ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: GÓRNICTWO z. 225 Nr kol. 1307

Mirosław CHUDEK, Andrzej FLISOWSKI

PROPOZYCJA OBLICZANIA NIEUSTALONYCH OSIADAŃ POWIERZCHNI TERENU PRZY ZASTOSOWANIU ORYGINALNEJ FUNKCJI WPŁYWÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono nowy model prognozowania poeksploatacyjnych deformacji powierzchni terenu. Obliczenia wartości osiadań przeprowadzone są za pomocą funkcji elementarnych, a mianowicie funkcji wykładniczej e^x i wielomianów. Pozostałe wskaźniki deformacji łatwo więc obliczyć przez zróżnicowanie wyprowadzonych wzorów. Zaprezentowano również wzory pozwalające na obliczenie chwilowych wartości deformacji dla stałej prędkości postępu frontu eksploatacyjnego.

THE PROPOSAL OF CALCULATION MINING SUBSIDENCE OVER TIME USING ORIGINAL INFLUENCE FUNCTION

Summary. The new model for forecasting of the land surface deformation caused by underground mining has been presented in this paper. The calculations of subsidence are done by using elementary functions: exponential and polynomials. It makes possible to do the calculations analytically, that makes problem easier to solve. Other deformation indices one can easily obtain by differentiating formulae mentioned above. The formulae enabling calculation of temporary values of deformation for constant face advance have been presented too.

1. WSTĘP

Ważnym zagadnieniem, którego rozwiązania oczekuje od nauki praktyka górnicza, jest poznanie praw rządzących przemieszczaniem skał pod wpływem podziemnej eksploatacji górniczej. Zagadnienie to obejmuje zarówno zachowanie się skał stropowych, jak i deformacje powierzchni terenu. Chodzi o ustalenie praw rządzących stanem deformacji terenu, tak by z góry można było przewidzieć skutki eksploatacji górniczej, jakie występują zarówno na powierzchni, jak i w górotworze.

Podane przez nas wzory, określające stan deformacji terenu, zależne od czasu i prędkości posuwu frontu eksploatacyjnego, otrzymaliśmy w wyniku zastosowania schematów dedukcyjnych. Przyjęliśmy założenia geometryczne odnośnie do rozkładu wpływów eksploatacji elementarnej objętości złoża. Skorzystaliśmy z oryginalnej funkcji wpływów podanej w [2]. Funkcja ta jest całkowalna przy pomocy funkcji elementarnych dowolną ilość razy.

I. Założenia przyjęte w pracy

a) Eksploatacja prowadzona jest na odpowiednio dużej głębokości, tak że spowodowana nią deformacja powierzchni jest ciągła w czasoprzestrzeni (na powierzchni nie zauważa się występowania deformacji nieciągłych).

b) Pokład zalega poziomo (w praktyce założyć można, że upad eksploatowanego pokładu $\alpha \leq 10^{o}$).

c) Nieskończenie długi front eksploatacji w pokładzie na głębokości H posuwa się ze stałą prędkością v.

d) Przyjęto prostokątny układ współrzędnych Oxyz, przy czym początek układu O znajduje się na krawędzi frontu, płaszczyzna Oxy pokrywa się z płaszczyzną stropu; oś Oy skierowana jest wzdłuż frontu eksploatacji, prostopadła do niej oś Ox skierowana jest w kierunku prowadzonej eksploatacji, a oś Oz skierowana jest ku górze (ku powierzchni). Na powierzchni terenu przyjmujemy pomocniczy prostokątny układ współrzędnych OXYZ, przy czym osie OX i OY są rzutami prostokątnymi osi Ox i Oy na powierzchnię terenu.

Ponieważ początek układu znajduje się zawsze nad ruchomą krawędzią eksploatacji, więc układ ten zmienia się w czasie t. Współrzędną punktu (w ruchomym układzie współrzędnych) oznaczamy w tej pracy literą s. Wprowadzamy też "stały" układ współrzędnych, tzn. układ związany z początkowym położeniem krawędzi eksploatacji. Współrzędną punktu w tym układzie oznaczamy literą s_0.

Tak więc dla tego samego punktu powierzchni terenu zachodzi między jego współrzędną s_0 (w układzie stałym) oraz współrzędną s (w układzie zmieniającym się wraz z postępem frontu) związek:

$$s = s_0 - v \cdot t$$

gdzie:

v - prędkość posuwu frontu eksploatacji,

t - czas liczony od momentu rozpoczęcia eksploatacji.

Przyjęcie nieskończenie długiego frontu eksploatacji sprowadza nasze zagadnienie do zagadnienia płaskiego (dwuwymiarowego). Wystarczy więc rozpatrywać obniżenia punktów powierzchni tylko w płaszczyźnie x,z.

Punktowi A(s,o) leżącemu na powierzchni terenu przyporządkowujemy funkcje wpływów g(x,s) o następującej postaci [2]:

$$g\,(x,s) = \frac{W_{max}}{4}\, b^2 \left(|x-p-s| + \frac{1}{b}\right) \exp\left(-b|x-p-s|\right) \qquad (1)$$

gdzie:

$b \in R, p \in R$ - parametry zależne od własności fizycznych górotworu,

W_{max} = - a m,

a - współczynnik zależny od sposobu kierowania stropem,

m - grubość pokładu.

Ma ona następującą własność: pole ograniczone krzywą g(x,s), osią odciętych i rzędnymi w punktach a, c jest miarą obniżenia, jakiemu ulegnie punkt A na skutek wybrania pokładu w granicach od a do c, czyli:

$$W(s,o) = \int_a^c g(x,s)dx$$

Przyjmujemy [3], że prędkość osiadania punktu na powierzchni terenu jest proporcjonalna do różnicy między końcowym obniżeniem W_k, jakiemu punkt winien ulec na skutek wybrania danej partii pokładu, a faktyczną wielkością obniżenia W(t) punktu w danej chwili t; stąd wzór:

$$\frac{dw}{dt} = k\left(W_k - W(t)\right) \qquad (2)$$

gdzie:

k - współczynnik proporcjonalności.

Ponieważ zakładamy, że eksploatacja trwa, więc W_k jest zmienne w czasie - dokładniej, rośnie do wielkości W_{max}, przy czym zależy i od wielkości wybranego pokładu do chwili t, i od odległości poziomej punktu powierzchni od krawędzi eksploatacji.

Możemy to zapisać za pomocą wzoru:

$$W_k(s_o) = \int_{-x}^{0} g(\lambda, s) d\lambda$$

gdzie:

$$x = v \cdot t$$

Dokonując zmiany zmiennych (korzystając z tego że $x = v \cdot t$), możemy obniżenie $w_k(s_o)$ wyrazić w sposób jawny od czasu t, otrzymując:

$$w_k(s_0, v, t) = v \int_{-t}^{0} g(v \cdot T, s_0 - v \cdot t) dT$$

Stąd oraz ze wzoru (1) otrzymujemy:

$$w_k(s_0, v, t) = \frac{W_{max}}{4} b^2 v \int_{-t}^{0} \left(|v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t| + \frac{1}{b} \right) \exp(-b|v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t|) dT \qquad (3)$$

II. Sformułowanie wzorów $w_k(s_0,v,t)$

Dla obliczenia całki (3) rozpatrzmy trzy przypadki:

$s_0 + p < 0$; $s_0 + p \geq 0$ i $t \leq t_{s0}$ (front eksploatacji podchodzi pod punkt o współrzędnej $s_0 + p$);

oraz $s_0 + p > 0$ i $t \geq t_{s_0}$ (front eksploatacji mija punkt o współrzędnej $s_0 + p$),

gdzie t_{s0} liczba rzeczywista spełniająca równanie:

$$p + s_0 = v \cdot t_{s0}$$

Oznaczając dla skrócenia zapisów przy obliczeniach $B = \frac{W_{max}}{4} b^2$ mamy:

$$w_k(s_0, v, t) = v\int_{-t}^{0} B\left(\left|v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t\right| + \frac{1}{b}\right) e^{-b\left|v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t\right|} dT$$

a) Dla $s_0 + p \leq 0$

jest:

$s_0 - vt + p \leq - vt$

czyli:

$s_0 - vt + p \leq v \cdot T$ dla $-t \leq T \leq 0$

więc:

$vT - s_0 + vt - p \geq 0$

i

$|vT - s_0 + vt - p| = v \cdot T - p - s_0 + vt$

stąd:

$$w_k(s_0, v, t) = Bv\int_{t}^{0}\left(v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t + \frac{1}{b}\right)e^{-b(vT - p - s_0 + vt)}dT =$$

$$= Be^{b(p+s_0-vt)}v\left[\int_{-t}^{0} VTe^{-bvT}dT - \int_{-t}^{0}\left(p + s_0 - vt - \frac{1}{b}\right)e^{-bvT}dT\right] =$$

$$= Be^{b(p+s_0-vt)}v\left[-\frac{t}{b}e^{bvt} + \left(p + s_0 - vt - \frac{2}{b}\right)\frac{1}{bv}e^{-bvT}\Big|_{-t}^{0}\right] =$$

$$= \frac{W_{max}}{4} be^{b(p+s_0)} \cdot \left[\left(p + s_0 - vt - \frac{2}{b}\right)e^{-bvt} - \left(p + s_0 - \frac{2}{b}\right)\right]$$

b) Dla $s_0 + p > O$

Rozważymy dwa przypadki, a mianowicie gdy front eksploatacyjny zbliża się pod punkt o współrzędnej $s_0 + p$, a następnie gdy mija ten punkt. W przypadku gdy front eksploatacyjny zbliża się pod punkt o współrzędnej $s_0 + p$, mamy nierówność $t \leq t_{s0}$, a stąd już wyrażenie występujące w całce pod modułem jest ujemne, tzn.:

$$v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t < 0$$

czyli:

$$|v \cdot T - p - s_0 + v \cdot t| = - v \cdot T + p + s_0 - v \cdot t$$

stąd:

$$w_k(s_0,v,t) = Bv\int_{-t}^{0}\left(-vT+p+s_0-vt+\frac{1}{b}\right)e^{b(vT-p-s_0+vt)}dT =$$

$$= Be^{-b(p+s_0-vt)}v\left[\int_{-t}^{0}-vTe^{bvT}dT + \int_{-t}^{0}\left(p+s_0-vt+\frac{1}{b}\right)e^{bvT}dT\right] =$$

$$= \frac{W_{max}}{4}be^{-b(p+s_0)}\left[\left(p+s_0-vt+\frac{2}{b}\right)e^{bvt}-\left(p+s_0+\frac{2}{b}\right)\right]$$

Jest to końcowa wartość osiadania punktu $s_0 + p$, pod który front eksploatacyjny zbliża się osiągając go ($t \leq t_{s0}$).

Rozważmy obecnie przypadek, gdy front eksploatacyjny, osiągnąwszy punkt o współrzędnej $s_0 + p$, posuwa się dalej, tzn. $t \geq t_{s0}$; mamy:

$$w_k(s_0,v,t) = Bv\int_{-t}^{0}\left(|vT-p-s_0+vt|+\frac{1}{b}\right)e^{-b|vT-p-s_0+vt|}dT =$$

$$= Bv\int_{-t}^{t_s-t}\left(-vT+p+s_0-vt+\frac{1}{b}\right)e^{b(vT-p-s_0+vt)}dT + Bv\int_{t_s-t}^{0}\left(vT-p-s_0+vt+\frac{1}{b}\right)e^{-b(vT-p-s_0+vt)}dT =$$

$$= Be^{b(-p-s_0+vt)}v\left[\int_{-t}^{t_s-t}-vTe^{bvT}dT+\int_{-t}^{t_s-t}\left(p+s_0-vt+\frac{1}{b}\right)e^{bvT}dT\right]+Be^{-b(-p-s_0+vt)}v\left[\int_{t_s-t}^{0}vTe^{-bvT}dT+\int_{t_s-t}^{0}\left(-p-s_0+vt+\frac{1}{b}\right)e^{-bvT}dT\right]=$$

$$= \frac{W_{max}}{4}b\left[\frac{4}{b}+e^{-b(p+s_0)}\left(-\frac{2}{b}-p-s_0\right)+e^{b(p+s_0-vt)}\left(-\frac{2}{b}+p+s_0-vt\right)\right]$$

Reasumując, otrzymujemy:

- dla punktów znajdujących się przed początkową krawędzią eksploatacji ($s_0 + p \le 0$) obniżenie końcowe w zależności od czasu t i prędkości v wyraża się wzorem:

$$w_k(s_0, v, t) = \frac{W_{max}}{4} be^{b(p+s_0)} \cdot \left[\left(p + s_0 - vt - \frac{2}{b}\right)e^{-bvt} - \left(p + s_0 - \frac{2}{b}\right)\right] \tag{4}$$

- dla punktów, pod które front eksploatacyjny zbliża się ($s_0 + p > 0$), obniżenie końcowe w zależności od czasu t, $t \le t_{s0}$ i prędkości v wynosi:

$$w_k(s_0, v, t) = \frac{W_{max}}{4} b e^{-b(p+s_0)}\left[\left(p + s_0 - vt + \frac{2}{b}\right)e^{bvt} - \left(p + s_0 + \frac{2}{b}\right)\right] \tag{5}$$

- dla punktów, pod którymi front eksploatacyjny przechodzi ($s_0 + p > 0$), a następnie oddala się od nich, obniżenie końcowe w zależności od czasu t ($t > t_s$) i prędkości v wynosi:

$$w_k(s_0, v, t) = \frac{W_{max}}{4} b\left[\frac{4}{b} + e^{-b(p+s_0)}\left(-\frac{2}{b} - p - s_0\right) + e^{b(p+s_0-vt)}\left(-\frac{2}{b} + p + s_0 - vt\right)\right] \tag{6}$$

III. Osiadanie punktu jako funkcja czasu i prędkości posuwu frontu eksploatacyjnego

Rozwiązując równanie (2) i korzystając ze wzorów na w_k otrzymanych w poprzednim punkcie kolejno otrzymujemy:

równanie jednorodne w postaci:

$$\frac{dw}{dt} = -kw$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja:

$$w = A\,e^{-kt}$$

gdzie

$$A = \text{const}$$

Uzmienniając stałą A (A (t)) otrzymujemy, że funkcja A (t) spełnia równanie:

$$A'(t) = k w_k\, e^{kt}$$

a stąd:

$$A(t) = k\int w_k e^{kt} dt$$

Zgodnie ze wzorami na w_k otrzymanymi w poprzednim punkcie rozważamy dwa przypadki, gdy $s_0 + p \le 0$ oraz gdy $s_0 + p > 0$.

a) Dla $s_0 + p \le 0$ mamy:

$$A(t) = k\frac{W_{max}}{4} b e^{b(p+s_0)} \left[\frac{p + s_0 - \frac{2}{b} - tv}{-bv + k} e^{(-bv+k)t} - \frac{p + s_0 - \frac{2}{b}}{k} e^{kt} + \frac{v}{(-bv+k)^2} e^{(-bv+k)t} + c \right]$$

gdzie: c = const.

Stąd rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać:

$$w(t) = \frac{k \cdot W_{max}}{4} b e^{b(p+s_0)} \left[\left(\frac{p + s_0 - \frac{2}{b} - tv}{-bv + k} + \frac{v}{(-bv+k)^2} \right) e^{-bvt} - \frac{p + s_0 - \frac{2}{b}}{k} + c e^{-kt} \right]$$

Korzystając z warunku początkowego w (0) = 0 mamy:

$$c = \frac{p + s_0 - \frac{2}{b}}{k} - \frac{p + s_0 - \frac{2}{b}}{-bv + k} - \frac{v}{(-bv+k)^2}$$

i ostatecznie mamy wzór (4):

$$w(s_0,t)=\frac{kW_{max}}{4}\,b\,e^{b(p+s_0)}\left[\left(\frac{p+s_0-\frac{2}{b}-vt}{-bv+k}+\frac{v}{(-bv+k)^2}\right)e^{-bvt}-\frac{p+s_0-\frac{2}{b}}{k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{p+s_0-\frac{2}{b}}{k}-\frac{p+s_0-\frac{2}{b}}{-bv+k}-\frac{v}{(-bv+k)^2}\right)e^{-kt}\right]$$

b$_1$) Dla $s_0 + p > 0$ i $t \le t_{so}$

$$A(t)=\frac{1}{4}\,k\,W_{max}\,b\,e^{-b(p+s_0)}\cdot\left\{\left[\frac{p+s_0+\frac{2}{b}-tv}{bv+k}+\frac{v}{(bv+k)^2}\right]e^{(bv+k)t}-\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{k}e^{kt}+c\right\}$$

c = const,

natomiast:

$$w(s_0,t)=\frac{1}{4}\,k\,W_{max}\,b\,e^{-b(p+s_0)}\cdot\left\{\left[\frac{p+s_0+\frac{2}{b}-tv}{bv+k}+\frac{v}{(bv+k)^2}\right]e^{bvt}-\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{k}+c\,e^{-kt}\right\}$$

korzystając z warunku początkowego w (0) = 0 otrzymujemy na stałą c wartość:

$$c=\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{k}-\frac{v}{(bv+k)^2}-\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{bv+k}$$

Tak więc dla punktu powierzchni o współrzędnej s_0 otrzymujemy, w przypadku gdy $s_0 + p > 0$ i $t \le t_{so}$, wzór na obniżenie po czasie t w następującej postaci (5):

$$w(s_0,t)=\frac{kW_{max}}{4}be^{-b(p+s_0)}\left\{\left[\frac{p+s_0+\frac{2}{b}-tv}{bv+k}+\frac{v}{(bv+k)^2}\right]e^{bvt}-\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{k}+\left(\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{k}-\frac{v}{(bv+k)^2}-\frac{p+s_0+\frac{2}{b}}{bv+k}\right)e^{-kt}\right\}$$

b$_2$) Dla $s_0 + p > 0$ i $t > t_s$

$$A(t) = \frac{kW_{max}}{4}b\left\{\left[\frac{4}{bk}+\frac{1}{k}\left(-\frac{2}{b}-p-s_0\right)e^{-b(p+s_0)}\right]e^{kt}-\frac{1}{k-bv}\left(\frac{2}{b}-p-s_0\right)e^{b(p+s_0)+(k-bv)t}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{-vt}{k-bv}+\frac{v}{(k-bv)^2}\right]e^{b(p+s_0)+(k-bv)t}+c\right\}$$

c = const,

stąd:

$$W(s_0,t)=\frac{kW_{max}}{4}b\left\{\frac{4}{bk}+\frac{1}{k}\left(-\frac{2}{b}-p-s_0\right)e^{-b(p+s_0)}+\left[\frac{-\left(\frac{2}{b}-p-s_0\right)}{k-bv}+\frac{-vt}{k-bv}+\frac{v}{(k-bv)^2}\right]e^{b(p+s_0)-bvt}+ce^{-kt}\right\}$$

Dla wyznaczenia stałej c obliczamy najpierw wartość funkcji $w(s_0,t_{so})$ na podstawie wzoru wyprowadzonego w punkcie b_1, oznaczając ją symbolem A; mamy:

$$A = w(s_0,t_{so}) = \frac{kW_{max}}{4}\left\{\frac{2}{bv+k}+\frac{bv}{(bv+k)^2}-\frac{b(p+s_0)+2}{k}e^{-b(p+s_0)}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{b(p+s_0)+2}{k}-\frac{bv}{(bv+k)^2}-\frac{b(p+s_0)+2}{bv+k}\right]e^{-b(p+s_0)+kt_{so}}\right\}$$

Teraz możemy już obliczyć stałą c korzystając z warunku początkowego o postaci:

$$w(t_{so}) = A$$

stąd:

$$c = \frac{-4b^3v^4e^{kt_{so}}}{(k^2-b^2v^2)^2k}+\left[\frac{(bvt_{so}+2)v}{k(bv+k)}-\frac{v}{(bv+k)^2}\right]e^{-bvt_{so}}$$

Tak więc dla punktu powierzchni o współrzędnej s_0 otrzymujemy, w przypadku gdy $s_0 + p > 0$ i $t > t_{so}$, wzór na obniżenie po czasie t w następującej postaci:

$$w(s_0,t) = \frac{kW_{max}}{4} b \left\{ \left[\frac{4}{bk} + \frac{1}{k}\left(-\frac{2}{b} - p - s_0\right) e^{-bvt_{so}} + \left[\frac{-\frac{2}{a} + p + s_0 - vt}{k - bv} + \frac{v}{(k-bv)^2} \right] e^{bv(t_s - t)} + \right. \right.$$
$$\left. + \left[\frac{-4b^3v^3}{\left(k^2 - b^2v^2\right)^2 k} e^{kt_{so}} + \left(\frac{(bvt_{so} + 2)v}{k(bv+k)} - \frac{v}{(bv+k)^2} \right) e^{-bvt_{so}} \right] e^{-kt} \right\}$$

Reasumując, obniżenie terenu $w(s_0, t)$ w punkcie o współrzędnej s_0 po czasie t od momentu rozpoczęcia eksploatacji, która przebiega z prędkością v, zgodnie z punktami a), b) wyraża się wzorem:

$$w(s_0,t) = \begin{cases} \text{wzór } (4) & \text{dla } s_0 + p \le 0 \quad \text{tzn} \quad t_{so} \le 0 \\ \text{wzór } (5) & \text{dla } s_0 + p > 0 \quad \text{i} \quad t \le t_{so} \quad \text{tzn} \quad 0 \le t \le t_{so} \\ \text{wzór } (6) & \text{dla } s_0 + p > 0 \quad \text{i} \quad t > t_{so} > 0 \end{cases}$$

IV. Wnioski końcowe

W ramach niniejszej pracy przedstawiono nową propozycję obliczania wartości poeksploatacyjnych deformacji powierzchni terenu. Do zalet przedstawionego rozwiązania zdaniem autorów zaliczyć można:

1. Możliwość obliczania wartości osiadań za pomocą funkcji elementarnych. Stanowi to novum, gdyż w znanych z literatury teoriach występują w ramach całki, które oblicza się w sposób przybliżony (ETO).

   Wzory wyprowadzane w pracy tylko w pierwszej chwili mogą wydać się skomplikowane. Jednak tak nie jest, czasem występują w nich stałe, a z funkcji tylko wielomian pomnażamy przez funkcję e^x.
2. Pozostałe wskaźniki deformacji można łatwo obliczyć różniczkując prezentowane w pracy normy wyrażające osiadanie powierzchni terenu.

Przeprowadzone dotychczas obliczenia wykazały dobrą zgodność wyników przy zastosowaniu wzorów z wynikami pomiarów osiadań asymptotycznych. Zachęca to do podjęcia dalszych prac zmierzających do określenia zmienności parametrów w zależności od warunków geologiczno-górniczych prowadzonej eksploatacji, a także weryfikacji rozwiązań dla stanów nieustalonych. Należy dodać, że wprowadzenie do prezentowanych wzorów zmiennej prędkości postępu frontu nie powinno nastręczać większych problemów, a uczyni rozwiązanie bardziej przydatnym praktycznie.

LITERATURA

1. Chudek M., Flisowski A.: Ustalona, powierzchniowa niecka obniżeniowa przy przesuniętej normalnej krzywej wpływów. OTG nr 83/88.
2. Flisowski A.: Prognozowanie poeksploatacyjnych deformacji powierzchni terenu przy pomocy nowej funkcji wpływów. Bezpieczeństwo Pracy i Ochrona Środowiska w Górnictwie. Kwartalnik WUG 2 (14) 1995 str. 12 - 17.
3. Knothe St.: Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej. Wydawnictwo „Śląsk", 1984 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Zorychta

Wpłynęło do Redakcji: 3 marca 1995 r.

Abstract

The new model for forecasting of the land surface deformation caused by underground mining has been presented in this paper. The calculations of subsidence are done by using elementary functions: exponential and polynomials. Other deformation indices one can easily obtain by differentiating formulae mentioned above. The formulae enabling calculation of temporary values of deformation for constant face advance have been presented too.