

Stanisław KOWALIK

## PODEJMOWANIE DECYZJI W OPARCIU O TEORIĘ ZBIORÓW ROZMYTYCH Z WYKORZYSTANIEM RÓŻNYCH DEFINICJI DECYZJI ROZMYTEJ

**Streszczenie.** W pracy wykorzystano teorię zbiorów rozmytych do podejmowania decyzji. Wprowadzono osiem różnych definicji decyzji rozmytej. Podano też określenie decyzji optymalnej. W pracy podano przykład zastosowania tej teorii w górnictwie do określania miejsca wiercenia otworu w górotworze. Podano wyniki obliczeń dla różnych definicji decyzji rozmytej.

## MAKING DECISIONS ON THE BASIS OF THE THEORY OF FUZZY SETS WITH THE USE OF VARIOUS DEFINITIONS OF FUZZY DECISION

**Summary.** In this papers the theory of fuzzy sets has been used to make the decisions. Eight various definitions of fuzzy decision have been introduced in this article. An idea of an optimal decision has also been presented. The paper exemplifies the application of this theory in mining to pinpointing the boring place in a rock mass.

## ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗМЫТОГО РЕШЕНИЯ

**Резюме.** В работе использовано теорию размытых множеств в принятии решений. Принято восемь разных размытых решений. Дано также определение оптимального решения. В работе приведено пример применения этой теории в горном деле для определения места бурения шпура в горном массиве. Приводятся результаты расчетов для разных определений размытых множеств.

## 1. WSTĘP

W przeprowadzonych rozważaniach wzorowano się na klasycznej teorii zbiorów rozmytych opracowanej przez L.A.Zadeha [10]. Po raz pierwszy w 1965 roku Zadeh w swojej pracy [10] określił pojęcie rozmytości (fuzziness) oraz sformułował podstawowe pojęcia dotyczące zbiorów rozmytych (fuzzy sets). Na tych pojęciach opierają się reguły tzw. logiki rozmytej. W 1970 roku wspólnie z Bellmanem opublikował pracę [1] o podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytych. W następnych latach teoria zbiorów rozmytych szybko się rozbudowała i zrobiła błyskawiczną karierę. W 1973 roku Zadeh w swojej pracy [11] podaje podstawowe pojęcia i reguły logiki rozmytej. Teoria zbiorów rozmytych wzoruje się na klasycznej teorii zbiorów z uwzględnieniem tzw. funkcji przynależności elementu do zbioru. W związku z tym wprowadza się specjalny zapis zbiorów rozmytych oraz określa się działania na tych zbiorach. Wprowadza się też pojęcie liczb rozmytych oraz odpowiednie operatory arytmetyczne. Informacje dotyczące otaczającego nas świata często są nieprecyzyjne, niepełne lub niepewne. Powstała niedawno teoria zbiorów rozmytych stwarza możliwość opisu formalnego tej informacji nieprecyzyjnej [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Te matematyczne metody teorii zbiorów rozmytych pozwalają pełniej i w sposób bardziej naturalny opisać zjawiska świata rzeczywistego. Sytuacje niepewne w podejmowaniu decyzji objawiają się tutaj poprzez niejednoznaczność i nieprecyzyjność opisu warunków, w jakich ma być podjęta decyzja. Innymi słowy, opis otaczającego nas świata jest niedokładny, a my musimy podejmować pewne decyzje. Podejmowanie decyzji w rozmytych warunkach otoczenia polega na odpowiednim wnioskowaniu z przesłanek o charakterze rozmytym.

## 2. OPERACJE DWUARGUMENTOWE NA ZBIORACH ROZMYTYCH

### 2.1. Definicja zbioru rozmytego

*Definicja 1 [3]*

Zbiorem rozmytym  $A$  określonym na przestrzeni  $X$  jest zbiór uporządkowanych par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \text{ dla } x \in X\}, \quad (1)$$

gdzie jest funkcją przynależności zbioru A.

## 2.2. Suma

### Definicja 2

Sumą zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór  $A \cup B$  określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \quad (2)$$

## 2.3. Iloczyn (przecięcie)

### Definicja 3

Iloczynem zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór  $A \cap B$  określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x). \quad (3)$$

## 2.4. Suma ograniczona

### Definicja 4

Sumą ograniczoną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór  $A \oplus B$  określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \oplus B} = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1). \quad (4)$$

## 2.5. Iloczyn ograniczony

### Definicja 5

Iloczynem ograniczonym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór  $A \circ B$  określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \circ B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1). \quad (5)$$

## 2.6. Suma algebraiczna

### Definicja 6

Sumą algebraiczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A+B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x). \quad (6)$$

## 2.7. Iloczyn algebraiczny

### Definicja 7

Iloczynem algebraicznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór AB określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x). \quad (7)$$

## 2.8. Suma drastyczna

### Definicja 8

Sumą drastyczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A∨B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \vee B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) > 0 \text{ i } \mu_B(x) > 0, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

### 2.9. Iloczyn drastyczny

*Definicja 9*

Iloczynem drastycznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór AB określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \wedge B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu_A(x) < 1 \text{ i } \mu_B(x) < 1, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

### 2.10. Porównanie różnych operacji dwuargumentowych na zbiorach rozmytych

W pracy [6] udowodniono, że

$$a \wedge b \leq a \odot b \leq a \bullet b \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq a + b \leq a \oplus b \leq a \vee b \quad (10)$$

dla  $a, b \in [0, 1]$ .

Ponieważ my operujemy funkcjami przynależności zbiorów rozmytych, a wartości tych funkcji zawierają się w przedziale [0, 1], więc możemy zapisać

$$\begin{aligned} \mu_{A \wedge B}(x) &\leq \mu_{A \odot B}(x) \leq \mu_{A \bullet B}(x) \leq \mu_{A \wedge B}(x) \leq \\ &\leq \mu_{A \vee B}(x) \leq \mu_{A + B}(x) \leq \mu_{A \oplus B}(x) \leq \mu_{A \vee B}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

## 3. PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM

### 3.1. Określenie otoczenia rozmytego

Podstawowym pojęciem takiego podejścia do podejmowania decyzji, zaproponowanego przez Bellmana i Zadeha [1] jest pojęcie otoczenia rozmytego.

*Definicja 10* [8]

Otoczeniem rozmytym problemu podejmowania decyzji nazywamy następującą czwórkę uporządkowaną:

$$(X, G, C, D), \quad (12)$$

gdzie  $X = \{x\}$  jest zbiorem możliwych decyzji,  $G$  - celem rozmytym,  $C$  - ograniczeniem rozmytym,  $D$  - decyzją rozmytą.

Elementy zbioru  $X$  mogą być dowolne, np. rodzaj materiału, wielkość inwestycji, rodzaj zakupu, strategie rozwoju ekonomicznego itp. - wszystko co podlega wyborowi.

Występuje tu sytuacja, gdzie na możliwe decyzje są nałożone pewne ograniczenia. A więc nie wszystkie decyzje są dopuszczalne. Należy poszukać najlepszą decyzję spośród dopuszczalnych.

Poniżej podane będą definicje celu rozmytego i ograniczenia rozmytego. Następnie zostanie określona decyzja rozmyta

*Definicja 11*

Cel rozmyty określa się jako zbiór rozmyty  $G \subset X$  o funkcji przynależności  $\mu_G(x)$ .

*Przykład 1*

Niech  $X = \mathbb{R}$  będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Celem rozmytym może być osiągnięcie liczby dużo większej od 100. Zbiór  $G$  można określić za pomocą funkcji przynależności  $\mu_G(x)$ , np.:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 100, \\ \frac{1}{1 + 100(x - 100)^{-1}} & \text{dla } x > 100. \end{cases} \quad (13)$$

*Definicja 12*

Ograniczenie rozmyte definiuje się jako zbiór rozmyty  $C \subset X$  o funkcji przynależności  $\mu_C(x)$ .

*Przykład 2*

Niech  $X = \mathbb{R}$  jest zbiorem liczb rzeczywistych. Ograniczeniem może być warunek, że liczba powinna być około 200. Funkcja przynależności zbioru  $C$  może być przedstawiona wzorem

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 150 \text{ lub } x > 250, \\ 0.02x - 3 & \text{dla } 150 \leq x \leq 250, \\ -0.02x + 5 & \text{dla } 200 \leq x \leq 250. \end{cases} \quad (14)$$

Jak widać, definicje celu rozmytego i ograniczenia rozmytego są właściwie identyczne. Występuje tu ścisła analogia między tymi pojęciami. W teorii zbiorów rozmytych traktuje się je jednakowo.

Funkcje  $\mu_G$  i  $\mu_C$  są przedstawione na rysunku 1.

### 3.2. Decyzja rozmyta

Decyzja ma być taka, aby osiągnąć pożądaną cel oraz spełnić ograniczenia. Decyzja rozmyta  $D$  jest więc pewną agregacją zbiorów rozmytych  $G$  i  $C$ . Ta agregacja zbiorów  $G$  i  $C$  może być dokonana na różne sposoby. Podstawową i powszechnie stosowaną decyzją rozmytą jest decyzja rozmyta typu minimum [7]. Opiera się ona na zasadzie, aby osiągnąć cel  $G$  i jednocześnie spełnić ograniczenie  $C$ . Odpowiada to agregacji zbiorów  $G$  i  $C$  w sensie iloczynu (przecięcia) zbiorów rozmytych.

*Definicja 13* [3]

Decyzję rozmytą typu minimum określa się jako:

$$D = G \cap C. \quad (15)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca:

$$\mu_D(x) = \min_x(\mu_G(x), \mu_C(x)). \quad (16)$$

W literaturze tę definicję nazywa się "pesymistyczną", jako że bazuje na mniejszych wartościach funkcji  $\mu_G(x)$  i  $\mu_C(x)$  [3], [4], [8]. Uznawane jest to za pewną wadę tej definicji, ponieważ dla dowolnego  $x$ ,  $\mu_D(x)$  jest zawsze równa mniejszej wartości z  $\mu_G(x)$  i  $\mu_C(x)$ . Funkcje przynależności mogą być bardzo różne, a iloczyn ich może być taki sam. Pokazuje to rysunek 2. Dlatego też próbuje się tworzyć inne definicje decyzji rozmytej rekompensujące tę wadę. Dla celu  $G$  i ograniczenia  $C$ , przedstawionych wzorami (13) i (14), decyzja  $D$  będzie jak na rysunku 1. Możliwe dopuszczalne decyzje są z przedziału (150,250).

W literaturze można też spotkać inne następujące określenia decyzji rozmytych:

a) decyzja rozmyta typu iloczyn algebraiczny

$$D = G \cdot C, \quad (17)$$

b) decyzja rozmyta typu kombinacja wypukła o funkcji przynależności

$$\mu_D(x) = r \cdot \mu_G(x) + (1-r) \cdot \mu_C(x), \quad r \in [0,1], \quad (18)$$

c) decyzja rozmyta typu maksimum

$$D = G \cup C. \quad (19)$$

Ostatnia wymieniona decyzja nazywana jest "optymistyczną" [3], [4], [8]. Nie ma natomiast definicji opartych na wzorach (4), (5), (6), (8), (9). Wydaje się, że można by wprowadzić takie definicje z uwagi na to, że możemy spotkać się z sytuacjami, które wymagałyby określenia decyzji rozmytej na podstawie tych wzorów. Na przykład, gdy mamy dwa zbiory rozmyte  $G$  i  $C$  i chcemy wyznaczyć decyzję rozmytą opartą na iloczynie (przecięciu) tych zbiorów, ale koniecznie zależy nam na tym, aby ten iloczyn był wyznaczony jedynie w przypadku, gdy  $\mu_G(x)=1$  lub  $\mu_C(x)=1$ . Odpowiada to agregacji zbiorów  $G$  i  $C$  w sensie iloczynu drastycznego. Rozważmy też inną sytuację, gdy jesteśmy bardzo mało wymagający względem zbiorów  $G$  i  $C$ . Najbardziej



satisfakcjonuje nas fakt, gdy  $\mu_G(x) > 0$  i  $\mu_C(x) > 0$ . Wtedy uważamy, że decyzja rozmyta spełnia jednocześnie cel rozmyty i ograniczenie rozmyte i przyjmujemy, że  $\mu_D(x) = 1$ . Gdy równocześnie  $\mu_G(x)$  i  $\mu_C(x)$  nie są większe od zera, to zadowolamy się tą, która jest różna od zera. Ta sytuacja odpowiada agregacji zbiorów  $G$  i  $C$  w sensie sumy drastycznej.

Zostanie teraz wprowadzonych osiem definicji decyzji rozmytych opartych na wzorach (2) do (9) w kolejności określonej przez wzory (10) i (11).

#### Definicja 14

Decyzję rozmytą typu iloczyn drastyczny określa się jako:

$$D = G \wedge C \quad (20)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \wedge C}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu_G(x) < 1 \text{ i } \mu_C(x) < 1, \\ \mu_G(x) & \text{dla } \mu_C(x) = 1, \\ \mu_C(x) & \text{dla } \mu_G(x) = 1. \end{cases} \quad (21)$$

#### Definicja 15

Decyzję rozmytą typu iloczyn ograniczony określa się jako:

$$D = G \odot C. \quad (22)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \odot C}(x) = \max(0, \mu_G(x) + \mu_C(x) - 1). \quad (23)$$

*Definicja 16*

Decyzję rozmytą typu iloczyn algebraiczny określa się jako:

$$D = G \cdot C, \quad (24)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \cdot C}(x) = \mu_G(x) \mu_C(x) \quad (25)$$

*Definicja 17*

Decyzję rozmytą typu iloczyn mnogościowy (przecięcie) określa się jako:

$$D = G \cap C. \quad (26)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca”

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \cap C}(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x). \quad (27)$$

*Definicja 18*

Decyzję rozmytą typu suma mnogościowa określa się jako:

$$D = G \cup C. \quad (28)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej  $D$  jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \cup C}(x) = \max(\mu_G(x), \mu_C(x)) = \mu_G(x) \vee \mu_C(x) \quad (29)$$

*Definicja 19*

Decyzję rozmytą typu suma algebraiczna określa się jako:

$$D = G + C. \tag{30}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G+C}(x) = \mu_G(x) + \mu_C(x) - \mu_G(x)\mu_C(x). \tag{31}$$

*Definicja 20*

Decyzję rozmytą typu suma ograniczona określa się jako:

$$D = G \oplus C \tag{32}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \oplus C}(x) = \min(\mu_G(x) + \mu_C(x), 1) \tag{33}$$

*Definicja 21*

Decyzję rozmytą typu suma drastyczna określa się jako:

$$D = G \vee C \tag{34}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x \in X} \mu_{G \wedge C}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_G(x) > 0 \text{ i } \mu_C(x) > 0, \\ \mu_G(x) & \text{dla } \mu_C(x) = 0, \\ \mu_C(x) & \text{dla } \mu_G(x) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Decyzje typu iloczyn możemy ogólnie nazwać "pesymistycznymi". Stosujemy je wtedy, gdy zależy nam, aby w jakimś stopniu cel rozmyty  $G$  i ograniczenie rozmyte  $C$  były jednocześnie osiągnięte. Natomiast decyzje typu suma nazywamy "optymistycznymi" z tego względu, że zadowolamy się, gdy zostanie osiągnięty rozmyty cel  $G$  lub rozmyte ograniczenie  $C$ .

### 3.3. Decyzja optymalna

Otrzymana decyzja rozmyta jako iloczyn celu i ograniczenia daje pewną wskazówkę, jaka decyzja nierozmyta jest najlepsza. Będziemy wybierać taką decyzję nierozmytą, której stopień przynależności w decyzji rozmytej jest największy.

#### Definicja 22

Decyzją optymalną nazywamy takie  $x_{opt}$ , że:

$$\mu_D(x_{opt}) = \sup_{x \in X} \mu_D(x). \quad (36)$$

Należy zwrócić uwagę, że decyzja  $x_{opt}$  nie zawsze musi być jednoznaczna, a nawet może nie istnieć w przypadku, gdy zbiory  $G$  i  $C$  są rozłączne.

Na rysunku 1 decyzją optymalną jest  $x_{opt} \cong 222.47$ .

Podany zostanie teraz przykład związany z pracą i bezpieczeństwem górników.

#### Przykład 3

W kopalni należy wywiercić otwór w górotworze w odległości około 800 metrów od wyznaczonego punktu. Ponieważ własności górotworu w tym rejonie nie są całkowicie znane, należy wziąć pod uwagę to, aby bezpieczeństwo górników było możliwie duże. Cel  $G$  "około 800 metrów" scharakteryzowano funkcją przynależności:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} -0.00125|x - 800| + 1 & \text{dla } 400 < x < 1200, \\ 0 & \text{dla } x \leq 400 \text{ lub } x \geq 1200 \end{cases} \quad (37)$$

Bezpieczeństwo pracy górników na interesującym nas kierunku od wyznaczonego punktu określono w sposób przybliżony za pomocą funkcji:

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{dla } 0 \leq x \leq 600, \\ 5 \cdot 10^{-6}(x - 600)^2 + 0.9 & \text{dla } 600 < x < 800, \\ 0.7 & \text{dla } x \geq 800. \end{cases} \quad (38)$$

Funkcje  $\mu_G(x)$  i  $\mu_C(x)$  pokazane są na rysunku 3. Decyzje optymalne wyznaczone według różnych definicji przedstawione są na rysunkach 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Na podstawie wzorów (21) i (36)  $x_{opt} = 800$  [m],

na podstawie wzorów (23) i (36)  $x_{opt} = 725$  [m],

na podstawie wzorów (25) i (36)  $x_{opt} = 716$  [m],

na podstawie wzorów (27) i (36)  $x_{opt} = 689$  [m],

na podstawie wzorów (29) i (36)  $x_{opt} = 800$  [m],

na podstawie wzorów (31) i (36)  $x_{opt} = 800$  [m],

na podstawie wzorów (33) i (36) oraz (35) i (36)  $x_{opt}$  nie jest wyznaczone jednoznacznie. Każde  $x \in (400, 1200)$  może być decyzją optymalną.

Widać, że różne definicje prowadzą do różnych wyników. W zależności od potrzeb i zastosowań możemy stosować różne definicje decyzji optymalnej

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Teoria zbiorów rozmytych zyskuje sobie obecnie coraz większe uznanie. Znajduje zastosowanie w coraz więcej dziedzinach. Ponieważ w górnictwie wiele wielkości czy cech górotworu nie jest dokładnie znanych lub wiele związków nie da się dokładnie opisać, wydaje się, że teoria zbiorów

rozmytych mogłaby też być tu zastosowana. Zostaną teraz podane dziedziny, w których ta teoria mogłaby usprawnić proces podejmowania decyzji w górnictwie:

- a) przy ustalaniu rejonów szczególnie niebezpiecznych w kopalni, gdy znajomość górotworu jest tylko przybliżona,
- b) przy prognozowaniu wstrząsów i tąpnięć, gdy opis zjawiska powstawania wstrząsów jest niedokładny,
- c) przy organizacji pracy z uwzględnieniem możliwie dużego bezpieczeństwa pracy,
- d) przy wyborze miejsca wiercenia otworów badawczych pod szyb, w przypadku niedokładnego oszacowania warunków naturalnych złoża,
- e) przy wyborze sposobu organizacji głębiania szybu ze względu na rozmyty opis warunków hydrogeologicznych,
- f) przy planowaniu drażenia wyrobisk korytarzowych w przypadku, gdy opis górotworu ma charakter rozmyty,
- g) przy wyborze miejsca otworów strzałowych, w przypadku przybliżonej tylko znajomości górotworu,
- h) przy organizacji robót w wyrobiskach ścianowych, gdy parametry ścian nie są dokładnie znane,
- i) przy inwestycjach, gdy przewidywane efekty można tylko w przybliżeniu ocenić,
- j) przy projektowaniu kopalń, gdy wskaźnik oceny ekonomicznej efektywności inwestycji trudno jest ocenić. Trudno przewidzieć, ile będzie on wynosił po zrealizowaniu inwestycji.

Przytoczone zostały tutaj niektóre tylko zagadnienia z zakresu górnictwa, w których można by wykorzystać teorię zbiorów rozmytych w celu polepszenia procesu podejmowania decyzji. Tych obszarów zastosowań może być więcej, ponieważ sytuacji niejasnych i nieprecyzyjnie opisanych może być dużo.

## LITERATURA

1. Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision - making in fuzzy enviroment. Management Science 17, N.4, 1970.

2. Bolc L., Borodziejewicz W., Wójcik M.: Podstawy przetwarzania informacji niepewnej i niepełnej. PWN, Warszawa 1991.
3. Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. Skrypt Pol. Śl. Nr 989, Automatyka, Gliwice 1980.
4. Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. PWN, Warszawa 1985.
5. Drewniak J.: Fuzzy relation calculus. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego Nr 1063, Katowice 1989.
6. Drewniak J.: Podstawy teorii zbiorów rozmytych. Skrypt Uniwersytetu Śląskiego Nr 347, Katowice 1987.
7. Kacprzyk J.: Wieloetapowe podejmowanie decyzji w warunkach rozmytości. PWN Warszawa 1983.
8. Kacprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN, Warszawa 1983.
9. Kowalik S.: Wykorzystanie teorii zbiorów rozmytych do podejmowania decyzji. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 219, Gliwice 1994.
10. Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Information and Control, vol. 8, 1965.
11. Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics SMC, 3 January 1973.

Recenzent: Prof. dr hab.inż. Ernest Czogała

Wpłynęło do Redakcji 9 marca 1994 r.

### Abstract

In this paper - a theory of fuzzy sets was used in making decision process. This problem was taken under considerations in papers [1], [3], [7], [8], [9]. In chapter 2 the following rules on fuzzy sets have been defined:

- a) sum of fuzzy sets,
- b) product of fuzzy sets,

- c) limited sum of fuzzy sets,
- d) limited product of fuzzy sets,
- e) algebraic sum of fuzzy sets,
- f) algebraic product of fuzzy sets,
- g) drastic sum of fuzzy sets,
- h) drastic product of fuzzy sets.

Examples of these rules for fuzzy sets are also included.

A decision making process based on a theory of fuzzy sets was described in chapter 3 where the notion of fuzzy environment suggested by Bellman and Zadeh is used. A  $X$  set of possible decisions, a  $G$  fuzzy set as a target, and a  $C$  fuzzy set as a fuzzy limit for a decision are given. Using  $G$  and  $C$  sets-it is possible to define a fuzzy decision  $D$  [3], [7], [8]. Owing a fuzzy decision  $D$  it is possible to determine an optimal unfuzzy decision  $x_{opt}$ . This decision is maximizing a  $\mu_D(x)$  function.