami do  $x = N - 1$ , a od dołu barierą pochłaniającą w  $x = N_1$ . Jest inicjalizowany w  $x = N_1 + \varepsilon$  z intensywnością  $g_{N_1+\varepsilon}(t)$ . Niech  $\gamma_{N_1}^R(t)$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa pochłonięcia procesu  $X_2(t)$  przez barierę w  $x = N_1$ . Współzależność obu procesów jest opisana równaniami

$$g_{N_1+\varepsilon}(t) = \gamma_{N_1}^L(t) \quad \text{i} \quad g_{N_1-\varepsilon}(t) = \gamma_{N_1}^R(t),$$

tj. w każdej chwili prawdopodobieństwo zakończenia jednego procesu w barierze w  $x = N_1$  jest równe prawdopodobieństwu rozpoczęcia drugiego procesu po drugiej stronie bariery, w odległości  $\varepsilon > 0$  (wprowadzonej po to, by uniknąć natychmiastowego pochłonięcia procesu przez barierę).

Analogicznie jak w systemie  $G/G/1/N$  określamy funkcje gęstości  $f_1(x, t; \psi_1)$ ,  $f_2(x, t; \psi_2)$  obu procesów poprzez superpozycję funkcji gęstości  $\phi_1(x, t; x_0)$ ,  $\phi_2(x, t; x_0)$  dla procesów dyfuzji, z których pierwszy jest określony na tym samym przedziale co proces  $X_1(t)$ , a drugi na tym samym przedziale co proces  $X_2(t)$ , lecz oba są ograniczone barierami pochłaniającymi i kończą się w momencie dojścia do którejkolwiek z nich:



Rys. 4. Prawdopodobieństwo przekroczenia progu i wypełnienia bufora podane przez model dyfuzyjny oraz określone przez symulację prawdopodobieństwo strat klasy 2 jako funkcja intensywności strumieni wejściowych  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.3 - 0.9$

Fig. 4. Probability that the threshold is attained and that the buffer is full given by diffusion model; probability of class 2 losses as a function of  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda = 0.3 - 0.9$ , simulation results

$$f_1(x, t; \psi_1) = \phi_1(x, t; \psi_1) + \int_0^t g_1(\tau) \phi_1(x, t - \tau; 1) d\tau + \int_0^t g_{N_1 - \epsilon}(\tau) \phi_1(x, t - \tau; N_1 - \epsilon) d\tau, \quad (3)$$

$$f_2(x, t; \psi_2) = \phi_2(x, t; \psi_2) + \int_0^t g_{N-1}(\tau) \phi_2(x, t - \tau; N - 1) d\tau + \int_0^t g_{N_1 + \epsilon}(\tau) \phi_2(x, t - \tau; N_1 + \epsilon) d\tau. \quad (4)$$

Dla wykorzystania tych rozwiązań trzeba określić gęstości  $g_1(t)$ ,  $g_{N_1 - \epsilon}(t)$ ,  $g_{N_1 + \epsilon}(t)$ ,  $g_{N-1}(t)$ . Równania bilansujące przepływ prawdopodobieństwa mają obecnie postać

$$\gamma_0(t) = p_0(0)\delta(t) + \gamma_{\psi_1, 0}(t) + \int_0^t g_1(\tau) \gamma_{1, 0}(t - \tau) d\tau + \int_0^t g_{N_1 - \epsilon}(\tau) \gamma_{N_1 - \epsilon, 0}(t - \tau) d\tau,$$

$$\gamma_{N_1}^k(t) = \gamma_{\psi_1, N_1}(t) + \int_0^t g_1(\tau) \gamma_{1, N_1}(t - \tau) d\tau + \int_0^t g_{N_1 - \epsilon}(\tau) \gamma_{N_1 - \epsilon, N_1}(t - \tau) d\tau,$$

$$\gamma_N(t) = p_N(0)\delta(t) + \gamma_{\psi_2, N}(t) + \int_0^t g_{N_1 + \epsilon}(\tau) \gamma_{N_1 + \epsilon, N}(t - \tau) d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau) \gamma_{N-1, N}(t - \tau) d\tau,$$



$$\gamma_{N_1}^R(t) = \gamma_{\psi_2, N_1}(t) + \int_0^t g_{N_1+\varepsilon}(\tau) \gamma_{N_1+\varepsilon, N_1}(t-\tau) d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau) \gamma_{N-1, N_1}(t-\tau) d\tau \quad (5)$$

oraz

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \int_0^\tau \gamma_0(t) l_0(\tau-t) dt, & g_{N_1+\varepsilon}(t) &= \gamma_{N_1}^L(t), \\ g_{N-1}(\tau) &= \int_0^\tau \gamma_N(t) l_N(\tau-t) dt, & g_{N_1-\varepsilon}(t) &= \gamma_{N_1}^R(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Równania (5), (6) tworzą układ ośmiu równań z ośmioma nieznanymi funkcjami. Po transformacji Laplace'a tego układu spłaty funkcji przechodzą w iloczynowy transformat i otrzymujemy układ liniowy, z którego wyznaczamy nieznanne transformaty:  $\bar{g}_1(s)$ ,  $\bar{g}_{N_1-\varepsilon}(s)$ ,  $\bar{g}_{N_1+\varepsilon}(s)$ ,  $\bar{g}_{N-1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_0(s)$ ,  $\bar{\gamma}_N(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1-\varepsilon}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1+\varepsilon}(s)$ , wyrażając je poprzez znane nam transformaty:  $\bar{\gamma}_{\psi_1, 0}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{\psi_1, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{1, 0}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{1, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1-\varepsilon, 0}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1-\varepsilon, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{\psi_2, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{\psi_2, N}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1+\varepsilon, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N_1+\varepsilon, N}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N-1, N_1}(s)$ ,  $\bar{\gamma}_{N-1, N}(s)$  określone przez równania typu bilansowe, podobne jak w przypadku stanowiska  $G/G/1/N$ , por. [7]. W ten sposób uzyskujemy funkcje  $\bar{g}_1(s)$ ,  $\bar{g}_{N_1-\varepsilon}(s)$ ,  $\bar{g}_{N_1+\varepsilon}(s)$ ,  $\bar{g}_{N-1}(s)$  i wykorzystujemy je do określenia transformat gęstości (3), (4). Oryginały funkcji  $f_1(x, t; \psi_1)$ ,  $f_2(x, t; \psi_2)$  otrzymujemy następnie numerycznie, [17, 19]. Funkcja gęstości całego procesu to

$$f(x, t; \psi) = \begin{cases} f_1(x, t; \psi_1) & \text{dla } 0 < x < N_1, \\ f_2(x, t; \psi_2) & \text{dla } N_1 < x < N. \end{cases}$$

Podobnie możemy postąpić w przypadku większej liczby przedziałów o różnych wartościach parametrów dyfuzji, oddzielonych od siebie barierami podobnymi do tej, którą ustawiliśmy w  $x = N_1$ .

Dla określenia liczby komórek poszczególnych klas trzeba rozważyć skład strumienia wejściowego i wyjściowego. Oznaczmy przez  $p^{(i)}(t)$  prawdopodobieństwo, że nadchodząca w chwili  $t$  komórka należy do klasy  $i$ :

$$p^{(i)}(t) = \frac{\lambda_{\text{eff}}^{(i)}(t)}{\lambda_{\text{eff}}^{(1)}(t) + \lambda_{\text{eff}}^{(2)}(t)}, \quad (7)$$

gdzie

$$\lambda_{\text{eff}}^{(1)}(t) = \lambda^{(1)}(t)[1 - p_N(t)], \quad \lambda_{\text{eff}}^{(2)}(t) = \lambda^{(2)}(t)[1 - p_{n \geq N_1}(t)] \quad (8)$$

$p_{n \geq N_1}(t)$  jest prawdopodobieństwem, że bufor jest niedostępny dla komórek drugiej klasy. Spróbujmy opisać wzajemne zależności komórek obu klas, a następnie rozpatrzmy każdą klasę niezależnie. Znamy rozkład liczby  $n(t)$  komórek obu klas łącznie obecnych w buforze w chwili  $t$ . Niech  $\nu(t)$ ,  $0 \leq \nu(t) \leq n$  oznacza liczbę komórek klasy pierwszej zebranych na końcu bufora, za ostatnią komórką klasy drugiej, widzianą przez przybywającą w chwili  $t$  następną komórkę klasy drugiej. Czas obsługi jest równy jednostce czasu, więc efektywny czas obsługi dla komórek klasy drugiej, jeżeli pominiemy obecność klasy pierwszej, wynosi  $1 + \nu$ . Niech spośród  $n$  komórek w buforze  $n^{(2)}(t)$  należy do klasy drugiej:

$$P[\nu = i \mid n(t) = n, n^{(2)}(t) = n^{(2)}] = \frac{C_{n-i-1}^{n^{(2)}-1}}{C_n^{n^{(2)}}}, \quad 0 \leq \nu \leq n - n^{(2)}, \quad (9)$$

gdzie

$$C_m^l = \begin{cases} \frac{m!}{l!(m-l)!} & \text{dla } m \geq l \geq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jeżeli  $n^{(2)} = 0$ , to  $P(\nu = i | n) = \delta_{i,n}$  gdzie  $\delta_{i,n}$  jest symbolem Kroneckera. Określmy prawdopodobieństwo  $\nu = i$  gdy  $n(t) = n$ , dla wszystkich możliwych wartości  $n^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} P[\nu = i | n(t) = n] &= (1 - p^{(2)})^i \delta_{i,n} + \sum_{n^{(2)}=1}^{\min\{n-i, N_1-1\}} P[n^{(2)} | n] P[\nu = i | n, n^{(2)}] \\ &= (1 - p^{(2)})^i \delta_{i,n} + \sum_{n^{(2)}=1}^{\min\{n-i, N_1-1\}} C_{n-i-1}^{n^{(2)}-1} p^{(2)n^{(2)}} (1 - p^{(2)})^{n-n^{(2)}} \end{aligned} \quad (10)$$

oraz rozkład  $\nu$

$$P[\nu = i] = (1 - p^{(2)})^i P[n(t) = i] + \sum_{l=0}^N P[n(t) = l] \sum_{m=1}^{\min\{l-i, N_1-1\}} C_{l-i-1}^{m-1} p^{(2)m} (1 - p^{(2)})^{l-m}. \quad (11)$$

Możemy teraz określić wartość średnią i współczynnik zmienności zmiennej losowej  $B^{(2)}$  przedstawiającej efektywny czas obsługi komórek klasy drugiej,  $B^{(2)}(t) = 1 + \nu(t)$ :

$$E[B^{(2)}(t)] = 1 + E[\nu(t)], \quad C_B^{(2)^2}(t) = \frac{E[B^{(2)}(t)]^2}{E[B^{(2)}(t)]^2} - 1 = \frac{E[\nu^2(t)] - E[\nu(t)]^2}{(E[\nu(t)] + 1)^2}. \quad (12)$$

Współczynnik  $C_B^{(2)^2}$  jest dany równaniem (12);  $C_B^{(1)^2}$  możemy określić w podobny sposób, a  $C_A^{(1)^2}$ ,  $C_A^{(2)^2}$  są określone na podstawie strumieni wejściowych.

Zmiany intensywności strumieni wejściowych w chwili  $t$  mają wpływ na strumień wyjściowy z opóźnieniem  $n(t)$ , a na efektywny czas obsługi klientów klasy drugiej z opóźnieniem  $\mu^{(2)}(t + n(t) - \nu(t))$ . Skład końca kolejki (liczba  $\nu(t)$ ) zależy nie tylko od składu strumienia  $p(t)$  w chwili  $t$ , ale od jego przebiegu od chwili nadejścia ostatniej komórki klasy drugiej i trudno w prosty sposób określić opóźnienie, z jakim  $p(t)$  wpływa na  $\nu(t)$ . Przyjęto tutaj w przybliżeniu, że jest to wartość  $n(t)/2$ . Pozwala to uwzględnić wpływ nagłych zmian intensywności klasy 2.

Charakterystyka strumienia wyjściowego jest w przybliżeniu określona, tak jak w przypadku stanowiska  $G/G/1$ , równaniem, którego tutaj użyjemy dla każdej klasy osobno

$$d^{(i)}(x) = \rho^{(i)} b(x) + (1 - \rho^{(i)}) a^{(i)}(x) * b^{(i)}(x), \quad (13)$$

i które określa wartość średnią i współczynnik zmienności  $C_D^{(i)^2}$  odstępów czasu między komórkami klasy (i) opuszczających stanowisko:

$$C_D^{(i)^2} = C_A^{(i)^2} (1 - \rho^{(i)}) + \rho^{(i)^2} C_B^{(i)^2} + \rho^{(i)} (1 - \rho^{(i)}). \quad (14)$$

Rozwiązanie (3), (4) dla stanu nieustalonego zakłada stałe w czasie parametry dyfuzji. Założenie to można obejść przy założeniu, że parametry  $\alpha$  i  $\beta$  mają stałą wartość w



krótkich przedziałach czasu, używając rozwiązania na końcu przedziału  $l$  jako warunku początkowego (funkcje  $\psi_1, \psi_2$  dla rozwiązania w przedziale  $l + 1$ ).

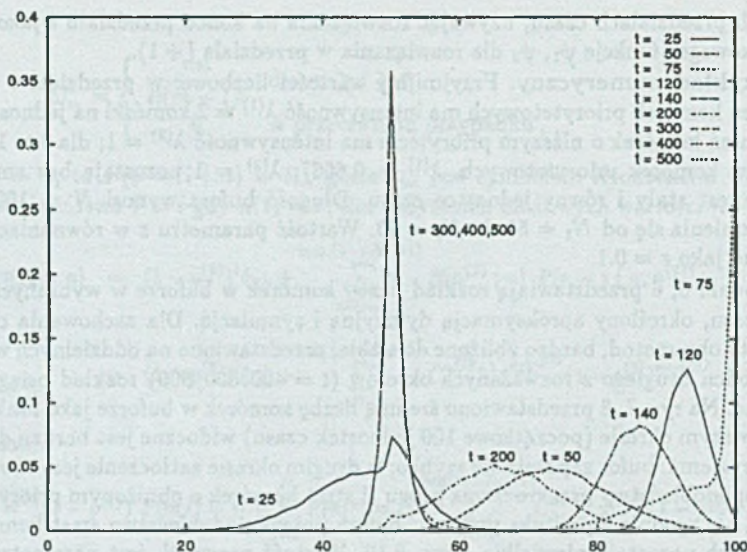
**Przykład numeryczny.** Przyjmijmy wartości liczbowe: w przedziale  $t \in [0, 100]$  strumień komórek priorytetowych ma intensywność  $\lambda^{(1)} = 2$  komórki na jednostkę czasu, a strumień komórek o niższym priorytecie ma intensywność  $\lambda^{(2)} = 1$ ; dla  $t > 100$  maleje strumień komórek priorytetowych,  $\lambda^{(1)} = 0.6667$ ;  $\lambda^{(2)} = 1$  pozostaje bez zmian. Czas obsługi jest stały i równy jednostce czasu. Długość bufora wynosi  $N = 100$ , wartość progu zmienia się od  $N_1 = 50$  do  $N_1 = 90$ . Wartość parametru  $\varepsilon$  w równaniach (3)–(5), wybrano jako  $\varepsilon = 0.1$ .

Rysunki 5, 6 przedstawiają rozkład liczby komórek w buforze w wybranych momentach czasu, określony aproksymacją dyfuzyjną i symulacją. Dla zachowania czytelności rezultaty obu metod, bardzo zbliżone do siebie, przedstawiono na oddzielnych wykresach. Przy końcu drugiego z rozważanych okresów ( $t = 400, 500, 600$ ) rozkład osiąga wartość ustaloną. Na rys. 7, 8 przedstawiono średnią liczbę komórek w buforze jako funkcję czasu. W pierwszym okresie (początkowe 100 jednostek czasu) widoczne jest bardzo duże zatłoczenie systemu: bufor zapelnia się szybko; w drugim okresie zatłoczenie jest również duże, prawdopodobieństwo przekroczenia progu (i strat komórek o obniżonym priorytecie) jest ok. 0.7, ale zgodnie z polityką podziału bufora prawdopodobieństwo strat komórek priorytetowych pozostaje niewielkie – rys. 9, 10. Wartość progu  $N_1$  jest parametrem przedstawionych wykresów. W rozważanym przypadku, gdy  $N_1$  wzrasta, wzrasta też wartość średnia komórek o obniżonym priorytecie: mają więcej miejsca w buforze i w warunkach dużego zatłoczenia wypełniają je. Wzrasta też liczba komórek priorytetowych: ponieważ jest więcej komórek klasy drugiej, komórki priorytetowe muszą dłużej czekać w kolejce.

Rysunek 11 przedstawia średnią liczbę komórek w rozbiściu na klasy, obliczonych zgodnie z równaniami (7)–(12) i opisaną wyżej metodyką. Załączono też rezultaty symulacji. Jak widać, w końcowym okresie, gdy system dąży do stanu ustalonego, wartość średnia komórek klasy drugiej jest zaniżona przez model dyfuzyjny (wynika to z zawyżenia prawdopodobieństwa strat komórek tej klasy, jak to przedstawia rys. 10), jednakże dynamika zmian liczby komórek obu klas jest przewidziana przez model poprawnie. Widać, jak w początkowym okresie liczba komórek obu klas rośnie, potem, po przekroczeniu progu, zaczyna ubywać komórek o niższym priorytecie, które nie są wpuszczane do bufora, i wreszcie, gdy natężenie strumienia spada i kolejka zaczyna się stabilizować, ustala się proporcja pomiędzy liczbą komórek obu klas obecnych w buforze.

### 3. Przelącznik z regulaminem z wypychaniem (*Push-Out*)

Drugim z najczęściej branych pod uwagę regulaminów jest tzw. *przestrzenny algorytm z wypychaniem* (*push-out space algorithm*). Niech  $n^{(1)}, n^{(2)}$  oznaczają liczbę pakietów klasy pierwszej i drugiej obecnych w węźle, a  $N$  maksymalną liczbę pakietów, które bufor w pamięci węzła może zapamiętać. Dopóki liczba pakietów obu klas nie przekracza pojemności bufora, czyli dopóki  $n = n^{(1)} + n^{(2)} \leq N$ , zgłoszenia obsługiwane są zgodnie z regulaminem naturalnym, jeżeli natomiast wszystkie miejsca w buforze są już zajęte, nowo nadchodzące zgłoszenia klasy drugiej nie są zauważane i giną, zgłoszenia klasy pierwszej wyszukują w buforze zgłoszenia klasy niższej i wpisują się na ich miejsce, niszcząc te ostatnie; jeżeli w buforze są już tylko zgłoszenia klasy pierwszej, to nowe pakiety tej



Rys. 5. Rozkład liczby komórek obu klas łącznie w buforze dla różnych momentów czasu  $t = 25 - 500$ ; rozmiar bufora  $N = 100$ , wartość progu  $N_1 = 50$ ; rezultaty symulacji

Fig. 5. Distribution of the number of all cells in the buffer for several time moments  $t = 25 - 500$ ; buffer size  $N = 100$ , threshold  $N_1 = 50$ ; simulation results

klasy przepadają.

W okresach, gdy kolejka nie jest zapełniona, zachowanie się węzła można opisywać modelem  $G/G/1/N$  dla dwu klas klientów. Tylko w okresie zatłoczenia niektórzy klienci są gubieni. Obliczmy efektywne przepustowości stanowiska za pomocą następującego iteracyjnego algorytmu:

— Niech  $\lambda^{(k)[j]}$  oznacza współczynnik nadejść klientów klasy  $k$  w  $j$ -tej iteracji. Przyjmijmy  $\lambda^{(k)[0]} = \lambda^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ .

— W okresach pracy, gdy zgłoszenia nie są gubione, stosując model  $G/G/1/N$  obliczamy funkcję  $f(x)$ ,  $p_0$ ,  $p_N$ , por. [7]. Funkcja  $f(x)$  przybliża rozkład  $p(n)$  liczby pakietów obu klas łącznie.

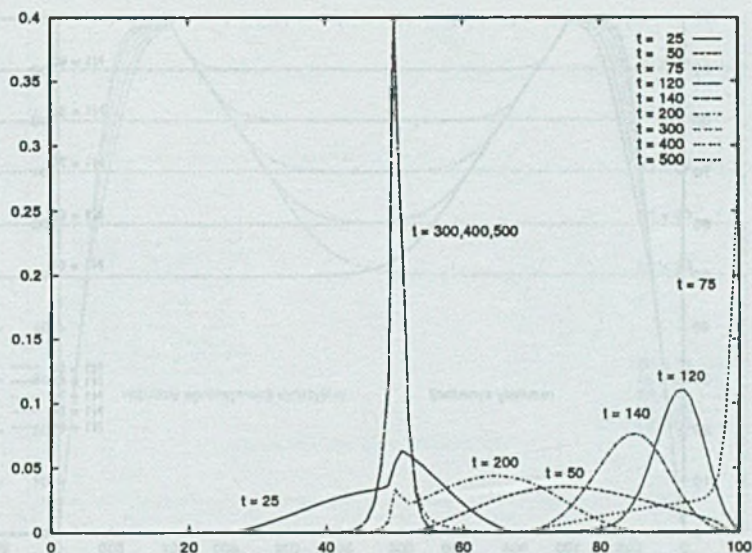
— Proces wchodzi w okres zatłoczenia z prawdopodobieństwem  $p(N)$ . Rozkład warunkowy liczby klientów klasy  $k$ , obliczony przy pominięciu mechanizmu wypychania, to

$$p^{(k)}(n^{(k)}|N) = \binom{N}{n^{(k)}} \left( \frac{\lambda^{(k)[j]} }{\lambda} \right)^{n^{(k)}} \left( 1 - \frac{\lambda^{(k)[j]} }{\lambda} \right)^{N-n^{(k)}}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Czas pobytu w barierze w  $x = N$  ma funkcję gęstości

$$b^{[j]}(x) = \frac{\lambda^{(1)[j]} }{\lambda^{(1)[j]} + \lambda^{(2)[j]}} b^{(1)}(x) + \frac{\lambda^{(2)[j]} }{\lambda^{(1)[j]} + \lambda^{(2)[j]}} b^{(2)}(x).$$





Rys. 6. Rozkład liczby komórek obu klas łącznie w buforze dla różnych momentów czasu  $t = 25 - 500$ ; rozmiar bufora  $N = 100$ , wartość progę  $N_1 = 50$ ; rezultaty aproksymacji dyfuzyjnej

Fig. 6. Distribution of the number of all cells in the buffer for several time moments  $t = 25 - 500$ ; buffer size  $N = 100$ , threshold  $N_1 = 50$ ; diffusion results

Weźmy teraz pod uwagę strategię wypychania. Jeżeli przybliżymy strumień wejściowy pierwszej klasy klientów w okresie przepelnienia strumieniem Poissona z parametrem  $\lambda^{(1)}$ , to prawdopodobieństwo przybycia  $n$  klientów klasy pierwszej w czasie jednego okresu przepelnienia wyrazimy jako

$$p_{nad}(n) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^{(1)}|j|x)^n}{n!} \exp^{-\lambda^{(1)}|j|x} b(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

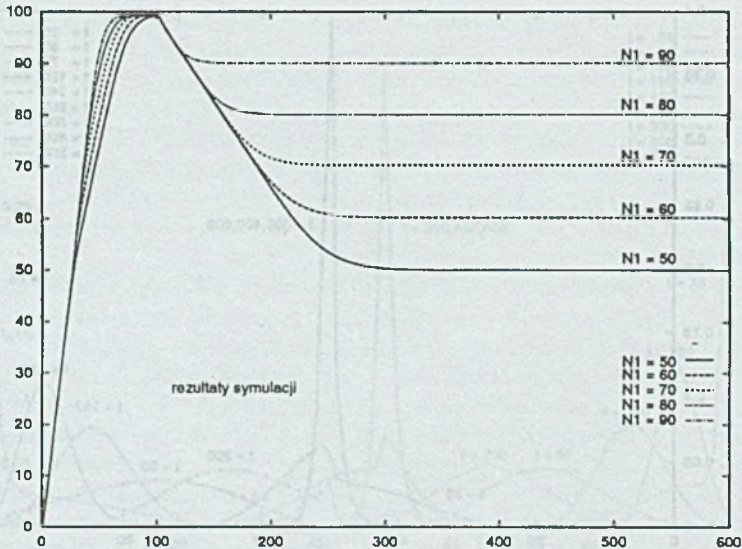
Jeżeli czas obsługi jest stały,  $b(x) = \delta(x - 1/\mu)$ , to

$$p_{nad}(n) = \frac{(\lambda^{(1)}|j|/\mu)^n}{n!} \exp^{-\lambda^{(1)}|j|/\mu}, \quad n = 0, 1, \dots$$

i prawdopodobieństwo  $n$  wypchnięć wynosi

$$p_{wypch}(n) = p_{nad}(n) \sum_{n_2=n+1}^N p^{(2)}(n^{(2)}|N) + p^{(2)}(n|N) \sum_{i=n}^{\infty} p_{nad}(i).$$

Pierwsza suma odpowiada sytuacji, gdy było dokładnie  $n$  nadejść i co najmniej  $n + 1$  klientów klasy drugiej, którzy mogli być wypchnięci. Druga suma odpowiada sytuacji, gdy w kolejce jest  $n$  klientów drugiej klasy i nadeszło co najmniej  $n$  klientów pierwszej klasy.



Rys. 7. Średnia liczba komórek jako funkcja czasu; wartość progu  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  występuje jako parametr; wyniki symulacji

Fig. 7. Mean number of cells as a function of time, parametrized by the value  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  of the threshold, simulation results

Jeżeli strumień wejściowy zadań pierwszej klasy nie jest poissonowski, musimy znać gęstość  $a^{(1)}(x)$  lub dystrybuantę  $A^{(1)}(x)$  czasów między zgłoszeniami tej klasy, by określić prawdopodobieństwo  $n$  nadejść:

$$p_{nad}(n) = \int_0^{\infty} b(x) \int_0^x a^{(1)*n}(t) [1 - A^{(1)}(x-t)] dt dx,$$

gdzie  $*$  oznacza operację  $n$ -krotnego splotu.

W systemie  $G/G/1/N$  zadania obu klas nadchodzące w okresie pełnej kolejki są traczone i efektywna przepustowość stacji to

$$\lambda_{efekt}^{(1)} = \lambda^{(1)}(1 - p_N), \quad \lambda_{efekt}^{(2)} = \lambda^{(2)}(1 - p_N). \quad (16)$$

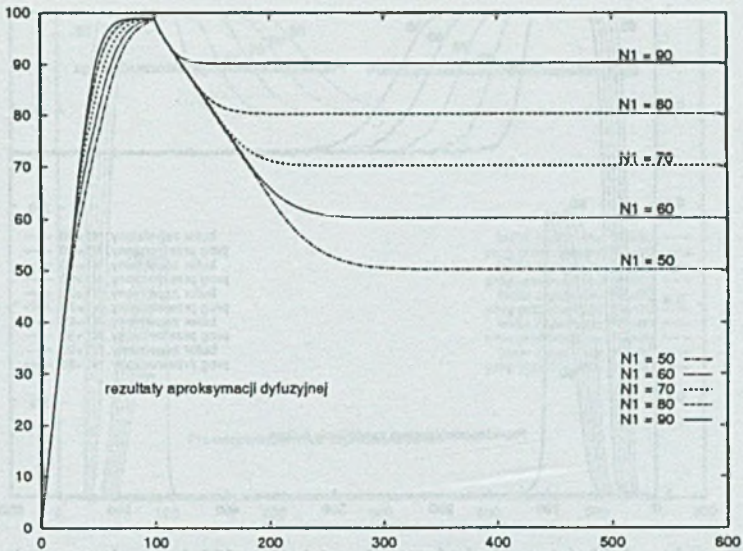
Przyjęty regulamin kolejki sprawia, że  $\lambda_{efekt}^{(1)}$  rośnie, a  $\lambda_{efekt}^{(2)}$  maleje:

$$\lambda_{efekt}^{(1)} = \lambda^{(1)}(1 - p_N) + p_N \lambda^{(1)} \varepsilon, \quad \lambda_{efekt}^{(2)} = \lambda^{(2)}(1 - p_N) - p_N \lambda^{(1)} \varepsilon, \quad (17)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest prawdopodobieństwem, że klient klasy pierwszej, który nadszedł w okresie przepełnienia kolejki, może usunąć z niej klienta klasy drugiej — jest to stosunek średniej liczby wypchnięć do średniej liczby nadejść:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^N p^{(2)}(k|N) [\sum_{i=0}^{k-1} i p_{nad}(i) + k \sum_{i=k}^{\infty} p_{nad}(i)]}{\sum_{i=1}^{\infty} i p_{nad}(i)}. \quad (18)$$





Rys. 8. Średnia liczba komórek jako funkcja czasu; wartość progu  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  występuje jako parametr; wyniki aproksymacji dyfuzyjnej

Fig. 8. Mean number of cells as a function of time, parametrized by the value  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  of the threshold, diffusion results

W przypadku stałego czasu obsługi mianownikiem tego ułamka jest

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_{nad}(k) = \lambda^{(1)} / \mu = \rho^{(1)}.$$

Obliczamy nowe przepustowości

$$\lambda^{(1)[j+1]} = \lambda^{(1)} + \frac{PN}{1 - p_N} \lambda^{(1)} \varepsilon, \quad \lambda^{(2)[j+1]} = \lambda^{(2)} - \frac{PN}{1 - p_N} \lambda^{(1)} \varepsilon,$$

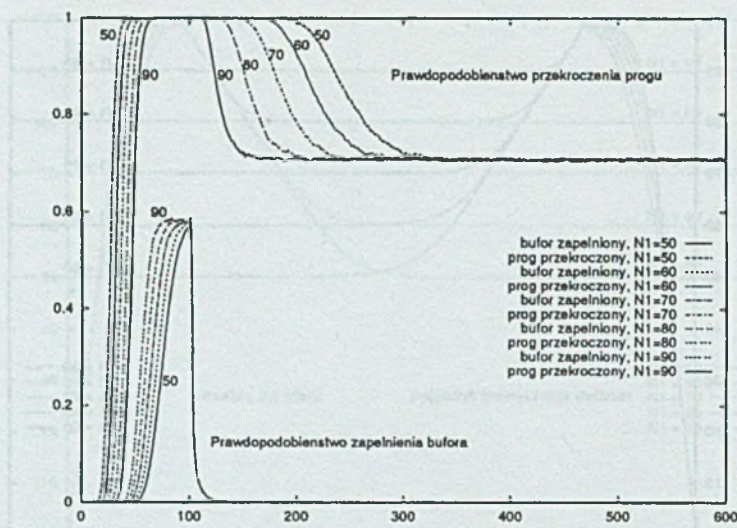
— Obliczamy ponownie wartości  $f(x)$ ,  $p_0$ ,  $p_N$  wykorzystując model  $G/G/1/N$ ; iterujemy tak długo, dopóki nie osiągniemy punktu stałego, tzn. dopóki wyrażenie  $\sum_{i=1}^2 |\lambda^{(i)[j+1]} - \lambda^{(i)[j]}|$  nie stanie się mniejsze niż dowolnie wybrana stała.

W praktyce zbieżność algorytmu osiąga się po kilku iteracjach.

Względne straty zadań obliczamy jako

$$L^{(1)} = \frac{\lambda^{(1)} - \lambda_{\text{efekt}}^{(1)}}{\lambda^{(1)}} = p_N(1 - \varepsilon), \quad L^{(2)} = \frac{\lambda^{(2)} - \lambda_{\text{efekt}}^{(2)}}{\lambda^{(2)}} = p_N \left( 1 + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}} \varepsilon \right). \quad (19)$$

Rys. 12 przedstawia podstawowy wynik obliczeń modelowych: zależność strat  $L^{(1)}$ ,  $L^{(2)}$  pierwszej i drugiej klasy pakietów od rozmiaru bufora  $N$ , intensywności nadchodzenia  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  oraz wariacji strumienia wejściowego (parametr  $C_a^{(1)2}$ ). Zwróćmy



Rys. 9. Prawdopodobieństwo, że bufor o długości  $N = 100$  jest pełen oraz że próg jest przekroczony jako funkcja czasu; wartość progu  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  występuje jako parametr; wyniki symulacji

Fig. 9. Probability that the buffer of length  $N = 100$  is full (priority cells are lost) and that the threshold is exceeded (ordinary cells are lost) as a function of time, parametrized by the threshold value  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$ ; simulation results

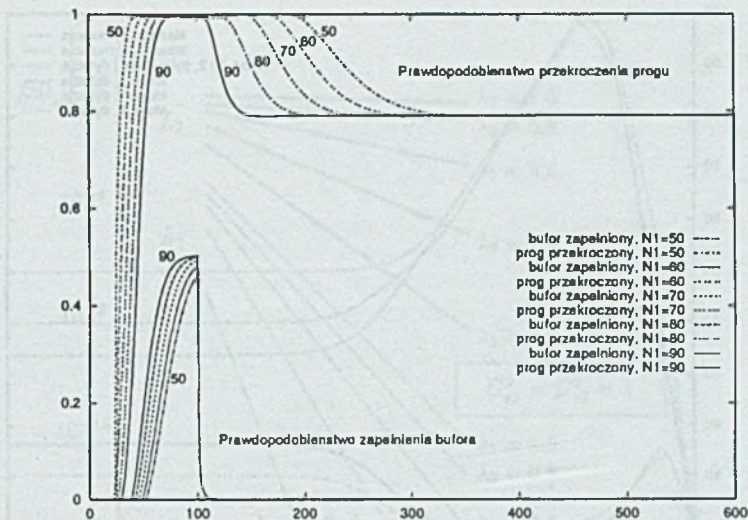
uwagę, że wartości  $L^{(1)}, L^{(2)}$  są przedstawione w skali logarytmicznej. Czasy obsługi są stałe,  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1$ .

W analizie stanów niestabilnych zakładamy, że oś czasu jest podzielona na odcinki  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ , odpowiadające różnego typu ruchowi; parametry dyfuzji  $\alpha_i, \beta_i$  pozostają stałe w ciągu czasu  $T_i$  i zmieniają się skokowo przy przejściu do następnego odcinka. Ponadto czas jest podzielony na małe, w stosunku do przedziałów  $T_i$ , odcinki  $\Delta t$ . Wewnątrz każdego z nich wykorzystujemy rozwiązanie dla stanu niestabilnego w systemie  $G/G/1/N$ , i korygujemy je na końcu odcinka  $\Delta t$  zgodnie z przedyskutowanym powyżej iteracyjnym algorytmem, uwzględniającym mechanizm wypychania.

#### 4. Przełącznik z regulaminem biorącym pod uwagę rozmiar pakietu

Pakiety mogą mieć różną długość: składają się z pewnej liczby (od 1 do  $K$ ) bloków o ustalonym rozmiarze. Pojemność bufora  $N$  jest określona liczbą bloków, które może pomieścić. Transmisja (i zwalnianie miejsca w buforze) odbywa się blok po bloku. Gdy bufor jest bliski zapełnienia, przyjmowane są tylko te pakiety, w których liczba bloków nie przekracza liczby wolnych miejsc. Założymy, że proces dyfuzji reprezentuje liczbę bloków





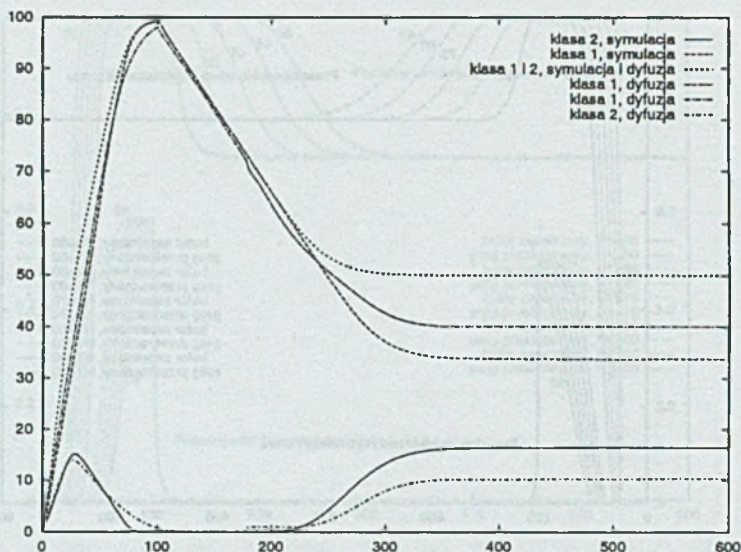
Rys. 10. Prawdopodobieństwo, że bufor o długości  $N = 100$  jest pełen i że próg jest przekroczony jako funkcja czasu; wartość progu  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$  występuje jako parametr; wyniki aproksymacji dyfuzyjnej

Fig. 10. Probability that the buffer of length  $N = 100$  is full (priority cells are lost) and that the threshold is exceeded (ordinary cells are lost) as a function of time, parametrized by the threshold value  $N_1 = 50, 60, 70, 80, 90$ ; diffusion results

w buforze. Każdemu rozmiarowi pakietu przyporządkujemy inną klasę zadań: klasa  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  charakteryzuje się nadejściem grupy  $k$  zadań. W przypadku grupowych zgłoszeń jednej klasy klientów parametry dyfuzji wybiera się jako  $\beta = \lambda \nu_g - \mu$ ,  $\alpha = \lambda \nu_g (C_A^2 + C_g^2) + \mu C_B^2$ , gdzie  $\nu_g$  jest średnią liczebnością grupy, a  $C_g^2$  jest współczynnikiem zmienności rozkładu liczby klientów w grupie. W naszym przypadku, dla danej klasy  $k$ , liczba zadań w grupie jest stała i wynosi  $k$ :  $\nu^{(k)} = k$ ,  $C_g^{(k)2} = 0$ . Parametry łącznego strumienia wejściowego są więc dla strumienia klientów wielu klas:

$$C_A^2 = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{(k)[0]}}{\lambda^{[0]}} k C_A^{(k)2}, \quad \frac{1}{\mu} = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{(k)[0]}}{\lambda^{[0]}} \frac{1}{\mu^{(k)}}, \quad (20)$$

gdzie  $\lambda^{[0]} = \sum_{k=1}^K \lambda^{(k)[0]}$ , a intensywności  $\lambda^{(k)[0]}$  biorą pod uwagę straty związane z odrzucaniem pakietów, które nie mogą się już zmieścić w buforze i są wynikiem osiągnięcia punktu stałego następującej iteracji. Wybieramy wartości początkowe  $\lambda^{(k)[1]} = \lambda^{(k)}$ , obliczamy parametry (20), otrzymujemy rozkład liczby bloków w buforze zgodnie z modelem  $G/G/1/N$ , obliczamy prawdopodobieństwo odrzucenia pakietów 1 blokowych jako  $p_N$  i przyjmujemy  $\lambda^{(1)[2]} = \lambda^{(1)[1]}(1 - p_N)$ , prawdopodobieństwo odrzucenia pakietów 2-blokowych jako  $p_N + p(N-1)$  czyli  $\lambda^{(2)[2]} = \lambda^{(2)[1]}[1 - p_N - p(N-1)]$  i tak podobnie aż do  $\lambda^{(k)[2]} = \lambda^{(k)[1]}[1 - p_N - p(N-1) - \dots - p(N-K+1)]$ . Dla nowych wartości strumieni wejściowych obliczamy rozkład liczby bloków, korzystając już z modelu o parametrach



Rys. 11. Średnia liczba komórek klasy pierwszej i drugiej jako funkcja czasu  
 Fig. 11. Mean value of class 1 and class 2 cells as a function of time

zmiennych w funkcji wartości procesu, przyjmując, że dla  $x < K$  uwzględniamy w parametrach dyfuzji wszystkie klasy klientów, a dla  $N - k - 1 < x < x - k$  uwzględniamy klasy od pierwszej do  $k$ -tej.

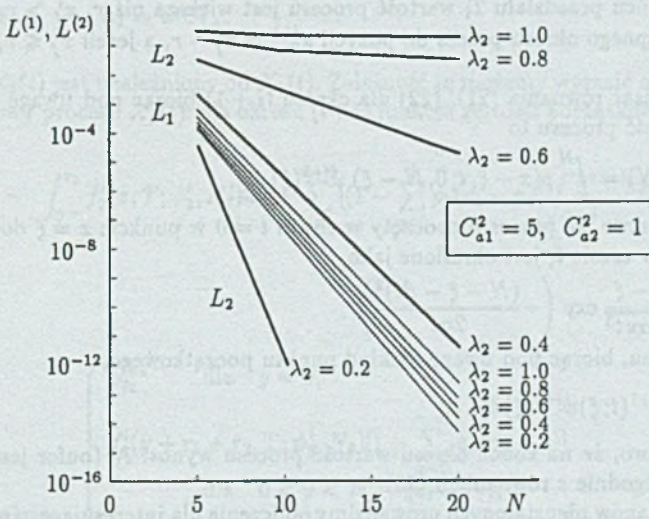
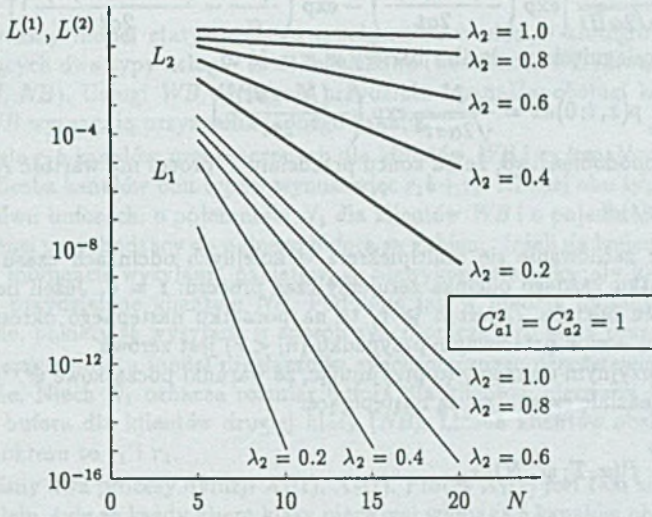
Model możemy łatwo rozbudować, przyjmując, że istnieje klasa pierwsza o wyższym i lasa druga niższym priorytecie, a każda z nich składa się z  $K$  podklas zawierających pakiety różnego rozmiaru, a następnie wprowadzając algorytm progowy lub z wypychaniem dla klas o wyższym i niższym priorytecie.

### 5. Przełącznik synchroniczny

Poniższy model bierze pod uwagę następujący rytm pracy przełącznika: pakiety nie są wysyłane w dowolnym momencie, lecz w sposób synchroniczny, co ustalony kwant (*time-slot*) czasu. Załóżmy, że pakiety są przechowywane w buforze o długości  $N$ , są wysyłane co okres  $T$ ; maksymalna liczba wysłanych jednorazowo pakietów wynosi  $r$ .

Proces dyfuzji określony na przedziale  $x \in (0, N)$  i rozpatrywany w okresie  $[0, T]$  pozwala określić zawartość bufora. Rozparujemy proces opisujący akumulację nadchodzących zgłoszeń, a więc o parametrach  $\beta = \lambda$ ,  $\alpha = \lambda C_A^2$ . W punkcie  $x = N$  umieszczona jest bariera pochłaniająca: gdy proces osiągnie wartość  $x = N$ , zachowuje ją do końca okresu  $[0, T]$ . Ponieważ proces rośnie ( $\beta > 0$ ), zaniedbujemy dla uproszczenia granicę w  $x = 0$ . Jeżeli proces rozpoczyna się w punkcie  $x = 0$ , to jego funkcja gęstości  $p(x, t; 0, N)$  (zanaczmy w sposób jawny, w postaci argumentów funkcji, nie tylko punkt początkowy,





Rys. 12. Prawdopodobieństwa utraty pakietów  $L^{(1)}, L^{(2)}$   
 Fig. 12. Probability  $L^{(1)}, L^{(2)}$  of package loss

ale i miejsce bariery pochłaniającej) ma postać:

$$p(x, t; 0, N) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha\pi t}} \left[ \exp\left(-\frac{(x - \beta t)^2}{2\alpha t}\right) - \exp\left(\frac{2\beta N}{\alpha} - \frac{(x - 2N - \beta t)^2}{2\alpha t}\right) \right], \quad (21)$$

a gęstość  $g(t)$  osiągnięcia w chwili  $t$  bariery w  $x = N$  to

$$g(t) = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^N p(x, t; 0) dx = \frac{N}{\sqrt{2\alpha\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(N - \beta t)^2}{2\alpha t}\right). \quad (22)$$

Obliczamy prawdopodobieństwo, że na końcu przedziału  $T$  proces ma wartość  $N$

$$p(N, T) = \int_0^T g(t) dt. \quad (23)$$

Opiszmy teraz zachowanie się multipleksera w kolejnych odcinkach czasu  $T_i, i = 1, 2, \dots$ . Na początku każdego odcinka zerujemy czas procesu:  $t = 0$ . Jeżeli liczba pakietów  $n_i$  na końcu odcinka  $T_i$  jest  $n \geq r$ , to na początku następnego okresu liczba pakietów wynosi  $n_i - r$ ; w przeciwnym przypadku ( $n_i < r$ ) jest zerowa.

W modelu dyfuzyjnym opiszemy to przyjmując, że warunki początkowe  $\psi^{i+1}(x)$  procesu dyfuzji w przedziale czasu  $T_{i+1}$  są następujące:

$$p_{1_0}^{i+1} = \int_0^r f^i(x, T; \psi^i, N) dx,$$

$$\psi^{i+1}(y) = \begin{cases} f^i(y + r, T; \psi^i, N) & \text{dla } 0 < y < N - r \\ 0 & \text{dla } N - r < y < N, \end{cases}$$

a więc, jeśli na końcu przedziału  $T_i$  wartość procesu jest większa niż  $r$ ,  $x_j^i > r$ , cofamy na początku następnego okresu proces do pozycji  $x_0^{i+1} = x_j^i - r$ , a jeżeli  $x_j^i \leq r$ , cofamy proces do zera.

Możemy przepisać równania (21), (22) dla okresu  $(i + 1)$  biorąc pod uwagę warunki początkowe. Gęstość procesu to

$$f^{i+1}(x, t; \psi^{i+1}, N) = \int_0^N p(x - \xi, t; 0, N - \xi) \psi^{i+1}(\xi) d\xi, \quad (24)$$

a prawdopodobieństwo, że proces rozpoczęty w chwili  $t = 0$  w punkcie  $x = \xi$  dojdzie do bariery w  $x = N$  w czasie  $t$ , jest określone jako

$$g^{i+1}(t; \xi) = \frac{N - \xi}{\sqrt{2\alpha\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(N - \xi - \beta t)^2}{2\alpha t}\right), \quad (25)$$

a dla całego procesu, biorąc pod uwagę rozkład punktu początkowego,

$$g^{i+1}(t) = \int_0^N g^{i+1}(t; \xi) \psi^{i+1}(\xi) d\xi. \quad (26)$$

Prawdopodobieństwo, że na końcu okresu wartość procesu wynosi  $N$  (bufor jest zapełniony) obliczamy zgodnie z równaniem (23).

Przy analizie stanów nieustalonych prowadzimy obliczenia dla interesującego nas przedziału czasu, podzielonego na odcinki  $T$ . Parametry procesu muszą być stałe wewnątrz tych odcinków lub możemy je podzielić na odpowiednią liczbę podprzedziałów.

Jeżeli parametry procesu nie zależą od czasu i interesuje nas stan ustalony, to prowadzimy obliczenia aż do osiągnięcia zbieżności  $f^{i+1}(x, T; \psi^{i+1}, N) \approx f^i(x, T; \psi^i, N)$ , gdy  $i \rightarrow \infty$ .



## 6. Przełącznik multimedialny

Rozważmy model statystycznego przełącznika w sieci o zintegrowanych usługach, świadczących dwa typy usług – szerokopasmowe (*wideband*, *WB*) i wąskopasmowe (*narrowband*, *NB*). Usługi *WB* wymagają przydziału  $b$  kanałów obsługi każdemu klientowi, usługi *NB* wymagają przyznania jednego kanału.

Istnieje  $r_1 b$  kanałów przeznaczonych dla klientów *WB* i  $r_2$  kanałów dla klientów *NB*. Ogólna liczba kanałów obu typów wynosi więc  $r_1 b + r_2$ . Klienci obu typów są przechowywani w dwu buforach: o pojemności  $N_1$  dla klientów *WB* i o pojemności  $N_2$  dla klientów *NB*. Klienci przychodzący do pełnego bufora są gubieni. Jeżeli na końcu przedziału czasowego, w momencie wysyłania pakietów, są niewykorzystane kanały klientów *WB*, mogą być one przydzielone klientom *NB*. Podobnie jak w modelu opisanym w poprzednim paragrafie, pakiety są wysyłane w sposób synchroniczny, co stały przedział czasowy.

Wykorzystamy tu model przełącznika synchronicznego przedstawiony w poprzednim paragrafie. Niech  $N_1$  oznacza rozmiar bufora dla klientów pierwszej klasy (*WB*), a  $N_2$  rozmiar bufora dla klientów drugiej klasy (*NB*). Liczba klientów obsłużonych w czasie jednego okresu to  $r_1$  i  $r_2$ .

Zalóżmy dwa procesy dyfuzji  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ . Proces  $X_1(t)$  jest taki sam jak w poprzednim modelu, tyle że każdy klient klasy pierwszej wymaga  $b$  kanałów obsługi; przyjmijmy więc

$$\beta_1 = b\lambda_1, \quad \alpha_1 = b\lambda C_{1A}^2.$$

Proces  $X_2(t)$  jest uzależniony od  $X_1(t)$ . Zależność tę możemy wyrazić określając warunek początkowy procesu  $X_2(t)$ : dla okresu  $(i+1)$  funkcja gęstości początkowej  $\psi_2^{i+1}$  ma postać

$$p_{2_0}^{i+1} = \int_0^{r_2} f_2^i(x, T; \psi_2^i, N_2) dx + \sum_{j=1}^{r_1-1} \left[ \left( 1 - \sum_{n=0}^j p_1(r_1 - n) \right) \int_{r_2+j}^{r_2+j+1} f_2^i(x, T; \psi_2^i, N_2) dx \right]$$

oraz

$$\psi_2^{i+1}(y) = \begin{cases} p_{2_0}^{i+1} & \text{dla } y = 0, \\ f_2^i(y + r_1 + r_2, T; \psi_2^i, N_2) \left[ 1 - \sum_{n=0}^{r_1-1} p_1(r_1 - n) \right] & \text{dla } 0 < y < N_2 - (r_1 + r_2), \\ \int_0^{r_1-1} f_2^i(y + r_2 + j, T; \psi_2^i, N_2) \left[ 1 - \sum_{n=0}^j p_1(r_1 - n) \right] dj & \text{dla } N_2 - (r_1 + r_2) < y < N_2 - r_2, \\ 0 & \text{dla } N_2 - r_2 < y < N_2. \end{cases}$$

## 7. Wnioski

Przedstawione w artykule modyfikacje metody aproksymacji dyfuzyjnej wskazują, że metodę tę można dostosować do opisu działania i oceny efektywności przełącznika sieciowego, uzyskując w szczególności rezultaty dotyczące stanów nieustalonych, trudne do osiągnięcia innymi metodami teorii kolejek.

## LITERATURA

- [1] Akhtar S.: Congestion control in a Fast Packet Switching Network. Master's Thesis, Washington University, 1987.
- [2] Cox D. R., Miller H. D.: The Theory of Stochastic Processes, Methuen, London 1965.
- [3] Czachórski T.: A method to solve diffusion equation with instantaneous return processes acting as boundary conditions. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 1993, vol. 41, no. 4.
- [4] Czachórski T., Fourneau J. M., Pekergin F.: Diffusion Models to Study Nonstationary Traffic and Cell Loss in ATM Networks. ACM 2nd Workshop on ATM Networks, Bradford, July 1994.
- [5] Czachórski T.: Modele kolejkowe systemów komputerowych, Skrypt Politechniki Śląskiej, nr 1844, Gliwice 1994.
- [6] Czachórski T., Fourneau J. M., Kloul L.: Diffusion Approximation to Study the Flow Synchronization in ATM Networks. 3rd IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, Ilkley, UK, 4-7th July 1995.
- [7] Czachórski T., Pekergin F.: Sterowanie natężeniem strumienia pakietów przy wejściu do sieci – modele dyfuzyjne. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Informatyka, 1997, z. 32.
- [8] Elwalid A. I., Mitra D.: Stochastic Fluid Models in the Analysis of Access Regulation in High Speed Networks, pp. 1626-1633, GLOBECOM 1991.
- [9] Gelenbe E.: On Approximate Computer Systems Models, Journal of ACM, 1975, vol. 22 1975, no. 2.
- [10] Gelenbe E., Pujolle G.: The Behaviour of a Single Queue in a General Queueing Network, Acta Informatica, 1976, Fasc. 7.
- [11] Gelenbe E., Mang X., Feng Y.: A diffusion cell loss estimate for ATM with multiclass bursty traffic. in: D. D. Kouvatsos (Editor), Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, Vol. 2, Chapman and Hall, London 1996.
- [12] Hébuterne G., Gravey A.: A Space Priority Queueing Mechanism for Multiplexing ATM Channels, Race 1022 Meeting, 24 Janvier 1989, extended version in ITC Specialist Seminar, Adelaide, September 1989.
- [13] Holtsinger D. S.: Performance Analysis of Leaky Bucket Policing Mechanisms. Ph.D. thesis, Dept. of Electrical and Computer Engineering, North Carolina State University, 1992.
- [14] Kröner H., Hébuterne G., Boyer P., Gravey A.: Priority management in ATM switching nodes. IEEE Journal on Selected Areas of Communications, 1991, vol. 9, no. 3, s. 418-427.



- [15] Meyer J. F., Montagna S., Paglino R.: Dimensioning of an ATM switch with shared buffer and threshold priority. *Computer Networks and ISDN Systems*, 1993, vol. 26, s. 95-108.
- [16] Newell G. F.: *Applications of Queueing Theory*. Chapman and Hall, London 1971.
- [17] Stehfest H.: Algorithm 368: Numeric Inversion of Laplace Transform. *Communications of ACM*, 1970, vol. 13, no. 1, s. 47-49.
- [18] Ōrs T., Jones S. P. W.: Performance Optimization of ATM Input Control using Multiple Leaky-Buckets. *ACM 3rd Workshop on ATM Networks*, Ilkley 1995.
- [19] Veillon F.: Algorithm 486: Numerical Inversion of Laplace Transform. *Communications of ACM*, 1974, vol. 17, no. 10, s. 587-589.

Recenzent: Dr inż. Ewa Starzewska-Karwan

Wpłynęło do Redakcji 4 grudnia 1996 r.

### Abstract

The article considers several queueing models based on diffusion theory and evaluating various algorithms of queueing packages waiting to be transmitted in a multiplexer buffer. Special attention is paid to the models of push-out and threshold queueing policies applied in ATM and FR multiplexers. We revisit their performance models with the use of diffusion approximation adopting our previously developed method of transient state analysis and extending it to the case of state-dependent input. This kind of approach gives us an inside look upon the transient behaviour of the traffic. The dynamics of the traffic is displayed and the influence of both mechanisms on the traffic characteristics appears as a function of time. General cell interarrival times and the burstiness of the traffic are represented in a natural way in these models. The diffusion method is a second-order approximation and thus has certain superiority upon the fluid approximation.

The models give the characteristics of the output streams, hence they can be easily implemented in a general queueing network model. They may be applied cases of very small losses which are difficult to study by simulation. Some numerical examples are presented and discussed.

The results confirm the authors' conviction that the diffusion approximation is a useful tool to solve queueing models, in spite of some drawbacks (the method errors are not negligible and, when transient states are considered, the time needed to develop necessary software, to overcome related numerical problems and to perform calculations increases significantly with the complexity of models). The advantage of diffusion approximation lies in its flexibility to be adapted to various queueing disciplines, in its ease to develop queueing network models and to include customer classes with general interarrival and service time distributions and, especially, in its possibilities to deal with transient states.