Bogdan Skalmierski
Politechnika Śląska

"Naukowiec musi porządkować;
naukę tworzy się z faktów, jak dom z
kamieni, ale zwykłe gromadzenie faktów nie jest nauką bardziej, niż stos
kamieni - domem".

H. Poincaré

MECHANIKA NIEBA W UJĘCIU PRZED- I POKOPERNIKOWSKIM

Streszczenie. Praca dotyczy wybranych zagadnień mechaniki nieba. Celem jej było ukazanie rozwoju myśli naukowej w tym zakresie od Ptolemeusza do czasów nam współczesnych. Omówiono krótko pogląd przedkopernikowski geocentryczny, a następnie heliocentryczny, akcentując ich wpływ na rozwój mechaniki.

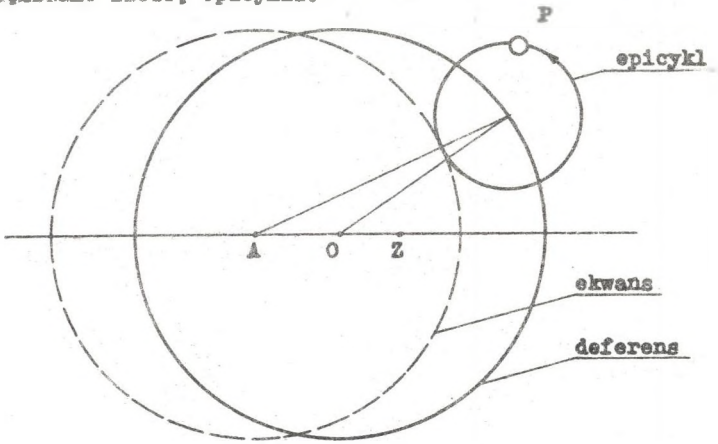
Współczesna mechanika nieba, jako jeden z działów fizyki, zajmuje się ruchami ciał niebieskich pod wpływem sił powszechnego ciążenia. Językiem jakim się posługuje jest matematyka z jej głównymi działami, tzn.: geometrią, analizą i algebrą. Rozwój tej dyscypliny naukowej był ściśle związany z postępem zarówno wiedzy teoretycznej, jak i techniki eksperymentu. Problemy mechaniki nieba wywarły decydujący wpływ na rozwój matematyki i fizyki.

Mechanika nieba w ujęciu przedkopernikowskim zakładała, że nieruchoma kulista Ziemia znajduje się w centrum Wszechświata. W ramach teorii geocentrycznej istniały dwa systemy: homocentryczny zaproponowany przez Platona, Eudoksosa z Knidos i Arystotelesa oraz system epicykliczny stworzony przez Apoloniusza i Hipparcha ostatecznie opracowany przez Ptolemeusza.

System sfer homocentryczny przyjmował, że zjawisko ruchu ciał niebieskich jest ściśle związane z ruchami współśrodkowych ruchomych sfer. Oś obrotu każdej z nich była związana z następną zewnętrzną sferą. Obserwacje ruchów planet służyły do określania prędkości obrotu oraz położenia osi. Gwiazdy stałe znajdowały się na ostatniej zewnętrznej sferze poruszającej się dookoła osi świata odtwarzając ruch dobowy sfery niebieskiej. Cały system zawierał 27 sfer.

System epicykliczny zakładał krążenie planet po epicyklu, którego środek poruszał się po deferensie (rys. 1); Ziemia była położona ekscentrycznie względem środka deferensu, a prędkość kątowa ruchu środka epicykla

względem środka ekwansu była stała. Księżyc i Słońce obiegały Ziemię bezpośrednio po deferensach. Dla zapewnienia lepszej zgodności teorii z obserwacją zwiększano liczbę epicykli.



Rys. 1

Epicykl: Z - Ziemia, O - środek deferensa, A - środek ekwansa AO = OZ

Teorie przedkopernikowskie były przyjmowane prawie przez piętnaście wieków mając silny wpływ na filozofię, literaturę i naukę. Złożoność tych koncepcji była przeszkodą dla wyjaśnienia ilościowego wzrastającej liczby obserwacji.

Nasz wielki rodak Mikołaj Kopernik (1473-1543) wprowadza model heliocentryczny, wg którego Słońce jest środkiem świata jak i układu planetarnego. Planety krążą po torach kolistych dokoła Słońca.
Przyjęcie przez Kopernika heliocentrycznej budowy świata zapoczątkowało rozwój nowoczesnej astronomii.

Teorię heliocentryczną następnie zmodyfikował Giordano Bruno, dla którego Słońce było jedną z gwiazd, a układ słoneczny jednym z nieskończonej mnogości układów we wszechświecie.

Początek XVII wieku przynosi dalszy rozwój astronomii. Jan Kepler (1571-1630), w oparciu o obserwacje Tychona Brahe (1546-1601), formułuje trzy prawa rządzące ruchem planet. Brzmią one jak następuje:

1) Orbita każdej planety leży w stałej płaszczyźnie przechodzącej przez Słońce i jest elipsą, w której jednym z ognisk znajduje się Słońce.

2) Wektor położenia planety zaczepiony w ognisku elipsy, w którym znajduje się Słońce zakreśla w jednakowym czasie wycinki równej powierzchni.

3) Kwadraty okresów obiegu planet są proporcjonalne do sześcianów ich średnich odległości od Słońca.

Prawa Keplera stanowiły silne poparcie dla teorii Kopernika. Wskazały na prostotę z jaką można opisać ruchy planet, jeśli przyjąć Słońce za układ odniesienia. Prawa te jednak nie miały teoretycznej interpretacji; były jedynie prawami empirycznymi.

Newton (1642-1727) nadał sens dynamiczny prawom Keplera, przez sformułowanie ogólnych podstaw mechaniki jako systemu dedukcyjnego. Interpretacja tych praw w świetle mechaniki klasycznej jest następująca:
Zgodnie z prawem powszechnego ciążenia i drugim prawem Newtona ruch planety w układzie współrzędnych biegunowych jest opisany równaniami:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = P_r;$$

$$(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \tag{1}$$

$$P_r = -k\frac{Mm}{r^2},$$

gdzie k oznacza stałą grawitacyjną, M masę Słońca oraz m masę planety.
Z drugiego równania układu (1) wynika, że:

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{2}$$

co upoważnia do stwierdzenia słuszności drugiego prawa Keplera.
Przekształćmy wyrażenie $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ występujące w pierwszym równaniu układu (1).

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right) - r\frac{d\varphi}{dt}\right]\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Ponieważ na podstawie (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \tag{4}$$

przeto

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2}\right) - \frac{c}{r}\right]\frac{c}{r^2}. \tag{5}$$

Zatem

$$c^2\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = \alpha \tag{6}$$

Rozwiązaniem otrzymanego równania różniczkowego jest funkcja:

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{c^2}\left[1 + A\cos(\varphi + \varepsilon)\right], \tag{7}$$

gdzie A oraz ε są stałymi całkowania.

Stąd

$$r = \frac{c^2}{\alpha[1 + A\cos(\varphi + \varepsilon)]}. \tag{8}$$

Widać, że planety poruszają się po krzywych stożkowych o ognisku w centrum działania siły. Naturalnie dla układu planetarnego torem jest elipsa, co dowodzi słuszności pierwszego prawa Keplera.

Na podstawie (2) stwierdzamy, że:

$$c\,T = \pi\,ab \tag{9}$$

gdzie a oraz b są półosiami toru eliptycznego planety.
Wyznaczając z (9) stałą c oraz podstawiając jej wartość do równania (8) otrzymamy:

$$r = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \alpha}(1 + A\cos(\varphi + \varepsilon))^{-1} \tag{10}$$

Zauważmy dalej, że mniejsza z półosi jest współczynnikiem stojącym po prawej stronie równania (10)

$$b = \frac{\pi a^2 b^2}{T^2 \alpha}. \tag{11}$$

Ponieważ b dla danego toru eliptycznego jest proporcjonalne do a, przeto

$$T^2 = \beta a^3, \quad (\beta = \text{const}) \tag{12}$$

co dowodzi słuszności trzeciego prawa Keplera, gdyż

$$a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}).$$

Myśl naukowa, której zasięg ciągle się rozrasta, zawsze bazuje na faktach. Ilość ich w miarę upływu czasu wzrasta i jest porządkowana. Takimi faktami były dla Keplera: model Kopernika oraz doświadczenia Tychona Brahe, dla Newtona zaś - prawa Keplera, których potrzeba głębszych interpretacji była bodźcem do stworzenia podstaw mechaniki klasycznej. W tej chronologii zdarzeń uwidacznia się zasługa Kopernika nie tylko w rozwoju astronomii, ale również w rozwoju fizyki.

Dalszy rozwój mechaniki nieba jest ściśle związany z rozwojem mechaniki analitycznej której podstawy zawdzięczamy głównie pracom Lagrange'a, d'Alemberta, Hamiltona, Jacobiego, Eulera i innych. Równania Lagrange'a

czy Hamiltona stanowią doskonalsze narzędzie w stosunku do równań Newtona. Istotne jest to, że są one inwariantne względem transformacji układu współrzędnych, opisują ruch w dowolnych układach krzywoliniowych oraz pozwalają na daleko idące uogólnienia.

Niech q^i oznacza współrzędną krzywoliniową. Oznaczmy przez E energię kinetyczną układu, a przez Q_i uogólnioną siłę działającą na i-tej współrzędnej. Przy takich oznaczeniach równania ruchu przedstawią się w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q^i} = Q_i + \lambda_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial q^i}. \tag{13}$$

gdzie $\phi_\mu(q^1, \ldots, q^N, t) = 0$ jest równaniem więzów typu geometrycznego, N jest liczbą stopni swobody układu, λ_μ mnożnikiem Lagrange'a.

Energia kinetyczna składa się z trzech następujących składników:

$$E = E_o + E_1 + E_2, \tag{14}$$

gdzie

$$\begin{aligned} E_o &= a_o(q^1, \ldots, q^N, t), \\ E_1 &= a_j(q^1, \ldots, q^N, t)\,\dot{q}^j, \\ E_2 &= \tfrac{1}{2}\, a_{jk}(q^1, \ldots, q^N, t)\dot{q}^j\dot{q}^k. \end{aligned} \tag{14a}$$

Wprowadzając przestrzeń Riemanna określoną tensorem metrycznym $a_{jk}(q^1, \ldots, q^N, t)$ można równania (13) sprowadzić do postaci:

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{rs}\,\dot{q}^r\dot{q}^s = F^i, \tag{15}$$

gdzie Γ^i_{rs} jest symbolem Christoffela II rodzaju,

$$F^i = \left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q^j}\right) + \frac{\partial}{\partial q^j}(E_o+E_1) - \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\,\dot{q}^k + \lambda_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial q^j}\right] a^{ij}$$

a^{ij} jest sprzężonym tensorem metrycznym.

Każde z N równań (15) jest równaniem drugiego rzędu. Przyjmują one szczególną postać, gdy rozpatrywane układy dynamiczne z jakimi spotykamy się w astronomii, są skleronomiczne (więzy nie zależą od czasu) i konserwatywne.

W takich układach pełna energia jest stała

$$T = E + V, \tag{16}$$

gdzie V jest energią potencjalną.

Dla układów konserwatywnych można zbudować inną przestrzeń Riemanna, której własności lokalne są scharakteryzowane następującym tensorem metrycznym:

$$b_{ik} = a_{ik}(T - V) \tag{17}$$

W tej nowej przestrzeni trajektorie ruchu są liniami geodezyjnymi, bowiem równania ruchu można przedstawić w formie:

$$\frac{d^2q^i}{ds^2} + \Gamma^i_{mn}\frac{dq^m}{ds}\frac{dq^n}{ds} = 0 \tag{18}$$

gdzie Γ^i_{mn} jest wyrażone poprzez składowe tensora b_{ik} oraz ds jest elementem łuku ($ds = \sqrt{b_{ik}dq^i dq^k}$).

Jak zauważamy, problem n ciał można sprowadzić do poszukiwania linii geodezyjnej w przestrzeni Riemanna zwanej przestrzenią konfiguracyjną. Te uogólnienia wydaje się odegrały dość istotną rolę w rozwoju mechaniki nieba. Należy tu zwrócić uwagę na analogie jakie pojawiają się w ogólnej teorii względności, która w zagadnieniach astronomii odegrała ważną rolę.

Rzeczywiście zgodnie z poglądem Einsteina równania (18) są naturalnym uogólnieniem pierwszego prawa Newtona. Symbole Christoffela zależą od pola grawitacyjnego, w którym obserwujemy ruch punktu materialnego (planety).

Jednym z ważniejszych osiągnięć ogólnej teorii względności było wytłumaczenie ruchu peryheliowego Merkurego. Zjawisko to podlega ciągłej zmianie położenia osi eliptycznego toru planety, którego nie można wytłumaczyć w oparciu o teorię Newtona. Jest ono wynikiem działania pola grawitacyjnego Słońca, a ze względu na to, że Merkury jest planetą zajmującą najbliższą trajektorię, wpływ ten się najsilniej ujawnił. Efekt ten zaobserwowano również w odniesieniu do Ziemi i Wenus.

Zjawisko ruchu peryheliowego Merkurego jest dobitnym argumentem świadczącym o ile głębiej pozwala nam układ Kopernika wniknąć w istotę zjawisk przyrody, o ile pełniejszy opis rzeczywistości zapewnia nam on w porównaniu z układem Ptolemeusza.

W okresie od Ptolemeusza do czasów nam współczesnych, mechanika nieba była w centrum zainteresowania astronomów, fizyków i matematyków. Właśnie temu zawdzięczamy rozwój teorii układów dynamicznych, techniki obserwacyjnej, jak również matematyki, dla której potrzeby praktyczne były źródłem psychologicznym odkryć. Rozwój tych nauk wywarł głęboki wpływ na formowa-

nie się przekonań filozoficznych ostatnich stuleci. Kamieniem węgielnym dla tego postępu był model Kopernika, jego koncepcja heliocentryczna. Ten rozwój myśli naukowej, kształtujący pogląd na naturę zjawisk otaczającej nas rzeczywistości zawdzięczamy czynnej woli, kontemplacyjnemu rozumowi w dążeniu do poznania prawdy.

LITERATURA

[1] Banach S.: Mechanika, W-wa 1956, PWN.

[2] Brouwer D., Clemence G.: Methods of Celestial Mechanics, New York, 1961.

[3] Gantmacher F.: Lectures in Analytical Mechanics, Mir Publishers Moscow, 1970.

[4] Einstein A.: Istota teorii względności, W-wa 1968, PWN.

[5] Landan L., Lifszic E.: Mechanika, W-wa 1965, PWN.

[6] Łojcjańskij L.G., Łurie A.I.: Kurs teoreticzeskoj mechaniki, Moskwa 1955 (tom II).

[7] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna, W-wa 1955, PWN.

[8] Skalmierski B.: Mechanika teoretyczna, Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1971.

[9] Sterne T.E.: Wstęp do mechaniki nieba, W-wa 1966 PWN.

[10] Whittaker E.T.: Dynamika analityczna, W-wa 1959, PWN.

[11] Tisserand F.: Traité de mecanique céleste, vol. 1-4, Paris 1889-96.