81/4 Bart

PERSPEKTYWA MALARSKA

ZASADY–ZARYS HISTORYCZNY–ESTETYKA

NAPISAŁ

DR. KAZIMIERZ BARTEL

PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

TOM I

Z 397 ILUSTRACJAMI

KSIĄŻNICA-ATLAS

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.

LWÓW—WARSZAWA

1928

JANA I MARJI
BRZEZIŃSKICH

NAUKA I SZTUKA

TOM XVI

PERSPEKTYWA MALARSKA

TOM I

KSIĄŻNICA-ATLAS
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.
LWÓW—WARSZAWA
1928

Politechnika Śląska * Kolegium Pedagogiczne * BIBLIOTEKA
Studium Nauczycielskie Biblioteka Gliwice
SN 24100
Kolegium Nauczycielskie * Gliwice * BIBLIOTEKA
Biblioteka Państw. Wyższej Szkoły Pedag. w Warszawie 831
75.01+75(091)
Biblioteka Państw. Instytutu Robót Lądowych w Bielsku
75.01:515
Bar
Perspe
Biblioteka Studium Nauczycielskiego w Katowicach
3523.
2872
3038

2146

Klisze, skład i druk wykonano w Zakładach Graficznych Sp. Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Spis rzeczy.

Rozdział pierwszy.

O odwzorowaniu perspektywicznem na płaszczyźnie.

Str.

1. Uwagi wstępne 1
2. Perspektywa punktów 2
3. Perspektywa linij prostych 3
4. Perspektywa płaszczyzn 7
5. Proste i punkty na płaszczyźnie 10
6. Płaszczyzny przechodzące przez proste 12
7. Proste równoległe do płaszczyzny 12
8. Proste przecinające się. Proste skośne 13
9. Proste prostopadłe do płaszczyzny 14
10. Płaszczyzny prostopadłe do prostej 16
11. Krawędzie płaszczyzn 18
12. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną 18
13. Obroty i kłady płaszczyzn 19
14. Podnoszenie płaszczyzn z kładu 26
15. Punkty mierzenia 30
16. Zadania 33

Rozdział drugi.

Zasady płaskiej perspektywy stosowanej.

17. Określenia i założenia 39
18. Proste prostopadłe do tła. Proste przekątne. Podziałka perspektywiczna 44
19. Zadania 48
20. Konstrukcyjne zastosowanie części głębokości tłowej 49
21. Proste poziome, dowolnie nachylone do tła 52
22. Częściowe ślady zbiegu 60
23. Podziałki zbiegu. Lineały perspektywiczne 65
24. Płaszczyzny poziome. Płaszczyzny pionowe 71
25. Proste równoległe do tła 74
26. Perspektywa „czołowa“, „boczna“ i „ukośna“ 80
27. Dzielenie odcinków 81
28. Mierzenie odcinków 89
29. Zadania 99
30. Stożek, obszar, pole i koło widzenia. Kąt widzenia obrazu 119
31. Perspektywa wnętrz 121
32. Perspektywa fotograficzna 131

Rozdział trzeci.

Perspektywa krzywych stożkowych.

33. Uwagi ogólne o perspektywie koła 139
34. Konstrukcja perspektywy koła, jako elipsy 145

Str.

35. Związek między śladem tłowym, śladem zbiegu, śladem zniknienia i okiem . . 152
36. Perspektywa koła — parabolą 153
37. Perspektywa koła — hiperbolą 154
38. Biegun, biegunowa, środek, średnice i osie krzywych stożkowych 158
39. Dalsze konstrukcje perspektywy koła, jako elipsy 161
40. Perspektywa koła — kołem 164
41. Perspektywa elipsy — elipsą, hiperbolą lub parabolą 166
42. Perspektywa elipsy — kołem 168
43. Perspektywa pęku kół współśrodkowych 169
44. Zadania 176

Rozdział czwarty.

Perspektywa powierzchni obrotowych.

45. Określenia 180
46. Przybliżone sposoby rysowania perspektyw obrotowych stożków i walców . . . 181
47. Dalsze konstrukcje perspektywy stożków i walców 185
48. Perspektywa wnętrz obrotowych walców i stożków 199
49. Perspektywa kuli 200
50. Dalsze konstrukcje perspektywy kuli 205
51. Perspektywa wnętrza kuli 210
52. Perspektywa dowolnej powierzchni obrotowej o osi pionowej 218
53. Perspektywa powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła 228
54. Perspektywa powierzchni obrotowej, której oś ma dowolne położenie w przestrzeni 234

Rozdział piąty.

Perspektywa obrazów odbitych w zwierciadłach płaskich.

55. Prawo odbicia 239
56. Przykłady odbić w zwierciadłach pionowych 241
57. Przykłady odbić w zwierciadłach nachylonych do ściany pionowej 246

Rozdział szósty.

Konstrukcja cieni.

58. Związek między perspektywą prostej a perspektywą jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę 252
59. Cień punktu 254
60. Cienie prostych 257
61. Cienie wielokątów 263
62. Cienie utworów przestrzennych, ograniczonych płaszczyznami 265
63. O cieniach koła 272
64. Cienie stożków, walców i ich zespołów 274

Rozdział siódmy.

Perspektywa pośrednia.

65. Perspektywa malarzy a perspektywa architektów 279
66. Metoda punktów przebicia promieni widzenia z tłem 281
67. Metoda dwóch śladów zbiegu 285
68. Połączenie metody punktów przebicia z metodą dwóch śladów zbiegu 291
69. Metoda śladów zbiegu i punktów mierzenia 292
70. Metoda spółrzędnych 301
71. Perspektywa aksonometryczna 304

„Ci, którzy lubują się w praktyce bez wiedzy, podobni są do żeglarza, co wsiada do łodzi bez steru i busoli i nie ma nigdy pewności, dokąd jedzie.

Malarz, który maluje wedle praktyki i sądu oka, bez udziału rozumu, jest jak zwierciadło, które odbija w sobie wszystkie przed niem stojące przedmioty, nie znając ich".

Leonardo da Vinci.

Co nazywamy perspektywą malarską? Czy mianem tem określić można perspektywę linijną, pojętą, jako geometryczny rzut środkowy na płaszczyznę? Czy wszystko, co nie odpowiada rygorom, związanym ze ścisłością geometryczną w pozostawionych nam przez wieki pracach rysowników, malarzy i sztycharzy, ma być określone, jako pozbawione perspektywy? Czy istnieje jedna perspektywa malarska, czy też jest ich więcej, a w takim razie, ile i jakich? Czy malowidła pompejańskie lub dokumenty najstarszego malarstwa chrześcijańskiego stanowią dowód znajomości jakiejś perspektywy i jak perspektywę tę ewentualnie określić? Czy perspektywa malarska jest identyczna z perspektywą malarzy? Czy dadzą się do niej zastosować sprawdziany objektywne, czy subjektywne? Czy perspektywa malarska znajduje oparcie w optyce fizjologicznej i psychologicznej i w jakim ewentualnie stopniu? Czy perspektywa malarska jest syntezą, czy też może tylko kompromisem geometrji, fizjologji i psychologji?

Oto przykłady pytań, które nasuwają się każdemu uważnemu obserwatorowi natury i jej obrazów, rysowanych ręką człowieka lub aparatem fotograficznym.

Praca ta jest próbą odpowiedzi na te pytania; zapewne nie na wszystkie z nich i nie na wszystkie z wymaganą dokładnością.

Kiedy studja moje i rozważania nad obszernym i wielostronnym przedmiotem posunęły się dość znacznie i kiedy przystąpiłem do formułowania odpowiedzi, spostrzegłem, że porozumienie się z czytelnikami, bez odpowiedniego ich poprzednio przygotowania, będzie niemożliwe. Stąd układ książki, a także konieczność podziału jej na dwie części.

W tomie, który czytelnik ma przed sobą, zdołałem zawrzeć, skracając się najusilniej, zaledwie zasady perspektywy stosowanej. Mam na myśli zasady w znaczeniu geometrycznem.

Szeroko rozpowszechnione jest mniemanie, że dziedzina sztuki nie znosi przenikania się z nauką. Pogląd ten podzielany jest przez niewy-

kształconych, praktykujących plastyków, a także przez fotografów i tych z tak zwanych „miłośników“, którzy patrzą na sztukę jedynie, jak na przedmiot lekkich a przez to i miłych rozmów towarzyskich. Dla tej kategorji czytelników książka ta jest mało interesująca, a więc mało dostępna.

Kolega mój i przyjaciel, prof. dr. Tadeusz Obmiński, uświetnił tę pracę szeregiem kapitalnych rysunków, za które dłoń Jego serdecznie ściskam; poza tem dziękują Mu niewątpliwie czytelnicy.

Wykreślenie rysunków tuszem wykonał p. Mieczysław Teliczek; żmudną korektę całego dzieła przeprowadził p. Grzegorz Syniewski — obaj asystenci przy mojej katedrze. Za prace te, które wysoko cenię, składam im głęboką podziękę.

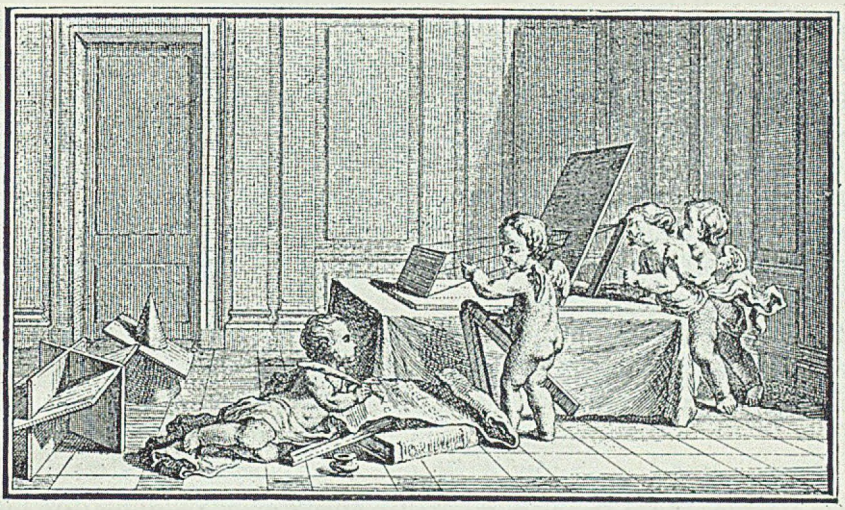
Rysunki 122 i 131 są reprodukcją fotografij, użyczonych mi łaskawie przez kolegę, prof. dr. Jana Sas-Zubrzyckiego.

Na zupełnie szczególną wdzięczność moją zasługuje wydawca „Książnica-Atlas“, najpierw za wyjątkowe, w naszych warunkach, wyposażenie wydawnictwa, a potem za okazaną wielką wyrozumiałość w stosunku do moich bardzo licznych i różnorakich życzeń. Kierownictwu drukarni, panom składającym książkę i maszynistom dziękuję gorąco za to, że nie opuściła ich cierpliwość.

Literatura podana będzie w tomie drugim.

Warszawa, w marcu 1928 r.

Kazimierz Bartel.



Rozdział I.

O perspektywicznem odwzorowaniu na płaszczyźnie.

1. Uwagi wstępne. Rysunkowe odtwarzanie otaczającego nas świata zakreślone być może wymaganiami sztuki lub życia praktycznego. Obywać się ono może bez wszelkich podstaw naukowego przygotowania, nie kierowane konsekwencją stosowania żadnych wyrozumowanych praw, i być rysunkiem dziecka; może mieć swe źródło w tej szczególnej władzy umysłu, którąby nazwać można pamięcią przestrzeni, nie rozwiniętą w żadnej szkole metod naukowej pracy. Są ludzie — i tych jest olbrzymia większość — którzy, pozbawieni zmysłu przestrzeni, nie posiadają zdolności zapamiętywania odbieranych wrażeń wzrokowych — „mają oczy, lecz nie widzą". Są inni, którzy nie potrafią, w najmniejszym nawet stopniu, wyrazić rysunkiem obserwowanego przedmiotu; są mniej liczni, którzy czynią to w sposób bardziej lub mniej doskonały — najzdolniejsi z nich są plastykami. Ale między ostatnimi tylko niewielu będzie takich, którym fenomenalna pamięć wzrokowa pozwoli zatrzymać i w dowolnym czasie odtworzyć nawet wyraz ludzkiej twarzy.

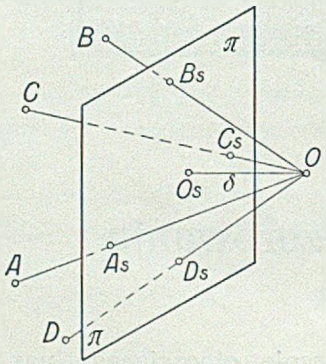
Zarówno dziedzina sztuki, jak i techniki, wymagały ustalenia praw odtwarzania, czyli, jak mówimy, odwzorowania, przestrzeni na powierzchni

Rysunek z dzieła: M. Edme-Sebastian Jeaurat, Traité de Perspective, Paris 1750.

płaskiej, t. j. płaszczyźnie, względnie na powierzchniach krzywych. W dziedzinie sztuki malarskiej kodeks tych praw ma tytuł perspektywy, stanowiąc jeden z działów geometrji wykreślnej.

Jak aparat fotograficzny pozwala na odwzorowanie przestrzeni drogą mechaniczną, tak prawa nauki perspektywy otwierają możność otrzymania tych odwzorowań drogą konstrukcji. Osiągnięcie tego celu wymaga zapoznania się z perspektywicznem odwzorowaniem geometrycznych utworów przestrzennych, poczynając od elementów, t. j. punktu, prostej i płaszczyzny.

2. Perspektywa punktów. Przyjmijmy dowolnie w przestrzeni płaszczyznę π (rys. 2), stały, w odniesieniu do niej, punkt O i postanówmy *odwzorować* na tej płaszczyźnie, zwanej tłem, płaszczyzną obrazu lub płaszczyzną rzutu, układ punktów A, B, C, ... przyjęty w przestrzeni. W tym celu połączmy każdy z danych punktów linjami prostemi z punktem O, zwanym środkiem rzutów lub *okiem*, i wyznaczmy punkty przebicia się A_s, B_s, C_s, ... tych promieni z tłem π. Otrzymane punkty, zwane *perspektywami*, rzutami lub obrazami perspektywicznemi, a także rzutami środkowemi, stanowią perspektywiczne (środkowe) odwzorowanie danego w przestrzeni układu punktów, na danej płaszczyźnie π, z punktu O. Promienie, łączące punkty układu z okiem, nazywać będziemy *promieniami rzutów* lub *promieniami widzenia*.



Rys. 2.

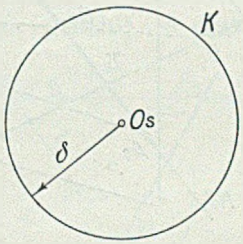
Ponieważ położenie oka względem tła jest stałe, przeto każdemu punktowi przestrzeni odpowiada na tle π jeden jedyny punkt, jako jego perspektywa, a to w tem zrozumieniu tego zwrotu, że promień, łączący dany punkt z okiem, przebije tło w jednym punkcie. Ale odpowiedniość ta nie jest wzajemną, t. zn., że punkt przyjęty na tle nie może być uważany za rzut jednego tylko punktu. Każdy punkt płaszczyzny tła jest bowiem obrazem wszystkich punktów promienia widzenia, który przez ten punkt przechodzi.

Położenie środka rzutów (oka) względem tła ustalimy w ten sposób, że wyznaczymy jego rzut prostokątny na tło, t. j. punkt przebicia się O_s promienia, poprowadzonego z oka O prostopadle do tła (rys. 2), a ponadto ustalimy oddalenie oka od tła, które równe jest odcinkowi $\overline{OO_s} = \delta$.

Punkt O_s nazywać będziemy *punktem głównym*, promień, przechodzący przez punkt główny i oko, *promieniem głównym*, a odcinek $\overline{OO_s} = \delta$ tego promienia, *głębokością tłową* (oddaleniem tłowem).

Tłem jest oczywiście zawsze płaszczyzna, na której rysujemy, więc w naszym przypadku zawsze karta książki. Przyjęty punkt główny O_s i głębokość tłowa δ (rys. 3) wyznaczają położenie oka względem tła. Znajduje się ono nad tłem, na promieniu poprowadzonym prostopadle do niego w punkcie O_s, w odległości δ.

Zakreślmy z punktu O_s, jako środka, promieniem głębokości tłowej δ koło K. Każdy punkt tego koła uważać możemy za oko, położone na tło przez wykonanie obrotu promienia głównego około punktu głównego; każdy promień tego koła jest więc kładem na tło odcinka promienia głównego, wyrażającego głębokość tłową. Koło K nazywać będziemy *kołem głębokości*, a każdy jego punkt *punktem głębokości*. Koło głębokości ma znaczenie wyłącznie konstrukcyjne, a racjonalność jego przyjęcia znajdzie potwierdzenie w ciągu wykładu. Koło to uważać możemy za podstawę stożka obrotowego, którego wierzchołkiem jest oko, a którego kąt wierzchołkowy jest kątem prostym.



Rys. 3.

Jeżeli układ punktów, których perspektywy szukamy, jest układem geometrycznym, t. zn. należy do geometrycznego utworu przestrzeni, to rzut środkowy (odwzorowanie środkowe) tego układu stanowi perspektywę odnośnego utworu geometrycznego. W ten sposób mówić możemy o perspektywie linji prostej, wielokątów, wielościanów, linij krzywych, stożków, walców, kuli i t. d. Jako zespoły utworów geometrycznych, wystąpią budowle i ich wnętrza.

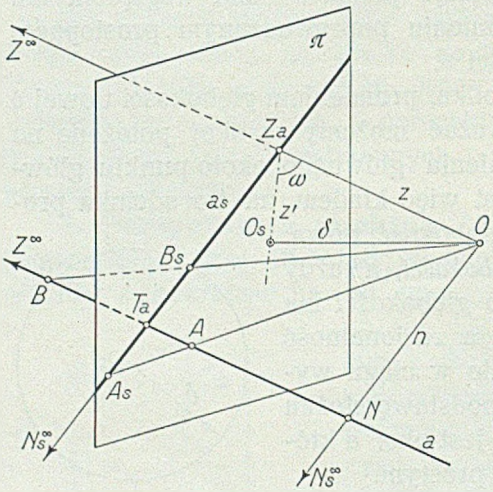
3. Perspektywa linij prostych. *a) Perspektywiczne odwzorowanie prostej.* Niechaj pionowa płaszczyzna π (rys. 4) będzie tłem, a zewnątrz niej leżący punkt O środkiem rzutów (okiem). Rzut prostokątny O_s oka O na tło jest punktem głównym, odcinek $\overline{OO_s}$ głębokością tłową.

Przyjęta dowolnie w przestrzeni prosta a przebija tło w punkcie T_a, który nazywać będziemy *śladem tłowym* tej prostej.

Płaszczyzna φ, poprowadzona przez oko i przez prostą a, przecina tło π wzdłuż prostej a_s, która jest rzutem prostej a z punktu O na tło, czyli jej perspektywą. Ale prosta a_s jest równocześnie perspektywą wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie φ.

Jeżeli prócz prostej a_s weźmiemy pod uwagę także ślad tłowy T_a, to wówczas ilość prostych płaszczyzny φ, których odwzorowaniem jest prosta a_s, ograniczy się do pęku prostych, przechodzących przez punkt T_a. Aby prosta a_s uważaną być mogła za odwzorowanie środkowe jednej tylko prostej a, czyli aby odwzorowanie to było jednoznaczne (doskonałe), weźmy pod uwagę punkt Z^∞ nieograniczenie daleki na prostej a, t. zw. jej punkt niewłaściwy. Promień widzenia z, łączący punkt Z^∞

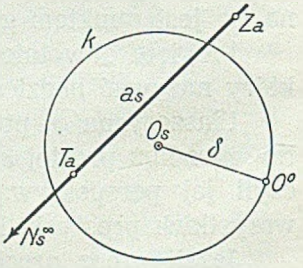
z okiem, zwany promieniem zbiegu, jest równoległy do prostej a i przebija tło w punkcie Z_a. Punkt Z_a jest perspektywą punktu niewłaściwego Z^∞ prostej a i zwie się jej *śladem zbiegu*. Odcinek $\overline{OZ_a}$ nazywać będziemy długością promienia zbiegu prostej a.



Rys. 4.

Prosta a_s i przyjęte na niej punkty T_a (ślad tłowy) i Z_a (ślad zbiegu) wyznaczają, w sposób jednoznaczny, położenie prostej a w przestrzeni. Znaczy to, że znajomość obu śladów prostej — przy danem położeniu oka względem tła — stanowi warunek odtworzenia położenia prostej w przestrzeni, czyli warunek przeprowadzenia t. zw. *restytucji* perspektywicznej. W istocie prosta a przechodzi przez dany ślad tłowy T_a równolegle do promienia zbiegu z, łączącego oko z danym śladem zbiegu Z_a.

Prosta a_s jest miejscem geometrycznem rzutów środkowych (perspektyw) wszystkich punktów prostej a; promienie rzucające punkty prostej a na tło leżą na płaszczyźnie φ. Tak więc punkt A_s jest perspektywą punktu A prostej a, punkt B_s perspektywą punktu B i t. d. Punkt T_a prostej a jest równocześnie swoją perspektywą. Promień n, równoległy do prostej a_s, a więc równoległy do tła, przecina prostą a w punkcie N, który nazywamy *punktem (śladem) zniknienia* tej prostej. Perspektywą śladu zniknienia N prostej a jest punkt niewłaściwy N_s^∞ prostej a_s.



Rys. 5.

Niechaj promień główny będzie prostopadły do płaszczyzny tej karty, to poglądowy rys. 4 stanie się rysunkiem perspektywicznym. Położenie oka względem tła (płaszczyzny rysunku) określone będzie, przy tem założeniu, punktem głównym O_s (rys. 5) i daną głębokością tłową δ, którą zakreślimy — jako promieniem — koło głębokości k, z punktu O_s, jako środka. Prosta a_s wraz z przyjętemi na niej punktami T_a i Z_a wyznacza, w sposób jednoznaczny, położenie prostej a w przestrzeni.

Aby odtworzyć położenie prostej a w przestrzeni, odmierzymy na prostopadłej, poprowadzonej do tła w punkcie głównym O_s, od tego punktu ku nam, odcinek $\overline{O_sO} = \delta$. Otrzymany punkt O jest okiem (środ-

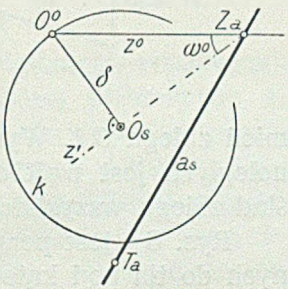
kiem rzutów). Promień, łączący oko ze śladem zbiegu Z_a, wyznacza kierunek prostej a, która przejdzie przez ślad tłowy T_a, równolegle do tego kierunku.

Perspektywa prostej, leżącej na tle, pokrywa się z tą prostą.

Perspektywa prostej, przechodzącej przez oko, jest punktem.

Każdy punkt prostej a_s jest perspektywą jednego punktu prostej a; punkt niewłaściwy N_s^∞ jest odwzorowaniem perspektywicznem punktu zniknienia N prostej a.

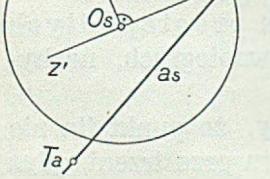
b) Kąt nachylenia prostej do tła. Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny nazywamy kąt, jaki prosta zawiera ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.



Rys. 6.

Promień zbiegu z prostej a (rys. 4) jest — jak wiadomo — do niej równoległy, wobec czego kąt, jaki promień ten zawiera z tłem, równy jest kątowi nachylenia prostej a do tła. Rzutem prostokątnym promienia zbiegu z na tło jest prosta z', łącząca ślad zbiegu Z_a prostej a z punktem głównym. Kąt ω zawarty między prostemi z i z' wyraża nachylenie prostej a do tła.

Trójkąt OO_sZ_a (rys. 4) jest trójkątem prostokątnym w punkcie O_s, a jego płaszczyzna jest prostopadłą do tła. Obróćmy go około przyprostokątnej $\overline{O_sZ_a}$ i połóżmy na tło, czyli wykonajmy *kład* tego trójkąta na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0 (rys. 6) na kole głębokości, przyczem odcinek $\overline{O_sO^0} = \delta$ będzie prostopadły do prostej z'. Przeciwprostokątna OZ_a, trójkąta OO_sZ_a, stanowiąca długość promienia zbiegu (str. 4) prostej a, padnie na tło jako odcinek $\overline{O^0Z_a}$. Kąt $O^0Z_aO_s = \omega^0$ równy jest kątowi nachylenia prostej a do tła.



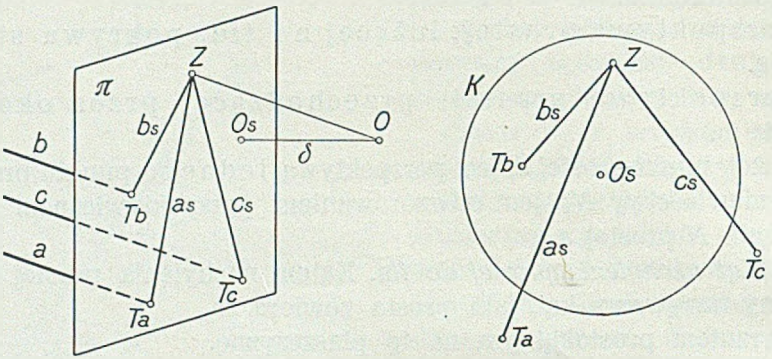
Rys. 7.

Z rys. 6 czytamy bezpośrednio, że wielkość kąta ω^0, a więc wielkość kąta, jaki prosta a zawiera z tłem, zależy jedynie od położenia śladu zbiegu Z_a. W szczególności kąt ten maleje, gdy ślad Z_a oddala się od punktu głównego, a rośnie, gdy ślad ten zbliża się do punktu głównego.

Jeżeli ślad zbiegu Z_a prostej a leży na kole głębokości (rys. 7), *to prosta tworzy z tłem kąt 45°. Jeżeli ślad zbiegu prostej schodzi się z punktem głównym, to prosta jest prostopadłą do tła.*

Położenie śladu tłowego prostej jest bez wpływu na wielkość kąta, jaki prosta ta zawiera z tłem.

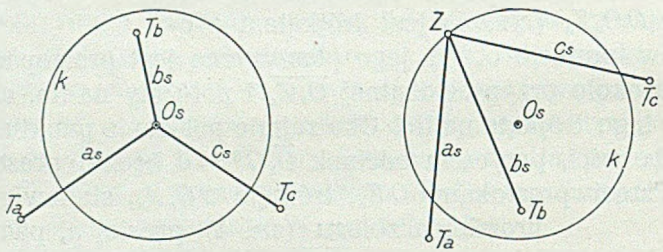
c) Proste równoległe. Proste równoległe *a*, *b*, *c*, ... (rys. 8*a*), przebijające tło π w śladach T_a, T_b, T_c, ... posiadają jeden, wspólny, pro-



Rys. 8 *a*, *b*.

mień zbiegu *OZ*. Wynika stąd, że perspektywa wiązki prostych równoległych jest pękiem prostych, którego wierzchołkiem jest wspólny ślad zbiegu wszystkich prostych, tworzących wiązkę.

Rys. 8*b* jest perspektywą trzech prostych równoległych, nachylonych do tła pod kątem większym, aniżeli 45°.

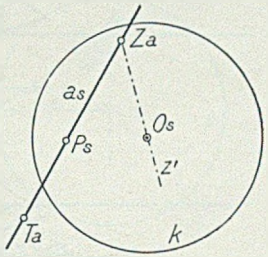


Rys. 9 *a*, *b*.

Rys. 9*a* przedstawia perspektywę trzech prostych prostopadłych do tła; rys. 9*b* jest perspektywą trzech prostych równoległych, nachylonych do tła pod $\sphericalangle 45^0$.

d) Punkt i prosta. W ust. 2 str. 2 zauważyliśmy, że punkt tła nie może być uważany za perspektywę jednego punktu przestrzeni, gdyż jest on równocześnie perspektywą wszystkich punktów, leżących na promieniu widzenia, który przez niego przechodzi. Aby punkt P_s był jednoznacznem odwzorowaniem perspektywicznem punktu P przestrzeni, przyjmiemy dowolną prostą *a*, przechodzącą przez punkt P i znajdziemy jej perspektywę a_s. Prosta a_s przejdzie przez punkt P_s (rys. 10). Teraz możemy już przeprowadzić restytucję perspektywiczną i odnaleźć poło-

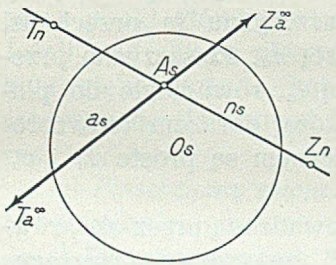
żenie punktu P w przestrzeni. W odległości równej promieniowi koła głębokości k od punktu głównego O_s, nad płaszczyzną rysunku, znajduje się oko. Promień, łączący oko ze śladem zbiegu Z_a prostej a, wyznacza kierunek tej prostej, która przechodzi przez ślad tłowy T_a. Promień, łączący oko z punktem P_s, przetnie prostą a w punkcie P.



Rys. 10.

Tak więc, aby oznaczyć metodą rzutu środkowego (zapomocą perspektywy) położenie punktu w przestrzeni, obieramy go zawsze na jakiejś prostej i znajdujemy perspektywę zarówno tego punktu, jak i tej prostej.

e) Proste równoległe do tła. Zarówno ślad zbiegu, jak i ślad tłowy prostej równoległej do tła są punktami niewłaściwemi. Perspektywa takiej prostej jest prostą, podług której płaszczyzna φ, przechodząca przez nią i przez oko, przecina tło. Ale dowolna prosta przyjęta na tle nie wyznacza położenia prostej, równoległej do tła, w sposób jednoznaczny. Jest ona bowiem równocześnie perspektywą wszystkich prostych równoległych do tła, leżących na płaszczyźnie φ.



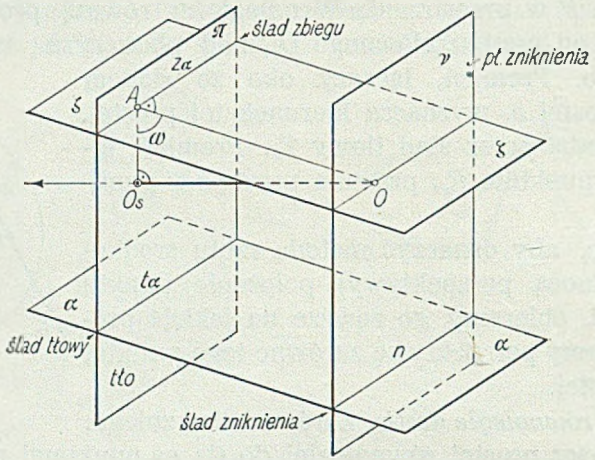
Rys. 11.

Aby prosta a_s (rys. 11) była perspektywą jednej prostej a, równoległej do tła, obierzemy na niej punkt A_s, przez który poprowadzimy prostą n_s. Punkty T_n i Z_n tej prostej uważamy za jej ślady. Pośrednictwo prostej n, przecinającej prostą a w punkcie A, umożliwiło wyznaczenie położenia jednego punktu prostej a. Ponieważ prócz punktu A znany jest i kierunek prostej a, więc tym sposobem zadanie zostało rozwiązane w sposób jednoznaczny.

4. Perspektywa płaszczyzn. *a) Wyznaczenie płaszczyzny.* Dowolnie w przestrzeni przyjęta płaszczyzna α (rys. 12) przecina tło π wzdłuż prostej t_α, którą nazywamy *śladem tłowym* tej płaszczyzny. Płaszczyzna ξ, poprowadzona przez oko, równolegle do płaszczyzny α, t. zw. płaszczyzna zbiegu, przecina tło wzdłuż prostej z_α, zwanej *śladem zbiegu* płaszczyzny α.

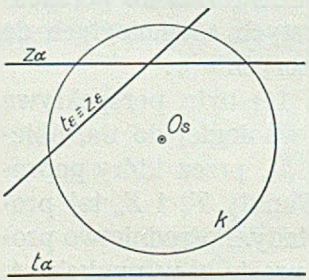
Ślad tłowy t_α i równoległy do niego ślad zbiegu z_α, wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie płaszczyzny α, w odniesieniu do danego tła i oka.

W istocie, wyznaczywszy — przy danym punkcie głównym O_s i danem kole głębokości k (rys. 13) — położenie oka O, które leży nad płaszczyzną rysunku, w odległości równej promieniowi koła k, odmie-



Rys. 12.

rzonej na prostopadłej, poprowadzonej w punkcie O_s do płaszczyzny rysunku, otrzymamy płaszczyznę zbiegu ζ. Płaszczyzna ta przechodzi przez oko i przez prostą z_α. Płaszczyzna, przechodząca przez prostą t_α, równolegle do płaszczyzny ζ, jest tą, której obrazem (odwzorowaniem) perspektywicznem są proste t_α i z_α, więc płaszczyzną α.



Rys. 13.

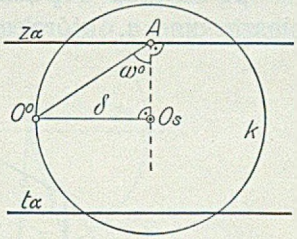
Płaszczyznę ν, poprowadzoną przez oko, równolegle do tła (rys. 12), nazywamy *płaszczyzną zniknienia*. Przecina ona płaszczyznę α wzdłuż prostej n, zwanej *śladem zniknienia*.

Ślad zbiegu z_ε płaszczyzny ε, przechodzącej przez oko, schodzi się z jej śladem tłowym (rys. 13). Płaszczyznę taką nazywać będziemy r z u c a j ą c ą.

b) Kąt nachylenia płaszczyzny do tła. Kątem nachylenia dwóch płaszczyzn nazywamy kąt, jaki tworzą dwie proste, poprowadzone prostopadle do krawędzi tych płaszczyzn w dowolnym jej punkcie, przyczem jedna z tych prostych leży na jednej, a druga na drugiej płaszczyźnie.

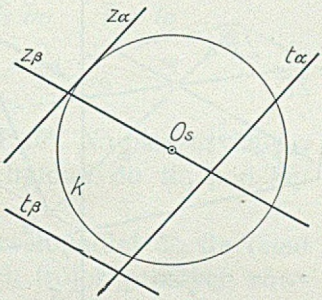
Poprowadźmy z punktu głównego O_s prostopadłą do śladu zbiegu z_α płaszczyzny α (rys. 12), a otrzymany tam punkt A połączmy z okiem O; prosta OA będzie również prostopadłą do śladu z_α. Kąt ω, jaki tworzą ze sobą proste OA i O_sA — obie prostopadłe do śladu zbiegu z_α — jest, według powyższego określenia, kątem nachylenia płaszczyzny zbiegu ζ do tła. Ponieważ płaszczyzna α jest równoległą do płaszczyzny ζ, przeto kąt ω wyraża równocześnie kąt, jaki płaszczyzna α zawiera z tłem.

Płaszczyzna trójkąta $O_s A O$ jest prostopadłą do tła i prostopadłą w punkcie A do śladu zbiegu z_α płaszczyzny α (rys. 14). Obróćmy ten trójkąt około przyprostokątnej $O_s A$ na tło, czyli wykonajmy jego kład. W tym celu wykreślimy w punkcie głównym O_s prostopadłą do boku $O_s A$, która przetnie koło głębokości w punkcie O^0, kładzie oka. Kąt $O^0 A O_s = \omega^0$ równy jest kątowi ω i wyraża nachylenie płaszczyzny α do tła.



Rys. 14.

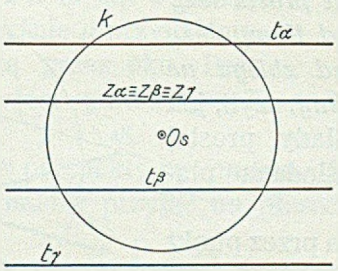
Z rysunków 12 i 14 widzimy wprost, że wielkość kąta nachylenia płaszczyzny do tła zależy jedynie od oddalenia jej śladu zbiegu od punktu głównego. Ze wzrostem tego oddalenia kąt ω maleje. W szczególności jeżeli ślad zbiegu płaszczyzny przecina koło głębokości, to kąt ω jest większy od 45° (rys. 14) i staje się kątem prostym, gdy ślad zbiegu przechodzi przez punkt główny (płaszczyzna β na rys. 15). Jeżeli ślad zbiegu płaszczyzny jest styczny do koła głębokości, to kąt nachylenia tej płaszczyzny do tła wynosi 45° (płaszczyzna α na rys. 15).



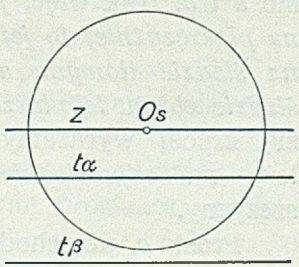
Rys. 15.

c) Płaszczyzny równoległe. Pęk płaszczyzn równoległych przecina tło wzdłuż prostych do siebie równoległych. Wszystkie płaszczyzny pęku posiadają jedną wspólną płaszczyznę zbiegu, równoległą do nich i przechodzącą oczywiście przez oko, a przecinającą tło wzdłuż jednego śladu zbiegu, równoległego do śladów tłowych płaszczyzn pęku.

Rys. 16 jest perspektywą trzech płaszczyzn równoległych, nachylonych do tła pod kątem większym od 45°.



Rys. 16.



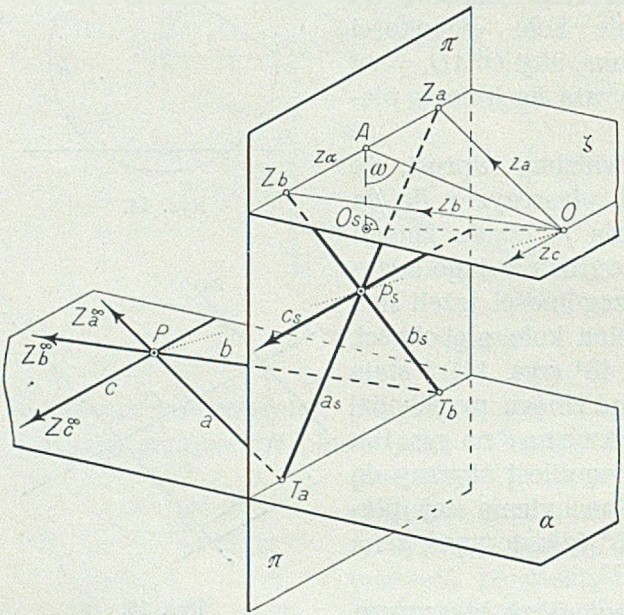
Rys. 17.

Rys. 17 przedstawia odwzorowanie perspektywiczne dwóch płaszczyzn równoległych i prostopadłych do tła a równocześnie poziomych.

d) Płaszczyzna równoległa do tła. Oba ślady płaszczyzny równoległej do tła leżą nieograniczenie daleko na tle, są prostą niewłaściwą

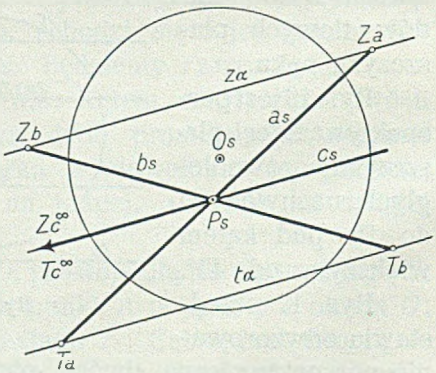
płaszczyzny rysunku. Ustalenie położenia takiej płaszczyzny wymaga znajomości położenia jednego jej punktu, danego na dowolnej prostej.

5. Proste i punkty na płaszczyźnie. *a)* Weźmy pod uwagę płaszczyznę α, która przecina tło π (rys. 18) wzdłuż prostej t_α, (czytelnik zechce oznaczyć prostą $T_a - T_b$ znakiem t_α), a której śladem zbiegu jest prosta z_α. Przyjęta na płaszczyźnie α dowolna prosta a przebija tło w punkcie T_a, który leży na śladzie t_α; promień zbiegu z_a, prostej a, leży na płaszczyźnie zbiegu ζ i przebija tło w punkcie Z_a, leżącym na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α. Prosta a_s, wyznaczona punktami T_a i Z_a, jest perspektywą prostej a, leżącej na płaszczyźnie α. Podobnie prosta b_s jest obrazem perspektywicznym prostej b, przyjętej również na płaszczyźnie α. Punkt P_s przecięcia się prostych a_s i b_s jest perspektywą punktu P, w którym przecinają się proste a i b. Tak więc, *jeżeli prosta leży na płaszczyźnie, to jej ślad tłowy leży na śladzie tłowym, a ślad zbiegu na śladzie zbiegu tej płaszczyzny,* czyli, jak się krócej wyrażamy: ślady prostej leżą na *odpowiednich* śladach płaszczyzny.



Rys. 18.

Prosta c, przechodząca przez punkt P, równolegle do śladu tłowego t_α, jest równoległą do tła. Oba jej ślady są punktami niewłaściwemi, a jej perspektywa c_s przechodzi przez punkt P_s, równolegle do śladu t_α a więc i z_α.

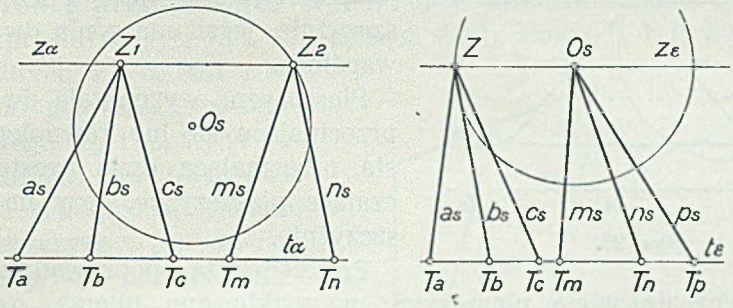


Rys. 19.

Obrazem perspektywicznym płaszczyzny α i trzech znajdujących się na niej prostych jest rys. 19. Płaszczyzna α zawiera z tłem kąt większy,

aniżeli 45°, proste a i b kąty mniejsze od 45°, a prosta c jest równoległą do tła.

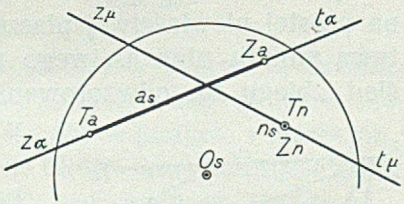
Rys. 20a przedstawia płaszczyznę α, nachyloną do tła pod kątem większym, aniżeli 45°, na której znajdują się proste a, b i c do siebie



Rys. 20 a, b.

równoległe, a zawierające z tłem kąt większy od 45°. Na płaszczyźnie α leżą ponadto dwie proste równoległe m i n, nachylone do tła pod kątem 45°.

Rys. 20b jest perspektywą płaszczyzny ε, prostopadłej do tła (ślad zbiegu z_ε przechodzi przez punkt główny) i dwóch trójek prostych równoległych, leżących na tej płaszczyźnie. Proste a, b i c są nachylone do tła pod kątem 45°, proste m, n i p są do tła prostopadłe.



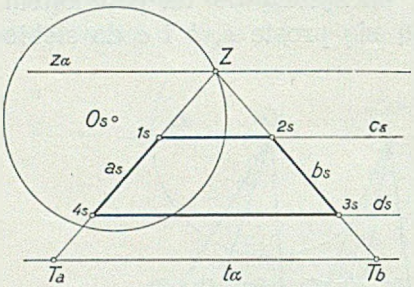
Rys. 21.

Rys. 21 przedstawia dwie płaszczyzny rzucające α i μ. Na pierwszej z nich leży prosta a, zawierająca z tłem kąt większy, aniżeli 45°. Na płaszczyźnie μ przyjęliśmy prostą n, przechodzącą przez oko. Perspektywą tej prostej jest punkt $T_n \equiv Z_n$, w którym schodzą się oba jej ślady.

b) Aby wyznaczyć perspektywę punktu, leżącego na płaszczyźnie, której ślady są dane, należy przyjąć na płaszczyźnie prostą, a na niej dopiero punkt.

Równoległe do siebie proste t_α i z_α na rys. 22 przedstawiają odwzorowanie perspektywiczne płaszczyzny α, nachylonej do tła pod kątem większym, aniżeli 45°. Proste a_s i b_s są perspektywą prostych a i b, leżących na płaszczyźnie α, a nachylonych do tła pod kątem 45°. Punkty 1_s i 4_s, przyjęte na prostej a_s, stanowią perspektywę punktów *1* i *4*, leżących na płaszczyźnie α. Podobnie punkty 2_s i 3_s, przyjęte na prostej b_s, są odwzorowaniem punktów *2* i *3*, leżących także na płaszczyźnie α.

Trapez $1_s 2_s 3_s 4_s$ jest więc perspektywą równoległoboku, leżącego na płaszczyźnie α. Boki $\overline{1,2}$ i $\overline{3,4}$ tego równoległoboku są równoległe do tła.



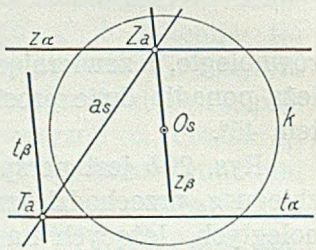
Rys. 22.

6. Płaszczyzny przechodzące przez proste. Prostą wyznaczają dwa jej punkty, stąd: prosta leży na płaszczyźnie, jeżeli ma z nią dwa punkty wspólne.

Płaszczyznę wyznaczają dwie proste przecinające się lub równoległe; prosta, przecinająca dwie proste wyznaczające płaszczyznę, leży na tej płaszczyźnie.

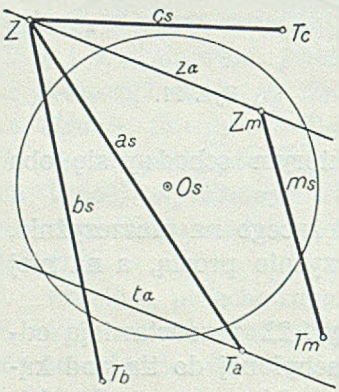
Przez prostą poprowadzić można nieograniczenie wiele płaszczyzn; wszystkie one tworzą pęk, którego osią (krawędzią) jest owa prosta.

Płaszczyzna α, której ślad tłowy t_α przechodzi przez ślad tłowy T_a prostej a, a ślad zbiegu z_α przez ślad zbiegu Z_a tej prostej, przechodzi przez tę prostą (rys. 23). Prosta a ma z płaszczyzną α dwa punkty wspólne: pierwszym jest jej ślad tłowy T_a, leżący na śladzie tłowym t_α, drugim punkt niewłaściwy, leżący na prostej niewłaściwej płaszczyzny. Perspektywą punktu niewłaściwego prostej a jest jej ślad zbiegu Z_a, odwzorowaniem perspektywicznem prostej niewłaściwej płaszczyzny α jest jej ślad zbiegu z_α.



Rys. 23.

Między płaszczyznami przechodzącemi przez prostą znajduje się jedna prostopadła do tła. Jej ślad zbiegu z_β (rys. 23) przechodzi przez punkt główny O_s.



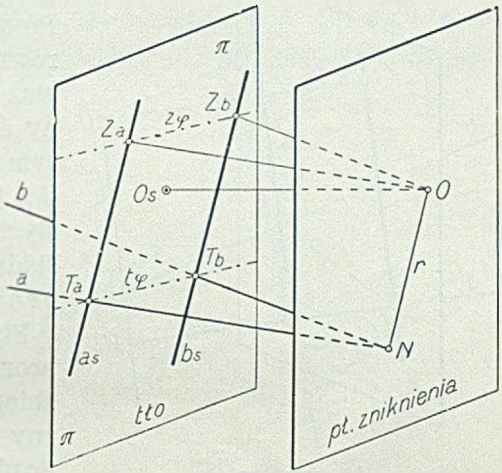
Rys. 24.

7. Proste równoległe do płaszczyzny. Prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli jest równoległą do prostej, leżącej na tej płaszczyźnie. Ponieważ proste równoległe posiadają wspólny ślad zbiegu, a ślad zbiegu prostej, leżącej na płaszczyźnie, leży na śladzie zbiegu tej płaszczyzny, więc: *ślady zbiegu prostych równoległych do płaszczyzny leżą na śladzie zbiegu tej płaszczyzny.*

Prosta a_s na rys. 24 jest perspektywą prostej a, leżącej na płaszczyźnie α, wyznaczonej śladami t_α i z_α. Proste b_s i c_s, przecinające się we wspólnym śladzie zbiegu Z z prostą a_s, są perspektywami prostych b i c,

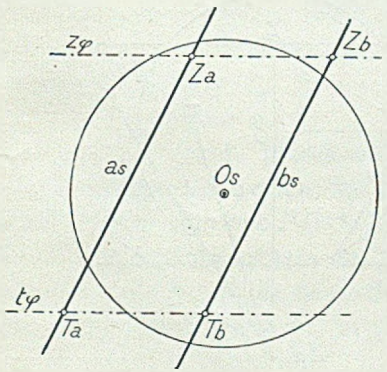
równoległych do prostej a, a więc równoległych do płaszczyzny α. Prosta m_s, której ślad zbiegu Z_m leży na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α, jest perspektywą prostej m, również równoległej do tej płaszczyzny.

8. Proste przecinające się. Proste skośne. Z ust. 5 wynika, że jeżeli prosta t_α (rys. 18 i 19), łącząca ślady tłowe T_a i T_b dwóch danych prostych a i b, jest równoległa do prostej z_α, łączącej ślady zbiegu Z_a i Z_b tych samych prostych, to owe dwie proste równoległe są śladami jednej płaszczyzny, przechodzącej przez proste a i b w przestrzeni. I odwrotnie: *jeżeli prosta, łącząca ślady tłowe dwóch prostych, jest równoległa do prostej, która przechodzi przez ślady zbiegu tych samych prostych — to owe dwie proste, śladami temi wyznaczone, leżą na jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się w punkcie.*



Rys. 25.

Jeżeli prosta, łącząca ślady tłowe dwóch prostych, nie jest równoległa do prostej, wyznaczonej śladami zbiegu tych prostych — to owe dwie proste, których ślady są dane, nie przecinają się ani w punkcie właściwym, ani w punkcie niewłaściwym. Proste takie określamy mianem prostych *skośnych*.



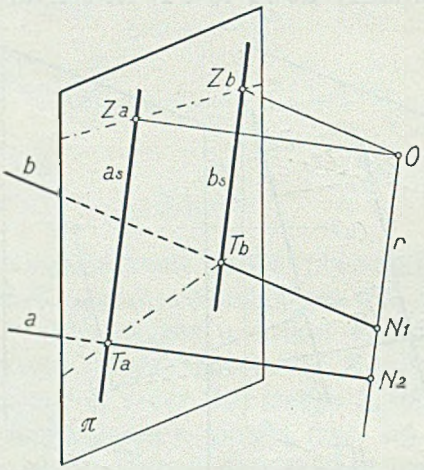
Rys. 26.

Jeżeli proste a i b (rys. 25) przecinają się w punkcie N na płaszczyźnie zniknienia, to ich perspektywy a_s i b_s są prostemi równoległemi do siebie. Równocześnie jednak prosta t_φ, łącząca ślady tłowe T_a i T_b prostych a i b, jest równoległą do prostej z_φ, która przechodzi przez ich ślady zbiegu Z_a i Z_b. Prosta t_φ jest śladem tłowym, a prosta z_φ śladem zbiegu płaszczyzny φ, przechodzącej przez przecinające się, na płaszczyźnie zniknienia, proste a i b (rys. 26).

Jeżeli prosta $T_a - Z_a$ (rys. 27) jest równoległą do prostej $T_b - Z_b$, ale równocześnie proste $T_a - T_b$ i $Z_a - Z_b$ nie są do siebie równoległe,

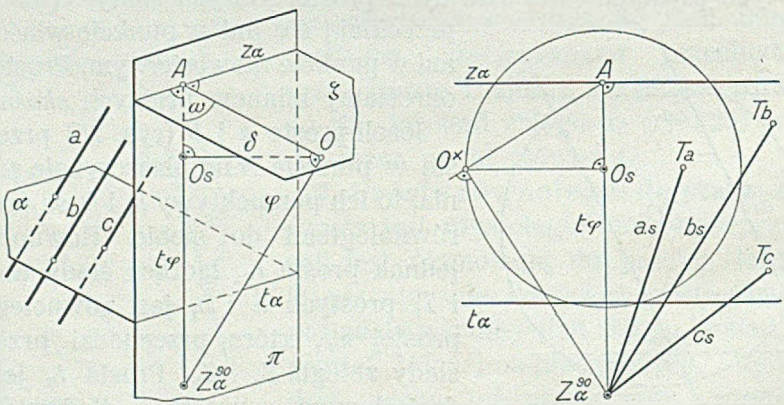
to wówczas mamy perspektywę dwóch prostych skośnych a i b, przecinających prostą r, leżącą na płaszczyźnie zniknienia, a przechodzącą przez oko.

9. Proste prostopadłe do płaszczyzny. *a)* Jeżeli prosta a (rys. 28 a) jest prostopadłą do płaszczyzny α, to jest równocześnie prostopadłą do wszystkich prostych tej płaszczyzny, a więc i do jej śladu tłowego t_α. Promień zbiegu prostej a jest wobec tego również prostopadły do śladu t_α. Ponieważ proste równoległe posiadają wspólny ślad zbiegu, więc punkt Z_α^{90}, w którym promień zbiegu prostej a przebija tło, jest śladem zbiegu wszystkich prostych, równoległych do prostej a, czyli śladem zbiegu wszystkich prostych, prostopadłych do płaszczyzny α.



Rys. 27.

Płaszczyzna φ, przechodząca przez promień główny $O - O_s$ i przez promień zbiegu $O - Z_\alpha^{90}$ prostopadły do płaszczyzny zbiegu ξ, jest prostopadłą zarówno do płaszczyzny tła, jak i do płaszczyzny ξ. Wobec tego jest płaszczyzna φ prostopadłą do krawędzi płaszczyzny tła i płaszczyzny ξ, czyli do śladu z_α. Nawzajem prosta z_α jest prostopadłą do płaszczyzny φ, a zatem prosto-

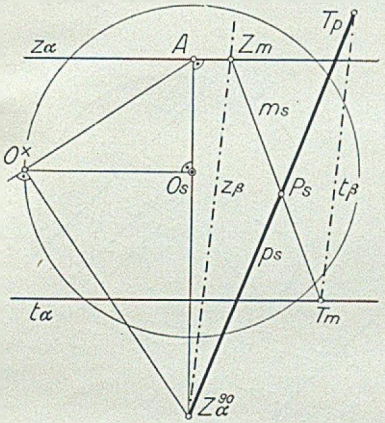


Rys. 28 a, b.

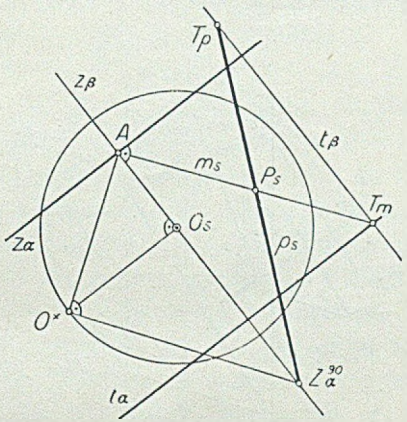
padłą do wszystkich prostych tej płaszczyzny, więc także zarówno do prostej $\overline{OA}$, jak i prostej t_φ. Ta ostatnia jest śladem płaszczyzny φ na tle, a równocześnie rzutem prostokątnym promienia zbiegu $O\,Z_\alpha^{90}$ na tło.

Trójkąt OAZ_α^{90} jest trójkątem prostokątnym w wierzchołku O; kąt $OAZ_\alpha^{90} = \omega$ równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny α do tła.

Jeżeli dane są ślady t_α i z_α płaszczyzny α (rys. 28 *b*), to w celu znalezienia śladu zbiegu Z_α^{90} prostych prostopadłych do tej płaszczyzny wykreślimy z punktu głównego O_s prostą t_φ, prostopadłą do śladu zbiegu z_α i przecinającą go w punkcie A. W punkcie O_s poprowadzimy prostopadłą do prostej t_φ, która przetnie dane koło głębokości w punkcie $O^\times$. Prostopadła wykreślona w tym punkcie do odcinka $\overline{O^\times A}$ przetnie prostą t_φ w szukanym punkcie Z_α^{90}. Trójkąt $AO^\times Z_\alpha^{90}$ jest kładem, na tło,



Rys. 29.



Rys. 30.

trójkąta AOZ_α^{90}, leżącego na prostopadłej do tła płaszczyźnie φ. Kład ten wykonaliśmy przez obrót trójkąta AOZ_α^{90} około jego przeciwprostokątnej $\overline{AZ_\alpha^{90}}$, leżącej na tle.

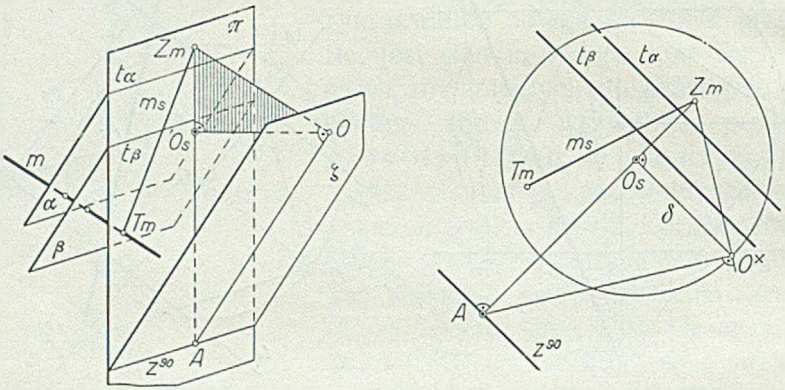
Jeżeli punkty T_a, T_b, ... uważać będziemy za ślady tłowe prostych a, b, ... to proste a_s, b_s, ... łączące te punkty ze śladem Z_α^{90}, są perspektywą prostych, prostopadłych do płaszczyzny α.

b) Wykreślić perspektywę prostej, prostopadłej do płaszczyzny α, w jej danym punkcie P (rys. 29). Na płaszczyźnie α, której ślady t_α i z_α są dane, przyjęliśmy prostą m, a na niej punkt P. Ślady T_m i Z_m prostej m, leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny α. Perspektywa P_s punktu P, leży na perspektywie m_s prostej m.

W sposób omówiony w punkcie *a)* tego ustępu, znajdziemy ślad zbiegu Z_α^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α i połączymy go z punktem P_s prostą p_s, która jest perspektywą szukanej prostej p. Pozostaje do wyznaczenia ślad tłowy T_p tej prostej. Ponieważ prosta p przecina prostą m w punkcie P, więc prosta z_β, łącząca ślady zbiegu Z_m i Z_α^{90}, jest śladem zbiegu płaszczyzny β, wyznaczonej prostemi p i m.

Ślad tłowy t_β tej płaszczyzny przejdzie przez ślad tłowy T_m prostej m, równolegle do śladu z_β, i przetnie prostą p_s w punkcie T_p, który jest śladem tłowym prostej p.

Niechaj prosta m płaszczyzny α, na której przyjęty jest punkt P, będzie prostopadłą do śladu tłowego tej płaszczyzny. Śladem zbiegu tej prostej jest punkt A (rys. 30), w którym prosta z_β, wykreślona z punktu głównego O_s, prostopadle do śladu zbiegu z_α, ślad ten przecina. W tym wypadku płaszczyzna β, przechodząca przez proste m i p, będzie prostopadłą do tła; jej ślad zbiegu z_β przejdzie przez punkt główny, i wraz ze śladem tłowym t_β będzie prostopadły do śladów płaszczyzny α.



Rys. 31 *a*, *b*.

10. Płaszczyzny prostopadłe do prostej. *a)* Płaszczyzny α i β (rys. 31 *a*) są prostopadłe do prostej m; płaszczyzna zbiegu ξ tych płaszczyzn, przechodząca przez oko równolegle do nich, przetnie tło wzdłuż prostej z^{90}, równoległej do ich śladów tłowych t_α i t_β.

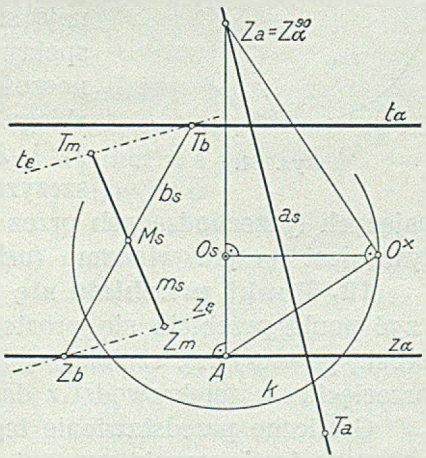
Promień zbiegu $\overline{OZ_m}$ prostej m, jest prostopadły do płaszczyzn α, β i ξ, a więc i do prostych t_α, t_β i z^{90}. Rzut prostokątny $O_s - Z_m$ promienia $O - Z_m$ na tło jest prostopadły do śladów t_α, t_β i z^{90} i przecina ślad z^{90} w punkcie A. Płaszczyzna, przechodząca przez punkty OZ_mA, jest prostopadłą zarówno do tła, jak i do płaszczyzny ξ, a więc i do śladu z^{90}. Trójkąt AOZ_m jest trójkątem prostokątnym w wierzchołku O.

Jeżeli znamy ślady T_m i Z_m prostej m, to ślad zbiegu płaszczyzn prostopadłych do tej prostej znajdziemy w sposób następujący: łączymy ślad zbiegu Z_m z punktem głównym O_s i z okiem O. W punkcie O poprowadzimy do odcinka $\overline{OZ_m}$, na płaszczyźnie OZ_mO_s prostopadłej do tła, prostopadłą, która przetnie prostą $Z_m - O_s$ w punkcie A. Szukany ślad zbiegu z^{90} przejdzie przez punkt A, prostopadle do odcinka $\overline{Z_mA}$.

Płaszczyzna trójkąta $O Z_m A$ jest prostopadłą do płaszczyzny rysunku i dlatego zmuszeni jesteśmy wykonać jej kład około przeciwprostokątnej $\overline{Z_m A}$ (rys. 31 *b*). W punkcie głównym O_s kreślimy prostopadłą do prostej $Z_m - O_s$; na kole głębokości otrzymamy kład $O^\times$ oka. Prostopadła wykreślona do odcinka $\overline{Z_m - O^\times}$ w punkcie $O^\times$, przecina prostą $Z_m - O_s$ w punkcie A, przez który przechodzi szukany ślad zbiegu z^{90} płaszczyzn, prostopadłych do danej prostej m. Proste t_α i t_β, równoległe do z^{90}, są śladami tłowemi dwóch takich płaszczyzn.

b) Poprowadzić płaszczyznę prostopadłą w punkcie P do prostej p. Konstrukcyjnie zadanie to pokrywa się z przeprowadzonem w ust. 9 pkt *b*. Jeżeli bowiem prosta p jest prostopadłą w punkcie P do płaszczyzny α, to w tym punkcie płaszczyzna α jest prostopadłą do prostej p.

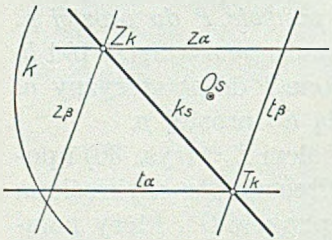
Oznaczmy ślad zbiegu danej prostej p symbolem Z_α^{90} (rys. 30) i połączmy go z punktem głównym O_s prostą z_β. Prostopadła wykreślona w punkcie O_s do z_β, przetnie koło głębokości w punkcie $O^\times$, który połączymy ze śladem Z_α^{90}. Wykreślmy w punkcie $O^\times$ prostopadłą do $\overline{O^\times Z_\alpha^{90}}$ i oznaczmy jej punkt przecięcia się z prostą z_β literą A. Prosta z_α, wykreślona w punkcie A prostopadle do prostej z_β, jest śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn prostopadłych do prostej p. Jedna z nich przechodzi przez punkt P; jej ślad tłowy znajdziemy w sposób następujący: łączymy punkt A z punktem P_s prostą m_s, uważając ją za perspektywę prostej m, która przecina prostą p w punkcie P i leży na szukanej płaszczyźnie α. Śladem zbiegu prostej m jest punkt A, a śladem tłowym punkt T_m, w którym prosta t_β, poprowadzona przez ślad T_β równolegle do z_β, przecina prostą m_s. W istocie, skoro proste p i m przecinają się, więc leżą na jednej płaszczyźnie β, której ślady z_β i t_β muszą być do siebie równoległe. Prosta t_α, wykreślona przez punkt T_m, równolegle do z_α, jest śladem tłowym płaszczyzny α, prostopadłej do prostej p w punkcie P.



Rys. 32.

c) Poprowadzić przez punkt M, leżący na prostej m, płaszczyznę α, prostopadłą do danej prostej a (rys. 32). Ponieważ prosta a będzie prostopadłą do szukanej płaszczyzny α, więc ślad zbiegu Z_a tej prostej możemy uważać za ślad zbiegu Z_α^{90} wszystkich prostych prostopadłych do płaszczyzny α. Połączmy punkt $Z_a \equiv Z_\alpha^{90}$ z punktem głównym O_s i wykreślmy trójkąt prostokątny $Z_a O^\times A$. Ślad zbiegu z_α płaszczyzny α przejdzie przez punkt A, prostopadle do przeciwprostokąt-

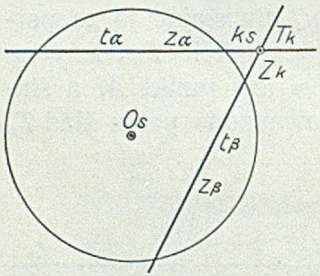
nej $\overline{Z_a A}$. Aby otrzymać ślad tłowy t_a płaszczyzny α, poprowadźmy przez punkt M dowolną prostą b, leżącą na tej płaszczyźnie. Ślad zbiegu Z_b prostej b leżeć będzie na śladzie zbiegu z_a płaszczyzny α. Ponieważ prosta b przecina prostą m, więc ślad tłowy t_ε płaszczyzny ε, wyznaczonej przez te proste, będzie równoległy do śladu zbiegu z_ε tej płaszczyzny i przetnie prostą b_s w punkcie T_b, śladzie tłowym prostej b. Prosta t_a, przechodząca przez punkt T_b równolegle do śladu z_a, jest śladem tłowym płaszczyzny α, która przechodzi przez punkt M i jest prostopadła do prostej a.



Rys. 33.

11. Krawędzie płaszczyzn. Dwie płaszczyzny — o ile nie są do siebie równoległe — przecinają się wzdłuż linji prostej, którą nazywamy krawędzią tych płaszczyzn.

Krawędź dwóch płaszczyzn określić można jako miejsce geometryczne punktów, leżących równocześnie na obu płaszczyznach, albo też jako miejsce geometryczne punktów przebicia się prostych, leżących na jednej płaszczyźnie, z płaszczyzną drugą. Punkt T_k (rys. 33) przecięcia się śladów tłowych t_α i t_β dwóch płaszczyzn jest jednym punktem, leżącym równocześnie na obu płaszczyznach, a więc punktem ich krawędzi. Punkt ten leży na tle, jest więc równocześnie swoją perspektywą i śladem tłowym krawędzi. Punkt Z_k, w którym przecinają się ślady zbiegu obu płaszczyzn, jest perspektywą punktu niewłaściwego, leżącego równocześnie na obu płaszczyznach, więc śladem zbiegu ich krawędzi. Prosta k_s, łącząca ślady T_k i Z_k, jest perspektywą krawędzi k płaszczyzn α i β. Krawędź dwóch płaszczyzn rzucających (przechodzących przez oko) przechodzi przez oko; jej perspektywą jest — jak wiadomo (ust. 3, str. 5) — punkt $T_k \equiv Z_k$ (rys. 34).



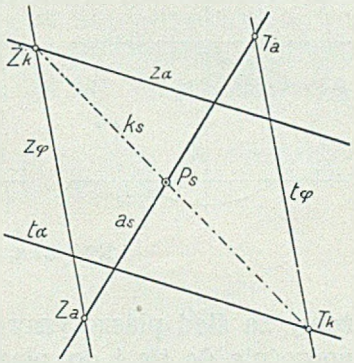
Rys. 34.

12. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną. Aby wyznaczyć punkt przebicia się prostej z płaszczyzną, prowadzimy przez tę prostą płaszczyznę, szukamy jej krawędzi z daną płaszczyzną, a punkt przecięcia się tej krawędzi z daną prostą rozwiązuje zadanie.

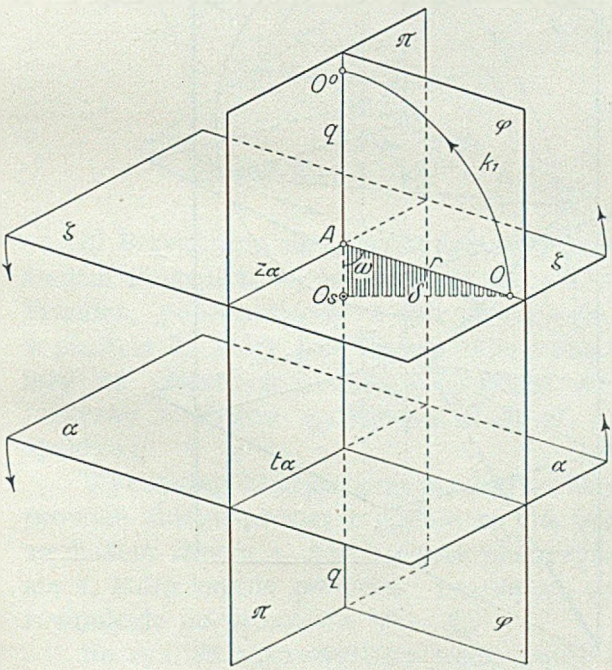
Graficzne przedstawienie tego zadania podaje rys. 35. Prosta a wyznaczona jest perspektywą a_s i śladami T_a i Z_a; ślady t_a i z_a określają położenie płaszczyzny α. Przez prostą a poprowadziliśmy płaszczyznę φ, prowadząc jej ślady t_φ i z_φ przez odpowiednie ślady prostej. Prosta k_s jest perspektywą krawędzi płaszczyzn α i φ, a punkt P_s perspektywą punktu przebicia się prostej a z płaszczyzną α.

Na rys. 35 nie zaznaczyliśmy ani punktu głównego ani głębokości tłowej, wobec czego przeprowadzenie restytucji przestrzennej nie jest możliwe; zadanie jest nieoznaczone.

13. Obroty i kłady płaszczyzn. *a)* Weźmy pod uwagę płaszczyznę α, przecinającą tło wzdłuż prostej t_α (rys. 36). Równoległa do płaszczyzny α i przechodząca przez oko płaszczyzna ζ przecina tło wzdłuż prostej z_α, równoległej do prostej t_α. Proste t_α i z_α są śladami płaszczyzny α na tle. Płaszczyzna φ, poprowadzona przez oko, prostopadle do śladu z_α, jest prostopadłą zarówno do tła, jak i do płaszczyzn ζ i α. Przecina ona tło wzdłuż prostej q, a płaszczyznę ζ wzdłuż prostej r. Obie te proste są prostopadłe do śladu zbiegu z_α w punkcie A i tworzą kąt ω, wyrażający nachylenie płaszczyzny ζ do płaszczyzny tła. Kąt ten równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny α do tła.



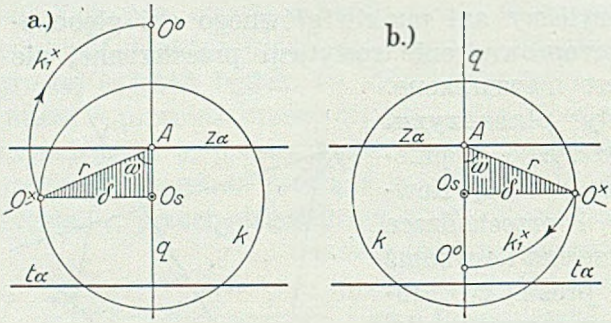
Rys. 35.



Rys. 36.

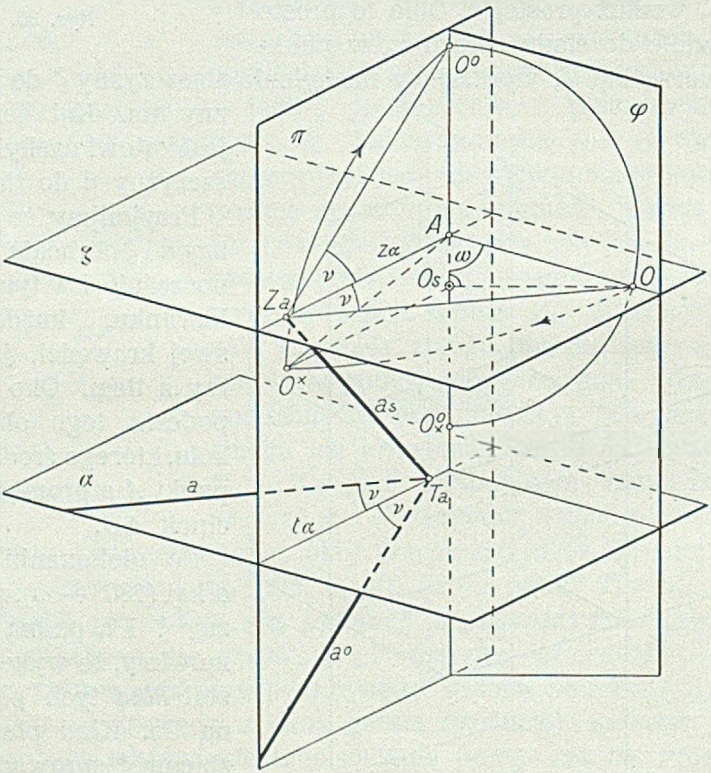
Przyjmijmy, że płaszczyzny α i ζ obracają się równocześnie i w tym samym kierunku, każda około swej krawędzi, jaką tworzy z tłem. Oko zakreśli podczas tego obrotu łuk koła, którego środkiem jest punkt A a promieniem odcinek $\overline{AO}$.

Po dokonaniu obrotu o kąt $(180^0 - \omega)$, płaszczyzny ζ i α padną na tło; mówimy, że wykonany został *kład* tych płaszczyzn na tło. Kład płaszczyzny zbiegu ζ sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu O^0 na prostej q, przyczem oczywiście odcinek $\overline{AO^0} = \overline{AO}$. Gdybyśmy obrót obu płaszczyzn wykonali w kierunku przeciwnym, to wówczas k ł a d O^0 oka O znalazłby się p o d śladem zbiegu z_α.



Rys. 37 *a*, *b*.

Niechaj promień główny będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku (rys. 37 *a*), to wówczas kład płaszczyzny α, wyznaczonej śladami t_a i z_a, wykonamy w sposób następujący: z punktu głównego O_s wykreślimy prostą q prostopadłą do śladu zbiegu z_a. Prostą tę uważać możemy za ślad płaszczyzny φ, przechodzącej przez oko i prostopadłej równocześnie do tła i do płaszczyzny α. Na płaszczyźnie tej znajduje się

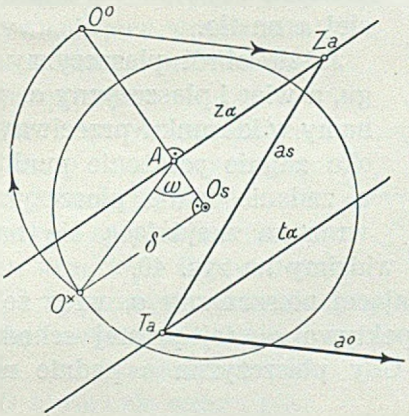


Rys. 38.

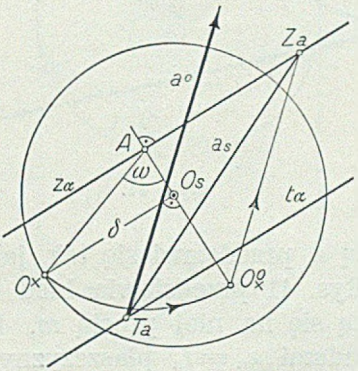
w odległości równej głębokości tłowej δ, od punktu O_s ku nam — oko, a także prosta r, łącząca oko z punktem A. Obróćmy płaszczyznę φ około prostej q tak, aby padła na tło, czyli wykonajmy jej *kład*. Wtedy

prostokątny trójkąt $A\,O_s\,O$ i koło k_1 padną na tło. Oko zajmie położenie punktu $O^\times$, a koło k_1 położenie koła $k_1^\times$, zakreślonego z punktu A, jako środka, promieniem równym przeciwprostokątnej $\overline{A\,O^\times}$. Punkt O^0, w którym koło k_1 przetnie prostą q, jest kładem oka na tło, dokonanym przez obrót płaszczyzny zbiegu ζ około śladu z_α. Kład płaszczyzny α na tło niczem się nie ujawni, skoro na płaszczyźnie tej nie przyjęliśmy żadnych punktów ani prostych.

Rys. 37 *b* przedstawia to samo zadanie z tą różnicą, że obrót płaszczyzny zbiegu ζ wykonaliśmy w kierunku przeciwnym.



Rys. 39.



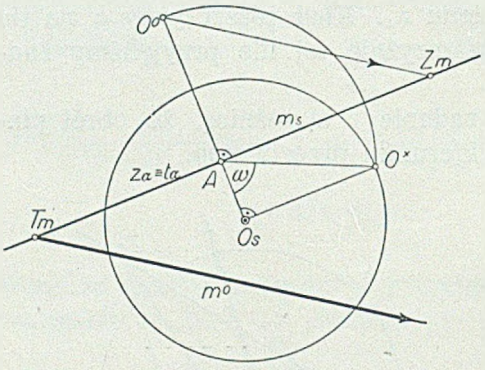
Rys. 40.

b) Przyjmijmy na płaszczyźnie α (rys. 38) prostą a, zawierającą ze śladem tłowym t_α tej płaszczyzny kąt ν i przebijającą tło w punkcie T_a. Promień, poprowadzony z oka równolegle do prostej a, przebije tło w punkcie Z_a, który jest śladem zbiegu prostej a. Promień zbiegu $O - Z_a$ leży na płaszczyźnie zbiegu ζ, punkt Z_a na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α. Prosta a_a, łącząca ślady T_a i Z_a prostej a, jest jej perspektywą.

Wykonajmy kład płaszczyzny ζ na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0, promień zbiegu prostej a padnie na tło, jako prosta $O^0 - Z_a$, tworząca ze śladem zbiegu z_α kąt ν. Obrót płaszczyzny α sprowadzi na tło prostą a, która zajmie położenie prostej a^0, przechodzącej przez ślad T_a, równolegle do promienia $O^0 - Z_a$.

Na rys. 38 zaznaczyliśmy także obrót płaszczyzny φ na tło, który sprowadzi na tło trójkąt $A\,O_s\,O$. Osią tego obrotu jest krawędź płaszczyzny φ z tłem. Oko zakreśli na płaszczyźnie poziomej ćwierć koła i padnie na tło, jako punkt $O^\times$. Trójkąt $A\,O_s\,O^\times$ jest przystający do trójkąta $A\,O_s\,O$. Łuk koła zakreślony promieniem $A\,O^\times$ z punktu A, jako środka, przetnie krawędź płaszczyzn π i φ w punkcie O^0.

Poglądowy rysunek 38 ułatwi zrozumienie konstrukcji kładu płaszczyzny α, wraz ze znajdującą się na niej prostą a, gdy kierunek promienia głównego będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku (rys. 39).



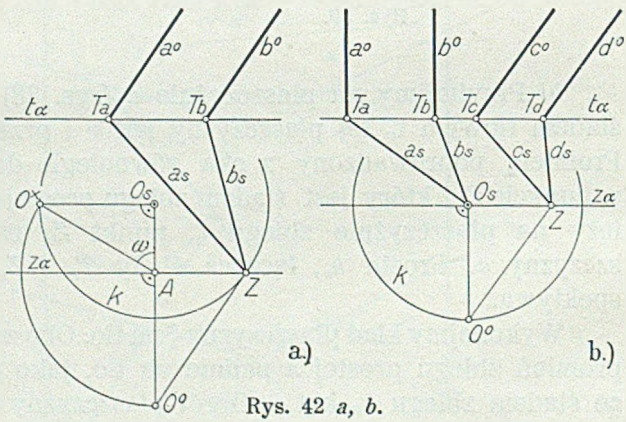
Rys. 41.

Kład płaszczyzny zbiegu sprowadzi na tło oko (które zajmie położenie punktu O^0) i promień zbiegu prostej a. Prosta a^0, wykreślona przez ślad tłowy T_a, prostej a, równolegle do kładu $O^0 - Z_a$ jej promienia zbiegu, jest kładem prostej a na tło.

Jeżeli obrót płaszczyzny zbiegu, a więc i płaszczyzny α, wykonamy w kierunku przeciwnym, to oko zajmie położenie punktu $O^0_\times$, a zadanie kładu płaszczyzny α, wraz ze znajdującą się na niej prostą a, przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 40.

Rys. 41 przedstawia kład rzucającej płaszczyzny α, wraz ze znajdującą się na niej prostą m. Perspektywa m_s tej prostej schodzi się ze śladami $z_\alpha \equiv t_\alpha$ płaszczyzny α. Gdy płaszczyzna α padnie na tło, prosta m zajmie położenie prostej m^0, przechodzącej przez ślad tłowy T_m, równolegle do promienia $O^0 - Z_m$.

Z rys. 42*a* czytamy: na płaszczyźnie α, nachylonej do tła pod kątem ω, leżą dwie proste równoległe a i b, nachylone do tła pod kątem 45°. Po sprowadzeniu płaszczyzny α na tło, proste a i b zajmą położenie prostych a^0 i b^0, równoległych do promienia $O^0 - Z$.

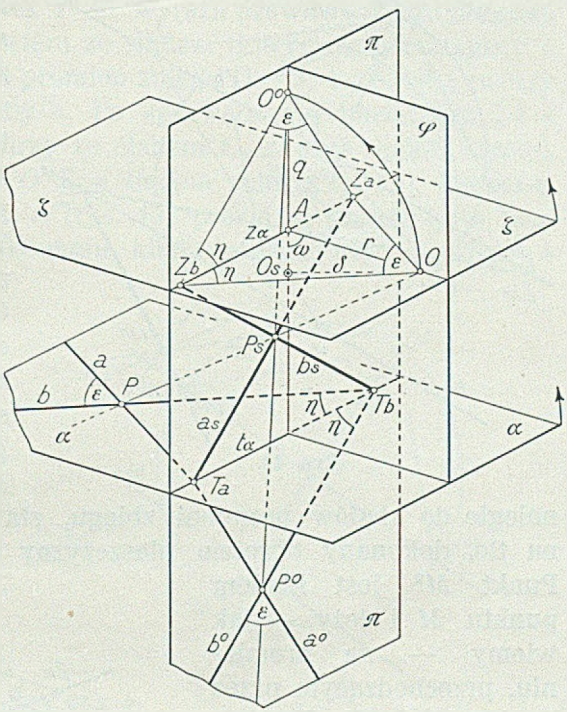


Rys. 42 *a*, *b*.

Rys. 42*b* jest perspektywą płaszczyzny α, prostopadłej do tła, na której leżą proste a i b prostopadłe do tła i dwie proste równoległe c i d, nachylone do tła pod kątem większym, aniżeli 45°. Po dokonanym kładzie płaszczyzny α, proste na niej leżące padną także na tło, a to jako proste a^0, b^0 i c^0, d^0.

c) Przyjmijmy na płaszczyźnie α, nachylonej do tła pod kątem ω,

proste a i b, przecinające się w punkcie P i zawierające ze sobą kąt ε (rys. 43). Promienie wykreślone z oka O, równolegle do tych prostych, przebiją tło w punktach Z_a i Z_b, leżących na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α. Proste a_s i b_s, łączące ślady zbiegu Z_a i Z_b z punktami T_a i T_b, w których proste a i b przebijają tło, są perspektywą tych prostych. Punktowi P odpowiada na tle punkt P_s, jako jego perspektywa, leżąca wraz z nim na promieniu, przechodzącym przez oko.



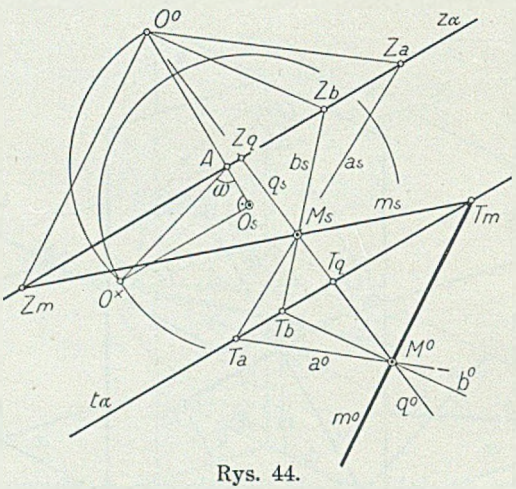
Rys. 43.

Obróćmy płaszczyznę α około śladu t_α, a płaszczyznę zbiegu ζ około jej śladu z_α — obie w tym samym kierunku i o ten sam kąt. Ślady tłowe T_a i T_b prostych a i b nie zmienią swych położeń na śladzie t_α płaszczyzny α. Oko O obróci się wraz z płaszczyzną ζ, ale promienie zbiegu obu prostych pozostać muszą — według założenia — równoległe do tych prostych w ich nowem położeniu, tworząc ze sobą kąt ε. W czasie obrotu, ślady zbiegu Z_a i Z_b prostych a i b nie zmienią swych położeń na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α. Tak więc proste a_s i b_s pozostaną perspektywami prostych a i b w ich nowem położeniu, wywołanem obrotem płaszczyzny α około jej śladu t_α.

Ponieważ to nowe położenie płaszczyzny α zostało dokonane jej obrotem o kąt dowolny, więc proste a_s i b_s pozostaną perspektywami prostych a i b w k a ż d e m położeniu płaszczyzny α, obracającej się około śladu t_α. Punkt P_s przecięcia się prostych a_s i b_s będzie — w każdem położeniu płaszczyzny α — perspektywą punktu P, w którym przecinają się proste a i b, leżące na tej płaszczyźnie.

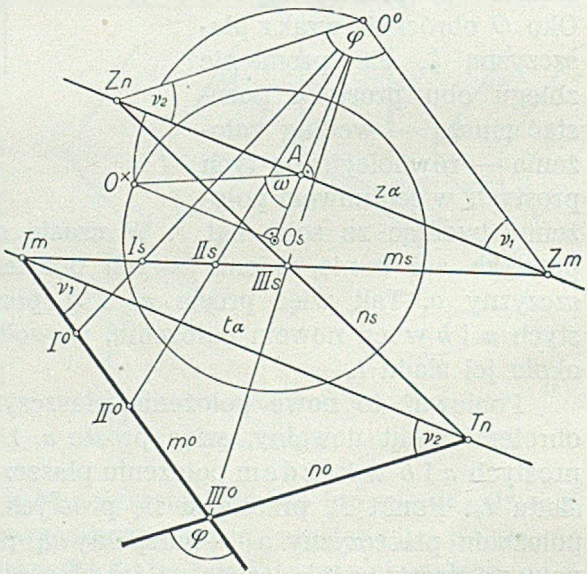
Niechaj płaszczyzny α i ζ, obracając się około swoich śladów, padną na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0, a proste a i b padną na tło jako proste a^0 i b^0, tworzące ze sobą kąt ε i równoległe do sprowadzonych na tło promieni zbiegu $O^0 - Z_a$ i $O^0 - Z_b$. Wykonaliśmy kład

płaszczyzny α na tło, a więc i kład leżących na niej prostych a i b. Punkt P^0 jest kładem punktu P. Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, wynika, że *perspektywa P_s punktu P i jego kład P^0 leżą na promieniu, przechodzącym przez kład O^0 oka.*



Rys. 44.

Rys. 44 przedstawia perspektywę płaszczyzny α, na której znajdują się proste m, a i b, przechodzące przez punkt M. Wykonaliśmy kład płaszczyzny zbiegu ζ płaszczyzny α na tło. Oko znalazło się na tle w punkcie O^0. Proste, łączące punkt O^0 ze śladami zbiegu Z_m, Z_a i Z_b, są kładem na tło promieni zbiegu tych trzech prostych. Proste m^0, a^0 i b^0, wykreślone równolegle do kładów promieni zbiegu, stanowią kład prostych m, a i b na tło, dokonany obrotem płaszczyzny α około jej śladu tłowego t_α. Punkt M^0 jest kładem punktu M i leży — jak wiemy — na promieniu, przechodzącym przez punkty M_s i O^0. Uważajmy ten promień za perspektywę q_s prostej q, leżącej na płaszczyźnie α, a przechodzącej przez punkt M. Śladami tej prostej są punkty T_q i Z_q, a jej kładem prosta q^0, schodząca się z prostą q_s, gdyż kład promienia zbiegu prostej q pokrywa się z prostą q_s. Tym sposobem stwierdzamy ponownie, że kład punktu, leżącego na płaszczyźnie i jego perspektywa, leżą na promieniu, przechodzącym przez kład O^0 oka.



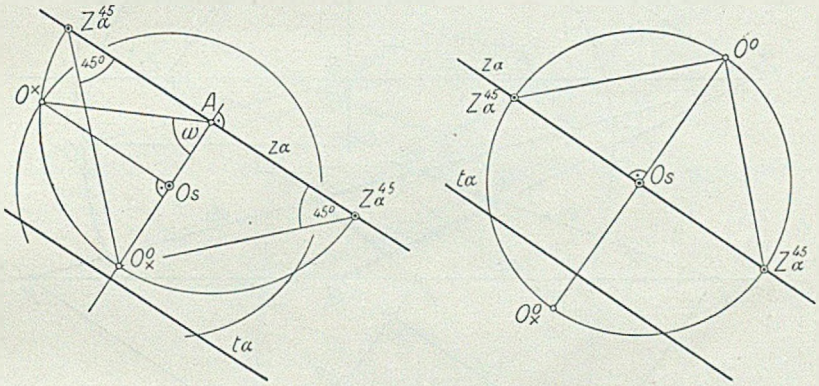
Rys. 45.

Jeżeli więc punkty I_s, II_s, III_s prostej m_s (rys. 45) są perspektywami punktów I, II, III prostej m, leżącej na płaszczyźnie α, a kładem

tej prostej jest prosta m^0 — to punkty I^0, II^0, III^0 przecięcia się promieni, przechodzących przez punkt O^0 i punkty I_s, II_s, III_s, z prostą m^0 — stanowią kład szeregu punktów prostej m. Jeżeli odcinek $\overline{I_s II_s}$ jest perspektywą odcinka $\overline{I\,II}$, to odcinek $\overline{I^0 II^0}$ wyraża prawdziwą jego długość.

d) Kąt η, jaki prosta b zawiera ze śladem tłowym t_α płaszczyzny α (rys. 43), równy jest kątowi, jaki promień zbiegu $O - Z_b$ tej prostej tworzy ze śladem zbiegu z_α płaszczyzny α. Po sprowadzeniu płaszczyzn ζ i α na tło, kąt, jaki prosta b^0 utworzy ze śladem t_α, równy będzie kątowi, zawartemu między promieniem $O^0 Z_b$ a śladem zbiegu z_α, t. j. kątowi η.

Przyjmijmy na płaszczyźnie α (rys. 45) prostą n, przecinającą prostą m w punkcie III. Po dokonaniu kładu płaszczyzny α, prosta n



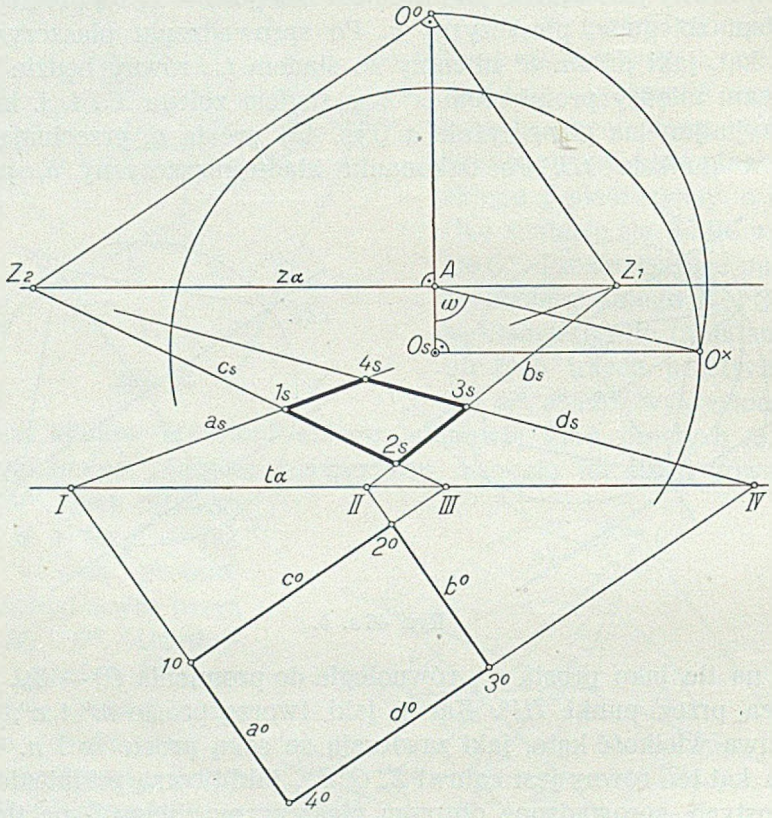
Rys. 46 *a, b.*

padnie na tło jako prosta n^0, równoległa do promienia $O^0 - Z_n$, a przechodząca przez punkt III^0. Kąt φ, jaki tworzą proste m^0 i n^0, wyraża prawdziwą wielkość kąta, jaki zawierają ze sobą proste m i n. Oczywiście, że kąt ten równy jest kątowi $Z_m O^0 Z_n$, jaki tworzą promienie zbiegu obu prostych, sprowadzone obrotem płaszczyzny zbiegu ζ na tło.

Każdy punkt śladu zbiegu płaszczyzny jest śladem zbiegu prostych równoległych do danej płaszczyzny (ust. 7), a zawierających z jej śladem tłowym, a raczej z kierunkiem określonym tym śladem, pewien ściśle określony kąt. Kąt ten równy jest temu, jaki tworzy ślad zbiegu płaszczyzny z promieniem, powstałym z połączenia uważanego punktu tego śladu i punktu O^0, względnie $O^0_\times$. Tak np. punkt Z_m (rys. 45) jest śladem zbiegu prostych równoległych do płaszczyzny α, a nachylonych do kierunku t_α pod kątem v_1.

Punkty $Z_\alpha{}^{45}$, w których koło zakreślone promieniem $\overline{A\,O^\times}$ (rys. 46*a*) przecina ślad zbiegu z_α płaszczyzny α, są śladami prostych, równoległych do tej płaszczyzny lub na niej leżących, a nachylonych do kierunku t_α pod kątem 45°. Z tego samego powodu, punkty przecięcia się śladu

zbiegu z_a, płaszczyzny α, prostopadłej do tła, z kołem głębokości (rys. 46 *b*), są śladami zbiegu prostych, równoległych do tej płaszczyzny lub na niej leżących, a nachylonych do kierunku t_a pod kątem 45°. W tym szczególnym przypadku proste, których śladami zbiegu są punkty Z_a^{45}, nachylone są także i do tła pod kątem 45°.



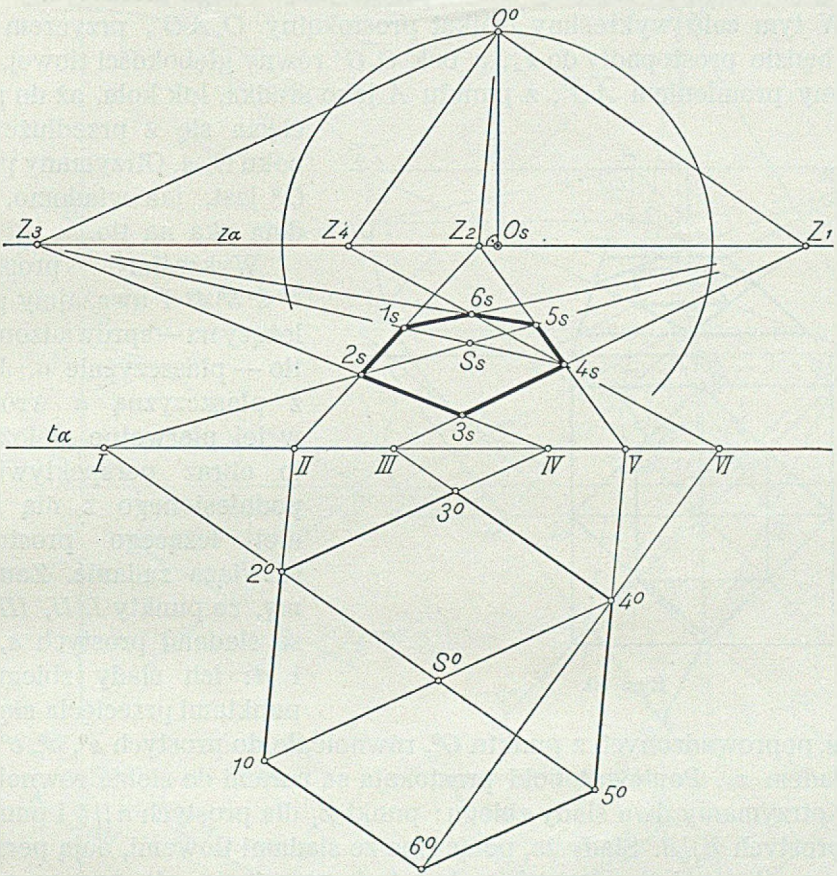
Rys. 47.

Gdy płaszczyzna α nie jest prostopadłą do tła, jak to ma miejsce na rys. 46 *a*, to punkty Z_a^{45} nazywać będziemy *punktami przekątnemi*. W przypadku, gdy płaszczyzna α jest prostopadłą do tła, punkty przekątne Z_a^{45} są *punktami głębokości* (ust. 2, str. 3).

14. Podnoszenie płaszczyzn z kładu. *a)* Zadaniu wykonania kładu płaszczyzny odpowiada, jako zadanie odwrotne, obracanie punktów i linij, leżących na tle, około śladu tłowego danej płaszczyzny tak, aby na nią padły. Operację taką nazywamy p o d n o s z e n i e m płaszczyzn z kładu.

Jeżeli leżąca na tle prosta a^0 w rys. 39 ma być podniesiona na płaszczyznę α, to najpierw wykonamy kład płaszczyzny zbiegu ζ na tło.

Oko zajmie położenie punktu O^0, z którego wykreślimy promień równoległy do prostej a^0, otrzymując na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α ślad zbiegu Z_a prostej a. Ponieważ punkt T_a, w którym prosta a^0 przecina



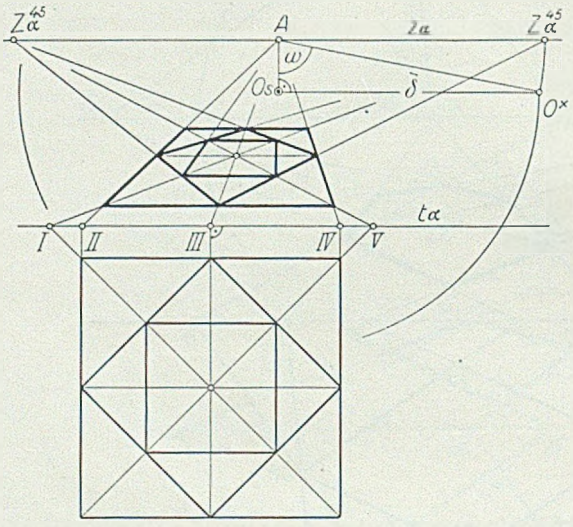
Rys. 48.

ślad t_α, jest śladem tłowym prostej a, więc prosta a_s, łącząca ten ślad ze śladem Z_a, jest perspektywą prostej a.

Każdy rysunek, przedstawiający kład płaszczyzny, uważać można za obraz zadania odwrotnego. Np. rys. 42*a* przedstawia kład płaszczyzny α wraz ze znajdującemi się na niej dwiema równoległemi prostemi, ale też i obraz perspektywiczny dwóch prostych równoległych, podniesionych z kładu, t. j. z tła, na daną płaszczyznę α.

Jeżeli zadanie wymaga wykreślenia perspektywy określonego płaskiego utworu geometrycznego, leżącego na danej płaszczyźnie w przestrzeni, to wówczas „wychodzimy z kładu", t. zn. rysujemy żądany utwór

na tle, a następnie podnosimy go na daną płaszczyznę. Jako przykład takiego zadania, narysujmy perspektywę prostokąta, leżącego na wyznaczonej śladami płaszczyźnie α (rys. 47). Przyjąwszy jako dane, koło głębokości, dokonajmy kładu płaszczyzny zbiegu płaszczyzny α na tło. W tym celu wykreślmy trójkąt prostokątny $O_s A O^\times$, przyczem bok $\overline{O_s A}$ będzie prostopadły do z_α, a bok $\overline{O_s O^\times}$ równy głębokości tłowej, i zakreślmy promieniem $\overline{A O^\times}$, z punktu A jako środka, łuk koła, aż do przecięcia się z przedłużeniem boku $O_s A$. Otrzymany punkt O^0 jest, jak wiadomo, kładem oka na tło.



Rys. 49.

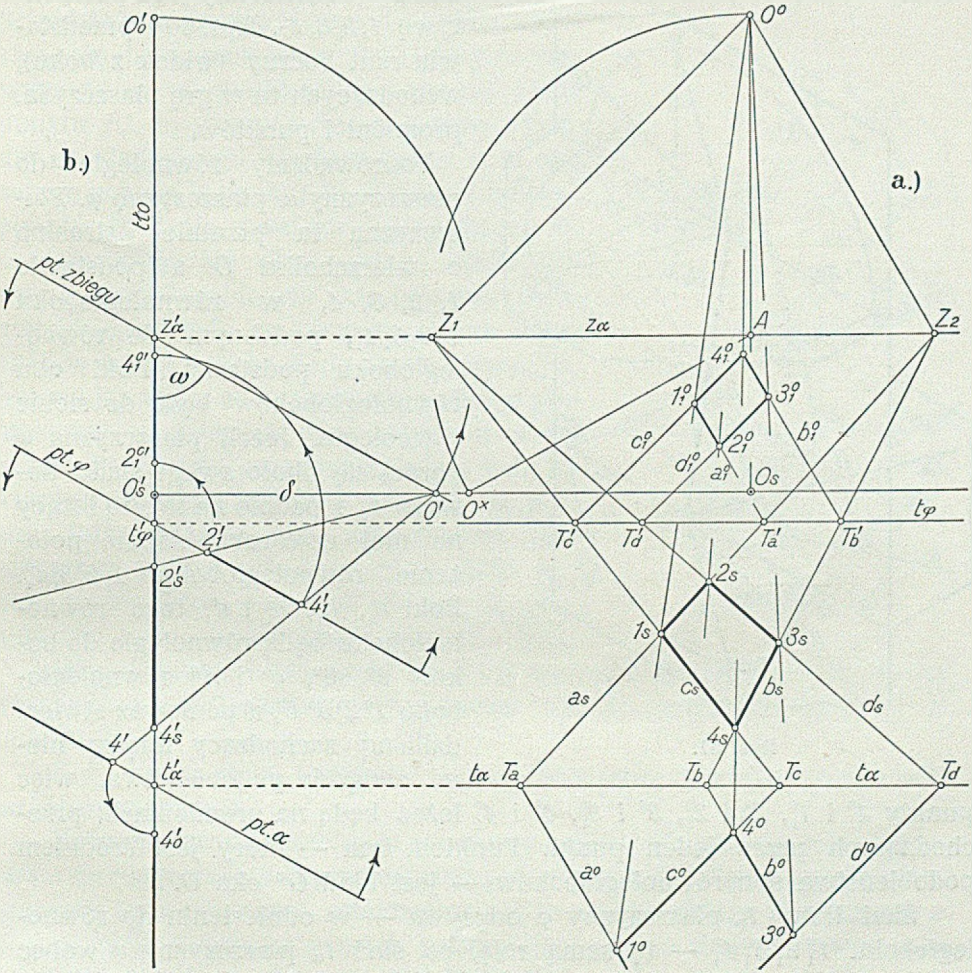
Wykreślmy prostokąt $1^0\,2^0\,3^0\,4^0$ i uważajmy go za leżący na — sprowadzonej na tło — płaszczyźnie α. Jeżeli z płaszczyzną α wrócimy w jej pierwotne położenie, to obraz perspektywiczny podniesionego z nią i na niej leżącego prostokąta rozwiąże zadanie. Zauważmy, że punkty *I*, *II*, *III* i *IV* są śladami prostych *a*, *b*, *c* i *d*; ich ślady zbiegu są punktami przecięcia się promieni, poprowadzonych z punktu O^0, równolegle do prostych a^0, b^0, c^0 i d^0, ze śladem z_α. Ponieważ boki prostokąta są parami do siebie równoległe, więc otrzymamy dwa ślady zbiegu: punkt Z_1 dla prostych $a \parallel b$ i punkt Z_2 dla prostych $c \parallel d$. Ślady te, połączone ze śladami tłowemi, dają perspektywę a_s, b_s, c_s i d_s prostych *a*, *b*, *c* i *d*; przecinają się one w wierzchołkach 1_s, 2_s, 3_s i 4_s czworokąta, stanowiącego perspektywę prostokąta, leżącego na płaszczyźnie α, nachylonej do tła pod kątem ω.

Jako dalszy przykład „podnoszenia z kładu“, służy rys. 48, który przedstawia konstrukcję perspektywy umiarowego sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej.

Oko, sprowadzone obrotem płaszczyzny zbiegu na tło, padnie na koło głębokości, jako punkt O^0 przecięcia się z niem prostopadłej, wykreślonej w punkcie głównym do śladu z_α. Poza tem konstrukcja pokrywa się z przeprowadzoną na rys. 47, z tą różnicą, że wystąpią tu trzy ślady zbiegu, trzech par prostych równoległych.

Rys. 49 podaje konstrukcję ornamentu geometrycznego, ułożonego z trzech wpisanych w siebie kwadratów i leżącego na — nachylonej pod

kątem ω do tła — płaszczyźnie α. Proste prostopadłe do śladu tłowego t_α mają ślad zbiegu w punkcie A. Śladami zbiegu prostych, nachylonych do śladu t_α pod kątem 45°, są dwa punkty przekątne Z_α^{45} płaszczyzny α,

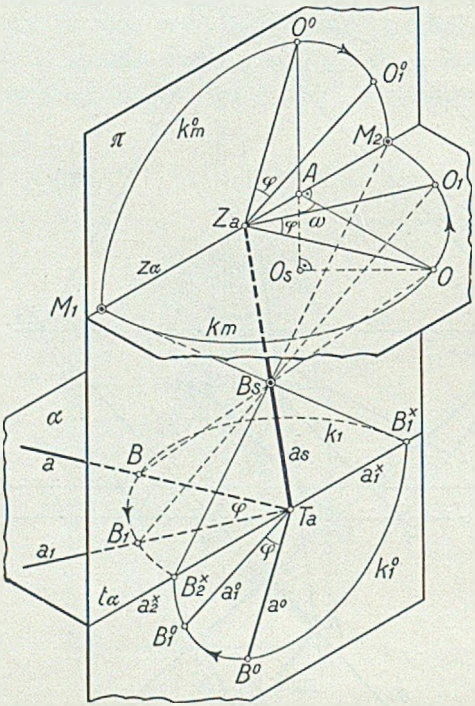


Rys. 50 *b*, *a*.

leżące na śladzie zbiegu z_α symetrycznie względem punktu A (patrz ust. 13, pkt. *d*).

b) Promienie, łączące punkty utworu płaskiego, przyjętego na płaszczyźnie α, z okiem, tworzą t. zw. wiązkę promieni. Płaszczyzna równoległa do płaszczyzny α przetnie tę wiązkę w punktach, które utworzą utwór płaski, geometrycznie podobny do utworu, znajdującego się na płaszczyźnie α. Fakt zachodzącego tu podobieństwa pozwala zastąpić — z korzyścią dla konstrukcji — jeden utwór płaski drugim.

Przyjmijmy płaszczyznę α, wyznaczoną śladem tłowym t_α i śladem zbiegu z_α (rys. 50a), a na niej równoległobok *1, 2, 3, 4*. Wykonajmy kład tej płaszczyzny na tło i — wychodząc z kładu $1^0 2^0 3^0 4^0$ równoległoboku — wykreślmy jego perspektywę $1_s 2_s 3_s 4_s$. Rys. 50b przedstawia rzut boczny (widok z boku), wchodzących tu w grę płaszczyzn, promieni i punktów.



Rys. 51.

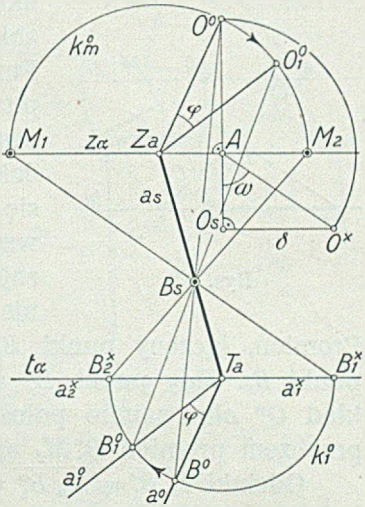
Poprowadźmy równolegle do płaszczyzny α płaszczyznę φ. Płaszczyzna ta przetnie ostrosłup o wierzchołku O a podstawie *1, 2, 3, 4*, w równoległoboku $1_1 2_1 3_1 4_1$, podobnym do równoległoboku podstawy. Boki obu równoległoboków będą do siebie równoległe. Jeżeli płaszczyzna φ obróci się około swego śladu tłowego t_φ i padnie na tło, to leżący na niej czworokąt zajmie położenie równoległoboku $1_1^0 2_1^0 3_1^0 4_1^0$. Boki a_1^0, b_1^0, c_1^0 i d_1^0 tego równoległoboku będą równoległe do boków a^0, b^0, c^0 i d^0 równoległoboku $1^0 2^0 3^0 4^0$, a ponieważ stwierdziliśmy zachodzący między niemi związek podobieństwa, więc punkty 1^0 i 1_1^0, 2^0 i 2_1^0, 3^0 i 3_1^0, 4^0 i 4_1^0 leżeć będą na promieniach, przechodzących przez jeden punkt. Punktem tym — który jest środkiem podobieństwa obu równoległoboków — jest kład O^0 oka O.

Ślad tłowy t_φ płaszczyzny φ odgrywa — w odniesieniu do równoległoboku $1_1^0 2_1^0 3_1^0 4_1^0$ — tę samą rolę, co ślad t_α płaszczyzny α wobec równoległoboku $1^0 2^0 3^0 4^0$. Tak więc przy pomocy utworu podobnego, przyjętego na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny właściwego utworu, wyznaczyć możemy perspektywę, pokrywającą się z tą, jaką otrzymamy, konstruując bezpośrednio.

15. Punkty mierzenia. Przyjmijmy na płaszczyźnie α (rys. 51), nachylonej do tła pod kątem ω, prostą a i na niej punkt B. Perspektywą prostej a jest prosta a_s, punktu B punkt B_s.

Pozostawiając prostą a na płaszczyźnie α, obróćmy ją około jej śladu T_a tak, aby zajęła położenie prostej a_1. Równocześnie z obrotem prostej a jej promień zbiegu $\overline{OZ_a}$ obróci się około śladu zbiegu Z_a, na

płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny α, w tym samym, co prosta a kierunku i o ten sam kąt, przyjmując położenie promienia $\overline{O_1 Z_a}$, równoległego do prostej a_1. Punkt B prostej a zakreśli łuk koła o promieniu $\overline{T_a B}$, z punktu T_a jako środka i zajmie położenie punktu B_1. Promień $O_1 B_1$ przejdzie przez punkt B_s. Jeżeli prosta a, obracając się dalej, padnie na ślad tłowy t_α płaszczyzny α, a punkt B zajmie położenie punktu $B_2^\times$, to promień zbiegu prostej a padnie na ślad zbiegu z_α płaszczyzny α, a oko zajmie położenie punktu M_2. Promień, łączący punkty $B_2^\times$ i M_2, przejdzie przez punkt B_s.



Rys. 52.

Obracając się około swego śladu tłowego, prosta a obiegnie całą płaszczyznę α, gdy równocześnie jej promień zbiegu obracać się będzie około śladu zbiegu prostej a, pozostając stale na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny α. Podczas obrotu prostej a jej punkt B zakreśla na płaszczyźnie α koło k_1, którego środkiem jest ślad tłowy T_a tej prostej. Równocześnie oko zakreśla na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny α koło k_m, którego środkiem jest ślad zbiegu Z_a prostej a, zaś promieniem odcinek $\overline{O Z_a}$.

Między położeniami punktów B i O zachodzi ta zależność, że są one związane promieniami, przechodzącemi zawsze przez perspektywę B_s punktu B.

Koło k_m nazywać będziemy *kołem mierzenia*, a każdy jego punkt *punktem mierzenia*.

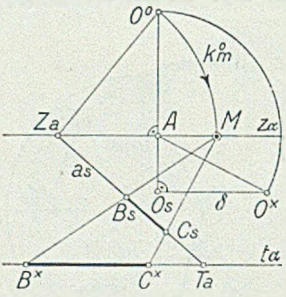
Każdemu promieniowi koła mierzenia odpowiada jedno położenie prostej a na płaszczyźnie α, przechodzącej stale przez jej ślad tłowy T_a. Promieniom koła mierzenia, schodzącym się ze śladem zbiegu płaszczyzny α, odpowiadają położenia prostej, pokrywające się ze śladem tłowym płaszczyzny α. Punkty mierzenia M_1 i M_2 prostej a, leżące na śladzie zbiegu z_α płaszczyzny α, nazywać będziemy *istotnemi punktami mierzenia*.

Po wykonaniu kładu płaszczyzny α i jej płaszczyzny zbiegu na tło, koło mierzenia zajmie położenie koła k_m^0, a koło k_1 położenie koła k_1^0. Proste a i a_1 padną na tło, jako proste a^0 i a_1^0, a ich promienie zbiegu, jako odcinki $\overline{O^0 Z_a}$ i $\overline{O_1^0 Z_a}$. Odcinki $\overline{T_a B^0} = \overline{T_a B_1^0} = \overline{T_a B_1^\times} = \overline{T_a B_2^\times}$ wyrażają prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek $T_a B_s$.

Rysunek perspektywiczny konstrukcji uzmysłowionej na rys. 51 — przy założeniu, że promień główny jest prostopadły do płaszczyzny rysunku (tła) — podaje rys. 52. Na płaszczyźnie α, wyznaczonej

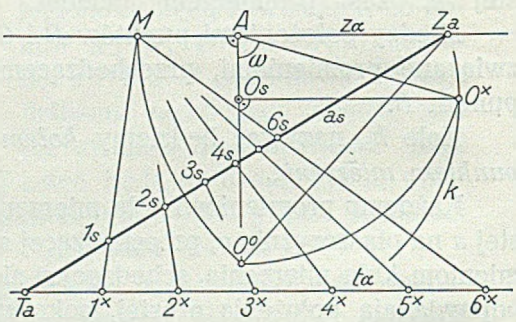
Biblioteka Państw. Inst.

dami t_α i z_α leży prosta a, której śladami są punkty T_a i Z_a. Po wykonanym kładzie płaszczyzny α, a więc i jej płaszczyzny zbiegu, prosta a zajęła położenie prostej a^0, zaś promień zbiegu prostej a położenie odcinka $\overline{O^0 Z_a}$. Gdy prosta a^0 obróciła się około śladu T_a o kąt φ i zajęła położenie a_1^0, to kład oka zajął położenie punktu O_1^0, a promień zbiegu $\overline{O_1^0 Z_a}$ pozostał równoległy do prostej a_1^0. Punktowi B^0 prostej a^0 odpowiada na prostej a_s punkt B_s, leżący z nim na promieniu, przechodzącym przez kład O^0 oka. Promień $B_1^0 B_s$ przejdzie przez punkt O_1^0. Gdy prosta a^0 zejdzie się, podczas swego obrotu około śladu tłowego T_a, ze śladem t_α płaszczyzny α, a punkt B^0 zajmie położenie punktu $B_1^\times$, to punkt O^0 padnie na ślad zbiegu z_α jako punkt mierzenia M_1. Promień, łączący punkt $B_1^\times$ z punktem mierzenia M_1, przejdzie przez punkt B_s. Gdy punkt B^0 znajdzie się na śladzie t_α jako punkt $B_2^\times$, to kład O^0 oka zajmie położenie punktu mierzenia M_2 na śladzie z_α, przyczem promień $B_2^\times M_2$ przejdzie przez punkt B_s.



Rys. 53.

Odcinki $\overline{T_a B_1^\times} = \overline{T_a B_2^\times} = \overline{T_a B^0}$ wyrażają prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek $\overline{T_a B_s}$. Znaczy to, że *rzut perspektywy odcinka, z punktu mierzenia, na ślad tłowy płaszczyzny, na której on leży, równy jest jego prawdziwej długości.* W tem leży wielkie znaczenie praktyczne punktów mierzenia, które pozwalają mierzyć prawdziwe długości danych w perspektywie odcinków, bez wykonywania ich kładów na tło.

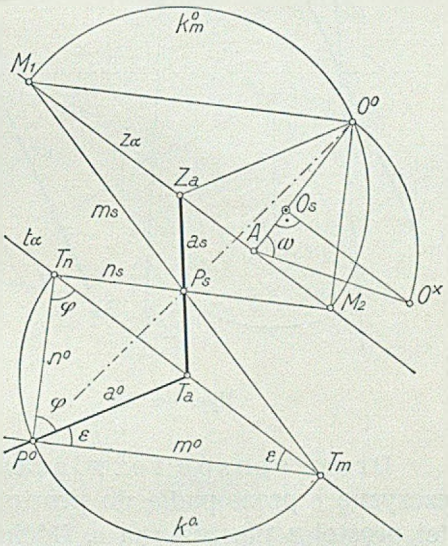


Rys. 54.

Jeżeli więc — jak to widzimy na rys. 53 — na płaszczyźnie α znajduje się prosta a, a na niej odcinek $\overline{BC}$, to prawdziwą długość tego odcinka znajdziemy w sposób następujący: wykonamy kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny α i kład O^0 oka połączymy ze śladem zbiegu Z_a prostej a. Następnie zakreślimy promieniem $\overline{O^0 Z_a}$, z punktu Z_a jako środka, łuk koła k_m^0, który przetnie ślad zbiegu z_α w punkcie mierzenia M. Kreślimy promienie MB_s i MC_s, które przetną ślad tłowy t_α płaszczyzny α w punktach $B^\times$ i $C^\times$. Odcinek $\overline{B^\times C^\times}$ równy jest prawdziwej długości odcinka, którego perspektywą jest odcinek $\overline{B_s C_s}$.

Zastosowanie punktu mierzenia do wyznaczenia podziałki perspek-

tywicznej na danej prostej a, która leży na płaszczyźnie α, podaje rys. 54. Odcinek $\overline{O^0 Z_a}$ jest kładem promienia zbiegu prostej a, punkt M jej punktem mierzenia. Na śladzie tłowym t_α płaszczyzny α narysujemy podziałkę o żądanej jednostce i punkty podziału $1^\times$, $2^\times$,... rzucimy z punktu M na prostą a_s, jako punkty 1_s, 2_s, ...



Rys. 55.

Przyjmijmy na płaszczyźnie α, wyznaczonej śladami t_α i z_α, a nachylonej do tła pod kątem ω (rys. 55), prostą a, której perspektywą niech będzie prosta a_s. Rzućmy punkt P_s, przyjęty na prostej a_s, z istotnych punktów mierzenia M_1 i M_2 na ślad tłowy t_α płaszczyzny α, to odcinek $\overline{T_a T_m} = \overline{T_a T_n}$ wyraża prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek $\overline{T_a P_s}$. Proste a^0, m^0 i n^0 są kładem na tło prostych a, m i n, leżących na płaszczyźnie α, a przechodzących przez punkt P. Punkty O^0, P_s i P^0 leżą na jednym promieniu. Ponieważ $\overline{T_a T_m} = \overline{T_a T_n} = \overline{T_a P^0}$, więc punkty T_m, T_n i P^0 leżeć muszą na kole k^0, którego środkiem jest punkt T_a. Prosta m^0 zawiera z prostą a^0 i ze śladem tłowym t_α ten sam kąt ε, podobnie i prosta n^0 przecina prostą a^0 i t_α pod tym samym kątem φ. Stąd określić można każdy z istotnych punktów mierzenia prostej, jako ślad zbiegu pęku równoległych — i wraz z tą prostą na jednej płaszczyźnie leżących — promieni, które zawierają z tą prostą i ze śladem tłowym płaszczyzny te same kąty.

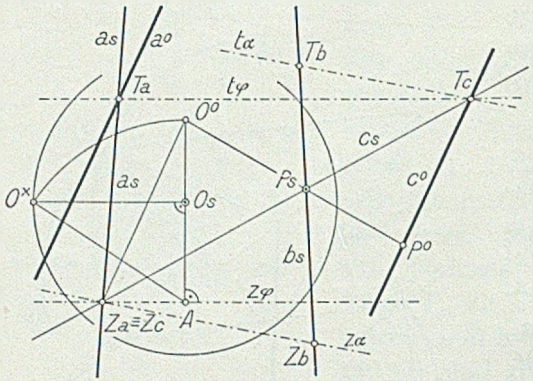
16. Zadania. *a) Wyznaczyć odległość punktu P od prostej a.* Perspektywa P_s punktu P leży na perspektywie b_s prostej b, której śladami są punkty T_b i Z_b.

Pierwszy sposób rozwiązania. Przez punkt P prowadzimy prostą c, równoległą do prostej a, i znajdujemy odległość tych dwóch równoległych, kładąc je na tło.

Konstrukcyjnie przedstawia się sprawa następująco (rys. 56): łączymy punkty P_s i Z_a prostą c_s. Proste b i c przecinają się, więc leżą na jednej płaszczyźnie, której śladem zbiegu jest prosta z_α, łącząca ślady zbiegu $Z_a \equiv Z_c$ i Z_b obu prostych. Ślad tłowy tej płaszczyzny przejdzie przez punkt T_b równolegle do z_α i przetnie prostą c_s w punkcie T_c, śladzie tłowym prostej c.

Biblioteka w Stalinogrodzie

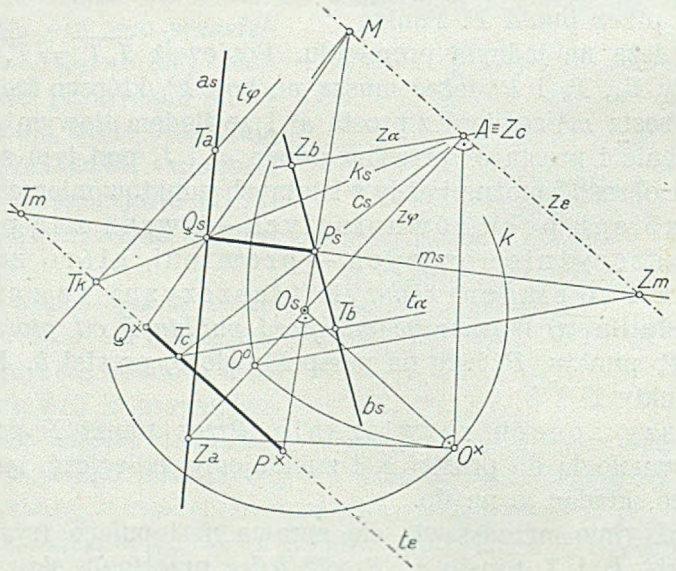
Równoległe proste a i c wyznaczają płaszczyznę φ, której ślad tłowy t_φ łączy ślady tłowe T_a i T_c tych prostych, a której ślad zbiegu z_φ przechodzi przez punkt $Z_a \equiv Z_c$.



Rys. 56.

Z punktu głównego O_s kreślimy prostopadłą i równoległą do śladu z_φ; otrzymamy punkty A i $O^\times$, a następnie kład O^0 oka na tło. Prosta $O^0 Z_a$ jest kładem promienia zbiegu prostych a i c na tło; proste a^0 i c^0, wykreślone przez ślady T_a i T_c równolegle do $O^0 Z_a$, stanowią kład prostych a i c na tło. Rzut P^0 punktu P_s z punktu O^0 na prostą c^0 jest kładem punktu P na tło. Oddalenie punktu P^0 od prostej a^0 rozwiązuje zadanie.

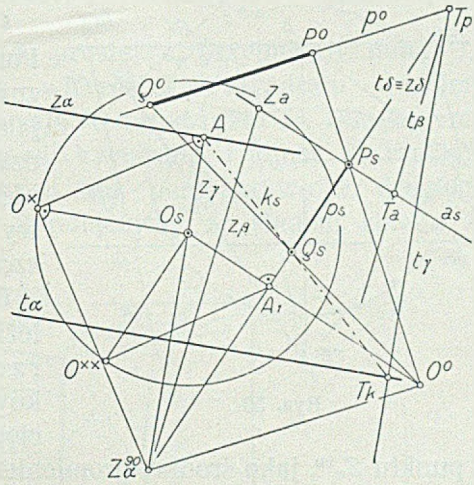
Drugi sposób rozwiązania. Przez punkt P poprowadzimy płaszczyznę ε prostopadłą do prostej a i znajdziemy punkt Q przebicia się tej prostej z płaszczyzną ε. Odcinek $\overline{PQ}$ jest rozwiązaniem zadania.



Rys. 57.

Ślad zbiegu Z_a prostej a (rys. 57) uważamy za ślad zbiegu prostych prostopadłych do szukanej płaszczyzny ε i łączymy go z punktem głów-

nym O_s. Szukamy punktu $O^\times$, kreślimy w nim prostopadłą do $\overline{O^\times Z_a}$, która przetnie prostą $O_s - Z_a$ w punkcie A. Przez ten punkt przejdzie ślad zbiegu z_ε płaszczyzny ε, prostopadle do prostej $A - O_s - Z_a$. Ślad tłowy t_ε tej płaszczyzny znajdziemy podobnie, jak na rys. 32 (str. 17). Więc przez punkt P poprowadzimy prostą c, leżącą na płaszczyźnie ε. Jeżeli punkt A przyjmiemy za ślad zbiegu tej prostej, to jej ślad tłowy T_c będzie punktem przecięcia się prostej c_s z prostą t_a, wykreśloną przez punkt T_b, równolegle do prostej z_a, która łączy punkty A i Z_b. Ślad tłowy t_ε przejdzie przez punkt T_c równolegle do śladu zbiegu z_ε. Przy pomocy płaszczyzny φ, poprowadzonej przez prostą a, znaleźliśmy jej punkt przebicia się Q z płaszczyzną ε. Odcinek $\overline{P_s Q_s}$ jest perspektywą odległości punktu P od prostej a. Prosta m, wyznaczona punktami P i Q, leży na płaszczyźnie ε. Śladami tej prostej są punkty T_m i Z_m. Łuk koła, zakreślony z punktu Z_m, jako środka, promieniem $\overline{Z_m O^0}$, przetnie prostą z_ε w punkcie mierzenia M. Rzut $\overline{P^\times Q^\times}$ odcinka $\overline{P_s Q_s}$ z punktu M na prostą t_a wyraża prawdziwe oddalenie punktu P od prostej a.

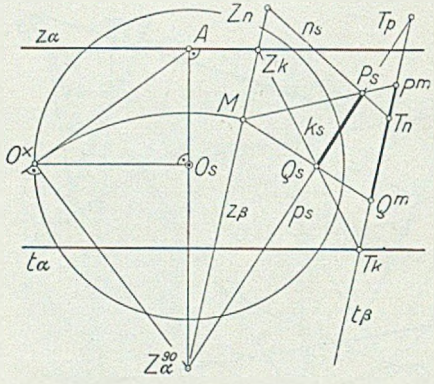


Rys. 58.

b) Wyznaczyć odległość punktu P od płaszczyzny α. Pierwsza konstrukcja (rys. 58). Najpierw wyznaczymy ślad zbiegu Z_α^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α. Prosta p_s, łącząca ten ślad z punktem P_s, jest perspektywą prostopadłej, poprowadzonej z punktu P do płaszczyzny α. Ponieważ punkt P przyjęliśmy na prostej a, więc prosta z_β, łącząca punkty Z_α^{90} i Z_a, jest śladem zbiegu płaszczyzny β, która przechodzi przez proste p i a. Ślad tłowy t_β tej płaszczyzny przechodzi przez punkt T_a i przecina prostą p_s w punkcie T_p, śladzie tłowym prostej p. Przechodząca przez prostą p, prostopadle do tła, płaszczyzna γ przecina płaszczyznę α wzdłuż prostej k, której perspektywą jest prosta k_s. Punkt przecięcia się Q_s prostych p_s i k_s jest perspektywą punktu przebicia się prostej p z płaszczyzną α. Odcinek $\overline{P_s Q_s}$ jest perspektywą odległości punktu P od płaszczyzny α.

Prawdziwą długość odcinka $\overline{PQ}$ znajdziemy, dokonując kładu na tło rzucającej płaszczyzny δ, poprowadzonej przez prostą p. Ślady tej płaszczyzny schodzą się z prostą p_s. Oko zajmie położenie punktu O^0 na prostopadłej, wykreślonej z punktu O_s do $t_\delta \equiv z_\delta$, przyczem $\overline{O^0 A_1} = \overline{A_1 O^{\times\times}}$.

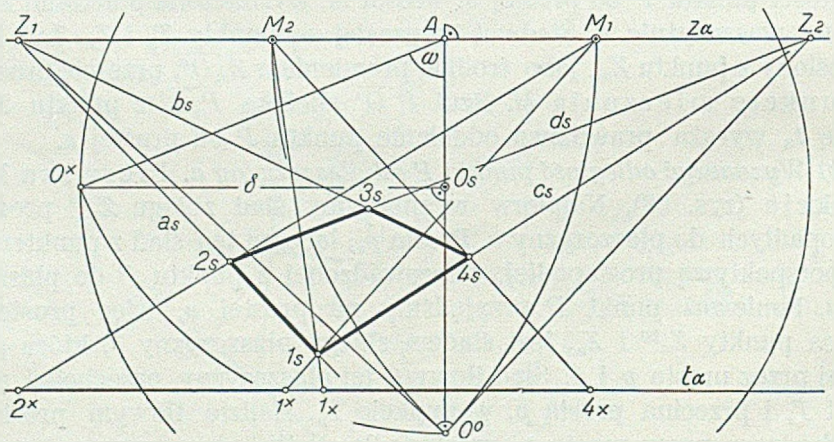
Prosta p^0, wykreślona przez ślad tłowy T_p, równolegle do promienia $O^0 - Z_\alpha^{90}$, jest kładem prostej p. Rzut $\overline{P^0Q^0}$ odcinka $\overline{P_sQ_s}$ z punktu O^0 na prostą p^0 rozwiązuje zadanie.



Rys. 59.

Druga konstrukcja (rys. 59). Punkt P przyjęliśmy na prostej n, wyznaczonej śladami T_n i Z_n. Podobnie jak w konstrukcji pierwszej, poprowadziliśmy z punktu P prostopadłą p do płaszczyzny α, wyznaczyli jej ślad tłowy T_p i punkt przebicia się Q z płaszczyzną α.

Prawdziwą długość odcinka $\overline{PQ}$ znaleźliśmy przy pomocy punktu mierzenia M, odpowiadającego kierunkowi prostej p. Punkt ten jest przecięciem się łuku koła, zakreślonego z punktu Z_α^{90}, jako środka, promieniem $Z_\alpha^{90}O^\times$ — ze śladem zbiegu z_β, płaszczyzny β, na której leży prosta p. Odcinek $\overline{P^mQ^m}$, będący rzutem odcinka $\overline{P_sQ_s}$ z punktu M na ślad tłowy t_β, wyraża prawdziwe oddalenie punktu P od płaszczyzny α.

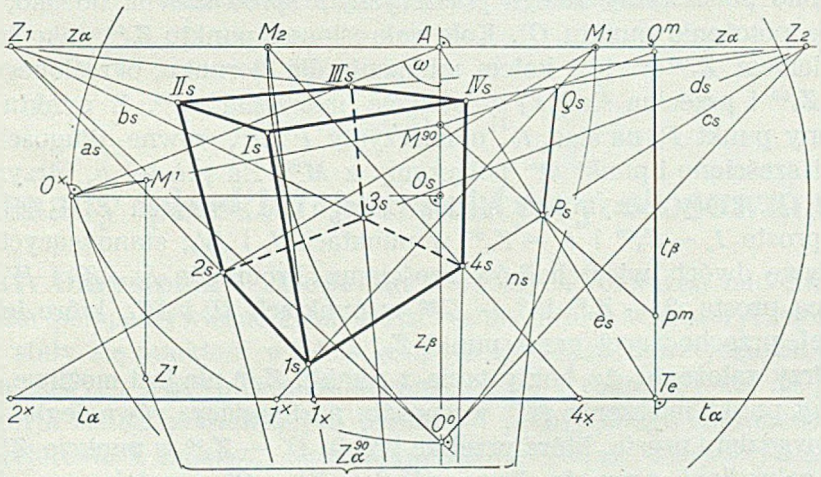


Rys. 60.

c) Narysować perspektywę kwadratu, który leży na wyznaczonej śladami t_α i z_α płaszczyźnie, a którego długość boku jest dana (rys. 60). Kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny α na tło sprowadzi oko do punktu O^0. Przyjęty dowolnie na śladzie z_α punkt Z_1 uważamy za ślad zbiegu pary równoległych boków kwadratu; śladem zbiegu drugiej pary boków będzie punkt Z_2, w którym prostopadła, wykreślona w punkcie O^0 do pro-

mienia $\overline{O^0 Z_1}$, przecina ślad zbiegu z_α. Łuki kół, zakreślone z punktów Z_1 i Z_2 jako środków, promieniami $\overline{Z_1 O^0}$ i $\overline{Z_2 O^0}$, przetną ślad zbiegu z_α w punktach mierzenia M_1 i M_2 kierunków, odpowiadających śladom zbiegu Z_1 i Z_2.

Na wykreślonej przez punkt Z_1 prostej a_s przyjmiemy punkt 1_s, a uważając go za perspektywę wierzchołka kwadratu, rzucimy z punktu M_1 na ślad tłowy t_α, oznaczając ten rzut przez $1^\times$. Odmierzymy odcinek $\overline{1^\times 2^\times}$, równy danemu bokowi kwadratu, i punkt $2^\times$ rzucimy z punktu M_1 na prostą a_s, otrzymując tam perspektywę 2_s drugiego wierzchołka kwadratu. Punkty 1_s i 2_s połączymy ze śladem zbiegu Z_2



Rys. 61.

prostemi c_s i d_s, a punkt 1_s rzucimy nadto z punktu M_2 na t_α. Odmierzywszy $\overline{1_\times 4_\times} \equiv \overline{1^\times 2^\times}$, połączymy punkt $4_\times$ z punktem M_2 prostą, która przetnie promień c_s w punkcie 4_s. Prosta $4_s - 3_s - Z_1$ dopełnia rozwiązania zadania.

d) Wykreślić perspektywę sześcianu, którego długość krawędzi jest dana, a który stoi na danej śladami płaszczyźnie α (rys. 61). Perspektywę $1_s 2_s 3_s 4_s$ kwadratu, leżącego na płaszczyźnie α i stanowiącego podstawę sześcianu, wykreśliliśmy zupełnie w ten sam sposób, jak w zadaniu poprzedniem. Boczne krawędzie sześcianu posiadać będą wspólny ślad zbiegu Z_α^{90}, który otrzymamy, jako punkt przecięcia się prostej $A - O^0$ z prostopadłą, wykreśloną w punkcie $O^\times$ do promienia $O^\times - A$.

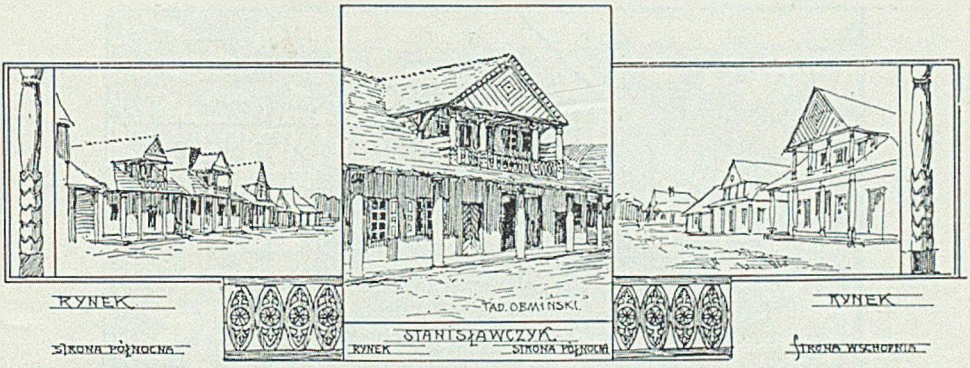
Połączmy punkty 1_s, 2_s, 3_s i 4_s ze śladem Z_α^{90} i przystąpmy do wyznaczenia perspektywy wysokości sześcianu. W tym celu przyjmiemy na prostej c_s dowolny punkt P_s, połączymy go ze śladem Z_α^{90} prostą n_s i odmierzymy na niej odcinek $\overline{P_s - Q_s}$, równy perspektywie długości kra-

wędzi sześcianu. Długość tę moglibyśmy odmierzyć na prostej prostopadłej, poprowadzonej w którymkolwiek z wierzchołków kwadratu, stanowiącego podstawę sześcianu. Nie uczyniliśmy tego jedynie ze względu na chęć otrzymania możliwie najbardziej przejrzystego rysunku.

W celu otrzymania odcinka $\overline{P_s Q_s}$, poprowadźmy przez prostą n płaszczyznę. Ponieważ ślad tłowy prostej n nie jest nam znany, więc przetniemy ją prostą e, leżącą na płaszczyźnie α, a przechodzącą przez punkt P. Jako ślad zbiegu prostej e przyjęliśmy punkt A; ślad tłowy T_e leży na śladzie tłowym t_α, płaszczyzny α. Płaszczyzna, przechodząca przez proste n i e, jest prostopadłą do tła; jej śladami są proste t_β i z_β.

Kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny β sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu $O^\times$. Koło zakreślone z punktu Z_α^{90}, jako środka, promieniem $\overline{Z_\alpha^{90} O^\times}$, jest kołem mierzenia dla kierunku, określonego śladem Z_α^{90} i przecina ślad z_β w punkcie mierzenia M^{90}. Z punktu tego rzucimy punkt P_s na ślad t_β, odmierzymy $\overline{P^m Q^m}$, równe długości krawędzi sześcianu i punkt Q^m połączymy z M^{90}. Na prostej n_s otrzymamy punkt Q_s, który łączymy ze śladem zbiegu Z_2. Promień $Z_2 - Q_s$ przecina proste $1_s - Z_\alpha^{90}$ i $4_s - Z_\alpha^{90}$ w punktach I_s i IV_s, stanowiących perspektywę dwóch wierzchołków sześcianu. Promienie $I_s - Z_1$ i $IV_s - Z_1$ przetną proste $2_s - Z_\alpha^{90}$ i $3_s - Z_\alpha^{90}$ w punktach II_s i III_s, które leżą na prostej, przechodzącej przez punkt Z_2.

Przy założeniu, że korzystanie z punktu Z_α^{90} nie jest możliwe, znajdziemy punkt mierzenia M^{90} w sposób następujący: równolegle do z_β poprowadzimy prostą, która przetnie prostą $O^\times - Z_\alpha^{90}$ w punkcie Z^1. Łuk koła, zakreślony z punktu Z^1 promieniem $Z^1 - O^\times$, przetnie ową równoległą do z_β w punkcie M^1. Promień $O^\times - M^1$ przecina prostą z_β w punkcie M^{90}, trójkąty bowiem $O^\times M^1 Z^1$ i $O^\times M^{90} Z_\alpha^{90}$ są podobne.



Rozdział II.

Zasady płaskiej perspektywy stosowanej.

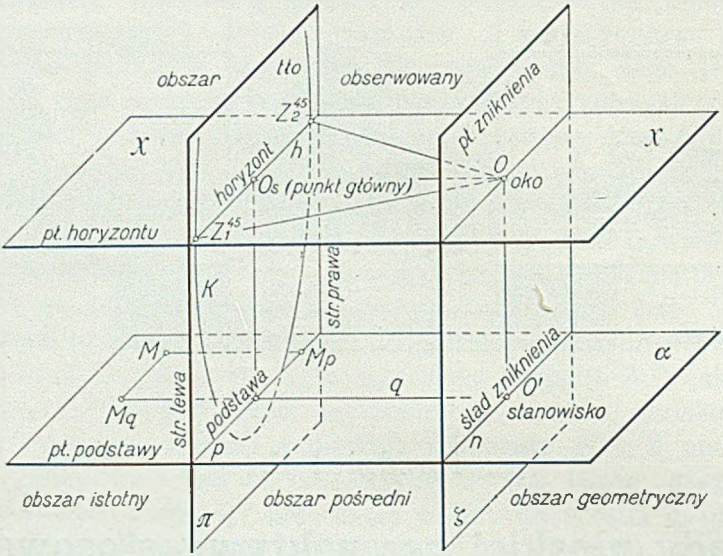
17. Określenia i założenia. Z ogólnych rozważań nad odwzorowaniem perspektywicznem na płaszczyźnie, które w historycznym rozwoju stały się punktem wyjścia cennych dociekań teoretycznych i podstawą nowych dyscyplin matematycznych — wyodrębnić się da pewna kategorja zadań, stanowiących przedmiot praktycznego zainteresowania się architekta i malarza. Całą tę dziedzinę zadań perspektywicznych, mieszczącą się jako szczegóły w ogólnej teorji perspektywy, określamy nazwą *perspektywy stosowanej.*

Obejmuje ona wszystkie praktycznie ważne konstrukcje, a więc i te, które liczą się z koniecznością otrzymywania obrazów perspektywicznych na ściśle, pod względem wymiarów, ograniczonej płaszczyźnie rysunku.

Płaszczyzna rysunku, *tło*, ma w perspektywie stosowanej zazwyczaj położenie pionowe (rys. 63), pokrywając się z położeniem obrazów, umieszczanych przeważnie na pionowych ścianach wnętrz. Tło pionowe nie jest jednak regułą; w malowidłach sufitowych np. ma ono położenie poziome, co zresztą nie wpływa w żadnym stopniu na zmianę metod konstrukcyjnych. O ile tego w poszczególnych wypadkach wyraźnie nie zaznaczymy, to, mówiąc o tle, mieć będziemy zawsze na myśli jego położenie pionowe.

Środek rzutu, czyli *oko,* umieszczone jest z reguły przed tłem. Promień, poprowadzony z oka prostopadle do tła, nazywa się *promieniem*

Rysunek prof. Tadeusza Obmińskiego.



Rys. 63.

głównym, a punkt przebicia się tego promienia z tłem — *punktem głównym* (ust. 2, str. 2). Odcinek $\overline{OO_s}$ wyraża oddalenie oka od tła, czyli t. zw. *głębokość tłową.*

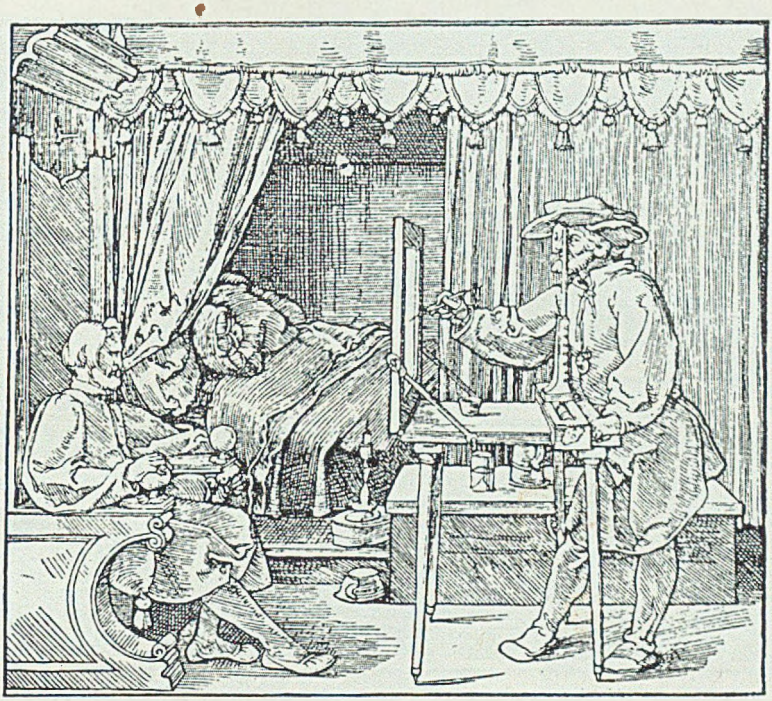
Pozioma płaszczyzna α, wyobrażająca w perspektywie stosowanej płaszczyznę terenu, podłogi, sufitu lub zwierciadła wody, nosi nazwę *płaszczyzny podstawy.* Linję p, wzdłuż której płaszczyzna ta przecina tło, nazywać będziemy *linją przyziemną, linją podstawy* lub krótko *podstawą.*

Jeżeli poszczególne punkty przedmiotu, leżącego za tłem, połączymy promieniami widzenia z okiem, to punkty przebicia się tych promieni z tłem utworzą na nim perspektywiczny obraz danego przedmiotu.

Jako ilustracje tego sposobu otrzymywania perspektyw, posłużyć mogą drzeworyty Albrechta Dürera (1471—1528), reprodukowane tu jako rys. 64, 65, 66. Na każdym z nich widzimy pionową płaszczyznę tła i ustalone wobec niego, zapomocą pionowego pręta z otworem, oko.

W rys. 64 uzmysłowione jest powstanie perspektywy postaci siedzącej, jako miejsce geometryczne punktów przebicia się promieni widzenia ze szklaną taflą, stanowiącą tło.

Rys. 65 podaje tę samą metodę, tylko otrzymane perspektywy punktów przenoszone są na papier za pośrednictwem spółrzędnych. Nitka, łącząca pewien punkt lutni z okiem, które przyjęte jest na prawej ścianie pokoju, przebija płaszczyznę ramy, stanowiącej tło, w pewnym punkcie. Rysownik odmierza oddalenie tego punktu od jednej kra-



Rys. 64. A. Dürer: Rysowanie postaci siedzącej.

wędzi pionowej ramy i od jednej krawędzi poziomej i spółrzędne te przenosi na zaznaczony na rycinie arkusz rysunkowy. Tym sposobem odtwarza on, punkt po punkcie, rysowany przedmiot i punkty te następnie łączy.

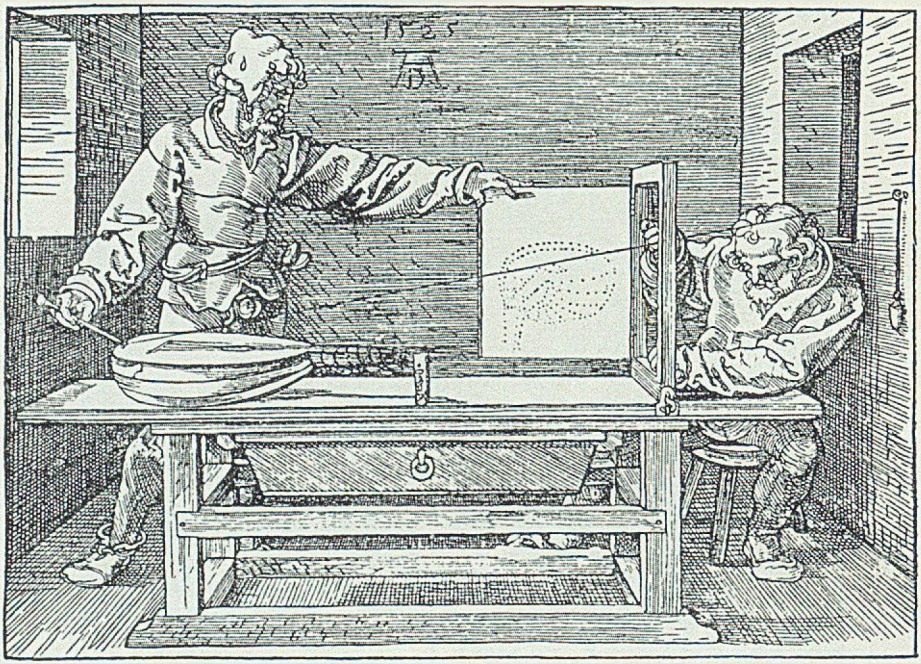
Jeszcze inaczej radzi sobie rysownik przedstawiony na rys. 66. Na pionowej szklanej płaszczyźnie tła wyrysował on kwadratowe pola. Taki sam co do powierzchni i w ten sam sposób, jak tafla szklana, pokratkowany papier umieścił przed sobą na stole. Patrząc przez otwór pionowego pręta, ustalającego położenie oka, widzi rysownik punkt odtwarzanego przedmiotu w polu jednego z kwadratów. Oddalenie tego punktu od boków kwadratu ocenia okiem i przenosi je następnie w odpowiedni kwadrat na papierze.

Wróćmy do rys. 63.

Pozioma – a więc równoległa do płaszczyzny podstawy – płaszczyzna χ, poprowadzona przez oko, nosi nazwę *płaszczyzny horyzontu*. Przecina ona tło wzdłuż prostej h, zwanej linją horyzontu lub krótko *horyzontem*. Horyzont przechodzi przez punkt główny O_0 i jest równoległy do podstawy.

Płaszczyzna horyzontu jest płaszczyzną zbiegu, a horyzont śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn poziomych (ust. 4, str. 9).

Rzut prostokątny O' oka na płaszczyznę podstawy nazywać będziemy stanowiskiem. Płaszczyzna ζ, poprowadzona przez oko równolegle do



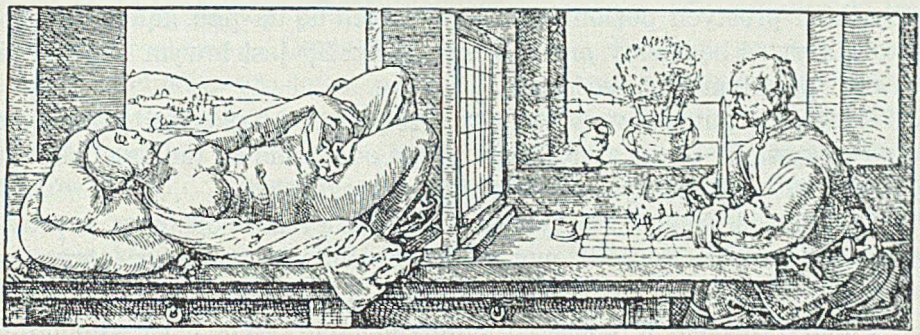
Rys. 65. A. Dürer: Rysowanie lutni.

tła, zwana *płaszczyzną zniknienia* (ust. 4, str. 8), przecina płaszczyznę podstawy wzdłuż prostej *n*, która nosi nazwę *śladu zniknienia*.

Odległość horyzontu od linji podstawy, równa oddaleniu oka od płaszczyzny podstawy i równa odcinkowi $\overline{OO'}$, nazywa się *wysokością horyzontu*.

Tło i płaszczyzna zniknienia dzielą przestrzeń na trzy obszary: obszar geometryczny, obszar pośredni i obszar istotny. Pierwszy leży przed płaszczyzną zniknienia, drugi zawarty jest między płaszczyzną zniknienia i tłem, a obszar istotny rozciąga się za tłem. Obszary istotny i pośredni tworzą łącznie obserwowany obszar przestrzeni.

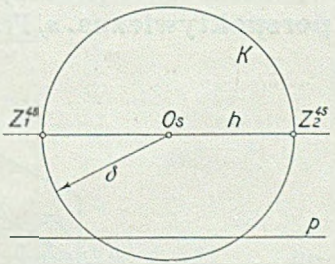
Pionowa płaszczyzna, przechodząca przez oko i prostopadła do tła, przechodzi przez główny punkt O_s i stanowisko O' i zwie się główną płaszczyzną pionu. Dzieli ona przestrzeń na dwie części: lewą i prawą, albo, jak się też często wyrażamy, na obszar po lewej, względnie prawej stronie horyzontu. Linja przecięcia się głównej płaszczyzny pionu z tłem nazywa się główną linją pionu. Prosta *q*, wzdłuż której główna płaszczyzna pionu przecina płaszczyznę podstawy, dzieli tę ostatnią na część lewą, znajdującą się po lewej ręce obserwatora, umieszczonego wzdłuż prostej $O - O'$, a zwróconego twarzą ku tłu, i na część prawą.



Rys. 66. A. Dürer: Rysowanie postaci leżącej.

Z rys. 63 widzimy, że w odniesieniu do danego tła i oka położenie płaszczyzny podstawy jest wyznaczone linją podstawy p, równoległą do horyzontu h. Płaszczyzna ta przejdzie mianowicie przez podstawę p, równolegle do płaszczyzny horyzontu, którą poprowadzimy poprzednio poziomo przez oko.

Koło K, zakreślone na tle z punktu głównego O_s, jako środka, promieniem $\overline{OO_s} = \delta$, równym głębokości tłowej, nazwane w ust. 2, str. 3 *kołem głębokości*, przecięte jest horyzontem w punktach Z_1^{45} i Z_2^{45}. Punkty te nazywać będziemy *punktami głębokości*.



Rys. 67.

Jeżeli płaszczyzna tej karty będzie uważana za tło, a przyjęty na niej punkt O_s (rys. 67) za punkt główny — to linja pozioma h, poprowadzona przez punkt O_s, będzie horyzontem. Prosta p, wykreślona równolegle do horyzontu, w odległości równej przyjętej wysokości horyzontu, jest linją podstawy.

Koniecznym warunkiem, umożliwiającym otrzymanie określonych, t. j. jednoznacznych obrazów perspektywicznych, jest ustalenie położenia oka względem tła. Prócz punktu głównego O_s, który określa położenie promienia głównego, przechodzącego przez ten punkt prostopadle do tła, potrzebna jest jeszcze znajomość głębokości tłowej. Przypuśćmy, że głębokość tę znamy, jako odcinek δ, to w takim wypadku oko znajduje się nad płaszczyzną karty, w odległości δ na prostopadłej, poprowadzonej w punkcie głównym O_s. Rolę odcinka δ spełni koło oddalenia, zakreślone z punktu O_s promieniem równym temu odcinkowi. Punkty Z_1^{45} i Z_2^{45} są punktami oddalenia.

Z rozważań ust. 3 wynika, że punkty głębokości — odgrywają one w perspektywie stosowanej szczególnie ważną rolę — są śladami zbiegu

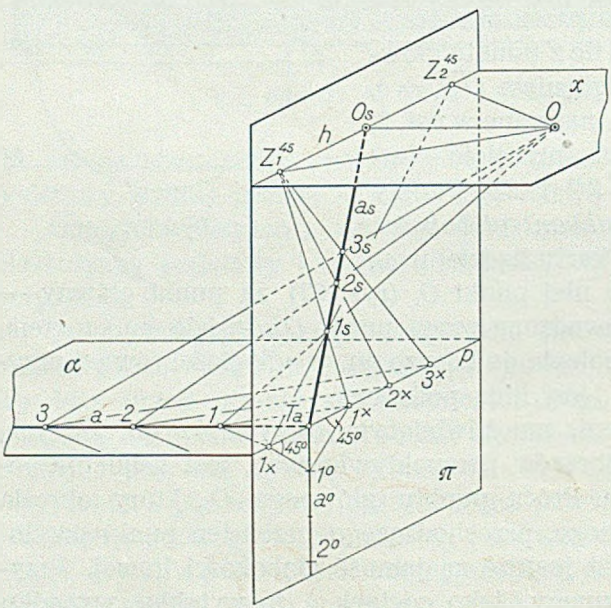
wszystkich prostych poziomych, nachylonych do tła pod kątem 45°. Proste te nazywać będziemy *przekątnemi*. Punkt Z_1^{45} jest lewym a punkt Z_2^{45} prawym punktem głębokości [1]).

Oddalenie punktu, przyjętego w przestrzeni, od głównej płaszczyzny pionu nazywamy jego „szerokością", jego oddalenie od tła „głębokością" a odległość od płaszczyzny podstawy „wysokością".

Z punktu M (rys. 63), przyjętego na płaszczyźnie podstawy, poprowadzimy prostopadłą do podstawy p i także linję do prostej q; otrzymany odcinek $\overline{MM_q}$ jest „szerokością" a odcinek $\overline{MM_p}$ „głębokością" punktu M.

Punkty, leżące w obszarze istotnym, mają głębokości „dodatnie", wszystkie inne „ujemne". Szerokości punktów, leżących po prawej stronie horyzontu, określamy jako dodatnie; punkty leżące po lewej stronie horyzontu mają szerokości ujemne. Wysokości punktów, znajdujących się nad płaszczyzną podstawy, są „dodatnie", wobec czego punkty, należące do obszaru pod płaszczyzną podstawy, posiadają wysokość „ujemną".

18. Proste prostopadłe do tła. Proste przekątne. Podziałka perspektywiczna. *a)* Przyjmijmy na płaszczyźnie podstawy prostą a, prostopadłą do tła (rys. 68), a na niej szereg punktów *1*, *2*, *3*, ..., w równych od siebie odstępach, stanowiących podziałkę.

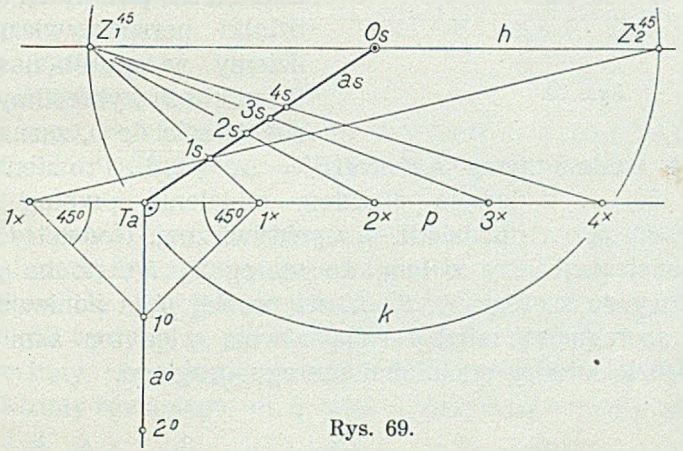


Rys. 68.

Prosta a przebija tło w punkcie T_a, który jest jej śladem tłowym; śladem zbiegu tej prostej jest punkt główny (ust. 3, str. 5). Prosta a_s, łącząca punkt T_a z punktem głównym O_s, jest perspektywą prostej a. Promienie, łączące punkty *1*, *2*, *3*, ... prostej a z okiem, przecinają prostą a_s w szeregu punktów 1_s, 2_s, 3_s, ..., które

[1]) Najwłaściwszem byłoby oznaczanie punktów głębokości symbolami G_1 i G_2. Aby jednak stale przypominać czytelnikowi fakt, że punkty te są śladami zbiegu poziomych prostych, nachylonych do tła pod kątem 45° (prostych przekątnych), poświęciliśmy racjonalność takiego oznaczania na rzecz dydaktyki i stosujemy w większości rysunków znaki Z_1^{45} i Z_2^{45}.

stanowią perspektywę podziałki prostej *a*, czyli t. zw. podziałkę perspektywiczną. Odcinki $T_a 1_s$, $1_s 2_s$, ..., które są perspektywami równych odcinków prostej *a*, nazywać będziemy perspektywicznie równemi. Proste poprowadzone przez punkty podziału *1*, *2*, ... prostej *a*, pod $\sphericalangle 45^0$ do linji podstawy *p (proste przekątne)*, przecinają ją w szeregu punktów $1^\times$, $2^\times$, ... przystającym do szeregu na prostej *a*. Przekątne te posiadają wspólny ślad zbiegu, którym jest lewy punkt głębokości Z_1^{45}. Ich perspektywą jest więc pęk promieni o wierzchołku Z_1^{45}, którego ele-



Rys. 69.

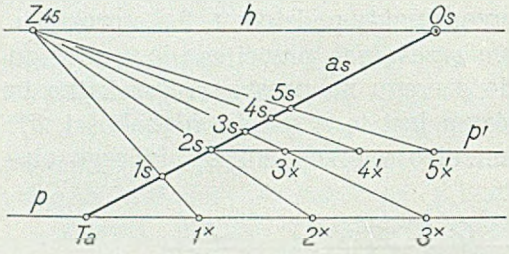
menty przechodzą przez ślady tłowe $1^\times$, $2^\times$, ... i punkty 1_s, 2_s, ... podziałki perspektywicznej. Drugi pęk równoległych promieni, dający się poprowadzić przez punkty *1*, *2*, ... pod $\sphericalangle 45^0$ do podstawy *p*, wyznaczy na niej szereg punktów $1_\times$, $2_\times$, ..., które, połączone z drugim, prawym, punktem głębokości Z_2^{45}, dadzą nam pęk promieni. Elementy tego pęku przechodzą przez punkty 1_s, 2_s, ... podziałki perspektywicznej.

Sprowadźmy płaszczyznę α wraz z prostą *a* zapomocą obrotu około prostej *p* na tło, czyli wykonajmy kład płaszczyzny α. Prosta *a* zajmie położenie prostej a^0 (rys. 69), prostopadłej do *p*. Szeregi punktów 1^0, 2^0, ..., $1^\times$, $2^\times$, ..., $1_\times$, $2_\times$, ... i *1*, *2*, ... są przystające Drugi z tych szeregów, połączony z lewym punktem głębokości Z_1^{45}, wyznaczy na prostej a_s podziałkę perspektywiczną, którą otrzymać także można, łącząc elementy szeregu $1_\times$, $2_\times$, ..., biegnącego na lewo od śladu tłowego T_a, z prawym punktem głębokości.

Rozumowanie powyższe, poparte poglądowym rysunkiem 68, pozwala nam rozumieć bez dalszych wyjaśnień rys. 69.

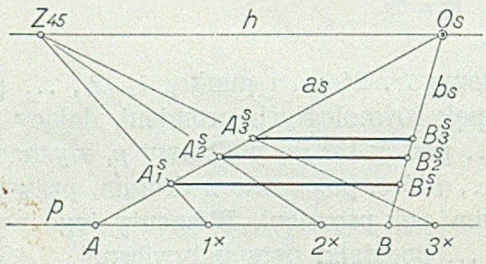
Oczywiście, że tym sposobem rozwiązane zostało i zadanie odwrotne, t. j. wyznaczenie prawdziwej długości odcinka prostej *a* prostopadłej do tła, którego perspektywa a_s jest dana. Jeżeli bowiem punkty

końcowe perspektywy odcinka np. 1_s i 3_s (rys. 69) rzucimy z punktu oddalenia np. Z_1^{45} na podstawę p, to otrzymany tam odcinek $\overline{1^\times 3^\times}$ wyraża prawdziwą długość odcinka $\overline{1, 3}$.

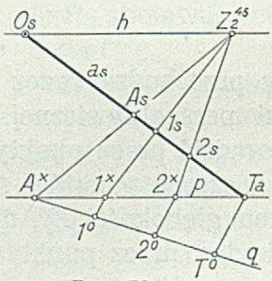


Rys. 70.

b) Przypuśćmy, że ograniczona płaszczyzna rysunkowa nie pozwala na przedłużenie, na prostej p, szeregu punktów $1^\times, 2^\times, 3^\times$ poza punkt $3^\times$ (rys. 70) — to wówczas dalsze punkty $4_\times, 5_\times, \ldots$ podziałki perspektywicznej znajdziemy w sposób następujący: Z punktu 2_s wykreślimy prostą p' równoległą do p, zaznaczymy na niej punkt $3'_\times$ i odmierzymy $\overline{3'_\times 4'_\times} = \overline{4'_\times 5'_\times} = \ldots = \overline{2_s 3'_\times}$. Promienie łączące punkty $4'_\times, 5'_\times, \ldots$ z lewym punktem oddalenia przetną prostą a_s w punktach $4_s, 5_s, \ldots$ podziałki perspektywicznej. Geometryczne uzasadnienie konstrukcji leży w tem, że szereg $2^\times, 3^\times, \ldots$ na prostej p, jest podobny do szeregu $2_s, 3'_\times, \ldots$ na prostej p', a ponieważ odcinki pierwszego szeregu są między sobą równe, więc ten sam stosunek zachodzić będzie między odcinkami szeregu drugiego.



Rys. 71.

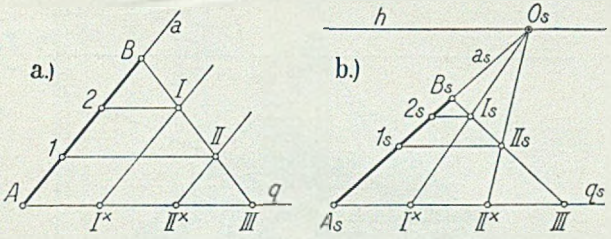


Rys. 72.

c) Rys. 71 przedstawia perspektywę dwóch prostych prostopadłych do tła, na których znajdują się podziałki perspektywiczne w rzeczywistości przystające. Odcinek $\overline{AB}$ leży na tle i wyraża się wskutek tego w swej prawdziwej długości. W miarę oddalania się odcinka od tła, przy zachowaniu równoległości względem swego pierwotnego położenia, perspektywa jego maleje.

d) Widzimy więc, że punkt głębokości umożliwia narysowanie podziałki perspektywicznej o danej jednostce podziału, ale także i podział danego odcinka w pewnym stosunku lub na pewną ilość części. Jeżeli bowiem zadaniem naszem byłby podział odcinka $A_s T_a$ na trzy perspektywicznie równe części (rys. 72), to punkt A_s rzucimy z punktu

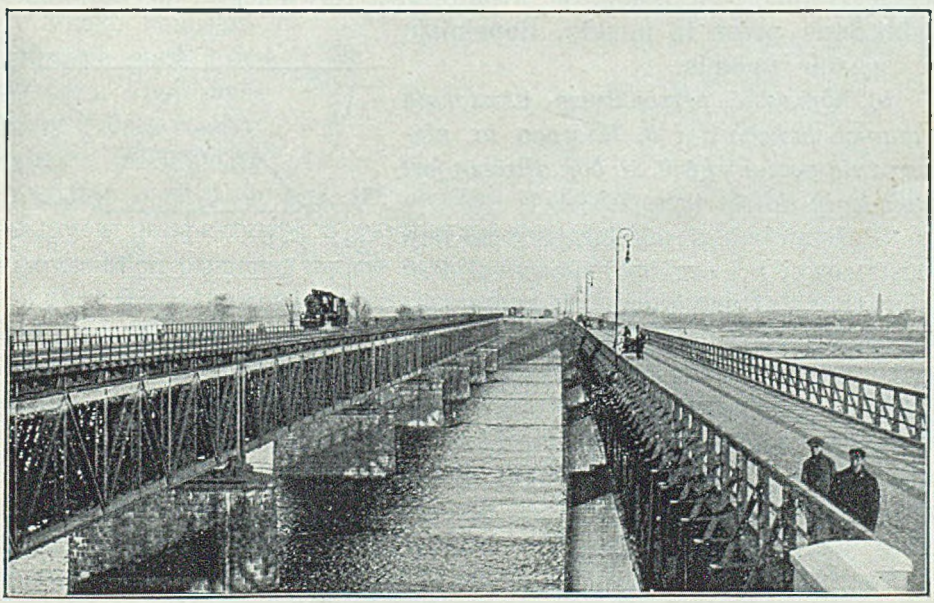
oddalenia na linję podstawy p, przez punkt $A^{\times}$ wykreślimy w dowolnym kierunku prostą q, odmierzymy na niej trzy równe odcinki dowolnej długości, punkt końcowy T^{0} połączymy z punktem T_a, a przez punkty podziału 1^{0} i 2^{0} poprowadzimy równoległe. Rzuty 1_s, 2_s punktów $1^{\times}$ i $2^{\times}$ z punktu Z_2^{45} na prostą a_s rozwiązują zadanie.



Rys. 73 *a*, *b*.

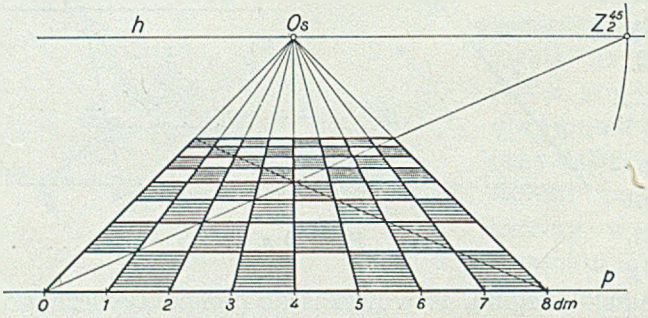
e) Gdy punkt głębokości leży poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, co jest — jak zobaczymy z dalszego ciągu wykładu — regułą, to wówczas do perspektywicznego podziału odcinka zastosujemy konstrukcję planimetryczną, podaną na rys. 73*a*.

Z punktu końcowego A, danego odcinka $\overline{AB}$, wykreślimy prostą q, na której odmierzymy żądaną ilość równych sobie, ale dowolnej długości odcinków. W naszym przykładzie przyjęliśmy trzy odcinki. Końcowy punkt III łączymy z punktem B naszego odcinka, a przez punkty $I^{\times}$ i $II^{\times}$ kreślimy równoległe do $\overline{AB}$. Otrzymamy punkty I i II, przez które prowadzimy równoległe do q, wyznaczające na odcinku $\overline{AB}$ punkty podziału 1 i 2.



Rys. 74.

Jeżeli rysujemy w perspektywie (rys. 73*b*), a odcinek $\overline{AB}$ jest prostopadły do tła, to konstrukcja podziału odcinka $\overline{A_s B_s}$ na trzy perspektywicznie równe części zmieni się, w porównaniu z rys. 73*a*, tylko o tyle, że proste $I^{\times} I$, $II^{\times} II$, ..., jako równoległe, będą miały wspólny ślad zbiegu, którym jest punkt główny O_s.



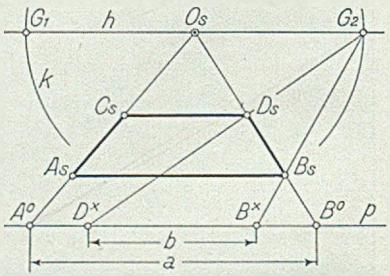
Rys. 75.

Fotogram, oznaczony jako rys. 74, jest przykładem perspektywy wiązki prostych, prostopadłych do tła.

19. Zadania. *a) Wykreślić perspektywę ornamentu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, złożonego z 64 pól kwadratowych; bok kwadratu wynosi 1 dm* (rys. 75).

Na linji podstawy *p* odmierzymy 8 *dm* w żądanej podziałce rysunku i połączymy punkty *0*, *1*, *2*, ... z punktem głównym. Prosta, łącząca punkt *0* z punktem Z_2^{45}, jest perspektywą przekątnej wszystkich kwadratów i przecina poprzednio wykreślone proste w punktach, będących perspektywami wierzchołków kwadratów. Równoległe do horyzontu, wykreślone przez te punkty, dopełniają rozwiązania zadania.

b) Wykreślić perspektywę prostokąta o danych bokach a i b, leżącego na płaszczyźnie poziomej tak, że bok dłuższy jest równoległy do tła (rys. 76).

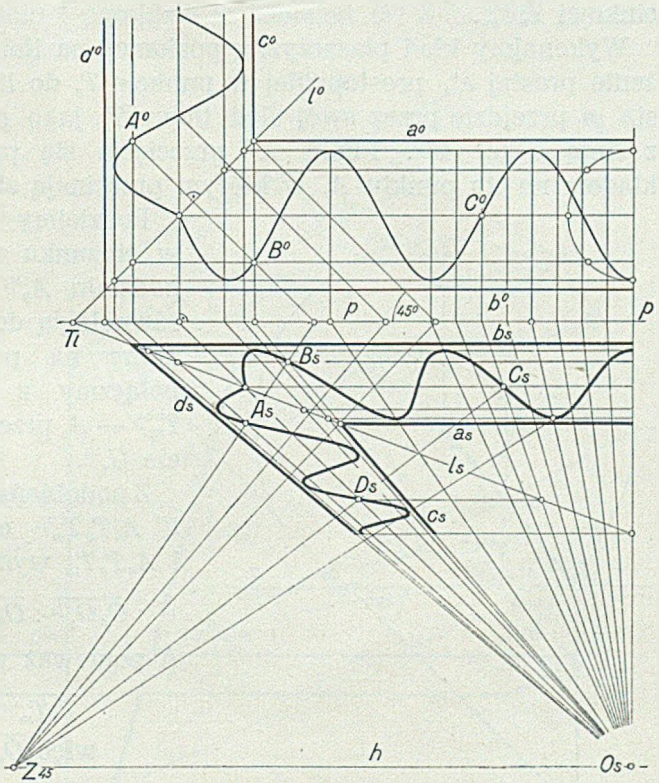


Rys. 76.

Dłuższy bok *a* odmierzymy na linji podstawowej *p* i punkty końcowe A^0 i B^0 połączymy z punktem głównym O_s. Na prostej $A^0 O_s$ przyjmiemy dowolnie punkt A_s, który uważać będziemy za perspektywę jednego wierzchołka prostokąta i wykreślimy prostą równoległą do horyzontu, otrzymując na prostej $B^0 O_s$ obraz B_s, wierzchołka *B* prostokąta. Punkt B_s rzucimy z punktu oddalenia G_2 na podstawę i odmierzymy $\overline{B^{\times} D^{\times}} = b$. Prosta $D^{\times} - G_2$ przetnie prostą $B^0 - O_s$ w punkcie D_s, który jest obrazem trzeciego wierzchołka prostokąta. Równoległa do *p*, wykreślona z punktu D_s, wyznacza na $A^0 - O_s$ punkt C_s, dopełniający rozwiązania zadania. Trapez $A_s B_s C_s D_s$ jest perspektywą danego prostokąta.

Wymiary równoległe do linji podstawy nazwaliśmy „szerokościami“, a wymiary prostopadłe do nich, a więc prostopadłe do tła, „głębokościami“ (ust. 17, str. 44). Z rys. 68 i 76 widzimy, że punkt główny umożliwia odmierzanie „szerokości“ a punkty oddalenia — „głębokości“.

c) Wykreślić perspektywę ornamentu krzywolinijnego, leżącego na płaszczyźnie sufitu. Kład tej płaszczyzny wraz z ornamentem na tło, horyzont *h*, podstawa *p* (linja przecięcia się płaszczyzny sufitu z tłem), punkt główny O_s i lewy punkt oddalenia Z_{45} są dane (rys. 77).



Rys. 77.

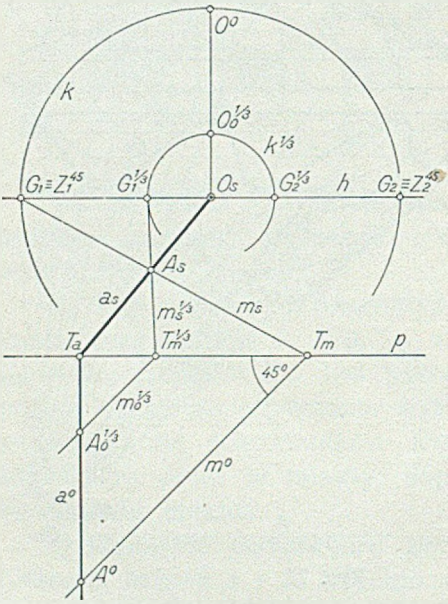
Przez charakterystyczne punkty ornamentu, poprowadzimy proste równoległe, prostopadłe względnie nachylone pod 45° do linji podstawy. Tę siatkę linij znajdziemy w perspektywie, a miejsce geometryczne punktów przecięcia się odpowiednich promieni będzie rozwiązaniem zadania.

20. Konstrukcyjne zastosowanie części głębokości tłowej. *a)* W praktycznych rysunkach perspektywicznych zniewoleni jesteśmy — z przyczyn, o których mówić będziemy w Tomie drugim — do przyjmowania tak wielkich głębokości tłowych, że koło, a więc i punkty głębokości, leżą z reguły poza obszarem rysunku. W następstwie tego posługiwać się musimy zawsze konstrukcjami, które uwzględniają możność użycia tylko części danej głębokości tłowej.

Weźmy pod uwagę perspektywę a_s prostej *a*, prostopadłej do tła i leżącej na płaszczyźnie poziomej (rys. 78), i odetnijmy na niej — od śladu tłowego T_a począwszy — dany odcinek. Odcinek ten odmierzymy

na linji podstawy p i punkt końcowy T_m połączymy z punktem głębokości G_1 prostą m_s. Prosta ta przetnie prostą a_s w punkcie A_s. Odcinek $\overline{T_a A_s}$ jest perspektywą odcinka, którego długość równa się odcinkowi $\overline{T_a T_m}$.

Wykonajmy kład płaszczyzny poziomej na tło. Prosta a zajmie położenie prostej a^0, prostopadłej w punkcie T_a do linji podstawy, zaś prosta m przejdzie przez swój ślad tłowy T_m jako prosta m^0, zawierająca z linją p kąt 45°. Punkt A^0 przecięcia się prostych a^0 i m^0 będzie kładem na tło punktu A, w którym przecinają się proste a i m.



Rys. 78.

Podzielmy odcinek $\overline{T_a A^0} = \overline{T_a T_m}$ w stosunku np. 1 : 3 i przez punkt podziału $A_0^{1/3}$ poprowadźmy prostą równoległą do prostej $\overline{A^0 T_m}$. Otrzymany na prostej p punkt $T_m^{1/3}$ połączmy z punktem A_s. Prosta $T_m^{1/3} - A_s$ przecina horyzont w punkcie $G_1^{1/3}$.

Z podobieństwa trójkątów $A_s O_s G_1^{1/3}$ i $A_s T_a T_m^{1/3}$ oraz trójkątów $A_s O_s G_1$ i $A_s T_a T_m$ wynika, że

$$\overline{O_s G_1^{1/3}} : \overline{O_s G_1} = \overline{T_a T_m^{1/3}} : \overline{T_a T_m}.$$

A ponieważ według założenia:

$$\overline{T_a T_m^{1/3}} : \overline{T_a T_m} = 1 : 3,$$

$$\text{więc } \overline{O_s G_1^{1/3}} = \tfrac{1}{3} (O_s G_1).$$

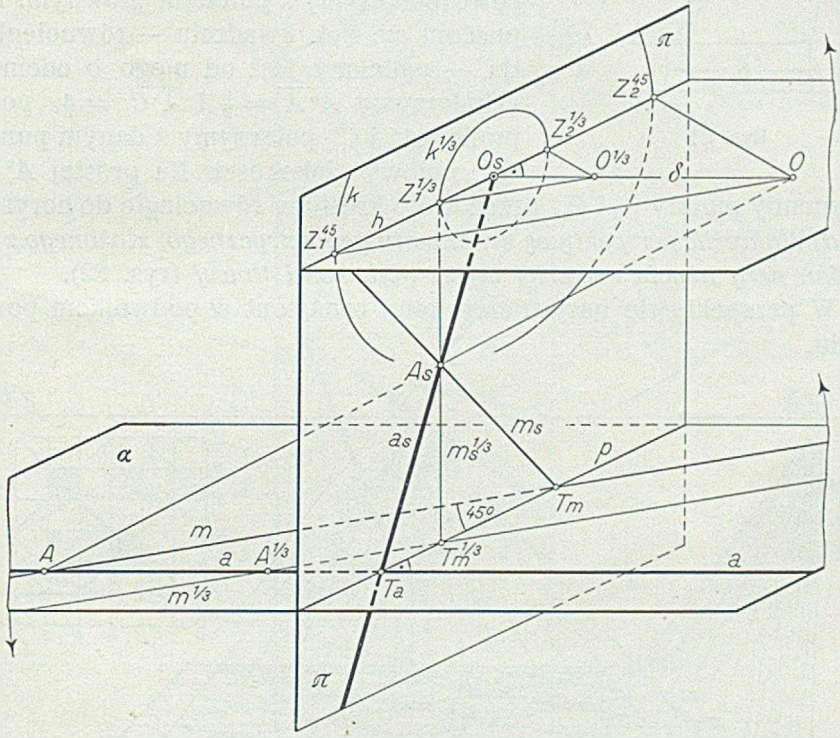
Ponieważ odcinek $\overline{O_s G_1}$ równy jest głębokości tłowej δ, więc odcinek $\overline{O_s G_1^{1/3}}$ jest trzecią częścią tej głębokości. Punkt $G_1^{1/3}$ dzieli więc głębokość tłową, odmierzoną od punktu głównego na horyzoncie, w tym samym stosunku, w jakim punkt $T_m^{1/3}$, głębokość punktu A, t. j. jego odległość od tła.

Punkt $G_1^{1/3}$, względnie $G_2^{1/3}$ — ogólnie punkt $G^{m/n}$ — leżący na horyzoncie, nazywać będziemy *punktem częściowej* (ułamkowej) *głębokości tłowej*. Koło $k^{1/3}$, współśrodkowe z kołem k, jest kołem częściowej (ułamkowej) głębokości.

Z powyższego widzimy, że zamiast punktu głębokości użyć możemy zawsze punktu częściowej głębokości, jeżeli równocześnie zmniejszymy, w tym samym stosunku, co głębokość tłową, głębokości punktów.

Rekonstrukcję przestrzenną rys. 78 uzmysławia rys. 79.

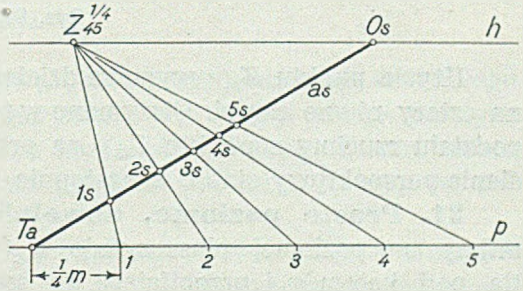
Oko O zbliżyliśmy do tła π o $^2/_3\ \delta$, oznaczając to jego nowe położenie przez $O^{1/3}$. Promień zbiegu OZ_1^{45} prostej m, nachylonej do tła pod kątem 45°, a leżącej na płaszczyźnie poziomej α — przesunie się równolegle do swego położenia i przejdzie w promień $O^{1/3}Z_1^{1/3}$. Koło głębokości k przejdzie w koło $k^{1/3}$.



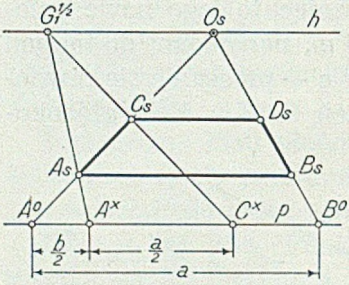
Rys. 79.

b) Wyznaczyć na prostej a, prostopadłej do tła, podziałkę perspektywiczną, której jednostką jest odcinek m. Obszar rysunkowy dopuszcza użycie czwartej części danej głębokości tłowej (rys. 80).

Na linji podstawy p odmierzymy pięć odcinków, równych czwartej części odcinka m i punkty końcowe $1, 2, \ldots$ rzucimy z punktu częściowej głębokości $Z_{45}^{1/4}$ na prostą a_s. Punkty $1_s, 2_s, \ldots$ są punktami podziałki perspektywicznej; odcinki $\overline{T_a 1_s}$, $\overline{1_s 2_s}$, $\overline{2_s 3_s}$, ... są perspektywicznie równe.



Rys. 80.



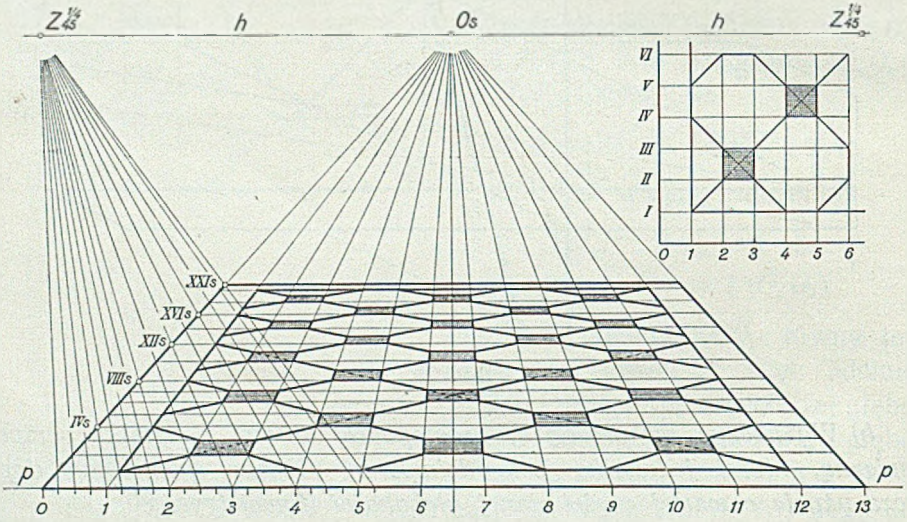
Rys. 81.

c) Wykreślić perspektywę kwadratu, o danym boku a, przy użyciu połowy głębokości tłowej (rys. 81).

Bok *a* kwadratu odmierzymy na podstawie *p*, jako odcinek $\overline{A^0 B^0}$ i punkty końcowe połączymy z punktem głównym. Przypuśćmy, że bok kwadratu — równoległy do tła — oddalony jest od niego o odcinek *b*. Odmierzymy $\overline{A^0 A^x} = \frac{b}{2}$ i $\overline{A^x C^x} = \frac{a}{2}$, poczem punkty A^x i C^x połączymy z danym punktem $G_1^{1/2}$ połowy głębokości. Na prostej $A^0 - O_s$ otrzymamy punkty A_s i C_s, przez które kreślimy równoległe do horyzontu.

d) Wykreślić perspektywę ornamentu geometrycznego, złożonego z kwadratów, przy użyciu czwartej części głębokości tłowej (rys. 82).

W perspektywie narysujemy dany ornament w podwójnem powiększeniu.

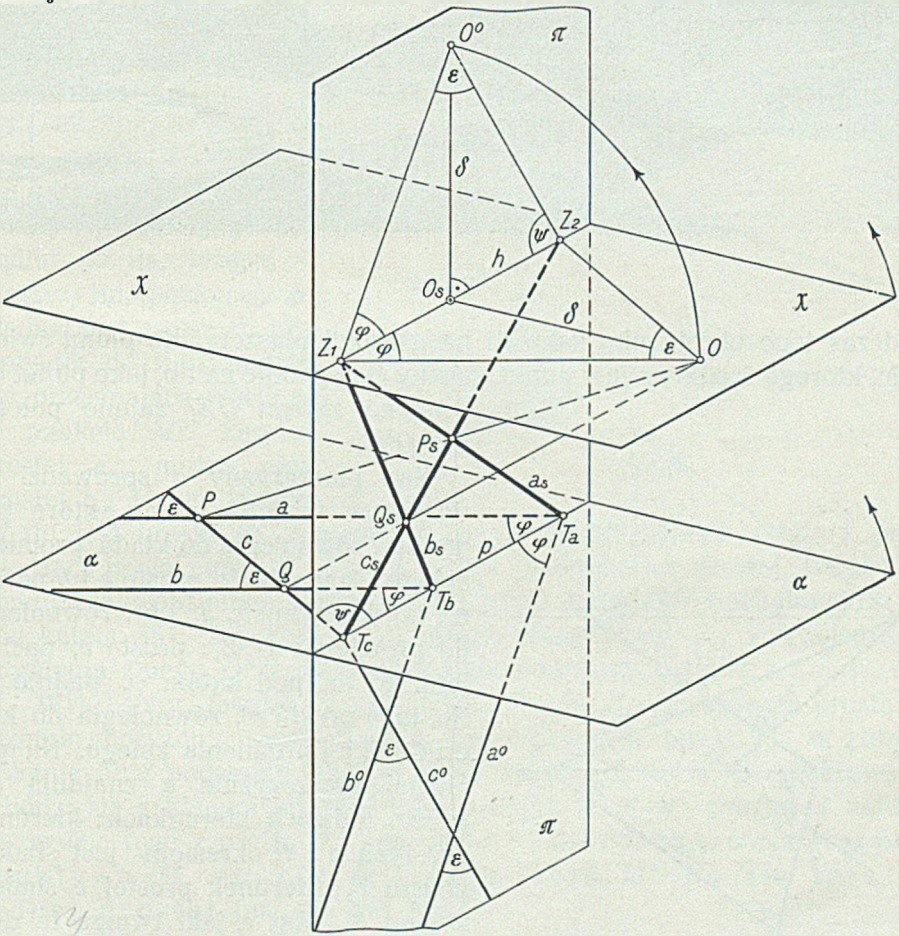


Rys. 82.

Użycie punktu $Z_{45}^{1/4}$ wymaga dzielenia każdego boku kwadratu siatki na cztery równe części. Otrzymane w ten sposób na podstawie *p* punkty podziału rzucimy z punktu $Z_{45}^{1/4}$ na prostą $O - O_s$, co umożliwi wykreślenie perspektywy siatki, a następnie perspektywy ornamentu.

21. Proste poziome, dowolnie nachylone do tła. *a)* Przyjmijmy na poziomej płaszczyźnie α (rys. 83) prostą *a*, nachyloną do tła pod kątem φ i przebijającą go w punkcie T_a. Promień, poprowadzony przez oko równolegle do prostej *a*, przebija tło w punkcie Z_1

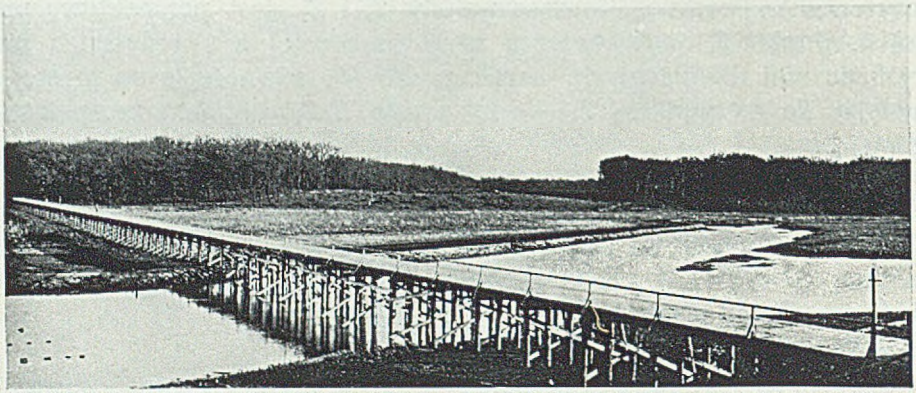
horyzontu h. Prosta a_s, łącząca punkty T_a i Z_1, jest perspektywą prostej a. Punkt Z_1 jest śladem zbiegu prostej a i wszystkich prostych do niej równoległych. Jeżeli prosta b, równoległa do prostej a, przebija tło w punkcie T_b — to prosta $T_b Z_1 \equiv b_s$ jest perspektywą prostej b.



Rys. 83.

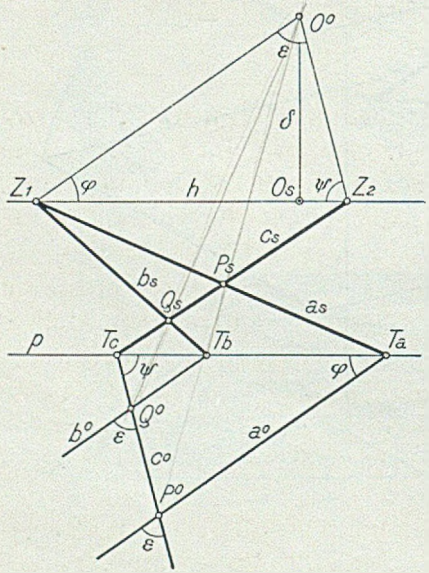
Poziome i równoległe do siebie proste posiadają wspólny ślad zbiegu na horyzoncie. Każdy punkt linji horyzontu jest śladem zbiegu prostych poziomych. Jasna, zwężająca się ku horyzontowi, smuga korony mostu na rys. 84 przedstawia perspektywę prostych poziomych nie prostopadłych do tła.

Obróćmy płaszczyznę α (rys. 83) około linji podstawy p, w kierunku wskazanym strzałką tak, aby padła na tło, czyli wykonajmy jej kład. Podobnie obróćmy i płaszczyznę horyzontu około linji horyzontu na tło.



Rys. 84.

Podczas tego obrotu oko zakreśli na głównej płaszczyźnie pionu ćwierć koła, którego środkiem jest punkt główny O_s, i padnie na tło, jako punkt O^0. Promień zbiegu OZ_1 zajmie położenie O^0Z_1.



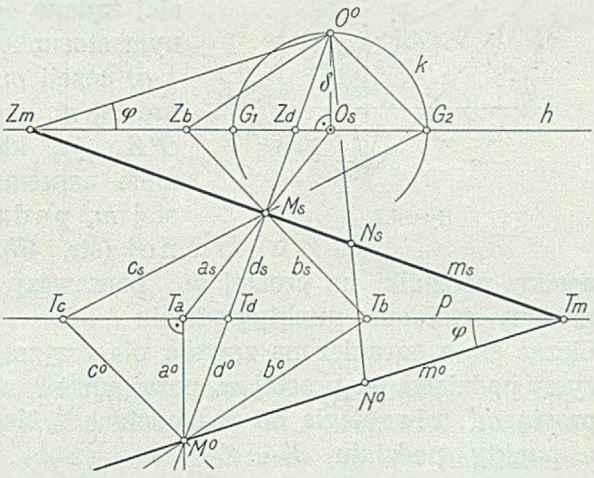
Rys. 85.

Kład płaszczyzny α sprowadzi na tło leżące na niej proste, które pozostaną równoległe do kładu promieni zbiegu. Równoległe proste a i b padną na tło, jako proste a^0 i b^0, równoległe do promienia O^0Z_1; prosta c, nachylona do tła pod kątem ψ, padnie na tło, jako prosta c^0, równoległa do kładu O^0Z_2 jej promienia zbiegu. Na poziomej płaszczyźnie α znajdują się proste o dwóch kierunkach: kierunek prostych a i b określony jest śladem zbiegu Z_1, kierunek prostej c śladem zbiegu Z_2. Kąt ε, jaki tworzą te dwa kierunki, równy jest kątowi, jaki tworzą ich promienie zbiegu. Po sprowadzeniu płaszczyzn α i χ na tło, kąt ε pozostanie niezmieniony i równy kątowi, jaki zawiera prosta c^0 z prostemi a^0 i b^0, względnie promień Z_1O^0 z promieniem Z_2O^0 (porównaj rys. 85 z rys. 83).

b) Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej, wyznaczonej linją podstawy p i linją horyzontu h (rys. 86), prostą m, a na niej punkt M. Perspektywą prostej m jest prosta m_s a punktu M — punkt M_s.

Kład płaszczyzny horyzontu na tło wyrazi się kładem O^0 oka O

i promienia zbiegu O^0Z_m prostej m. Kąt $O^0Z_mO_s = \varphi$ jest równy kątowi, jaki prosta m zawiera z tłem. Prosta m^0, wykreślona ze śladu tłowego T_m, równolegle do promienia zbiegu O^0Z_m, jest kładem prostej m na tło. Kład M^0 punktu M znajdziemy za pośrednictwem dowolnej prostej, przechodzącej przez ten punkt.



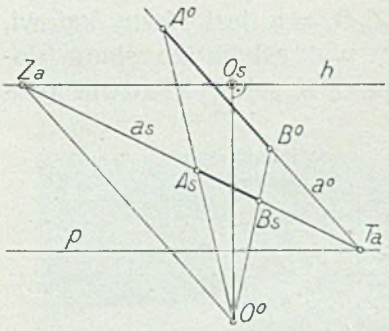
Rys. 86.

Tak np. prosta a_s, łącząca punkt M_s z punktem głównym O_s, jest perspektywą prostej, prostopadłej do tła, leżącej na płaszczyźnie poziomej. Jej kładem jest prosta a^0, prostopadła do linji podstawy, przecinająca prostą m^0 w punkcie M^0. Zamiast prostej a_s, można użyć prostej b_s, której kładem na tło jest prosta b^0, równoległa do promienia zbiegu O^0Z_h i przechodząca przez punkt T_b. Prosta c_s jest perspektywą prostej, leżącej na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez punkt M i nachylonej do tła pod kątem 45°. Jej kład c^0 przejdzie przez punkt T_c, równolegle do promienia zbiegu O^0G_2 tworząc z linją podstawy kąt 45°.

Wykreślmy jeszcze prostą O^0M_s. Punkt Z_d, w którym prosta ta przetnie horyzont, uważajmy za ślad zbiegu, a punkt T_d, w którym przetnie linję podstawy, za ślad tłowy prostej d, której perspektywa d_s schodzi się z kładem jej promienia zbiegu. Kład d^0 prostej d zejdzie się wobec tego z prostą d_s. Tak więc: kład O^0 oka O na tło, perspektywa M_s punktu M i jego kład M^0 na tło leżą na jednej prostej (ust. 13, pkt c).

Jeżeli N_s jest perspektywą drugiego punktu prostej m, ograniczającego wraz z punktem M odcinek $\overline{MN}$, to punkt N^0, w którym promień O^0N_s przecina prostą m^0, ogranicza wraz z punktem M^0 odcinek $\overline{M^0N^0}$, równy prawdziwej długości odcinka $\overline{MN}$, którego perspektywą jest odcinek M_sN_s.

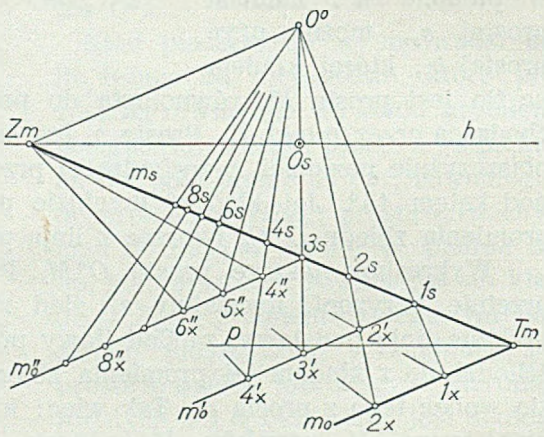
c) Rys. 87 przedstawia kład a^0 prostej a, przyjętej na płaszczyźnie poziomej — dokonany w kierunku odwrotnym, aniżeli w rysunku poprzednim. Płaszczyznę horyzontu obróciliśmy tak, że oko padło pod horyzont, wobec czego część prostej, znajdująca się w obszarze istotnym, padła po kładzie nad linją podstawy.



Rys. 87.

Przy pomocy kładu prostej i własności promieni, które przechodzą przez kład oka, perspektywy punktów tej prostej i ich kłady, odmierzać możemy na prostej żądane odcinki lub dzielić je w danym stosunku.

d) Jeżeli m_s (rys. 88) jest perspektywą prostej m, zaś prosta m_0, równoległa do $O^0 Z_m$, jej kładem na tło — a zadaniem naszem jest wyznaczenie na prostej m_s podziałki perspektywicznej (str. 45) — to odmierzywszy jednostkę podziałki na prostej m_0, począwszy od jej śladu tłowego T_m, rzucimy następnie punkty podziału $1_\times$, $2_\times$, ... z punktu O^0 na prostą m_s. Licząc się z ograniczoną zawsze płaszczyzną rysunkową, nie przedłużymy podziałki na prostej m_0 poza punkt $2_\times$, lecz z punktu 1_s wykreślimy prostą m_0', równoległą do m_0, odcinek $1_s 2_\times'$ przeniesiemy np. dwa razy, a punkty podziału $3_\times'$ i $4_\times'$ rzucimy z punktu O^0 na prostą m_s, otrzymując tam punkty podziału 3_s i 4_s. Gdyby chodziło o przedłużenie podziałki perspektywicznej poza punkt 4_s, to z punktu 3_s wykreślimy znowu prostą m_0'' równoległą do m_0', odmierzymy na niej podziałkę o jednostce $3_s 4_\times''$ i punkty $5_\times''$, $6_\times''$ ... rzucimy z punktu O^0 na prostą m_s.

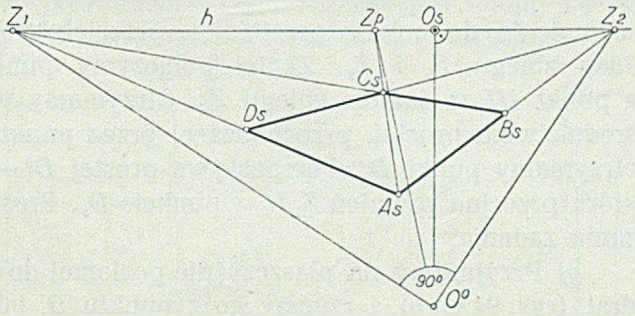


Rys. 88.

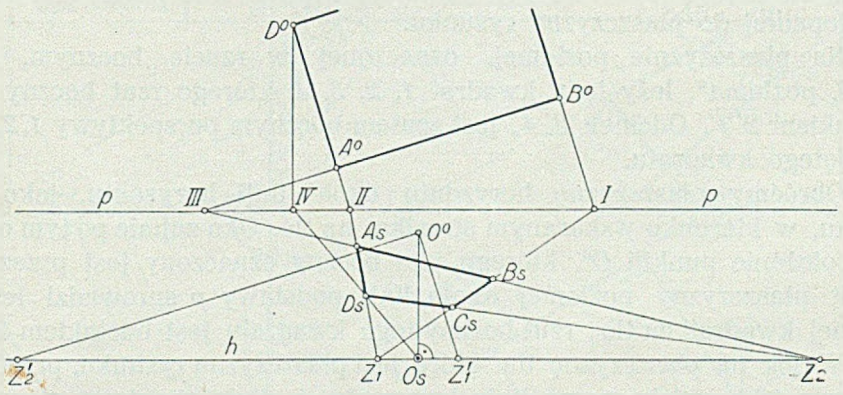
Użycie prostych m_0', m_0'', ... opiera się na założeniu, że punkty 1_s, 3_s, ... stają się śladami tłowemi prostej m, która porusza się równolegle do swego pierwotnego położenia w ten sposób, że jej ślad tłowy T_m zakreśla prostą m_s. Wskutek tego szeregi punktów na równoległych prostych m_0, m_0', m_0'', ... są podobne i podobnie położone, a ich środkiem podobieństwa jest ślad zbiegu Z_m. (Czytelnik winien odtworzyć z rys. 88 sytuację w przestrzeni).

e) Rys. 89 podaje konstrukcję perspektywy kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, którego długość boku nie jest dana. Wykonawszy kład płaszczyzny horyzontu na tło i znalazłszy punkt O^0, przyję-

liśmy ślad zbiegu Z_1, a następnie ślad Z_2 kierunku, prostopadłego do kierunku OZ_1. Kąt $Z_1O^0Z_2$ jest więc kątem prostym. Dwusieczna tego kąta przetnie horyzont w punkcie Z_p, który jest śladem zbiegu prostych, równoległych do dwusiecznej kąta prostego Z_1OZ_2. Punkt ten nazywać będziemy *punktem przekątnym*. Dowolnie przyjęty punkt A_s, uważany za wierzchołek kwadratu, połączymy ze śladami Z_1, Z_2 i Z_p. Punkt B_s, przyjęty na prostej A_sZ_2, uważany za następny wierzchołek kwadratu, połączymy ze śladem Z_1, a otrzymany na prostej A_sZ_p punkt C_s ze śladem Z_2. Trapezoid $A_sB_sC_sD_s$ jest perspektywą kwadratu, którego długość boku nie jest nam znana.



Rys. 89.



Rys. 90.

f) Rys. 90 przedstawia konstrukcję perspektywy prostokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej ponad horyzontem. Kłady płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny poziomej na tło wykonaliśmy w dwóch przeciwnych kierunkach. Oko padło na tło, jako punkt O^0, leżący nad horyzontem, prostokąt, jako prostokąt $A^0B^0C^0D^0$ nad linją podstawy. Promienie, wykreślone z punktu O^0 równolegle do boków tego prostokąta, przetną horyzont w punktach Z_1' i Z_2'. Punkty Z_1 i Z_2, leżące na horyzoncie tak, że:

$$O_sZ_1 = O_sZ_1' \text{ i } O_sZ_2 = O_sZ_2'$$

są śladami zbiegu promieni równoległych do boków prostokąta. Gdyby kład płaszczyzny horyzontu dokonany był w tym samym kierunku, co kład płaszczyzny poziomej, na której znajduje się prostokąt — to wówczas punkt O^0 leżałby pod horyzontem, a promienie wykreślone z niego, równolegle do boków prostokąta, przeciętyby horyzont wprost w śladach zbiegu Z_1 i Z_2. Zkolei połączymy punkty I i II ze śladem Z_1, a punkt III ze śladem zbiegu Z_2. Otrzymamy punkty A_s i B_s. Za pośrednictwem prostej, przechodzącej przez punkt D i prostopadłej do tła, otrzymamy punkt D_s. Perspektywą prostej $D^0 — IV$ jest prosta $IV — O_s$, która przecina promień $Z_1 II$ w punkcie D_s. Prosta $D_s Z_2$ dopełnia rozwiązania zadania.

g) Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej dowolny wielokąt, np. kwadrat (rys. 91 *a* i *b*), i rzućmy go z punktu O, jako środka rzutów (oka), na tło.

Dla uzmysłowienia sobie tej i następnej operacji przedstawiliśmy na rys. 91 *a* sprawę w widoku z boku. Linja pionowa przedstawia tło, punkt O' rzut boczny oka, punkt O'_s rzut boczny punktu głównego; prosta pozioma, przechodząca przez punkty O' i O'_s, jest śladem bocznym płaszczyzny horyzontu a punkt $O'_s \equiv h'$ rzutem bocznym linji horyzontu, prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

Na płaszczyźnie poziomej, oznaczonej w rzucie bocznym, jako „I pł. pozioma", leży tedy kwadrat *1*, *2*, *3*, *4*, którego rzut boczny jest odcinkiem $\overline{2'4'}$. Odcinek $\overline{2'_s 4'_s}$ jest rzutem bocznym perspektywy $1_s 2_s 3_s 4_s$ przyjętego kwadratu.

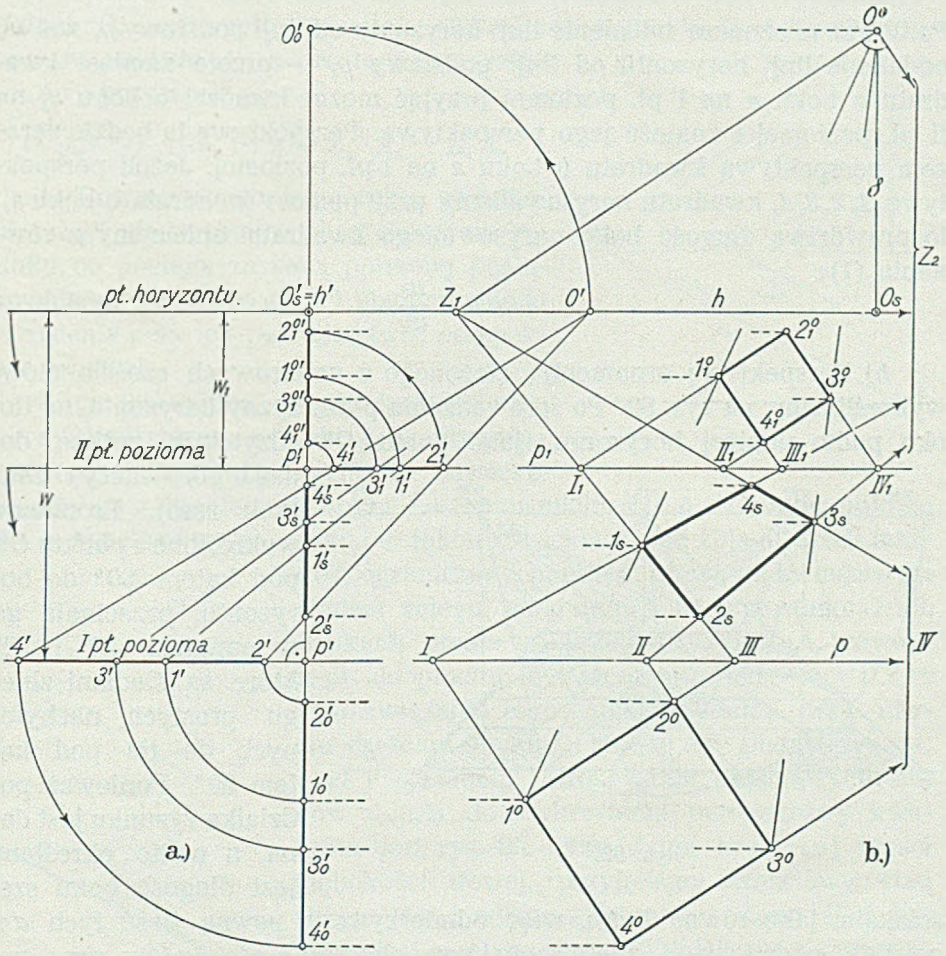
Obróćmy płaszczyznę horyzontu około linji horyzontu, jako osi obrotu, w kierunku wskazanym strzałką, na tło. Oko zajmie po tym obrocie położenie punktu O^0, którego rzut boczny oznaczony jest przez O'_0. Obrót płaszczyzny poziomej około linji podstawy p sprowadzi leżący na niej kwadrat na tło; rzut boczny tego kwadratu jest odcinkiem $\overline{2'_0 4'_0}$.

Widok na płaszczyznę tła, którą jest płaszczyzna rysunku, przedstawia rys. 91 *b*, gdzie mamy linję horyzontu h, linję podstawy p, punkt główny O_s, kład O^0 oka na tło, kład $1^0 2^0 3^0 4^0$ kwadratu i jego perspektywę $1_s 2_s 3_s 4_s$, narysowaną przy pomocy śladów zbiegu Z_1 i Z_2 i śladów tłowych I II III IV.

Czworokąt $1_s 2_s 3_s 4_s$ jest perspektywą nietylko kwadratu *1*, *2*, *3*, *4*, ale także każdego kwadratu, powstałego z przecięcia ostrosłupa o wierzchołku O i podstawie *1*, *2*, *3*, *4* płaszczyzną równoległą do poziomej płaszczyzny podstawy. Poprowadźmy drugą płaszczyznę poziomą, oznaczoną w rzucie bocznym (rys. 91 *a*), jako „II pł. pozioma", i przecinającą wspomniany ostrosłup w kwadracie $1_1 2_1 3_1 4_1$. Obróćmy teraz tę II pł. poziomą około krawędzi p_1, jaką tworzy z tłem, wraz z kwadratem $1_1 2_1 3_1 4_1$ na tło. W widoku zprzodu (rys. 91 *b*) otrzymamy kwadrat $1^0_1 2^0_1 3^0_1 4^0_1$,

którego boki, równoległe do boków kwadratu $1^0 2^0 3^0 4^0$, przecinać będą nową linję podstawy p_1 w punktach $I_1\ II_1\ III_1\ IV_1$.

Wiadomo, że dwa równoległe płaskie przekroje ostrosłupa są wielokątami podobnemi i że powierzchnie tych przekrojów mają się do siebie tak, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka ostrosłupa.



Rys. 91 *a*, *b*.

Oznaczmy powierzchnię kwadratu, leżącego na I pł. poziomej, literą P, powierzchnię kwadratu na II pł. poziomej znakiem P_1, oddalenia wierzchołka O ostrosłupa od jego obu podstaw przez w i w_1, to:

$$P : P_1 = w^2 : w_1^2$$

Oznaczmy bok większego kwadratu literą a, mniejszego a_1, to ponieważ

powierzchnie dwóch podobnych wielokątów mają się do siebie, jak kwadraty z ich odpowiadających sobie boków, więc:

$$P : P_1 = a^2 : a_1^2$$

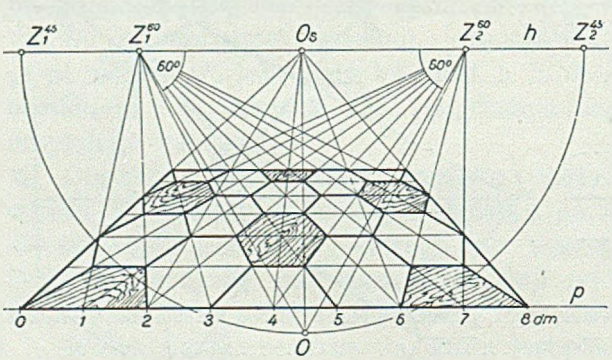
a zatem

$$a : a_1 = w : w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Ponieważ w oznacza oddalenie linji horyzontu od linji podstawy p, zaś w_1 oddalenie linji horyzontu od linji podstawy p_1 — przeto zamiast kwadratu o boku a na I pł. poziomej przyjąć można kwadrat o boku a_1 na II pł. poziomej i znaleźć jego perspektywę. Perspektywa ta będzie zarazem perspektywą kwadratu o boku a na I pł. poziomej. Jeżeli perspektywę $1_s 2_s 3_s 4_s$ kwadratu narysowaliśmy przy pomocy kwadratu o boku a_1, to prawdziwą długość boku narysowanego kwadratu obliczymy z równania (1):

$$a = a_1 \cdot \frac{w}{w_1}$$

h) Perspektywę ornamentu, złożonego z umiarowych sześciokątów, wykreśliliśmy na rys. 92. Po sprowadzeniu płaszczyzny horyzontu na tło, oko padło poniżej horyzontu, jako punkt O^0. (Czytelnik zechce dodać u góry litery O znaczek zero). Promienie wykreślone z punktu O^0, pod kątem 60° do horyzontu, przecinają go w punktach Z_1^{60} i Z_2^{60}, które są śladami zbiegu prostych, nachylonych do tła pod kątem 60°. Ponieważ podziałka rysunku jest dana, a nadto określona jest długość boku sześciokąta, jako równa 1 *dm*, więc odmierzywszy pewną ilość tych *dm* na linji podstawy p, znajdziemy perspektywy sześciokątów przy pomocy śladów zbiegu Z_1^{60} i Z_2^{60} w sposób, który czytelnik odtworzy z łatwością z rysunku.



Rys. 92.

22. Częściowe ślady zbiegu. *a)* Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej prostą a, nachyloną do tła pod kątem φ; jej perspektywą jest prosta a_s (rys. 93), zaś prosta $O^0 Z_a$, kładem jej promienia zbiegu na tło.

Zbliżmy oko do tła na odległość $\frac{\delta}{3}$ i poprowadźmy przez punkt $O_0^{1/3}$ promień równoległy do $O^0 — Z_a$ Otrzymany na horyzoncie punkt $Z_a^{1/3}$, nazywać będziemy *częściowym* śladem zbiegu kierunku a. Po-

łączmy ślad tłowy T_a prostej a z punktem głównym O_s, a przez punkt $Z_a^{1/3}$ wykreślmy prostą $a_s^{1/3} \parallel a_s$.

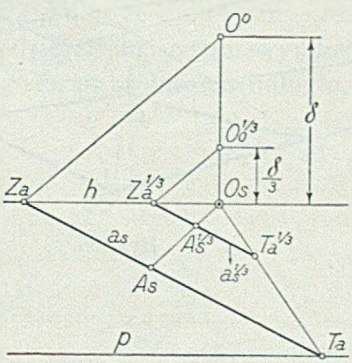
Z podobieństwa trójkątów $O_s Z_a^{1/3} T_a^{1/3}$ i $O_s Z_a T_a$ wynika, że:

$$\overline{O_s Z_a^{1/3}} : \overline{O_s Z_a} = 1 : 3 = \overline{O_s T_a^{1/3}} : \overline{O_s T_a}$$

t. zn., że punkt $T_a^{1/3}$ dzieli odcinek $\overline{O_s T_a}$ w tym samym stosunku, co punkt $Z_a^{1/3}$ odcinek $\overline{O_s Z_a}$. Dowolny promień, wykreślony z punktu O_s, przecina prostą a_s w punkcie A_s, a prostą $a_s^{1/3}$ w punkcie $A_s^{1/3}$, przyczem:

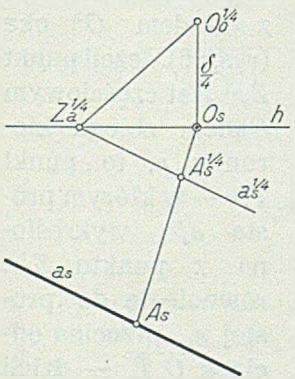
$$\overline{O_s A_s^{1/3}} : \overline{O_s A_s} = 1 : 3 = \overline{Z_a^{1/3} A_s^{1/3}} : \overline{Z_a A_s}$$

b) Równie często, jak punkty głębokości, leżą i ślady zbiegu poza obszarem rysunku, co pociąga za sobą potrzebę posługiwania się **częściowemi** śladami zbiegu i kreślenia przy ich pośrednictwie perspektyw prostych.



Rys. 93.

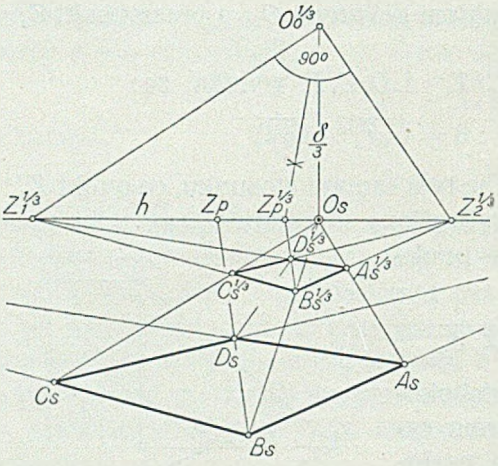
Z rys. 93 wynika, że gdy dany jest częściowy ślad zbiegu, a punkt A_s mamy połączyć ze śladem właściwym, to najpierw łączymy go z punktem głównym. Następnie odcinek $\overline{O_s A_s}$ dzielimy punktem $A_s^{1/3}$ w tym samym stosunku, w jakim częściowy ślad zbiegu dzieli odcinek, ograniczony punktem głównym i właściwym śladem zbiegu, więc na rys. 93 w stosunku 1 : 3. Szukana prosta a_s przejdzie przez A_s równolegle do prostej $a_s^{1/3}$, łączącej punkty $A_s^{1/3}$ i $Z_a^{1/3}$.



Rys. 94.

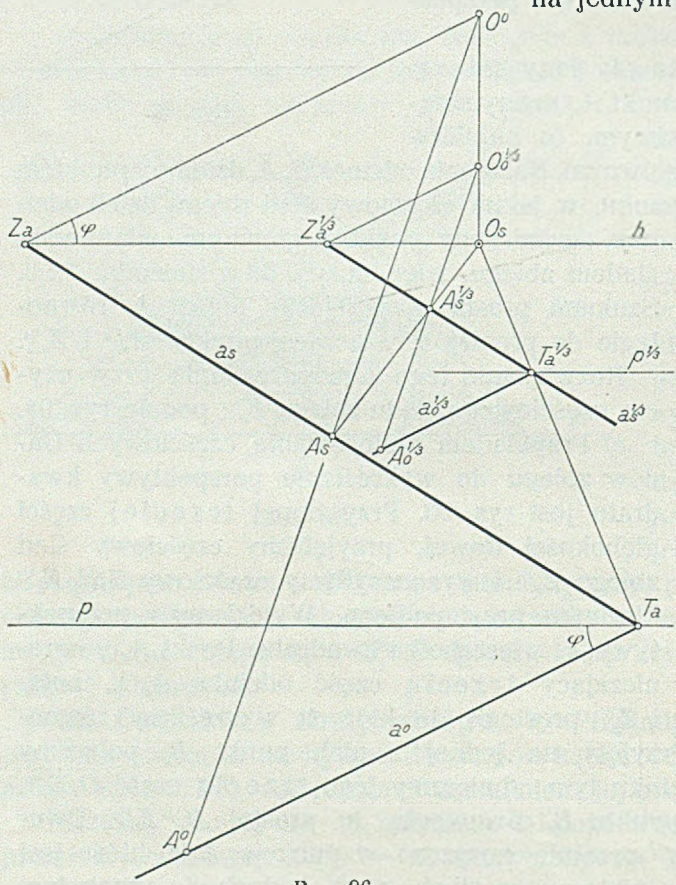
Rozwiązanie tego samego zadania przy użyciu częściowego śladu zbiegu $Z_a^{1/4}$ podaje rys. 94.

c) Przykładem zastosowania częściowych śladów zbiegu do wykreślenia perspektywy kwadratu jest rys. 95. Przy danej **trzeciej** części głębokości tłowej, przyjęliśmy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/3}$ i wyznaczyliśmy częściowy ślad $Z_2^{1/3}$ kierunku prostopadłego. Wyjdziemy z perspektywy A_s wierzchołka kwadratu. Punkt $A_s^{1/3}$, ograniczający **trzecią** część odcinka $A_s O_s$, połączymy ze śladami $Z_1^{1/3}$ i $Z_2^{1/3}$ prostemi, do których wykreślimy równoległe z punktu A_s. Przyjęty na jednej z nich punkt B_s połączmy z punktem O_s i na odcinku tym odmierzmy jego **trzecią** część $\overline{O_s B_s^{1/3}}$. Zkolei wykreślimy z punktu B_s równoległą do prostej $B_s^{1/3} Z_1^{1/3}$. Dwusieczna kąta $Z_1^{1/3} O_0^{1/3} Z_2^{1/3}$ przetnie horyzont w punkcie $Z_p^{1/3}$, który jest **częściowym śladem zbiegu** prostych, równoległych do przekątnej



Rys. 95.

rysowanego kwadratu. Właściwy ślad zbiegu Z_p leży w potrójnej odległości $\overline{O_s Z_p}^{1/3}$ od punktu głównego O_s. Połączmy ślad $Z_p^{1/3}$ z punktem $B_s^{1/3}$ a ślad Z_p z punktem B_s. Otrzymamy punkty $D_s^{1/3}$ i D_s, leżące na promieniu, przechodzącym przez punkt O_s. Promień $Z_2^{1/3} D_s^{1/3}$ przecina promień $B_s^{1/3} Z_1^{1/3}$ w punkcie $C_s^{1/3}$; prosta równoległa do promienia $Z_2^{1/3} D_s^{1/3}$, przechodząca przez punkt D_s, dopełni rozwiązania zadania wyznaczeniem punktu C_s, który wraz z punktem $C_s^{1/3}$ i punktem głównym leży na jednym promieniu.



Rys. 96.

d) Obróćmy przyjętą na płaszczyźnie poziomej prostą a na tło. Otrzymamy prostą a^0, równoległą do promienia, łączącego ślad zbiegu Z_a z kładem O^0 oka (rys. 96). Jeżeli punkt $Z_a^{1/3}$ jest częściowym śladem zbiegu kierunku a, to punkt $T_a^{1/3}$ — w którym prosta $a_s^{1/3}$, wykreślona z punktu $Z_a^{1/3}$, równolegle do prostej a_s, przecina odcinek $\overline{O_s T_a}$ — dzieli ten odcinek w tym samym stosunku, co punkt $Z_a^{1/3}$ odcinek $\overline{O_s Z_a}$. Punktowi $A_s^{1/3}$ prostej $a_s^{1/3}$, odpowiada na prostej a_s punkt A_s którego odpowiednikiem na

prostej a_0 jest punkt A^0, leżący — jak wiemy — na promieniu, łączącym punkt O^0 z A_s. Wykreślmy przez punkt $T_a^{1/3}$ prostą $a_0^{1/3} \parallel a^0$ i rzućmy punkt $A_s^{1/3}$ z punktu $O_0^{1/3}$ na prostą $a_0^{1/3}$, jako punkt $A_0^{1/3}$.

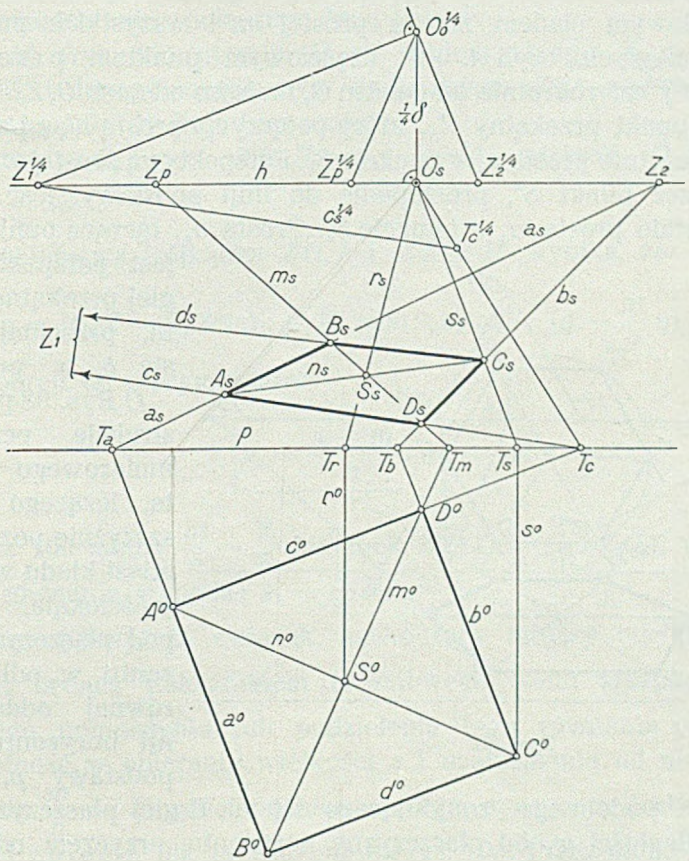
Z podobnych trójkątów $O_s A_s T_a$ i $O_s A_s^{1/3} T_a^{1/3}$ wynika, że:

$$\overline{O_s A_s^{1/3}} : \overline{O_s A_s} = \overline{O_s T_a^{1/3}} : \overline{O_s T_a} = 1 : 3$$

Proporcja:

$$\overline{O_s A_s^{1/3}} : \overline{O_s A_s} = 1 : 3 = \overline{O_s O_0^{1/3}} : \overline{O_s O^0}$$

dowodzi podobieństwa trójkątów $O_s A_s^{1/3} O_0^{1/3}$ i $O_s A_s O^0$, z czego wynika ostatecznie, że promienie $O^0 A_s A^0$ i $O_0^{1/3} A_s^{1/3} A_0^{1/3}$ są do siebie równoległe.



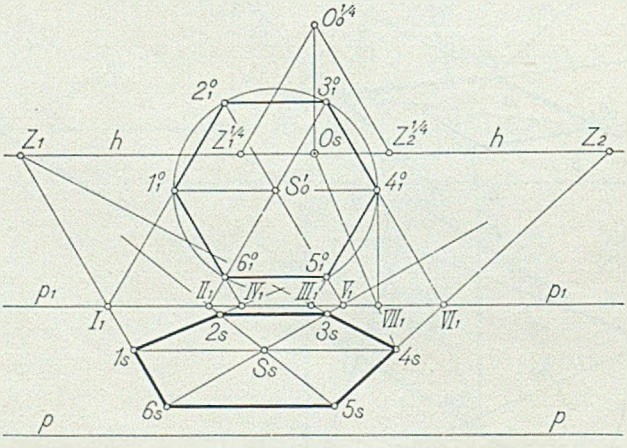
Rys. 97.

e) Rys. 97 przedstawia konstrukcję perspektywy kwadratu, przyjętego na płaszczyźnie poziomej, przy użyciu czwartej części głębokości tłowej. Kład $A^0 B^0 C^0 D^0$ kwadratu, linja podstawy, linja horyzontu, punkt

główny i głębokość tłowa są dane. Promienie, wykreślone z punktu $O_0^{1/4}$ równolegle do boków kwadratu $A^0B^0C^0D^0$, przetną horyzont w częściowych śladach zbiegu $Z_1^{1/4}$ i $Z_2^{1/4}$. Znajdziemy właściwy ślad zbiegu Z_2, odmierzając odcinek $\overline{O_s Z_2}$, równy czterokrotnemu odcinkowi $O_s Z_2^{1/4}$.

Łączymy ślady tłowe T_a i T_b z punktem Z_2 a ślad tłowy T_c z punktem głównym O_s. Jeżeli punkt $T_c^{1/4}$, ograniczający czwartą część odcinka $\overline{O_s T_c}$, połączymy z częściowym śladem zbiegu $Z_1^{1/4}$, to prosta c_s, wykreślona przez punkt T_c równolegle do prostej $T_c^{1/4} Z_1^{1/4}$, jest perspektywą prostej c, przecinającą proste a_s i b_s w punktach A_s i D_s.

Dwusieczna kąta prostego $Z_1^{1/4} O_0^{1/4} Z_2^{1/4}$ jest równoległą do przekątnej m^0 kwadratu $A^0 B^0 C^0 D^0$ i przecina horyzont w punkcie $Z_p^{1/4}$, który jest częściowym śladem zbiegu prostej m i wszystkich prostych do niej równoległych, czyli t. zw. częściowym punktem przekątnym. Przeniesiony czterokrotnie od punktu O_s na lewo odcinek $\overline{O_s Z_p^{1/4}}$ wyznacza właściwy punkt przekątny Z_p, który połączymy prostą m_s z punktem T_m. Prosta ta przetnie prostą a_s w punkcie B_s. Perspektywą prostej r^0, poprowadzonej przez punkt S^0, prostopadle do linji podstawy, jest prosta r_s, która przetnie prostą m_s w punkcie S_s. Prosta n_s, łącząca punkty S_s i A_s, jest perspektywą drugiej przekątnej kwadratu, przecinającej prostą b_s w punkcie C_s.

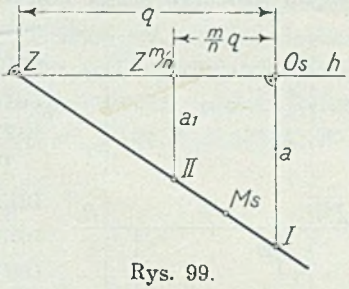


Rys. 98.

f) Rys. 98 podaje konstrukcję perspektywy umiarowego sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Zamiast kładu właściwego sześciokąta, leżącego pod płaszczyzną horyzontu w odległości w, równej oddaleniu linji horyzontu od linji podstawy p, użyliśmy sześciokąta podobnego, znajdującego się na II-giej płaszczyźnie poziomej, w odległości w_1 od płaszczyzny horyzontu, przyczem odległość w_1 równa jest odległości linji horyzontu od nowej linji podstawy p_1 (patrz ustęp 21, pkt. *g*, rys. 91 *a*, *b*).

Sześciokąt 1_s, 2_s, ..., 6_s jest perspektywą umiarowego sześciokąta, którego bok a równy jest bokowi a_1 sześciokąta $1_1^0 \ldots 6_1^0$, pomnożonemu przez wykładnik stosunku $w : w_1$.

23. Podziałki zbiegu. Lineały perspektywiczne. Gdy chodzi o niewielką ilość linij prostych, przechodzących przez ślady zbiegu, leżące poza obrębem rysunku, użyjemy konstrukcyj, poznanych w ustępie poprzednim. W praktycznych zagadnieniach perspektywy, gdzie ilość promieni, zbiegających się w niedostępnych śladach, jest często bardzo znaczna, uciekamy się do t. zw. podziałek zbiegu lub lineałów perspektywicznych.



Rys. 99.

Podziałka zbiegu opiera się na następującem rozumowaniu: połączmy daną perspektywę M_s (rys. 99) punktu M ze śladem zbiegu Z, a z punktu głównego O_s i danego częściowego śladu zbiegu $Z^{m|n}$ wykreślmy promienie prostopadłe do linji horyzontu.

Oznaczmy: $\overline{O_s I} = a$, $\overline{Z^{m|n} II} = a_1$; jeżeli odcinek $\overline{O_s Z} = q$, to $\overline{O_s Z^{m|n}} = \frac{m}{n} \cdot q$

Z podobieństwa trójkątów ZO_sI i $ZZ^{m|n}II$ wynika, że:

$$a_1 : a = (\overline{O_s Z} - \overline{O_s Z^{m|n}}) : \overline{O_s Z}, \text{ albo: } a_1 : a = (q - \frac{m}{n} q) : q$$

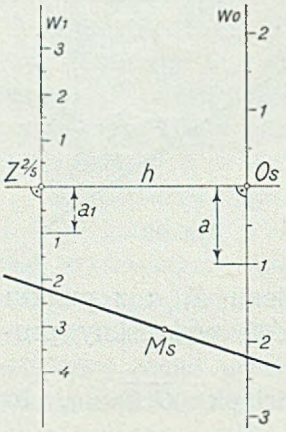
Z proporcji tej otrzymujemy:

$$\boxed{a_1 = \frac{n-m}{n} \cdot a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Na rys. 100 mamy $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$ (odcinek $\overline{Z^{m|n} O_s} = \frac{2}{5} \cdot \overline{Z O_s}$), więc z powyższego równania wypada: $a_1 = \frac{3}{5} \cdot a$

Równanie (2) wyraża związek, zachodzący między odcinkami a, a_1 i liczbą $\frac{m}{n}$, będącą wskaźnikiem częściowego śladu zbiegu. Możność obustronnego pomnożenia lub podzielenia tego równania pociąga za sobą dowolność w obieraniu wielkości a i uzależnienia od niej — przy danej liczbie $\frac{m}{n}$ — długości odcinka a_1. Tym sposobem dochodzimy do podziałki zbiegu, jak ją widzimy na rys. 100. Przez punkt główny O_s i dany częściowy ślad zbiegu $Z^{2/5}$ wykreśliliśmy proste w_0 i w_1, prostopadłe do linji horyzontu. Na pierwszej z nich narysowaliśmy podziałkę o przyjętej jednostce $a = 10\,mm$. Jednostką podziałki na podstawie w_1 będzie, według równania (2), odcinek $a_1 = \frac{5-2}{5} \cdot 10 = 6\,mm$. Promienie, przechodzące przez te same punkty podziału obu podstaw w_0 i w_1, zbie-

gają się w śladzie Z, leżącym poza obszarem rysunku. Aby dany punkt M_s połączyć ze śladem Z, przyłożymy lineał tak, aby jego krawędź przeszła przez punkt M_s, a równocześnie podzieliła odpowiadające sobie na obu podziałkach jednostki a i a_1 w tym samym stosunku. Przy ocenie tego podziału kierujemy się okiem; zbyt drobne jednostki podziałowe nie zapewnią nam większej dokładności.

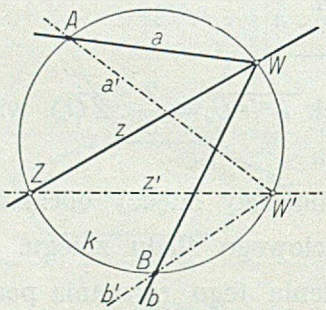


Rys. 100.

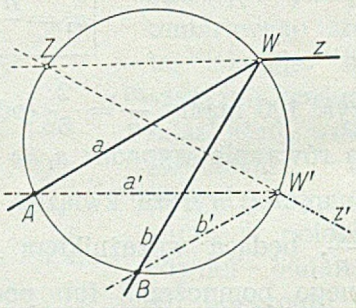
Podziałki zbiegu mają oczywiście zastosowanie także i do punktów głębokości, które leżą poza obrębem rysunku; wiemy, że punkty te są śladami zbiegu prostych, nachylonych do tła pod kątem 45°.

Lineały perspektywiczne, budowane z tektury, drzewa lub metalu, a służące do kreślenia linij, zbiegających się w punktach, które leżą poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, opierają się na następującem twierdzeniu geometrycznem:

Jeżeli trzy proste a, b, z (rys. 101), przechodzące przez jeden punkt W i tworzące między sobą stałe kąty, poruszają się na płaszczyźnie w ten sposób, że dwie z nich, a mianowicie a i b, przechodzą przez dwa stałe punkty A i B — to trzecia prosta z przechodzi również przez stały punkt Z.



Rys. 101.



Rys. 102.

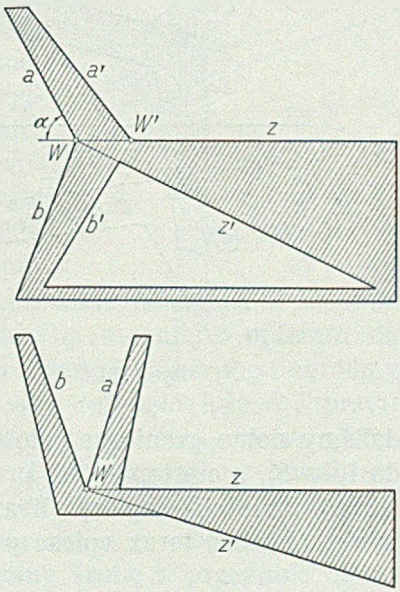
Ponieważ kąty obwodowe, wspierające się na tym samym łuku koła, są równe, więc i odwrotnie: wierzchołek W stałego kąta AWB, którego ramiona przechodzą przez stałe punkty A i B, zakreśli koło k. Ale i kąt AWZ jest stały i równy połowie kąta środkowego, wspierającego się z nim na łuku AZ; a ponieważ punkt A jest jednym stałym punktem tego łuku, więc drugim musi być stały punkt Z koła k, które zakreśli poruszający się wierzchołek W, sta-

łego kąta AWZ. Ramiona a i z tego kąta przechodzą stale przez punkty A i Z.

W przypadku podanym na rys. 101 ramię z leży „wewnątrz" pola kąta obwodowego AWB; rys. 102 przedstawia drugą możliwość, a mianowicie, gdy ramię z leży „zewnątrz" pola kąta AWB. W obu rysunkach oznaczyliśmy dwa położenia trzech prostych, przechodzących przez jeden punkt: położenie a, z, b z punktem W i położenie a', z', b' z punktem W'.

W praktycznem wykonaniu spotykamy lineały perspektywiczne dwojakiego rodzaju: o ramionach stałych i ramionach ruchomych.

Lineały o ramionach stałych sporządzić sobie może rysownik z kartonu, według wzorów podanych na rys. 103 *a* i *b*. Dolny pasek kartonu lineału *Pillet'a* służy wyłącznie do usztywnienia całości i może być pominięty. Lineał ten przedstawia zespół trzech lineałów perspektywicznych, na które składają się krawędzie a, b, z; a, b, z' i a', b', z. Lineał na rys. 103 *b* łączy w sobie lineał o krawędziach a, b, z i drugi o krawędziach a, b, z'.



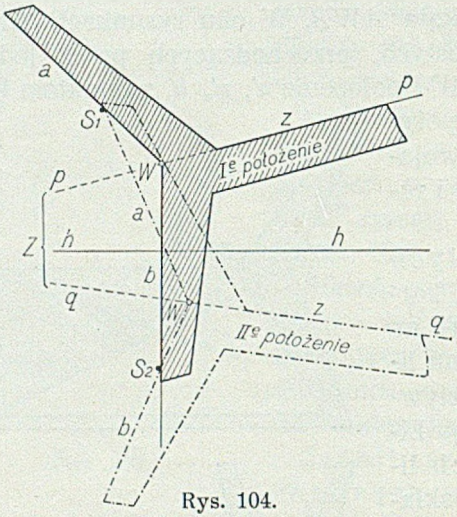
Rys. 103 *a*, *b*.

Przyjmijmy horyzont h (rys. 104) i jeden, względnie dwa promienie zbiegu p i q. Ustawmy lineał *Pillet'a* tak, aby jego krawędź z zeszła się z promieniem p i w tem położeniu wbijmy w pewnym punkcie S_1 krawędzi a szpilkę, a wzdłuż krawędzi b wykreślmy prostą. Następnie nadajmy lineałowi IIe położenie takie, by krawędź a dotykała szpilki S_1, a krawędź z zeszła się z promieniem zbiegu q, względnie z horyzontem h. Wykreślmy wzdłuż krawędzi b, w nowem położeniu lineału, prostą. Przetnie ona pierwsze zaznaczone położenie krawędzi b w punkcie S_2, w którym wbijemy drugą szpilkę. Jeżeli lineałem poruszać teraz będziemy w ten sposób, że krawędzie a i b dotykać będą stale szpilek S_1 i S_2, to krawędź z oznaczać będzie położenia promieni zbiegu, przechodzących przez ślad zbiegu Z.

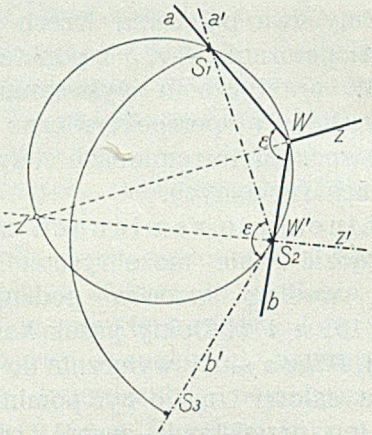
W podobny sposób posłużymy się lineałem, wykonanym podług rys. 103 *b*, który nadaje się szczególnie w tych przypadkach, gdy obie szpilki umieszczone być mogą tylko nad lub pod horyzontem.

Lineał, którego ramiona a i b opierają się stale o szpilki S_1 i S_2, osiągnie górną granicę położenia, gdy wierzchołek W zejdzie się z punk-

tem S_1 a granicę dolną, gdy punkt W dotknie igły S_2 (rys. 105) jako punkt W'. W wielu wypadkach zajdzie potrzeba rozszerzenia granic działania lineału, co da się uskutecznić w sposób uwidoczniony na rys. 105. Lineałowi na-

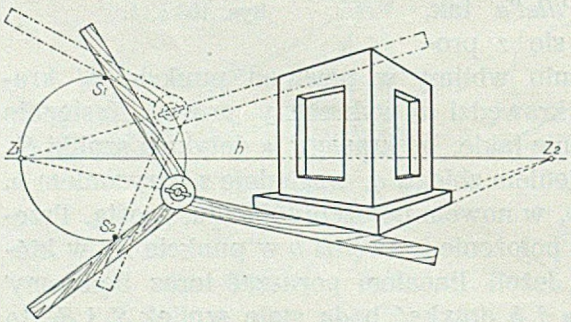


Rys. 104.

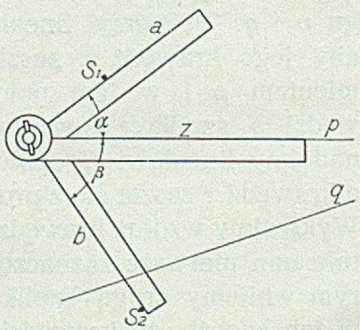


Rys. 105.

daliśmy dolne graniczne położenie, t. zn. jego wierzchołek przesunęliśmy do igły S_2, a następnie na prostej b' odmierzyli $\overline{S_2 S_3} = \overline{S_1 S_2}$ i w punkcie S_3 umieścili szpilkę. Krawędź z lineału, przechodząc stale przez punkt Z, może teraz opisać pole w granicach od ZS_1 do ZS_3.



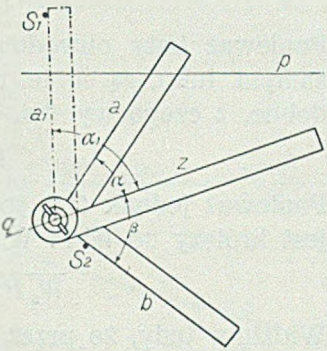
Rys. 106.



Rys. 107.

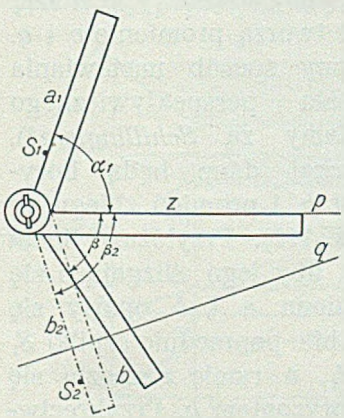
Lineały o ramionach ruchomych, do nastawiania, wykonane być mogą z drzewa lub metalu. Składają się one z trzech ramion, złączonych we wspólnym przegubie. Dwie krawędzie ślizgają się po szpilkach S_1 i S_2, a trzecia rysuje promienie zbiegu, przecinające się w punkcie Z_1 (rys. 106).

Wynalazcą pierwszego lineału jest Anglik *Piotr Nicholson* (1765—1844), który nazwał go „centrolineałem". Z biegiem czasu powstał cały ich szereg, znanych dziś pod nazwą lineałów *Mehmkego, Schillinga, Schrödera, Schupmanna* i innych, a różniących się między sobą tylko nieznacznemi udoskonaleniami konstrukcyjnemi.



Rys. 108.

Zapoznajmy się ze sposobem *Mehmkego*[1]) nastawiania lineału. Przyjmijmy, że leżący poza obszarem płaszczyzny rysunkowej ślad zbiegu Z jest wyznaczony za pośrednictwem promieni zbiegu p i q (rys. 107), względnie jednego promienia zbiegu i horyzontu. Oprzyjmy o dwie wbite szpilki S_1 i S_2 ramiona a i b lineału, a krawędzi z każmy zejść się z prostą p. Skręćmy lineał w przegubie śrubą, ustalając tym sposobem wzajemne położenie ramion a, b i z, poczem nadajmy mu takie położenie (rys. 108), aby jego krawędź z zeszła się z promieniem q, a ramię b opierało się nadal o igłę S_2. Przytrzymawszy ramiona b i z, rozkręćmy śrubę i obróćmy ramię a tak, aby dotknęło igły S_1, przyjmując położenie a_1, poczem znowu przykręćmy śrubę. Teraz przesuńmy lineał tak, aby ramię a_1 dotykało igły S_1, zaś krawędź z pokryła się z prostą p (rys. 109), poczem rozkręćmy śrubę w przegubie, a ramię b obróćmy tak, aby dotknęło szpilki S_2, zajmując położenie b_2. Skręceniem śruby ustalimy ponownie wzajemne położenie ramion a i b. Przesuwając lineał tak, aby ramiona a i b dotykały stale szpilek, spróbujemy teraz, czy krawędź z zejdzie się z promieniem q. Jeśli próba da wynik przeczący, wówczas powtórzymy omówioną poprzednio operację, aż cel powyższy zostanie osiągnięty.



Rys. 109.

Każde powtórzenie zbliża nas do właściwego położenia lineału, które osiągniemy wówczas, gdy środek W przegubu padnie na koło k, wyznaczone punktami S_1, S_2 i śladem zbiegu Z (rys. 110).

Oznaczmy punkty przecięcia się promieni p i q z kołem k literami P i Q, a punkty, określające poszczególne położenia środka przegubu lineału, symbolami W_1, W_2, W_3. Jeżeli w pierwszem ustawieniu

[1]) *Mehmke R.:* Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 42 Jahrg. Leipzig 1897, str. 99—105.

lineału krawędzie zajmą położenie a_1, b_1, z_1, to w drugiem ustawieniu kąt $\alpha = PW_1S_2$, jaki tworzą proste b_1 i z_1 nie zmieni się, a ramiona lineału przyjmą położenie a_2, b_2, z_2, przyczem:

$$\sphericalangle QW_2S_2 = \sphericalangle \alpha = \sphericalangle PW_1S_2$$

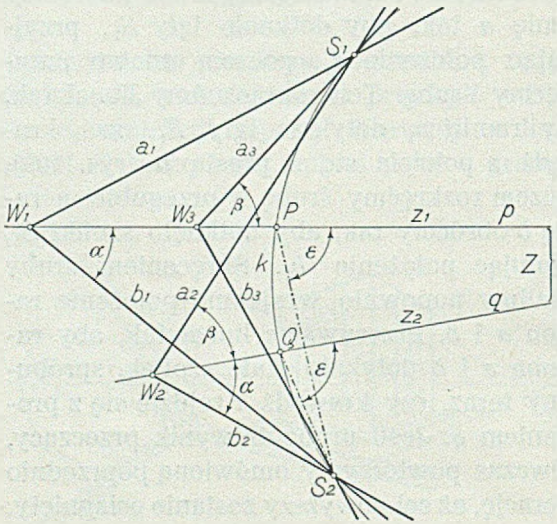
Ponieważ kąty obwodowe ZPS_2 i ZQS_2, jako wspierające się na tym samym łuku, są sobie równe, więc trójkąty PW_1S_2 i QW_2S_2 są podobne, z czego wynika, że:

$$\overline{W_1P} : \overline{W_2Q} = \overline{PS_2} : \overline{QS_2}$$

Ponieważ jednak QS_2 jest mniejsze, aniżeli PS_2, więc i odcinek W_2Q jest krótszy od W_1P. W podobny sposób wykazać można, że

$$\overline{W_3P} < \overline{W_2Q};\ \overline{W_4Q} < \overline{W_3P} \text{ i t. d.}$$

Widzimy tedy, że przez powtarzanie opisanej wyżej operacji środek W przegubu zbliża się istotnie do koła k, na które wkońcu padnie. Stanie się to tem szybciej, im większy jest odcinek $\overline{PS_2}$ w stosunku do $\overline{QS_2}$, a odcinek $\overline{QS_1}$ w stosunku do $\overline{PS_1}$, co oznacza, że szpilki S_1 i S_2 umieszczać należy blisko promieni p i q a możliwie najdalej śladu zbiegu Z.



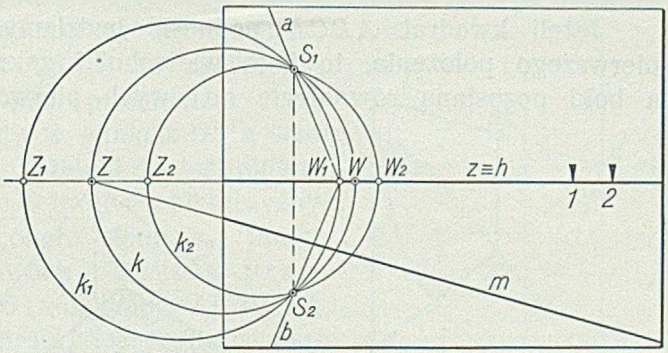
Rys. 110.

Sytuacja jest tem dogodniejsza, im większy jest kąt, jaki tworzą promienie p i q.

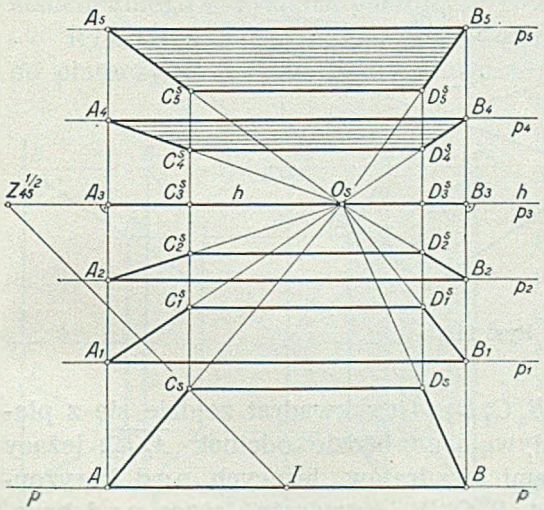
Inny sposób nastawiania lineału perspektywicznego podamy za *Schillingiem*[1]). Niechaj dane będą horyzont h i promień zbiegu m (rys. 111). Przyłóżmy lineał tak, aby jego ślizgające się ramiona a i b oparły się o wbite poprzednio szpilki S_1 i S_2, a ramię z zeszło się z horyzontem h. Przykręciwszy śrubę przegubu, zaznaczmy to pierwsze położenie lineału — a mianowicie zróbmy na krawędzi ramienia z kreskę, przenosząc ją równocześnie na horyzont ze znakiem liczby *1*. Następnie skręćmy lineał, którego ramiona a i b dotykają stale igieł S_1 i S_2, ku promieniowi m i stwierdźmy, czy linja, którą wykreślilibyśmy wzdłuż krawędzi z w jej nowem poło-

[1]) *Schilling Friedrich:* Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 56. Leipzig 1908, str. 189—208.

żeniu, przecięłaby horyzont w punkcie, leżącym po prawej czy też po lewej stronie śladu zbiegu Z, promienia m. Przypuśćmy, że ten punkt, oznaczony przez Z_1, leży na lewo od punktu Z; wróciwszy z lineałem w położenie pierwsze — t. zn. to, w którem krawędź z schodzi się z horyzontem — rozkręćmy śrubę przegubu i przesuńmy go o jakiś odcinek na prawo, zatem w kierunku przeciwnym, aniżeli kierunek, w jakim przesunięty jest punkt Z_1 względem śladu zbiegu Z. Ustawmy ramiona a i b tak, aby dotknęły szpilek i po przykręceniu śruby oznaczmy na horyzoncie położenie przyjętego na lineale znaku liczbą *2*; obróćmy znowu lineał około igieł S_1 i S_2 ku promieniowi m i stwierdźmy, czy punkt Z_2 przecięcia się krawędzi z z horyzontem leży jeszcze po lewej, czy też już po prawej stronie punktu Z. Dopuśćmy istnienie tego drugiego przypadku, to wówczas właściwe rozstawienie ramion lineału mieścić się będzie w granicach znaków *1* i *2* na linji horyzontu. Osiągnięcie właściwego położenia jest już teraz bardzo łatwe i wymagać będzie dwóch do trzech dalszych prób. Podczas tych prób środki $W_1, W_2, \ldots W$ przegubu leżeć będą kolejno na kołach $k_1, k_2, \ldots k$, przechodzących przez punkty S_1, S_2 i ślady $Z_1, Z_2, \ldots Z$.



Rys. 111.



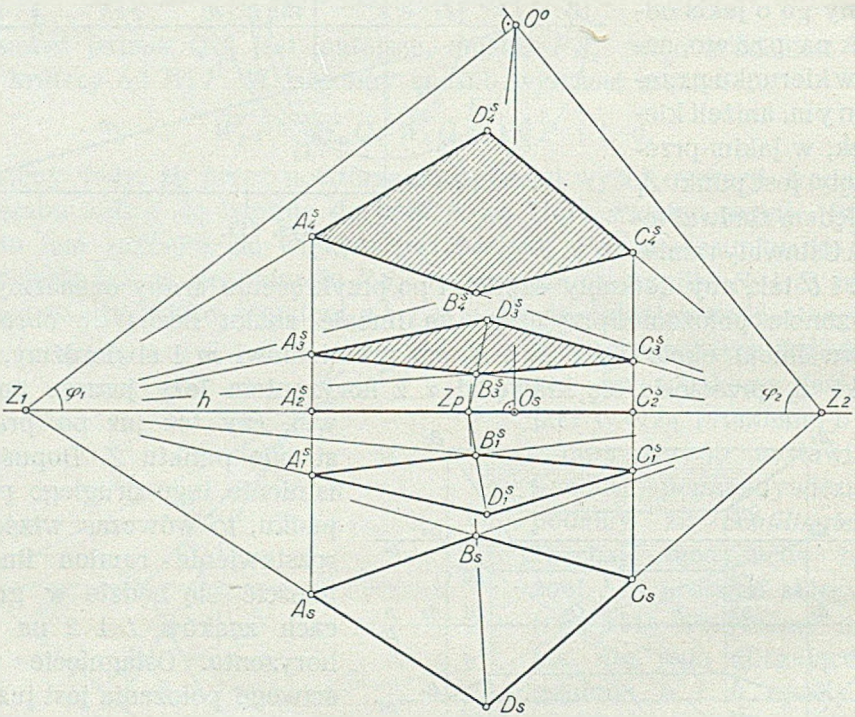
Rys. 112.

24. Płaszczyzny poziome. Płaszczyzny pionowe. *a)* Ślady tłowe płaszczyzn poziomych są do siebie równoległe i równoległe do linji horyzontu, która jest wspólnym śladem zbiegu tych płaszczyzn.

Trapez ABC_nD_n (rys. 112) jest perspektywą kwadratu, leżącego na płaszczyźnie podstawy. Jego bok $\overline{AB}$ znajduje się na tle. Perspek-

tywę $\overline{AC_s}$ boku $\overline{AC}$, prostopadłego do tła, otrzymaliśmy przy użyciu połowy głębokości tłowej w ten sposób, że środek I odcinka $\overline{AB}$ połączyliśmy z punktem częściowej głębokości $Z'_{\frac{1}{4}\frac{1}{6}}$ prostą, która przecięła promień AO_s w punkcie C_s.

Jeżeli kwadrat $ABCD$ podnosić będziemy równolegle do jego pierwszego położenia, to jego wierzchołki zakreślą proste pionowe, a boki pozostaną równoległe do swych pierwotnych położeń. Otrzy-



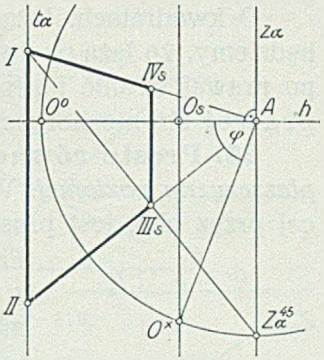
Rys. 113.

mamy trapezy $A_1B_1C_1^sD_1^s$, $A_2B_2C_2^sD_2^s$. Gdy kwadrat zejdzie się z płaszczyzną horyzontu, to perspektywą jego będzie odcinek $\overline{A_3B_3}$, leżący na linji horyzontu. Perspektywami kwadratów, leżących nad horyzontem, są trapezy $A_1B_1C_4^sD_4^s$ i $A_5B_5C_5^sD_5^s$. Kwadraty, leżące pod horyzontem, obserwujemy zgóry, na kwadraty, znajdujące się nad horyzontem, patrzymy zdołu.

Rys. 113 przedstawia perspektywę kwadratów, leżących na płaszczyznach poziomych, przyczem jedna para ich boków zawiera z tłem kąt φ_1, druga kąt φ_2. Do konstrukcji użyto śladów zbiegu Z_1 i Z_2 oraz punktu przekątnego Z_p. Punkt O^0 jest kładem oka na tło; odcinek $\overline{O_sO^0}$, prostopadły

do linji horyzontu, równy jest głębokości tłowej. Kąt $O_s Z_1 O^0 = \varphi_1$, kąt $O_s Z_2 O^0 = \varphi_2$. Promienie $Z_1 - O^0$ i $Z_2 - O^0$ tworzą kąt prosty.

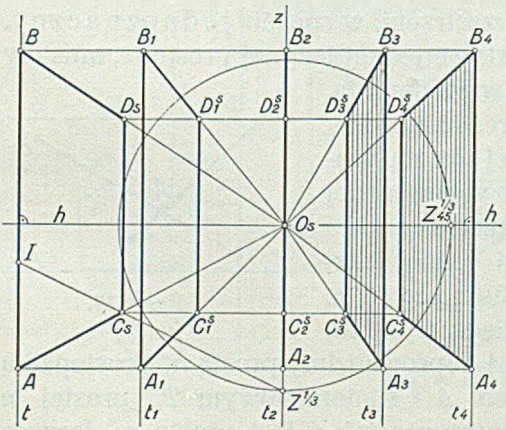
b) Ślad tłowy t_α i ślad zbiegu z_α *pionowej* płaszczyzny α są prostopadłe do linji horyzontu (rys. 114). Odcinek $\overline{O_s O^\times}$ jest głębokością tłową, kąt $O_s A O^\times = \varphi$ wyraża kąt nachylenia płaszczyzny α do tła. Koło, zakreślone z punktu A, jako środka, promieniem $\overline{A O^\times}$, przetnie linję horyzontu w punkcie O^0, a ślad zbiegu z_α w punkcie Z_α^{45}. Punkt O^0 jest okiem, sprowadzonem na tło obrotem płaszczyzny zbiegu płaszczyzny α około śladu z_α; punkt Z_α^{45} jest jednym z dwóch punktów przekątnych (ust. 13, str. 25 i 26). Trapez $I\,II\,III_s\,IV_s$ jest perspektywą kwadratu, leżącego na pionowej płaszczyźnie α, nachylonej do tła pod kątem φ. Bok $\overline{I\,II}$ tego kwadratu leży na tle.



Rys. 114.

Pionową płaszczyznę prostopadłą do tła, przechodzącą przez oko, nazywać będziemy *główną płaszczyzną pionu* (ust. 17, str. 42) — lub krócej: *płaszczyzną pionu* — a jej przecięcie się z tłem *linją pionu*. Linja pionu jest wspólnym śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn, równoległych do płaszczyzny pionu.

Rys. 115 przedstawia perspektywę czterech płaszczyzn, równoległych do płaszczyzny pionu. Ślady tłowe t, t_1, t_3 i t_4 tych płaszczyzn są do siebie równoległe, równoległe do linji pionu z i prostopadłe do horyzontu.



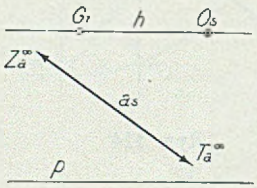
Rys. 115.

Trapez $A\,B\,C_s\,D_s$ jest perspektywą kwadratu, leżącego na pierwszej płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny pionu; bok $\overline{A\,B}$ kwadratu leży na tle. Do narysowania tej perspektywy użyliśmy trzeciej części głębokości tłowej. Koło tej częściowej głębokości przecięte jest linją pionu w punkcie $Z^{1/3}$, który jest częściowym śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny pionu, a nachylonych do tła pod kątem 45°. Jeżeli połączymy punkt I, oddzielający trzecią część długości boku $\overline{A\,B}$ kwadratu, ze śladem $Z^{1/3}$, to punkt C_s, przecięcia się tej prostej z prostą $\overline{A\,O_s}$, jest perspektywą trzeciego wierzchołka kwadratu.

Trapez $A_1 B_1 C_1^s D_1^s$ jest perspektywą tego samego kwadratu, leżącego na płaszczyźnie bliższej płaszczyzny pionu. Perspektywą tego kwadratu, leżącego na płaszczyźnie pionu, jest odcinek $\overline{A_2 B_2}$. Dalsze posuwanie się płaszczyzny kwadratu, przy zachowaniu równoległości do płaszczyzny pionu, wyrazi się perspektywami $A_3 B_3 C_3^s D_3^s$ i $A_4 B_4 C_4^s D_4^s$.

O kwadratach, leżących po lewej stronie płaszczyzny pionu, mówić będziemy, że leżą po lewej stronie horyzontu; kwadraty, znajdujące się po prawej stronie płaszczyzny pionu, określać będziemy, jako leżące po prawej stronie horyzontu.

25. Proste równoległe do tła. *a) Proste dowolnie nachylone do płaszczyzny poziomej.* Wiadomo, że perspektywa prostej, nieprzechodzącej przez oko, jest prostą, wyznaczoną śladem tłowym i śladem zbiegu.



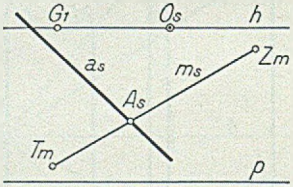
Rys. 116.

Pierwszy jest punktem przebicia się danej prostej z tłem, drugi punktem przebicia się z tłem promienia, poprowadzonego przez oko, równolegle do tej prostej, czyli t. zw. promienia zbiegu.

Prosta a, równoległa do tła, przebija go w punkcie nieograniczenie dalekim T_a^∞, w punkcie niewłaściwym. Takim samym punktem jest także ślad zbiegu Z_a^∞ prostej a (rys. 116).

Płaszczyzna η, przechodząca przez oko i przez prostą a, przetnie tło wzdłuż prostej a_s, równoległej do a. Prosta a_s jest perspektywą prostej a. Ale prosta a_s jest perspektywą wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie η i równoległych do tła — wobec czego rys. 116 nie określa położenia prostej a w przestrzeni, w sposób jednoznaczny.

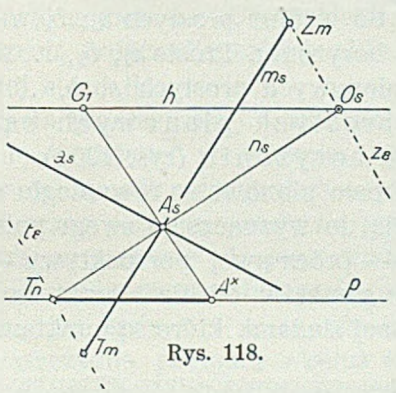
Aby prosta a_s oznaczała perspektywę jednej jedynej prostej a, musimy znać położenie jednego jej punktu względem tła. A położenie znowu tego punktu określić możemy przez przyjęcie go na jakiejś, dowolnej zresztą, prostej m (rys. 117). Dopiero przyjęcie wyznaczonej śladami T_m i Z_m prostej m, która przecina prostą a w punkcie A, stwarza warunki jednoznacznego perspektywicznego odwzorowania prostej a.



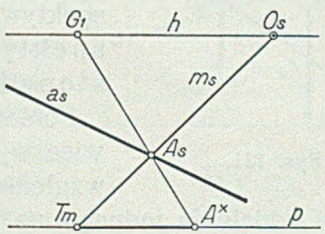
Rys. 117.

Oddalenie prostej a od tła znajdziemy (rys. 118) w sposób następujący: z punktu A poprowadzimy prostą n, prostopadłą do tła; odcinek ograniczony punktem A i śladem tłowym T_n prostej n daje szukaną odległość. Perspektywą prostej n jest prosta n_s, łącząca punkt główny O_s z punktem A_s. Proste m i n wyznaczają płaszczyznę ε, prostopadłą do tła. Jej ślad zbiegu z_ε łączy punkty O_s i Z_m; ślad tłowy t_ε przejdzie przez ślad tłowy T_m równolegle do z_ε i przetnie prostą n_s w szukanym śladzie tłowym T_n. Aby wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek $\overline{A_s T_n}$, poprowadzimy przez prostą n pła-

szczyznę poziomą, która przetnie tło wzdłuż prostej p, przechodzącej przez punkt T_n, równolegle do horyzontu. Rzućmy punkt A_s z punktu głębokości G_1 na linję podstawy p, to odcinek $\overline{T_n A^\times}$ wyraża oddalenie prostej a od

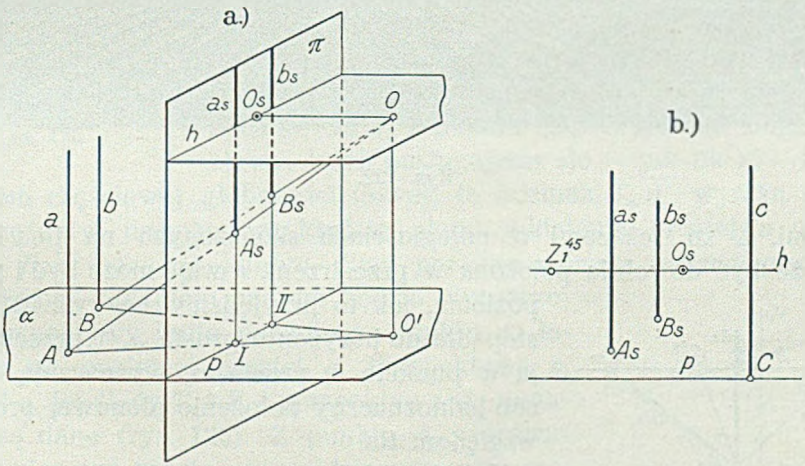


Rys. 118.



Rys. 119.

tła. Zamiast dowolnej prostej m, przecinającej równoległą do tła prostą a w punkcie A, dogodniej jest przyjąć prostą m, prostopadłą do tła. Śladem zbiegu takiej prostej będzie punkt główny (rys. 119). Rzut $\overline{T_m A^\times}$

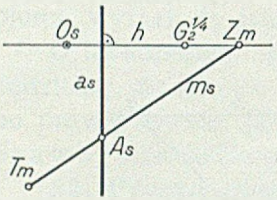


Rys. 120 *a*, *b*.

odcinka $\overline{T_m A_s}$ na linję podstawy p, równy jest odległości punktu A prostej a — więc i samej prostej — od tła.

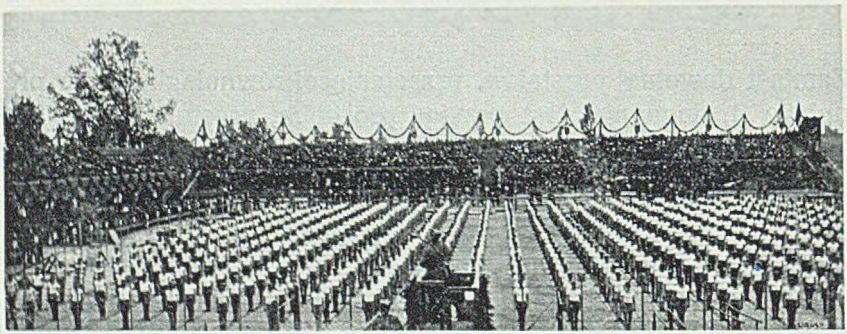
b) Proste pionowe. Z pośród prostych równoległych do tła na szczególną uwagę zasługują proste pionowe. Pionowe proste a i b (rys. 120 *a*) są prostopadłe do poziomej płaszczyzny α, a więc prostopadłe do wszyst-

kich prostych tej płaszczyzny, zatem i do linji podstawy p. Płaszczyzny, przechodzące przez proste a, b, ... i oko, t. j. płaszczyzny rzucające proste a, b, ... na tło, są pionowe i przecinają płaszczyznę podstawy wzdłuż prostych, które przechodzą przez stanowisko O', zaś tło wzdłuż prostych a_s, b_s, ... prostopadłych do horyzontu. Proste a_s, b_s, ... są perspektywami pionowych prostych a, b, ... Perspektywy prostych pionowych są prostopadłe do horyzontu (rys. 120b).



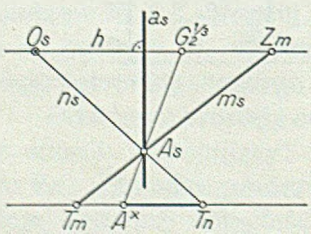
Rys. 121.

Ponieważ proste pionowe są równoległe do tła, więc wymagają do wyznaczenia swego położenia względem tła — prócz swej perspektywy — znajomości oddalenia jednego ze swych punktów od tła. Punkt ten leżeć musi na jakiejś prostej m, wyznaczonej śladami, które są punktami wła-



Rys. 122.

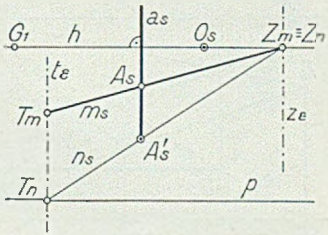
ściwemi, t. zn. leżącemi w odległościach skończonych na tle. Prosta ta może być dowolnie położona w przestrzeni, a więc może być i prostą poziomą, jak to przyjęliśmy na rys. 121. Prostopadła do horyzontu prosta a_s i przecinająca ją w punkcie A_s prosta m_s wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie pionowej prostej a względem tła.



Rys. 123.

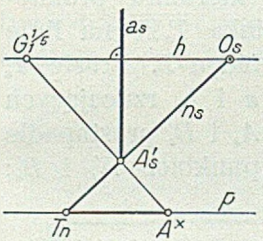
Na rys. 123 mamy prostą a_s, jako perspektywę prostej pionowej, i prostą m_s, przecinającą ją w punkcie A_s. Przez punkt A prostej a poprowadzimy prostą n, prostopadłą do tła. Proste m i n wyznaczają płaszczyznę poziomą, której śladem zbiegu jest linja horyzontu h. Ślad tłowy tej płaszczyzny — linja podstawy p — przejdzie przez ślad tłowy T_m prostej m, równolegle do horyzontu. Prosta p przetnie prostą n_s w punk-

cie T_n, który jest śladem tłowym prostej n. Odcinek $\overline{A_s T_n}$ jest perspektywą odległości punktu A od tła. Rzut tego odcinka z punktu głębokości na linję podstawy wyraża jego prawdziwą długość. Na rys. 123 rzuciliśmy odcinek $\overline{A_s T_n}$ na linję podstawy p z punktu częściowej głębokości $G_2^{1/3}$; odcinek $\overline{A^\times T_n}$ wyraża trzecią część odległości punktu A, a więc i prostej a, od tła.



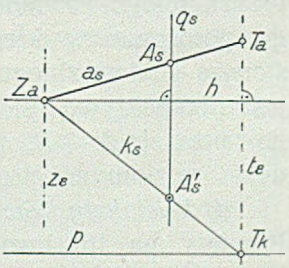
Rys. 124.

Prosta pionowa a (rys. 124) przebija płaszczyznę podstawy w punkcie, który znajdziemy w sposób następujący: przez prostą a i przez poziomą prostą m, przecinającą pierwszą w punkcie A, poprowadzimy płaszczyznę ε. Płaszczyzna ta będzie płaszczyzną pionową, jej ślady t_ε i z_ε są prostopadłe do linji horyzontu. Przetnie ona płaszczyznę poziomą wzdłuż krawędzi n, której perspektywą jest prosta n_s. Punkt A'_s, w którym prosta n_s przetnie prostą a_s, jest perspektywą punktu przebicia się prostej a z płaszczyzną podstawy, czyli perspektywą śladu poziomego tej prostej, albo także perspektywą rzutu poziomego prostej a. Gdy znamy perspektywę prostej pionowej i perspektywę jej śladu (rzutu) poziomego, to położenie tej prostej, w odniesieniu do tła, jest jednoznacznie wyznaczone. Oddalenie bowiem prostej a od tła wyrazi się rzutem $\overline{T_n A^\times}$ odcinka $\overline{T_n A'_s}$ z punktu głębokości na linję podstawy. Jeżeli posługujemy się — jak na rys. 125 — punktem częściowej głębokości tłowej, to odcinek $\overline{T_n A^\times}$ wyraża odnośną część (w naszym przykładzie piątą) oddalenia prostej a od tła.



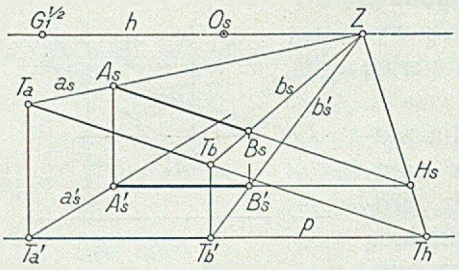
Rys. 125.

c) Rzut poziomy punktu. Rzut poziomy odcinka, równoległego do tła. Niechaj zadaniem naszem będzie wyznaczenie perspektywy rzutu poziomego punktu A, leżącego na poziomej prostej a. Perspektywa a_s prostej a, jej ślady T_a i Z_a i perspektywa A_s punktu A są dane (rys. 126). Z punktu A poprowadzimy pionową prostą q i znajdziemy punkt przebicia się jej z płaszczyzną poziomą, wyznaczoną linją horyzontu h i linją podstawy p. Pionowa płaszczyzna ε, przechodząca przez prostą a, przechodzi także przez prostą q i przecina płaszczyznę poziomą wzdłuż prostej k. Punkt A' przecięcia się prostych q i k rozwiązuje zadanie. Ślad tłowy t_ε płaszczyzny ε przejdzie przez punkt T_a, prostopadle do linji horyzontu. Ślad zbiegu z_ε przejdzie



Rys. 126.

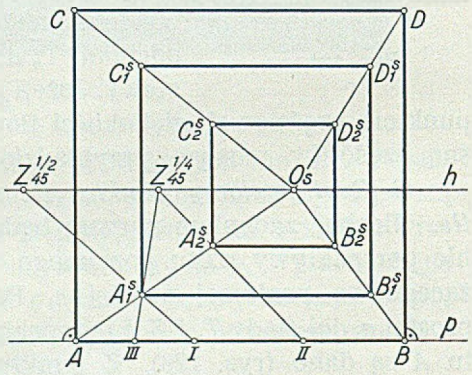
przez ślad zbiegu Z_a, równolegle do t_ε. Prosta k_s, łącząca punkt Z_a z punktem T_k, w którym ślad t_ε przecina linję podstawy p, jest perspektywą krawędzi płaszczyzny ε z płaszczyzną poziomą. Punkt A'_s przecięcia się prostej k_s z prostą q_s jest perspektywą rzutu poziomego punktu A (porównaj rys. 124 i odnoszący się do niego tekst).



Rys. 127.

W analogiczny sposób znajdziemy perspektywę rzutu poziomego odcinka, równoległego do tła. Niechaj odcinek $\overline{A_s B_s}$ (rys. 127) będzie perspektywą odcinka $\overline{AB}$, równoległego do tła, a prosta a_s perspektywą prostej poziomej, przechodzącej przez punkt A. Odcinek $\overline{T_a T_b}$, równoległy do $\overline{A_s B_s}$ — ograniczony punktem T_b, który leży na promieniu b_s, wykreślonym przez punkty B_s i Z — jest rzutem równoległym odcinka $\overline{AB}$ na tło w kierunku promienia $Z - O$. Wyznaczmy rzut prostokątny $\overline{T'_a T'_b}$ odcinka $\overline{T_a T_b}$ na linję podstawy p i połączmy punkty T'_a, T'_b ze śladem zbiegu Z. Proste a'_s i b'_s są perspektywą rzutów poziomych promieni a i b, rzucających odcinek $\overline{AB}$ na tło. Proste, wykreślone z punktów A_s i B_s prostopadle do linji podstawy p, przetną promienie a'_s i b'_s w punktach A'_s i B'_s; odcinek $\overline{A'_s B'_s}$ będzie równoległy do linji p i jest perspektywą rzutu poziomego odcinka $\overline{AB}$.

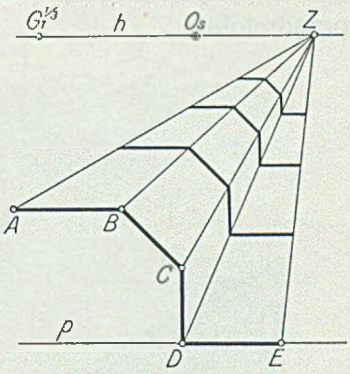
Jeżeli odcinek $\overline{T_a T_b}$, leżący na tle i punkt Z uważać będziemy za dane, to wówczas odcinek $\overline{A_s B_s}$ będzie perspektywą odcinka $\overline{T_a T_b}$, przesuniętego równolegle do swego położenia w kierunku, określonym śladem zbiegu Z. Punkt H_s jest perspektywą śladu poziomego prostej $A - B$, punkt T_h śladem poziomym prostej $T_a - T_b$.



Rys. 128.

d) Wielokąty równoległe do tła. Przyjęty na tle kwadrat $ABCD$ (rys. 128) przesuńmy o daną odległość w kierunku prostopadłym do tła i wykreślmy jego perspektywę. Perspektywy wierzchołków kwadratu leżeć będą na promieniach, przechodzących przez punkt główny O_s, perspektywy boków kwadratu pozostaną równoległe do odpowiednich boków kwadratu $ABCD$.

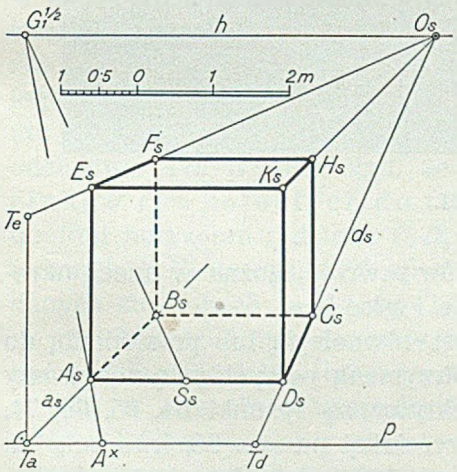
Operując połową głębokości tłowej, odmierzymy na linji podstawy p odcinek $\overline{AI}$ — równy połowie oddalenia od tła kwadratu w jego nowem położeniu — i punkt I rzucimy z punktu $Z^{1/3}_{45}$ na promień $A - O_s$. Przez otrzymany tam punkt A^s_1 wykreślimy równoległe do boków $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, poczem uzupełnimy rysunek kwadratu $A^s_1 B^s_1 C^s_1 D^s_1$.



Rys. 129.

Kwadrat $A^s_2 B^s_2 C^s_2 D^s_2$ jest perspektywą kwadratu $ABCD$, odsuniętego jeszcze dalej od tła; oddalenie jego od kwadratu $A_1 B_1 C_1 D_1$ równe jest p o c z w ó r n e m u odcinkowi $\overline{II\,III}$.

Analogicznie przedstawi się sprawa, gdy kierunek przesunięcia wielokąta, leżącego na tle, nie będzie prostopadły do tła (rys. 129). Perspektywy punktów wierzchołkowych wielokąta $ABCDE$ leżeć będą na promieniach, przechodzących przez ślad zbiegu Z, który określa kierunek przesunięcia; perspektywy boków poruszającego się wielokąta będą do siebie równoległe. Ogólnie powiedzieć możemy: p e r s p e k t y w y w i e l o k ą t a — s t a l e r ó w n o l e g ł e g o d o t ł a — p o r u s z a j ą c e g o s i ę w o k r e ś l o n y m k i e r u n k u, s ą w i e l o k ą t a m i p o d o b n e m i; ś l a d z b i e g u t e g o k i e r u n k u j e s t ś r o d k i e m p o d o b i e ń s t w a.

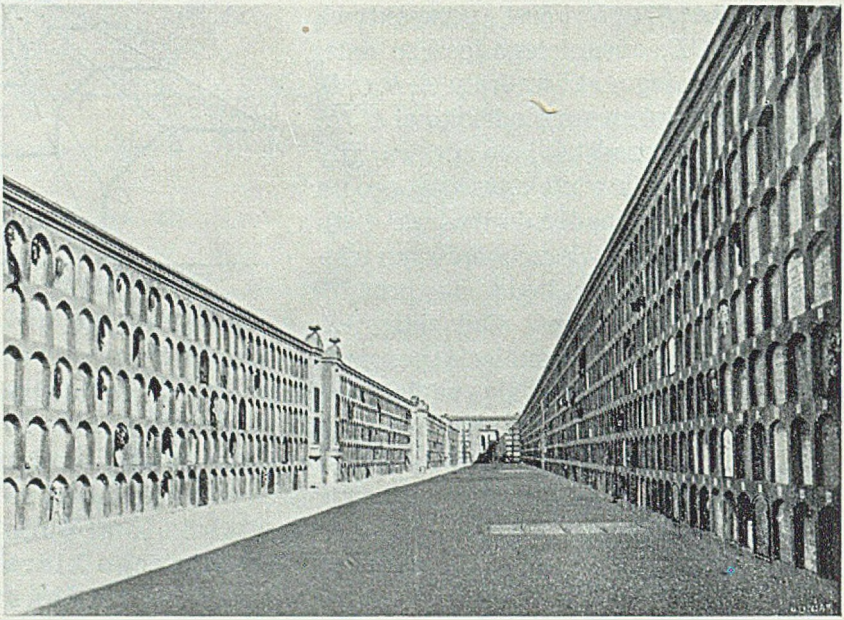


Rys. 130.

e) Wykreślić perspektywę sześcianu, którego przednia ściana jest równoległa do tła i oddalona od niego o 2 m w podziałce rysunku. Długość krawędzi sześcianu wynosi 3 m; konstrukcja ma być wykonana przy użyciu połowy głębokości tłowej (rys. 130).

Na linji podstawy p odmierzymy $\overline{T_a T_d} = 3\ m$ w podziałce rysunku i $\overline{T_a A^\times} = 1\ m$. Punkty T_a i T_d połączymy z punktem głównym, a punkt $A^\times$ z punktem $G_1^{1/2}$ częściowej głębokości. Środek S_s odcinka $\overline{A_s D_s}$, równoległego do p, łączymy z punktem $G_1^{1/2}$. Otrzymamy perspektywę $A_s B_s C_s D_s$ podstawy sześcianu. Na prostopadłej wykreślonej w punkcie T_a odmierzymy $\overline{T_a T_e} = \overline{T_a T_d}$ i punkt T_e połączymy z O_s. Dalsza konstrukcja nie wymaga wyjaśnień.

26. Perspektywa „czołowa", „boczna" i „ukośna". Będące w użyciu nazwy: „perspektywa prosta", „frontowa", „ukośna" nie określają bynajmniej różnych sposobów perspektywicznego odwzorowania, lecz stanowią jedynie klasyfikację położeń tła względem rysowanych przedmiotów.



Rys. 131.

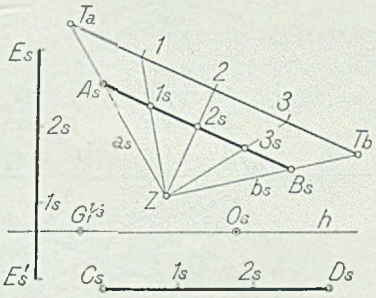
Położenia tła względem przedmiotów zawrzeć można w trzech określeniach: położenie czołowe, boczne i ukośne.

Jeżeli pionowa płaszczyzna tła jest równoległą lub prostopadłą do ściany rysowanego przedmiotu — to otrzymaną perspektywę nazywamy czołową. Przykładami takiej perspektywy są rysunki 64, 65, 66, 74, 130, 131. Ornamenty na rys. 82, 92, sześciokąt na rys. 98, kwadraty na rys. 75, 112, 114, 115 i 128 i postacie na rys. 122 mają położenie czołowe.

Jeżeli płaszczyzna tła ma położenie pionowe, jednak nie prostopadłe ani nie równoległe do ścian odtwarzanego perspektywicznie przedmiotu — jeżeli tło nie jest równoległe do żadnego z boków rysowanego, umiarowego wielokąta — to perspektywę nazywać będziemy boczną. Jako przykłady, służyć mogą rys. 62, 84, 89, 90, 91*b*, 97, 113.

Jeżeli wreszcie płaszczyzna tła nie ma położenia pionowego, lecz najzupełniej dowolne — to otrzymana perspektywa nazwana będzie ukośną. Taką perspektywą są rys. 187, 188, 192 i 193.

27. Dzielenie odcinków. *a) Odcinki równoległe do tła.* Odcinek $\overline{A_s B_s}$ (rys. 132) i prosta a_s wraz z przyjętemi na niej punktami T_a i Z, wyznaczają jednoznacznie odcinek $\overline{AB}$, równoległy do tła. Prosta a_s jest perspektywą prostej a, przecinającej prostą $A-B$ w punkcie A. Punkt T_a jest śladem tłowym, a punkt Z śladem zbiegu prostej a. Ślad tłowy T_a prostej a uważać należy za rzut punktu A, w kierunku prostej a na tło. Rzućmy w tym samym kierunku punkt B na tło. Perspektywa promienia rzucającego będzie prostą b_s, łączącą punkt B_s ze śladem zbiegu Z. Ponieważ ślad zbiegu prostej $A-B$, równoległej do tła, jest punktem niewłaściwym, a rzut równoległy tej prostej na tło jest do niej równoległy — przeto perspektywa $\overline{A_s B_s}$ odcinka $\overline{AB}$ i perspektywa jego rzutu będą do siebie równoległe. Prosta, wykreślona z punktu T_a r ó w n o l e g l e do $\overline{A_s B_s}$, przetnie promień b_s w punkcie T_b, który jest śladem tłowym promienia b, a więc rzutem punktu B na tło, w kierunku, określonym śladem zbiegu Z. Odcinek $\overline{T_a T_b}$ jest rzutem odcinka $\overline{AB}$ na tło w kierunku, który określa punkt Z, jako wspólny ślad zbiegu promieni rzucających. Ponieważ rzut równoległy odcinka, równoległego do tła, jest odcinkiem równoległym do danego odcinka i równym mu co do długości, więc odcinek $\overline{T_a T_b}$, równoległy do $\overline{A_s B_s}$, równy jest odcinkowi $\overline{AB}$. Wynika stąd, że p e r s p e k t y w i c z n e d z i e l e n i e o d c i n k ó w r ó w n o l e g ł y c h d o t ł a, a więc także odcinków równoległych do linji horyzontu (odcinek $\overline{C_s D_s}$ na rys. 132), lub odcinków pionowych (odcinek $\overline{E_s E_s'}$ na rys. 132) s p r o w a d z a s i ę d o d z i e l e n i a — w żądanych stosunkach — p e r s p e k t y w t y c h o d c i n k ó w.

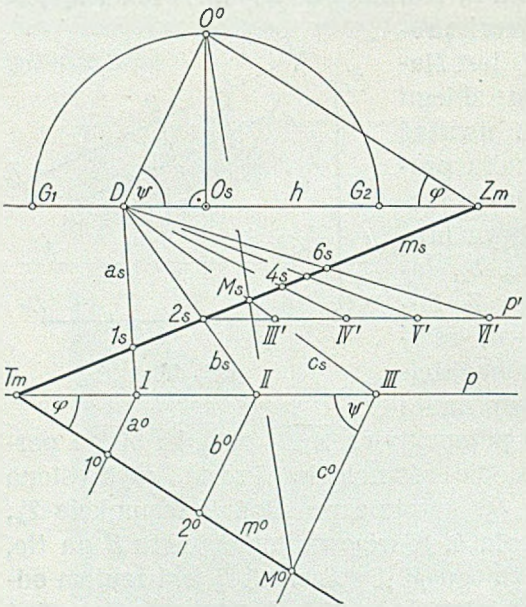


Rys. 132.

b) Odcinki, leżące dowolnie na płaszczyźnie poziomej. a) Aby dokonać podziału odcinka, leżącego na płaszczyźnie poziomej, postąpimy, jak w ust. 18, z prostą prostopadłą do tła. Płaszczyznę poziomą obrócimy — wraz z leżącą na niej prostą — około linji podstawy na tło, poczem przeniesiemy punkty dokonanego podziału na perspektywę prostej. Przeniesienie to wykonać można zapomocą promieni, przechodzących przez kład O^0 oka (patrz ust. 21, pkt. *b*), albo za pośrednictwem prostych, przechodzących przez punkty podziału, a zawierających z linją podstawy dowolny kąt ψ.

Prosta m_s na rys. 133 jest perspektywą prostej m, która leży na płaszczyźnie poziomej i zawiera z tłem kąt φ. Przyjmijmy na prostej m_s punkt M_s i postanówmy podzielić odcinek $T_m M_s$ na trzy, perspektywicznie równe części. W tym celu wykonamy kład płaszczyzny poziomej na tło.

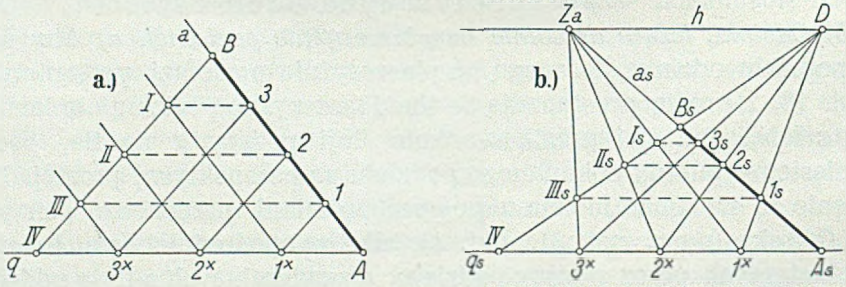
Prosta m zajmie położenie prostej m^0, równoległej do promienia $O^0 Z_m$, a punkt M położenie punktu M^0, który będzie rzutem punktu M_s z punktu O^0 na prostą m^0. Podzielmy odcinek $T_m M^0$ na trzy równe części i poprowadźmy proste $a^0 // b^0 // c^0$, nachylone pod dowolnym kątem ψ do linji podstawy p; punkt III przecięcia się prostej c^0 z podstawą p połączmy z punktem M_s prostą c_s, która przetnie horyzont w punkcie D. Punkty I i II połączmy następnie z punktem D prostemi a_s i b_s; te ostatnie — jako perspektywy równoległych prostych a i b — wyznaczą na prostej m_s punkty 1_s i 2_s, dzielące odcinek $T_m M_s$ na trzy perspektywicznie równe części.



Rys. 133.

Przedłużenia podziałki perspektywicznej na prostej m_s — dokonamy podobnie, jak w zadaniu przedstawionem na rys. 70. Z punktu 2_s wykreślimy prostą $p' // p$, na którą przeniesiemy odcinek $\overline{2_s III'}$ żądaną ilość razy i punkty podziału rzucimy z punktu D na prostą m_s.

Kąt ψ przyjęliśmy dowolny, poczem dopiero otrzymaliśmy kierunek promienia c_s, a więc i punkt D. Położenie punktu D na linji horyzontu



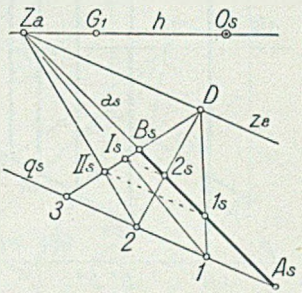
Rys. 134 *a*, *b*.

zależy zatem od obranego dowolnie kąta ψ, wobec czego moglibyśmy punkt ten przyjąć zgóry, a przez połączenie go z punktem M_s otrzymać punkt III na p. Dzieląc następnie odcinek $T_m III$ na trzy równe części

i rzucając punkty podziału *I* i *II* z punktu *D* na m_s, otrzymamy punkty 1_s i 2_s, które dzielą odcinek $\overline{T_m M_s}$ na trzy perspektywicznie równe części.

Punkt *D*, przy pomocy którego dokonywa się perspektywiczny podział odcinka, nazywać będziemy *punktem dzielenia*.

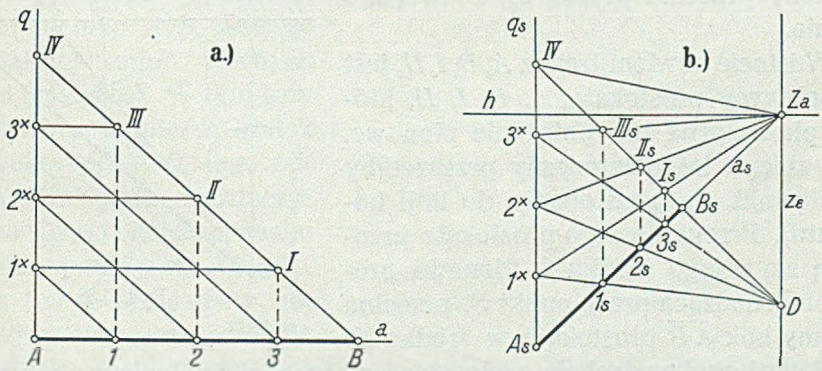
β) Celem podziału odcinka $\overline{AB}$ prostej *a* (rys. 134*a*), np. na cztery równe części, poprowadzimy przez punkt *A* prostą *q*, odmierzymy cztery równe, dowolnej długości odcinki $\overline{A\,1^\times} = \overline{1^\times 2^\times} = \overline{2^\times 3^\times} = \overline{3^\times IV}$ i punkt końcowy *IV* połączymy z punktem *B*. Promienie, wykreślone z punktów $1^\times$, $2^\times$ i $3^\times$, równoległe do boku $\overline{IV\,B}$, przetną prostą *a* w punktach podziału *1*, *2* i *3*. Równoległe do prostej *a*, poprowadzone z punktów $1^\times$, $2^\times$ i $3^\times$, przetną bok $\overline{IV\,B}$ w punktach *I*, *II* i *III*; proste *I3*, *II2* i *III1* są równoległe do prostej *q*.



Rys. 135.

Konfiguracji tej użyć można do podziału dowolnie w przestrzeni położonego odcinka, byleby prosta *q* była równoległą do tła. Perspektywę rys. 134*a* przedstawia rys. 134*b*; prostą *q* przyjęliśmy równolegle do horyzontu. Perspektywy promieni równoległych do boku $\overline{IV\,B}$ przetną się w punkcie dzielenia *D* na horyzoncie; perspektywy prostych, równoległych do prostej *a* schodzą się w śladzie zbiegu Z_a; proste $I_s 3_s$, $II_s 2_s$ i $III_s 1_s$ są równoległe do q_s.

Przykład użycia prostej *q*, równoległej do tła, ale poza tem dowolnie nachylonej do płaszczyzny poziomej, stanowi rys. 135. Odcinek $\overline{A_s B_s}$

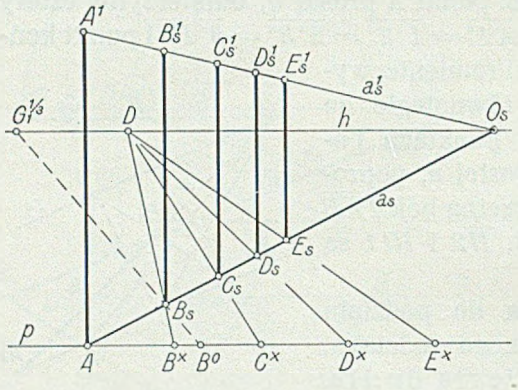


Rys. 136*a*, *b*.

podzieliliśmy tam na trzy perspektywicznie równe części. Ślad zbiegu z_ε płaszczyzny, przechodzącej przez proste *a* i *q*, jest równoległy do q_a; na śladzie tym leży punkt dzielenia *D*.

Jeżeli prosta q będzie pionowa, to konstrukcja podziału odcinka $\overline{A_s B_s}$ na cztery perspektywicznie równe części przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 136 *a*, *b*.

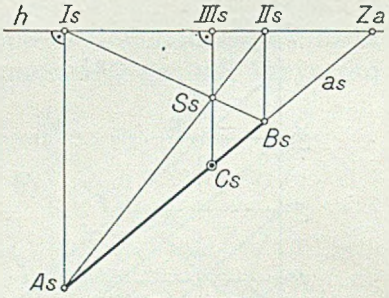
Podział odcinka prostopadłego do tła na rys. 73*a*, *b* jest wykonany przy użyciu prostej q, równoległej do horyzontu.



Rys. 137.

Rys. 137 przedstawia perspektywę a_s prostej a, prostopadłej do tła. Odcinek $\overline{AE}$ tej prostej podzieliliśmy na cztery równe części i w punktach podziału poprowadziliśmy proste pionowe równej wysokości i równe odcinkowi $\overline{AA^1}$. Prawdziwa długość odcinków $\overline{AB} = \ldots = \overline{DE}$ równa jest potrójnej długości odcinka $\overline{AB^0}$.

c) Perspektywiczny środek odcinka, t. j. perspektywę środka odcinka, którego rzut perspektywiczny jest dany, znaleźć można przez zastosowanie poznanej wyżej konstrukcji. Szczególnie jednak dogodną metodę perspektywicznego połowienia odcinka podaje rys. 138. Z punktów końcowych odcinka $\overline{A_s B_s}$, którego śladem zbiegu jest punkt Z_a, kreślimy prostopadłe do linji horyzontu, a następnie przekątne $\overline{A_s II_s}$ i $\overline{B_s I_s}$. Punkt C_s, w którym prostopadła wykreślona do linji horyzontu przez punkt S_s przecina prostą a_s, rozwiązuje zadanie.

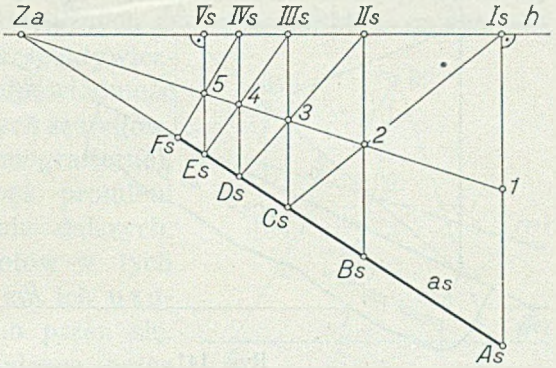


Rys. 138.

W istocie bowiem trapez $A_s B_s I_s II_s$ jest perspektywą prostokąta A, B, I, II, którego płaszczyzna ma położenie pionowe. (Ślad zbiegu tej płaszczyzny przeszedłby przez punkt Z_a, prostopadle do linji horyzontu). Przekątne tego prostokąta przecinają się w jego środku S. Pionowa prosta, przechodząca przez punkt S, przecina poziomy bok $\overline{AB}$ prostokąta w środku C.

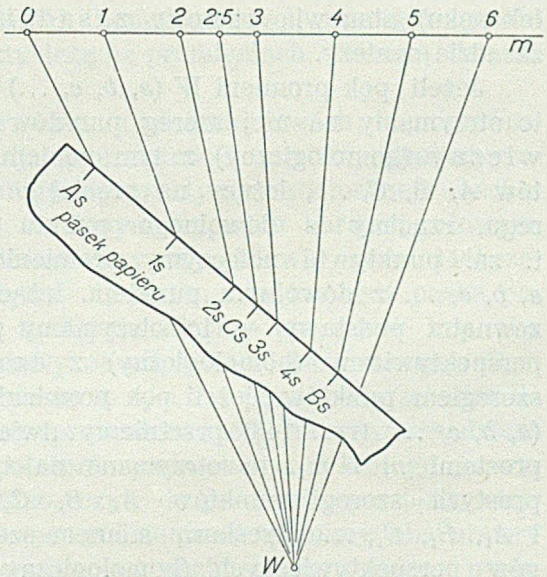
Powyższą konstrukcję zastosować można do dzielenia poziomego odcinka na parzystą ilość części, lub do jego wielokrotnego przedłużenia. Pierwsze zadanie wymaga powtórzenia konstrukcji dla każdej uzyskanej części. Drugie zadanie podaje rys. 139, gdzie poziomy odcinek $\overline{AB}$ przedłużyliśmy pięciokrotnie. Daną perspektywę $\overline{A_s B_s}$, odcinka $\overline{AB}$, rzuciliśmy prostopadle na linję horyzontu i połączyliśmy środ-

kowy punkt *1* odcinka $\overline{A_s I_s}$ ze śladem zbiegu Z_n. Prosta $I_s 2$ przetnie prostą a_s w punkcie C_s; odcinek $\overline{C_s B_s}$ równy jest perspektywicznie odcinkowi $\overline{B_s A_s}$. Przez powtórzenie tej konstrukcji otrzymamy punkty D_s, E_s i F_s, ograniczające perspektywicznie równe odcinki i leżące na przedłużeniu odcinka $\overline{A_s B_s}$.



Rys. 139.

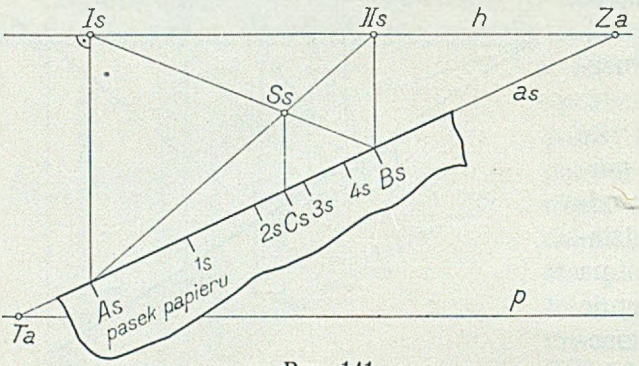
d) Pęki Pilleťa. Ze wszystkich sposobów perspektywicznego dzielenia odcinków i rysowania podziałek perspektywicznych na szczególną uwagę zasługuje pomysł *J. J. Pilleťa* zastosowania do tych celów pęków promieni, które autor nazwał „echelles divergentes". Pęk taki — nazywać go będziemy *pękiem Pilleťa* — otrzymamy, rzucając przyjętą na prostej *m* (rys. 140) podziałkę, o dowolnej jednostce, z dowolnego wierzchołka *W*.



Rys. 140.

O zastosowaniu pęku *Pilleťa* pouczy nas zadanie podziału danego w perspektywie odcinka $\overline{A_s B_s}$ na pięć perspektywicznie równych części (rys. 141). W tym celu znajdziemy najpierw środek perspektywiczny C_s tego odcinka. Następnie zaznaczymy, na równo odciętym pasku papieru, punkty A_s, C_s i B_s. Pasek ten przeniesiemy na przygotowany pęk *Pilleťa* i ułożymy go tak, aby punkt A_s padł na promień $O-W$, punkt B_s na promień $5-W$, a punkt C_s na promień, przechodzący przez środek odcinka $\overline{O5}$, t. j. na promień $2{\cdot}5-W$. Pośrednie promienie pęku *Pilleťa* przetną krawędź paska papieru w punktach 1_s, 2_s, 3_s i 4_s, które po zaznaczeniu ołówkiem przeniesiemy na odcinek $\overline{A_s B_s}$ na rys. 141.

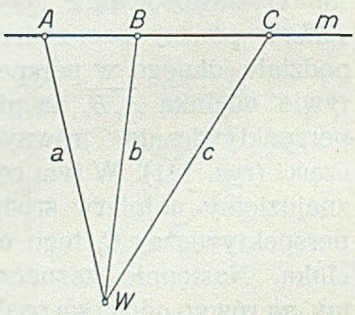
Widzimy, że pośrednictwo pęku promieni pozwala dzielić odcinek w sposób szybki, łatwy i z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych. Wyrysowany na sztywnym papierze pęk *Pilleťa* (byleby promienie jego były dostatecznie długie) jest przyrządem rysunkowym, którym posługiwać się można z wielką ekonomją linij konstrukcyjnych i czasu.



Rys. 141.

Podstawa teoretyczna podziałki Pilleťa. Szereg punktów na linji prostej, zwanej podstawą tego szeregu, i pęk promieni, przechodzący przez jeden punkt (wierzchołek pęku), stanowią utwory zasadnicze geometrji, zbudowanej na zasadzie syntezy.

Jeżeli pęk promieni W (a, b, c, ...) (rys. 142) przetniemy prostą m, to otrzymamy na niej szereg punktów m (A, B, C, ...) perspektywiczny (homologiczny) z tym pękiem promieni. Jeżeli szereg punktów A, B, C, ..., leżący na prostej m (rys. 142) podstawie tego szeregu, rzucimy z dowolnego punktu W, t. zn. punkty te połączymy promieniami a, b, c, ... z dowolnym punktem, leżącym zewnątrz podstawy — to otrzymamy pęk perspektywiczny (homologiczny) z danym szeregiem punktów. Jeżeli pęk promieni W (a, b, c, ...) (rys. 143) przetniemy dwiema prostemi m i m_1, to otrzymane na tych prostych szeregi punktów A, B, C, ... i A_1, B_1, C_1, ... określamy mianem szeregów perspektywicznych (homologicznych).

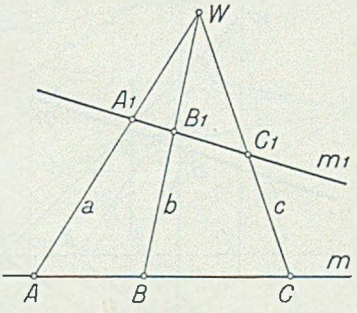


Rys. 142.

Zachowując wzajemne położenie promieni a, b, c, ... w pęku o wierzchołku W (rys. 142), przesuńmy prostą m, wraz z jej elementami A, B, C, ... w nowe położenie (rys. 144). Punktowi A, na podstawie m, odpowie w dalszym ciągu promień a w pęku W (a, b, c, ...), punktowi B odpowie promień b i t. d. Między elementami obu utworów zasadniczych zachodzi więc nadal odpowiedniość jedno-jednoznaczna, czyli t. zw. odpowiedniość doskonała, tylko że promienie

pęku nie przechodzą już przez odpowiadające im punkty w szeregu na podstawie m. Mówimy, że szereg punktów i pęk promieni na rys. 144 są rzutowe lub homograficzne.

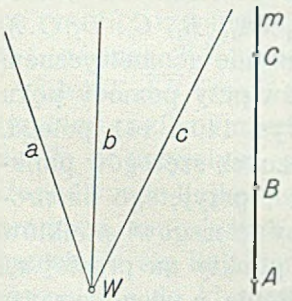
Podobnie, przez wzajemne przesunięcie prostych m i m_1, stanowiących podstawy dwóch perspektywicznych szeregów punktów na rys. 143, zniszczymy ich położenie perspektywiczne, ale zachowamy nadal odpowiedniość doskonałą między elementami tych szeregów. Otrzymamy szeregi rzutowe (homograficzne).



Rys. 143.

O ile szereg punktów i pęk promieni są perspektywiczne, to szukanie dalszych, odpowiadających sobie elementów w tych utworach zasadniczych, czyli t. zw. ich uzupełnianie, tłumaczy się samo przez się. Punkty podstawy m i przechodzące przez nie promienie pęku o wierzchołku W są elementami homologicznemi. Podobnie ma się sprawa z uzupełnianiem dwóch homologicznych szeregów punktów. Odpowiadające sobie punkty leżą na promieniach, które są elementami jednego pęku.

Inaczej przedstawia się sprawa uzupełniania dwóch homograficznych utworów zasadniczych. Pomijając tu metodę konstrukcyj geometrycznych takich uzupełnień, zadowolimy się praktycznym sposobem mechanicznym, w danym wypadku bardziej celowym.

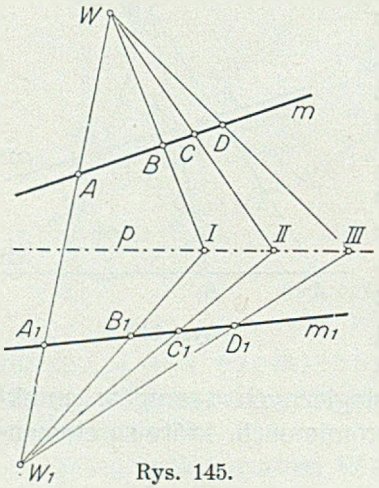


Rys. 144.

Przenieśmy dany na podstawie m (rys. 144) szereg punktów A, B, C, ... na krawędź paska papieru, a następnie ułóżmy ten pasek tak, aby punkty padły na odpowiadające im homograficznie promienie a, b, c, ... pęku o wierzchołku W. Tą drogą sprowadzimy oba utwory zasadnicze do ich położenia pierwotnego, z którego je wyprowadzono, czyli do położenia perspektywicznego. W tem położeniu uzupełnimy oba utwory i tak powielony na pasku papieru szereg punktów przeniesiemy na prostą m.

Ale w tem miejscu nasuwa się nam zasadnicze pytanie następujące: ile elementów musi być podporządkowanych sobie wzajemnie w dwóch utworach zasadniczych, aby utwory te, jako homograficzne, mogły być następnie uzupełnione? Innemi słowy: iloma parami elementów wyznaczony jest związek homograficzny między dwoma utworami zasadniczemi, albo: z jakiej

najmniejszej ilości elementów składać się mogą dwa perspektywiczne utwory zasadnicze, aby po wzajemnem przesunięciu podstaw tych utworów uzupełnienie ich było możliwe? Odpowiedzią na to pytanie jest następujące, podstawowe, twierdzenie geometrji syntetycznej: homografja dwóch zasadniczych utworów jest wyznaczona wówczas, gdy każdemu z *trzech* przyjętych elementów jednego utworu podporządkowany jest jeden jedyny element z *trzech*, należących do utworu drugiego.

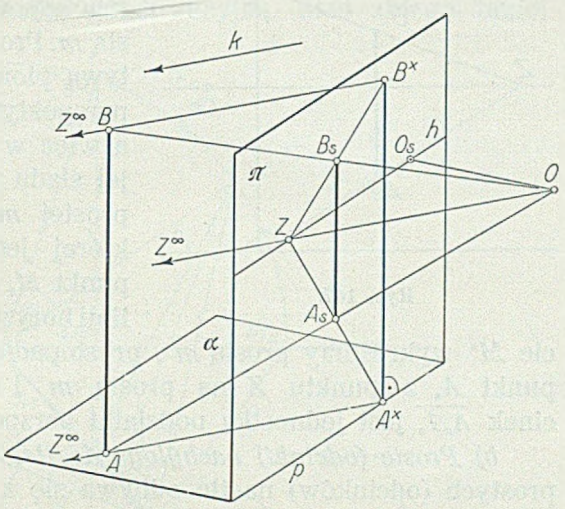


Rys. 145.

Niechaj punktom A, B i C na podstawie m (rys. 145) odpowiadają, na podstawie m_1, punkty A_1, B_1 i C_1. Punkty A i A_1, B i B_1, C i C_1 stanowią pary odpowiadających sobie punktów, dwóch homograficznych szeregów na prostych m i m_1. Połączmy punkty A i A_1 prostą i obierzmy na niej dowolnie punkty W i W_1; pierwszy połączmy z punktami B i C, drugi z punktami B_1 i C_1. Promienie WB i W_1B_1 przetną się w punkcie I, pozostała para w punkcie II. Wykreślmy prostą p, łączącą punkty I i II. Każdemu punktowi tej prostej odpowiada jeden punkt na prostej m i jeden na m_1. Punkty te, jak np. D i D_1, są dalszemi elementami odpowiedniemi w szeregach homograficznych m (A, B, C, D, ...) i m_1 (A_1, B_1, C_1, D_1, ...).

Wypowiedziane wyżej twierdzenie jest równocześnie geometrycznem uzasadnieniem perspektywicznego dzielenia odcinków przy pomocy pęku promieni. Zadanie bowiem przeprowadzone na rys. 140 i 141 polega, w istocie swej, na uzupełnieniu dwóch homograficznych szeregów punktów: jednego na podstawie a_s (rys. 141) i drugiego, przyjętego na prostej m (rys. 140). W szczególności chodzi o to, aby szeregowi punktów na podstawie m podporządkować homograficznie punkty na prostej a_s. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do określenia, a więc i rozwiązania tego zadania, jest znajomość trzech par odpowiadających sobie elementów w obu szeregach. Punktowi A_s prostej a_s podporządkujemy punkt O na podstawie m, punktowi B_s punkt 5, a środkowi $2{\cdot}5$ odcinka $\overline{05}$ środek perspektywiczny odcinka $\overline{A_sB_s}$, t. j. punkt C_s. Punkty podziału odcinka $\overline{A_sB_s}$ będą perspektywą punktów podziału odcinka $\overline{05}$. Znalazłszy punkt C_s, odpowiadający homograficznie punktowi $2{\cdot}5$, sprowadziliśmy oba szeregi, zapomocą paska papieru, do położenia perspektywicznego, uzupełniliśmy szereg, którego podstawą jest krawędź paska papieru, i wróciliśmy z nim na podstawę a_s.

28. Mierzenie odcinków. Pomiar odcinków, których perspektywa jest dana, lub rysowanie perspektyw odcinków o danej długości, względnie rysowanie podziałek perspektywicznych na danych podstawach i o danych jednostkach, może być wykonane dopiero po sprowadzeniu odnośnych odcinków, względnie prostych, na tło.



Rys. 146.

a) Proste (odcinki) równoległe do tła. Aby znaleźć prawdziwą długość odcinka równoległego do tła, gdy jego perspektywa jest dana, sprowadzimy go na tło zapomocą rzutu równoległego w dowolnym kierunku. Rzut ten będzie równy danemu odcinkowi.

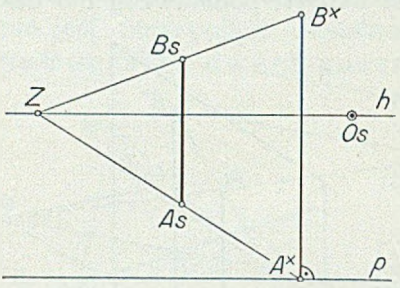
Odcinek $\overline{T_a T_b}$ na rys. 127 jest rzutem równoległym odcinka $\overline{AB}$, równoległego do tła, którego perspektywa $\overline{A_a B_a}$ jest dana, a w szczególności rzutem w kierunku poziomym, określonym śladem zbiegu Z, przyjętym na horyzoncie.

Równoległy do tła odcinek $\overline{AB}$, którego perspektywą jest odcinek $\overline{A_a B_a}$ na rys. 132, rzuciliśmy w kierunku, określonym śladem zbiegu Z; rzut ten, t. j. odcinek $\overline{T_a T_b}$, równy jest odcinkowi $\overline{AB}$.

Jeżeli $\overline{AB}$ (rys. 146) jest odcinkiem pionowym, punkt A jego śladem (rzutem) poziomym, odcinek $\overline{A_a B_a}$ jego perspektywą — to rzut odcinka $\overline{AB}$ na tło w przyjętym, poziomym kierunku k, jest odcinkiem $\overline{A^x B^x}$, prostopadłym do linji podstawy p, a więc i do linji horyzontu. Śladem zbiegu promieni, rzucających punkty A i B odcinka $\overline{AB}$ na tło, jest punkt Z przecięcia się linji horyzontu z promieniem, przechodzącym przez oko, równolegle do kierunku rzutu k. Proste ZA^x i ZB^x są perspektywami promieni, rzucających punkty końcowe odcinka $\overline{AB}$ na tło. Jeżeli tedy rzucimy punkt A_a — perspektywę śladu poziomego pionowego odcinka — z dowolnego punktu Z linji horyzontu (rys. 147) na linję podstawy, w otrzymanym tam punkcie A^x poprowadzimy prostopadłą do linji horyzontu i na nią rzucimy punkt B_a z punktu Z, to odcinek $\overline{A^x B^x}$ jest rzutem pionowego odcinka $\overline{AB}$, w kierunku poziomym $Z—O$ na tło i wyraża jego prawdziwą długość.

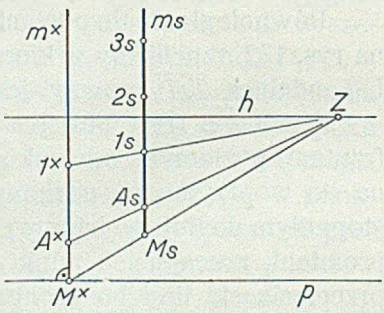
Jeżeli na prostej m, równoległej do tła, odmierzyć mamy w perspektywie odcinek danej długości, lub założyć podziałkę perspektywiczną

o danej jednostce — to i w tych wypadkach rzucimy prostą m równolegle, w dowolnym kierunku, na tło. Na rzucie tym przeprowadzimy żądaną operację geometryczną i otrzymane punkty rzucimy, w tym samym kierunku, na prostą m. Prosta m_s na rys. 148 jest perspektywą pionowej prostej m. Punkt M_s jest perspektywą rzutu poziomego prostej m, a więc w danym wypadku perspektywą jej śladu poziomego. Jeżeli od punktu A prostej m odmierzyć mamy podziałkę, której jednostką ma być *1 cm* — to punkt M_s rzucimy z dowolnego punktu Z linji horyzontu na linję podstawy i w punkcie $M^\times$ wykreślimy prostą $m^\times$, prostopadłą do linji p; następnie rzucimy punkt A_s z punktu Z na prostą $m^\times$ i odmierzymy $\overline{A^\times 1^\times} = 1\,cm$; odcinek $\overline{A_s 1_s}$ jest jednostką podziałki perspektywicznej na prostej m_s.



Rys. 147.

b) Proste (odcinki) nachylone do tła. Sprowadzanie tak położonych prostych (odcinków) na tło odbywa się z reguły za pośrednictwem płaszczyzn przez nie przechodzących. Tym sposobem mierzyliśmy i rysowaliśmy perspektywiczne podziałki na prostych prostopadłych do tła (ust. 18, rys. 69), przyczem okazało się, że rysowanie kładów takich prostych jest zbędne, gdyż pośrednictwo punktów głębokości tłowej, względnie punktów częściowej głębokości, pozwala zużytkować dla konstrukcji linje podstaw (rys. 70).



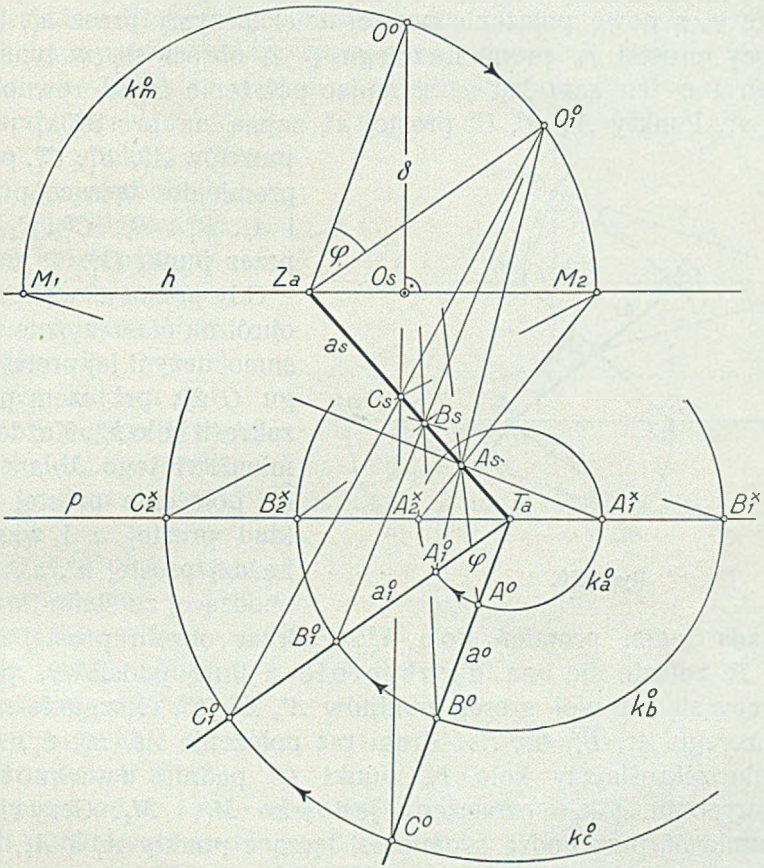
Rys. 148.

Mierzenie prostych (odcinków), nachylonych pod dowolnym kątem do tła, było już przedmiotem ogólnych rozważań w ust. 15. W tem miejscu omówimy tę ważną sprawę bardziej szczegółowo.

Niechaj punkt O_s (rys. 149) będzie punktem głównym, a odcinek δ głębokością tłową. Prosta a_s, wyznaczona śladem tłowym T_a i śladem zbiegu Z_a, jest perspektywą prostej a, która nie jest ani równoległą, ani też prostopadłą do tła, lecz zawiera z nim jakiś kąt η. Przyjęte na prostej a_s punkty A_s, B_s i C_s tworzą na niej, wraz z punktem T_a, podziałkę perspektywiczną; znajdźmy podziałkę na prostej a.

W tym celu poprowadzimy przez prostą a płaszczyznę i wykonamy jej kład na tło. Tym sposobem sprowadzimy prostą a i leżące na niej punkty na tło, gdzie otrzymamy szukaną podziałkę. Płaszczyzna, prze-

prowadzona przez prostą a, może być zupełnie dowolna, tak, jak to miało miejsce w zadaniach, rozpatrywanych w ust. 15. Najdogodniej jednak będzie posługiwać się z reguły płaszczyzną prostopadłą do tła, gdyż ta daje największą ekonomję konstrukcyjną. Ślad zbiegu takiej

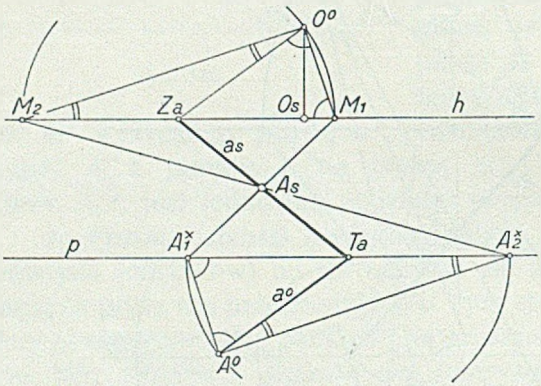


Rys. 149.

płaszczyzny, poprowadzonej przez prostą a, przejdzie przez punkt główny i ślad Z_a; jej ślad tłowy, równoległy do śladu zbiegu, przejdzie przez ślad tłowy T_a. W przykładzie na rys. 149 płaszczyzna ta jest poziomą; jej ślad zbiegu jest linją horyzontu h, a ślad tłowy linją podstawy p. Po obrocie płaszczyzny horyzontu, około linji horyzontu, na tło, oko zajmie położenie punktu O^0. Prosta a^0, równoległa do promienia $O^0 Z_a$, jest kładem prostej a na tło, dokonanym wskutek obrotu poziomej płaszczyzny około linji podstawy p. Rzućmy punkty A_a, B_a i C_a z punktu O^0

na prostą a^0, to otrzymane tam punkty A^0, B^0, C^0 rozwiązują zadanie (ust. 21, pkt *b*).

Obróćmy teraz prostą a^0 około punktu T_a, np. w kierunku ruchu wskazówki zegara, to szereg punktów A^0, B^0, C^0, ... zakreśli pęk kół k_a^0, k_b^0, k_c^0, ... o wspólnym środku T_a. Gdy kąt obrotu prostej a^0 wyniesie φ, a nowe położenie prostej a^0 oznaczymy przez a_1^0, to odpowiadający prostej a_0 promień zbiegu $\overline{O^0 Z_a}$ obróci się w tym samym kierunku i o ten sam kąt φ, zajmując położenie $\overline{O_1^0 Z_a}$, równoległe do prostej a_1^0. Punkty A^0, B^0, C^0 prostej a^0, zajmą na prostej a_1^0 położenie punktów A_1^0, B_1^0, C_1^0, przyczem promienie, łączące punkty A_1^0 i A_s, B_1^0 i B_s, C_1^0 i C_s przejdą przez punkt O_1^0.



Rys. 150.

Gdy prosta a^0 wykona pełny obrót na płaszczyźnie tła, to to samo uczyni jej promień zbiegu $\overline{O^0 Z_a}$, przyczem punkt O^0 zakreśli koło k_m^0. Każdemu promieniowi tego koła odpowiada położenie prostej a^0 jako kład prostej a i wzajemnie: każdej prostej a^0, a_1^0, ..., wychodzącej ze śladu tłowego T_a, odpowiada jeden promień koła k_m^0. Podczas obrotu prostej a^0 około punktu T_a zejdzie się ona dwukrotnie z linją podstawy, przyczem znajdujący się na niej szereg punktów A^0, B^0, C^0, ... zajmie raz położenie szeregu $A_1^\times$, $B_1^\times$, $C_1^\times$, ..., drugi raz położenie $A_2^\times$, $B_2^\times$, $C_2^\times$, ... Równocześnie zakreślający koło k_m^0 punkt O^0 padnie dwukrotnie na linję horyzontu, gdzie oznaczony jest jako M_1 i M_2. Oczywiście, że przez punkt M_1 przechodzą promienie, łączące punkty $A_1^\times$ i A_s, $B_1^\times$ i B_s, $C_1^\times$ i C_s, a przez punkt M_2 promienie, łączące punkt $A_2^\times$ z A_s, $B_2^\times$ z B_s, $C_2^\times$ z C_s. W ust. 15 nazwaliśmy koło k_m^0 *kołem mierzenia*, każdy jego punkt *punktem mierzenia*.

Każdej wiązce prostych równoległych odpowiada na tle jedno koło mierzenia.

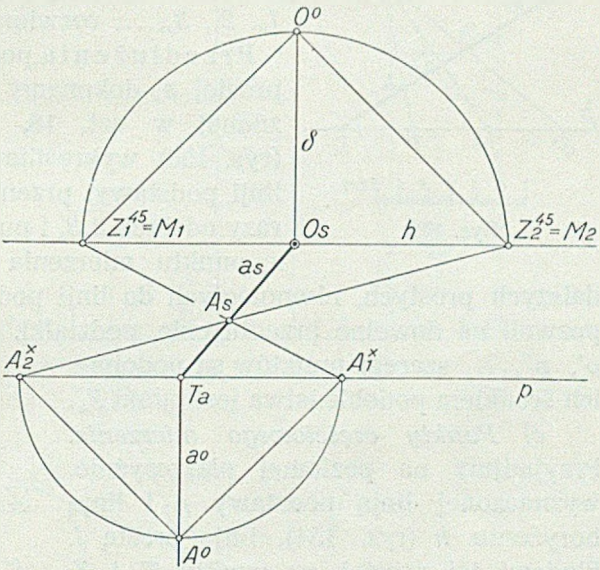
Szczególnie ważną rolę w perspektywie stosowanej odgrywają punkty mierzenia M_1 i M_2, leżące na linji horyzontu, względnie na śladzie zbiegu płaszczyzny, przechodzącej przez daną prostą.

Z rys. 149 widzimy, że mierzenie odcinków na prostej *a* przy pomocy punktów M_1 i M_2 jest dlatego szczególnie dogodne, gdyż wyłącza potrzebę kreślenia kładu tej prostej, który schodzi się z linją podstawy *p*.

Punkty M_1 i M_2 nazywać będziemy *istotnemi* (poziomemi) *punktami mierzenia.*

Jeżeli dowolny punkt A_a prostej a_a (rys. 150) rzucimy z poziomych punktów mierzenia M_1 i M_2 na linję podstawy p — to odcinek $\overline{T_a A_1^x} = \overline{T_a A_2^x}$ równy jest prawdziwej długości odcinka prostej a, ograniczonego jej śladem tłowym T_a i punktem A.

Wykonajmy kład na tło płaszczyzny poziomej, wraz z leżącą na niej prostą a. Koło, zakreślone z punktu T_a, jako środka, na średnicy $\overline{A_1^x A_2^x}$, przetnie kład a^0 prostej a w punkcie A^0. Prosta $A^0 A_1^x$, równoległa do $O^0 M_1$, jest kładem na tło prostej, której perspektywą jest prosta $M_1 A_1^x$; podobnie, prosta $A^0 A_2^x$, równoległa do prostej $O^0 M_2$, jest kładem prostej, której perspektywą jest prosta $M_2 A_2^x$. Punkt A^0 jest kładem na tło punktu A — a więc punkty $O^0 A_a A^0$ leżą na jednym promieniu.



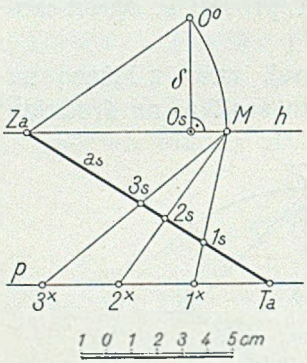
Rys. 151.

Z rys. 150 widzimy, że prosta $A^0 A_1^x$ tworzy z linją podstawy p i z prostą a^0 ten sam kąt. Podobnie promień $A^0 A_2^x$ zawiera z prostemi a^0 i p te same kąty. Wynika stąd, że każdy z dwóch istotnych punktów mierzenia poziomej prostej a określić można, jako ślad zbiegu pęku równoległych promieni, leżących na płaszczyźnie poziomej i zawierających z prostą a i z linją podstawy p te same kąty (ust. 15, str. 33).

Z określenia koła mierzenia i istotnych punktów mierzenia wynika wprost, że koło głębokości uważać można za koło mierzenia, a punkty głębokości za istotne punkty mierzenia prostych, prostopadłych do tła. Punkty głębokości są równocześnie śladami zbiegu pęków równoległych prostych, zawierających z linją podstawy i z prostą prostopadłą do tła równe kąty, a więc 45° (rys. 151).

Przykład. Na prostej a_a (rys. 152), która jest perspektywą poziomej prostej a, wyznaczyć podziałkę perspektywiczną; jednostką mają być 3 *cm* w podziałce rysunku.

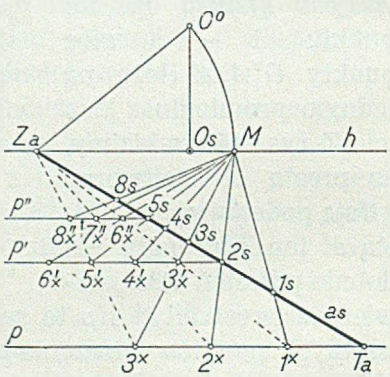
Znając punkt główny O_s i głębokość tłową δ, znajdziemy kład O^0 oka i kład promienia zbiegu danej prostej. Koło, zakreślone z punktu Z_a, jako środka, promieniem równym długości promienia zbiegu, t. j. odcinkiem $\overline{Z_a O^0}$, jest kołem mierzenia, a punkt M przecięcia się tego koła z linją horyzontu jednym z dwóch istotnych punktów mierzenia. Na linji podstawy p odmierzymy, od punktu T_a począwszy, odcinki po 3 *cm* w podziałce rysunku i punkty podziału 1^x, 2^x, 3^x, ... rzucimy z punktu M na prostą a_s. Punkty 1_s, 2_s, 3_s, ... rozwiązują zadanie.



Rys. 152.

Przedłużenia podziałki perspektywicznej na prostej a_s dokonamy zapomocą konstrukcji, poznanej w ust. 18, rys. 70. Przez punkt 2_s (rys. 153) wykreślimy prostą p', równoległą do linji podstawy, przeniesiemy na nią pewną ilość razy odcinek $\overline{2_s 3'_x}$ i punkty $4'_x$, $5'_x$, $6'_x$, ... rzucimy z punktu mierzenia M na prostą a_s. Użycie dalszych prostych, równoległych do linji podstawy, jak np. prostej p'', pozwoli na dowolne przedłużenie podziałki. Otrzymane na prostych p, p', p'', ... szeregi punktów są podobne, ich środkiem podobieństwa jest punkt Z_a.

c) Punkty częściowego mierzenia. Przyjmijmy na poziomej płaszczyźnie, wyznaczonej linją podstawy p i linją horyzontu h (rys. 154), linję prostą l. Śladami tej prostej są punkty T_l i Z, jej perspektywą prosta l_s. Kład płaszczyzny horyzontu na tło, przy danym punkcie głównym O_s i danej głębokości tłowej δ, sprowadzi na tło oko, jako punkt O^0 i promień zbiegu prostej l, jako promień $O^0 Z$. Łuk koła, zakreślony z punktu Z jako środka, długością promienia zbiegu, przetnie horyzont w istotnym punkcie mierzenia M.

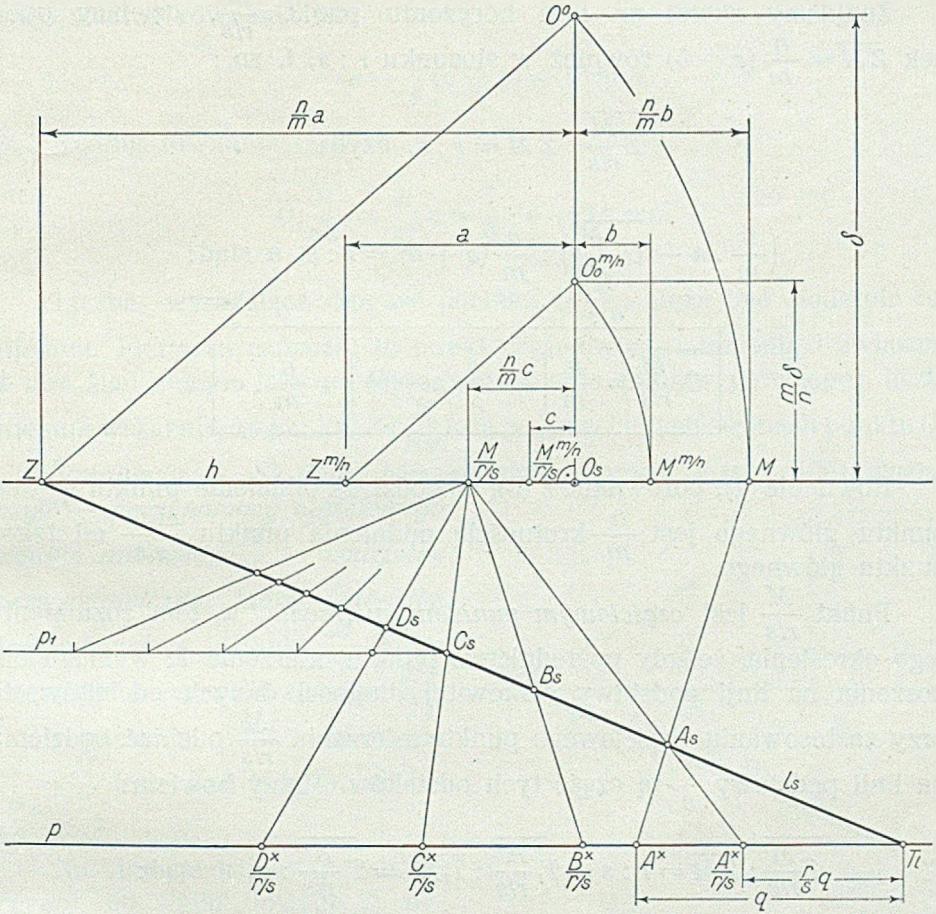


Rys. 153.

Odetnijmy na promieniu $O_s O^0$ odcinek $\overline{O_s O_0^{m|n}}$ równy $\frac{m}{n}$-tej części głębokości tłowej i poprowadźmy z punktu $O_0^{m|n}$ równoległą do $O^0 Z$; na linji horyzontu otrzymamy częściowy ślad zbiegu $Z^{m|n}$ prostej l. Łuk koła, zakreślony z punktu $Z^{m|n}$ jako środka, promieniem $\overline{Z^{m|n} O_0^{m|n}}$, przetnie horyzont w punkcie $M^{m|n}$.

Oznaczmy: $\overline{O_s Z^{m|n}} = a$; $\overline{O_s M^{m|n}} = b$, to $\overline{O_s Z} = \frac{n}{m} \cdot a$, zaś $\overline{O_s M} = \frac{n}{m} \cdot b$

Ponieważ punkt $M^{m|n}$ leży zawsze w obrębie rysunku, więc odcinając — jeśli obszar płaszczyzny rysunkowej na to pozwoli — $\overline{O_s M} = \frac{n}{m} \cdot b$, otrzymamy istotny punkt mierzenia M.



Rys. 154.

Przyjmijmy na linji horyzontu punkt $\frac{M^{m|n}}{r/s}$, któryby dzielił odcinek $\overline{Z^{m|n} M^{m|n}} = (a + b)$ w przyjętym stosunku $r : s$, tak, aby zachodziła relacja:

$$\overline{Z^{m|n} \frac{M^{m|n}}{r/s}} : \overline{Z^{m|n} M^{m|n}} = r : s, \text{ czyli:}$$

$$\left(a - \overline{O_s \frac{M^{m|n}}{r/s}}\right) : (a + b) = r : s, \text{ wówczas:}$$

$$\overline{O_s \frac{M^{m|n}}{r/s}} = a - \frac{r}{s}(a+b) = c \quad \ldots\ldots 3)$$

Znajdźmy zkolei na linji horyzontu punkt $\frac{M}{r/s}$, dzielący odcinek $\overline{ZM} = \frac{n}{m}(a+b)$ również w stosunku $r : s$, t. zn.:

$$\overline{Z\frac{M}{r/s}} : \overline{ZM} = r : s, \text{ czyli:}$$

$$\left(\frac{n}{m} \cdot a - \overline{O_s \frac{M}{r/s}}\right) : \frac{n}{m}(a+b) = r : s, \text{ a stąd:}$$

$$\overline{O_s \frac{M}{r/s}} = \frac{n}{m}\left[a - \frac{r}{s}(a+b)\right] = \frac{n}{m} \cdot c \quad \ldots\ldots 4)$$

Równanie (4), porównane z (3), dowodzi, że oddalenie punktu $\frac{M}{r/s}$ od punktu głównego jest $\frac{n}{m}$-krotnością oddalenia punktu $\frac{M^{m|n}}{r/s}$ od tegoż punktu głównego.

Punkt $\frac{M}{r/s}$ jest *częściowym punktem mierzenia*, w tem rozumieniu tego określenia, że gdy pośrednictwo punktu mierzenia M wymaga odnoszenia na linji podstawy całkowitej długości danych odcinków, to przy zastosowaniu częściowego punktu mierzenia $\frac{M}{r/s}$ odcinać będziemy na linji podstawy $\frac{r}{s}$-tą część tych odcinków. Mamy bowiem:

$$\overline{Z\frac{M}{r/s}} : \overline{ZM} = r : s = \overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} : \overline{T_l A^\times} = \overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} : q, \text{ a stąd:}$$

$$\overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} = \frac{r}{s} \cdot q$$

Położenie punktu mierzenia $\frac{M}{r/s}$ na linji horyzontu znajdziemy w sposób następujący: przyjmiemy punkt $\frac{M^{m|n}}{r/s}$, dzielący odcinek $\overline{Z^{m|n} M^{m|n}}$ w stosunku $r : s$; oddalenie c tego punktu od punktu głównego, pomnożone $\frac{n}{m}$ razy, równe jest oddaleniu szukanego, częściowego punktu mierzenia $\frac{M}{r/s}$ od punktu głównego.

Na rys. 154 przyjęliśmy $\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$; $\frac{r}{s}=\frac{3}{5}$, a ponieważ:

$$a=30\ mm,\ b=10\ mm,$$

więc według równania (3):

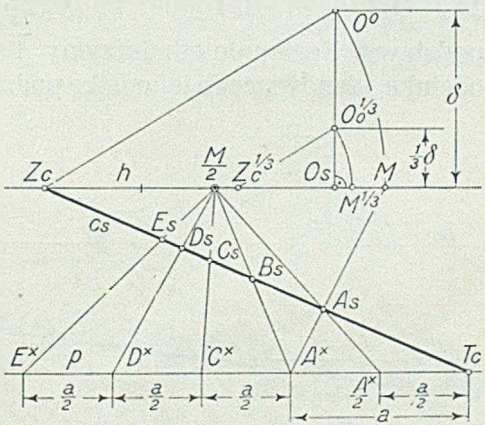
$$c=a-\frac{r}{s}(a+b)=6\ mm,$$

zaś według równania (4):

$$\overline{O_s\frac{M}{r/s}}=\frac{n}{m}c=\frac{7}{3}\cdot 6=14\ mm$$

Liczba, wyrażająca długość odcinka $\overline{O_s\frac{M}{r/s}}$, może być dodatnia lub ujemna. Pierwsza oznacza, że punkt częściowego mierzenia i związany z nim ślad zbiegu leżą po tej samej stronie punktu głównego; liczba ujemna wskazuje, że punkty Z i $\frac{M}{r/s}$ leżą po przeciwnych stronach punktu O_s.

Przykłady. 1. *Na danej perspektywie c_s prostej c* (rys. 155) *wyznaczyć — przy pomocy częściowego punktu mierzenia* $\frac{M}{1/2}$ *— podziałkę perspektywiczną, której jednostką jest odcinek a.* (Punkt $\frac{M}{1/2}$ oznaczony jest na rys. 155 znakiem $\frac{M}{2}$).



Rys. 155.

Częściowy punkt mierzenia $\frac{M}{1/2}\equiv\frac{M}{2}$ jest środkiem odcinka $\overline{Z_cM}$.

Na linji podstawy p odmierzymy, od śladu tłowego T_c począwszy, szereg odcinków o długości $\frac{a}{2}$ i punkty podziału $\frac{A^x}{2}$, A^x, C^x, ... rzucimy z punktu $\frac{M}{2}$ na prostą c_s, gdzie otrzymamy punkty A_s, B_s, C_s, ..., tworzące żądaną podziałkę.

Gdybyśmy posługiwać się musieli tylko trzecią częścią głębokości tłowej i znali częściowy ślad zbiegu $Z_c^{1/3}$, to położenie punktu $\frac{M}{1/2}$ znajdziemy z równania (4), str. 96:

$$\overline{O_s\frac{M}{2}}=3\left[a-\frac{1}{2}(a+b)\right]$$

Ponieważ:

$$a = \overline{Z_c^{1/3} O_s} = 12{\cdot}5 \ mm; \quad b = \overline{O_s M^{1/3}} = 2 \ mm,$$

więc:

$$\overline{O_s \frac{M}{2}} = \sim 16 \ mm$$

2. *Wyznaczyć podziałkę perspektywiczną na prostej a_s, począwszy od jej punktu A_s, gdy dana jest szósta część głębokości tłowej i częściowy ślad zbiegu $Z_a^{1/6}$* (rys. 156). Do rozwiązania zadania użyjemy częściowego punktu mierzenia $\frac{M}{2/3}$.

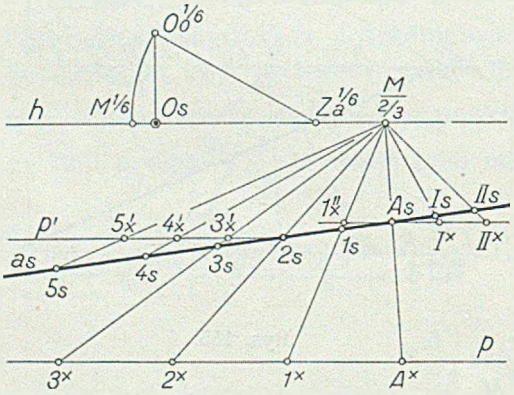
Z rysunku czytamy:

$$a = \overline{O_s Z_a^{1/6}} = 21 \ mm; \quad b = \overline{M^{1/6} O_s} = 3 \ mm,$$

a więc według równania (4), str. 96:

$$\overline{O_s \frac{M}{2/3}} = 6\left[21 - \frac{2}{3}(21 + 3)\right] = 30 \ mm$$

Tym sposobem otrzymamy punkt $\frac{M}{2/3}$, z którego rzucimy punkt A_s na linję podstawy. Następnie odmierzymy $\overline{A^\times 1^\times} = \overline{1^\times 2^\times} = \overline{2^\times 3^\times}$ i równe $^2/_3$ długości odcinka, stanowiącego jednostkę podziałki, poczem rzucimy punkty $1^\times, 2^\times, 3^\times$ na prostą a_s, gdzie otrzymamy punkty 1_s, 2_s i 3_s. Punkty 4_s i 5_s otrzymaliśmy przy pomocy prostej p' równoległej do linji podstawy. Punkty podziału I_s, II_s, ... otrzymaliśmy, posługując się prostą poziomą, wykreśloną przez punkt A_s. Odcinek $\overline{A_s 1_\times''}$ odnieśliśmy na prawo od punktu A_s i punkty podziału $I^\times$ i $II^\times$ rzuciliśmy z punktu $\frac{M}{2/3}$ na prostą a_s.



Rys. 156.

3. *Dana jest perspektywa l_s prostej l i jej częściowy ślad zbiegu $Z^{1/4}$* (rys. 157); *odmierzyć na prostej l_s, od punktu A_s, dwa perspektywicznie równe odcinki, których prawdziwa długość równa jest odcinkowi q.*

Do rozwiązania zadania użyjemy takiego częściowego punktu mierzenia, z którego rzut punktu A_s na linję podstawy będzie leżał w obrębie rysunku. Punkt ten winien więc leżeć w pobliżu punktu $M^{1/4}$.

Weźmy pod uwagę punkt $\frac{M^{1/4}}{4/5}$, dzielący odcinek $\overline{Z^{1/4}M^{1/4}}$ w stosunku 4 : 5, czyli stwarzający proporcję:

$$\overline{Z^{1/4}\frac{M^{1/4}}{4/5}} : \overline{Z^{1/4}M^{1/4}} = 4 : 5$$

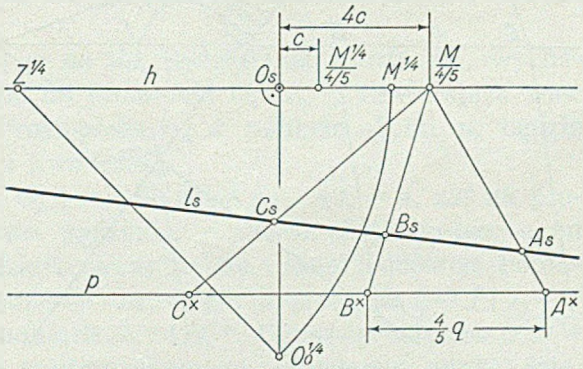
Jeżeli oddalenie punktu $\frac{M^{1/4}}{4/5}$ od punktu głównego, t. j. odcinek $\overline{O_s\frac{M^{1/4}}{4/5}} = c = 5\ mm$, to według równania (4), str. 96, oddalenie częściowego punktu mierzenia $\frac{M}{4/5}$ od punktu głównego, t. j.:

$$\overline{O_s\frac{M}{4/5}} = 4c = 20\ mm$$

Rzut punktu A_s z punktu $\frac{M}{4/5}$ na linję podstawy jest punktem $A^\times$. Odmierzymy $\overline{A^\times B^\times} = \frac{4}{5}q = \overline{B^\times C^\times}$ i punkty $B^\times$, $C^\times$ rzucimy z punktu $\frac{M}{4/5}$ na prostą l_s.

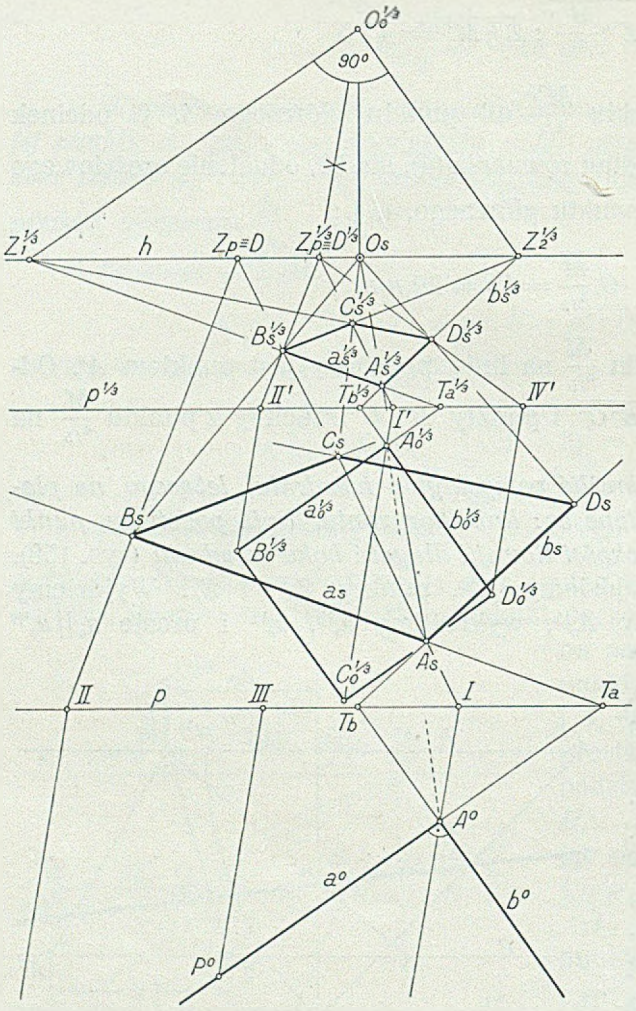
29. Zadania. 1. *Wykreślić perspektywę kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, gdy dane są: linja horyzontu, linja podstawy, punkt główny, trzecia część głębokości tłowej i długość boku kwadratu* (rys. 158).

Przyjmiemy $Z_1^{1/3}$, znajdziemy $Z_2^{1/3}$, punkty $Z_p^{1/3}$ i Z_p. Wyjdziemy z punktu A_s, znajdziemy $A_s^{1/3}$, wykreślimy $a_s^{1/3}$, $b_s^{1/3}$ i proste $a_s \parallel a_s^{1/3}$ oraz $b_s \parallel b_s^{1/3}$. Z punktu $T_a^{1/3}$ wykreślimy prostą $a_0^{1/3}$, równoległą do promienia $O_0^{1/3}Z_1^{1/3}$, a z punktu $T_b^{1/3}$ równoległą do $O_0^{1/3}Z_2^{1/3}$. Otrzymamy punkt $A_0^{1/3}$. Częściowy punkt przekątny $Z_p^{1/3}$ uważajmy za punkt częściowego dzielenia i rzućmy z niego punkt $A_s^{1/3}$ na $p^{1/3}$. Otrzymany tam punkt I' połączymy z punktem $A_0^{1/3}$ prostą, która będzie równoległą do promienia $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$. Odmierzymy $\overline{A_0^{1/3}B_0^{1/3}} = \overline{A_0^{1/3}D_0^{1/3}}$, równe trzeciej części boku danego kwadratu, i dopełnimy wykreślenia kwadratu, znajdując jego czwarty wierzchołek $C_0^{1/3}$. Przez punkty $B_0^{1/3}$ i $D_0^{1/3}$ kreślimy równoległe do $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$, a otrzymane na $p^{1/3}$ punkty II' i IV' łączymy z $Z_p^{1/3}$. Na prostej $a_s^{1/3}$ otrzymamy punkt $B_s^{1/3}$ a na $b_s^{1/3}$ punkt $D_s^{1/3}$. Punkty te łączymy ze śladami $Z_1^{1/3}$ i $Z_2^{1/3}$ prostemi, które przecinają się w punkcie $C_s^{1/3}$. Punkt $B_s^{1/3}$



Rys. 157.

rzucimy z punktu O_s na prostą a_s, zaś punkt $D_s^{1/3}$ na b_s. Otrzymamy punkty B_s i D_s, z których wykreślimy równoległe do promieni $B_s^{1/3}Z_2^{1/3}$ i $D_s^{1/3}Z_1^{1/3}$. Te równoległe przetną się w punkcie C_s. Zamiast rzucać punkty $B_s^{1/3}$ i $D_s^{1/3}$ z punktu O_s na prostą a_s, względnie b_s, odmierzymy $\overline{A_sB_s}$ równe potrójnej długości boku $\overline{A_s^{1/3}B_s^{1/3}}$; podobnie $\overline{A_sD_s}$ jest trzy razy dłuższe od boku $\overline{A_s^{1/3}D_s^{1/3}}$.



Rys. 158.

Między czworokątami $A_sB_sC_sD_s$ i $A_s^{1/3}B_s^{1/3}C_s^{1/3}D_s^{1/3}$ zachodzi podobieństwo środkowe, którego środkiem jest punkt główny O_s. Ten sam związek zachodzi między kwadratem $A_0^{1/3} \ldots D_0^{1/3}$ a kwadratem $A_0 \ldots$, jako kładem przyjętego na płaszczyźnie podstawy. Jeżeli znamy ślady tłowe T_a i T_b boków a i b danego kwadratu, to jego kład znajdziemy, kreśląc $a^0 \| a_0^{1/3}$ i $b_0 \| b_0^{1/3}$. Proste a^0 i b^0 przetną się w wierzchołku A^0 kwadratu, a promień $A^0A_0^{1/3}$ przejdzie przez punkt O_s. Dalszych wierzchołków kwadratu nie rysowaliśmy, ale znajomość punktu A^0 i boków a^0 i b^0 pozwoliłaby na wykreślenie jego perspektywy bez pośrednictwa zmniejszonego kładu podobnego $A_0^{1/3}B_0^{1/3}C_0^{1/3}D_0^{1/3}$. Odmierzymy $\overline{A^0P^0}$, równe połowie boku kwadratu, przez P^0 wykreślimy równoległą do $A^0 - I$, która jest — jak wiemy — równoległą do promienia $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$. Na podstawie p otrzymamy punkt III. Odmierzymy $\overline{III\,II} = \overline{I\,III}$ i punkt II rzucimy z punktu $Z_p \equiv D$ na prostą a_s, jako punkt B_s. Prosta $B_s - Z_2$ jest równoległą do $B_s^{1/3} - Z_2^{1/3}$ i przecina pro-

stą $I - A_s - Z_p$ w punkcie C_s, przez który kreślimy promień równoległy do $D_s^{1/3} - Z_1^{1/3}$. Dochodzimy do punktu D_s, który jest perspektywą czwartego wierzchołka kwadratu.

2. *Wykreślić perspektywę ornamentu, leżącego na płaszczyźnie podstawy, a mieszczącego się w kwadracie, którego bok zawiera z linją podstawy kąt* φ_1 (rys. 159).

Z punktu $O_0^{1/10}$ wykreślimy prostą pod kątem φ_1 do linji horyzontu, która przetnie ją w częściowym śladzie zbiegu $Z_1^{1/10}$. Prostopadła wykreślona w punkcie $O_0^{1/10}$ do promienia $O_0^{1/10} Z_1^{1/10}$ wyznacza na linji horyzontu drugi częściowy ślad zbiegu $Z_2^{1/10}$, tworząc z nim kąt φ_2. Znajdziemy częściowy ślad przekątny $Z_p^{1/10}$, a następnie właściwy ślad Z_p, uwzględniając, że $\overline{O_s Z_p} = 10 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/10}}$.

Ponieważ obszar rysunkowy pozwala na to, więc znajdziemy częściowe ślady zbiegu $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$, odmierzając $\overline{O_s Z_1^{1/10}} = \overline{Z_1^{1/10} Z_1^{1/5}}$ i $\overline{O_s Z_2^{1/10}} = \overline{Z_2^{1/10} Z_2^{1/5}}$.

Przyjęty na linji podstawy p punkt A połączymy z punktem głównym O_s prostą, na której oznaczymy punkt $A_s^{1/5}$, ograniczający piątą część odcinka $\overline{O_s A}$. Proste łączące punkt $A_s^{1/5}$ ze śladami $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$ stanowią kierunki prostych m_s i n_s, które, wychodząc z punktu A, jako wierzchołka kwadratu, przetną linję horyzontu w śladach zbiegu Z_1 i Z_2, leżących poza obrębem rysunku.

Powiedzmy, że dany ornament wymaga wkreślenia w ograniczający go kwadrat siatki, złożonej ze stu przystających kwadratów, o danym boku a.

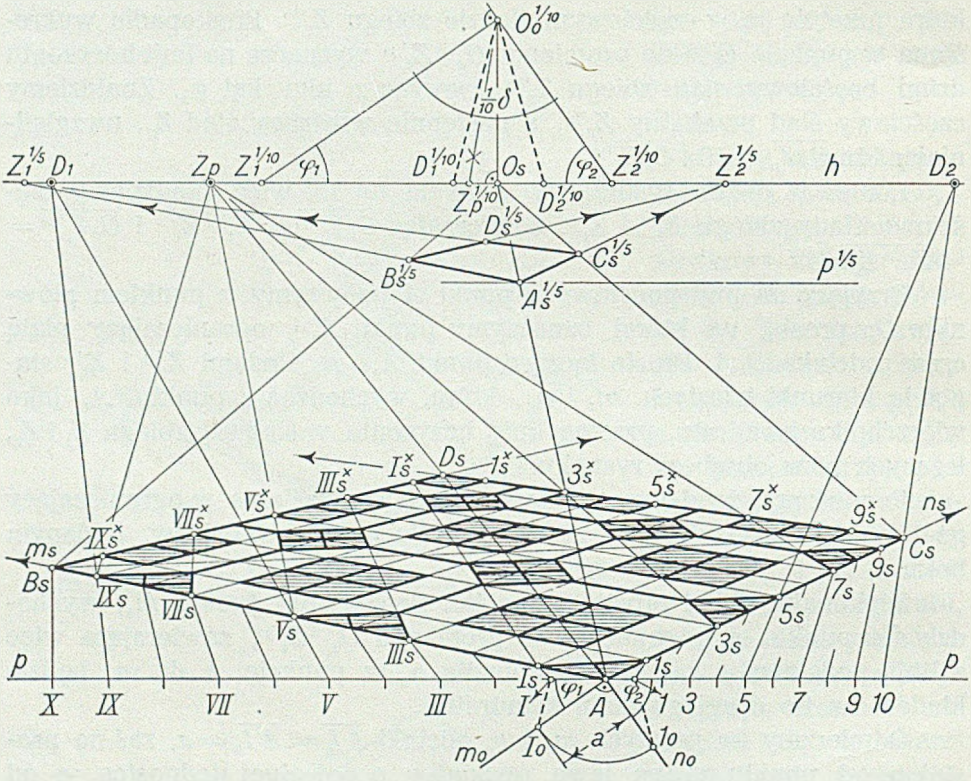
Wykonajmy kład prostej m na tło. Będzie nim prosta m_0, wychodząca z punktu A, równolegle do promienia $O_0^{1/10} Z_1^{1/10}$, zawierająca więc z linją podstawy p kąt φ_1. Prostopadła n_0 w punkcie A do m_0 będzie kładem na tło drugiego boku kwadratu.

Odmierzmy na prostych m_0 i n_0 odcinki $\overline{A 1_0} = \overline{A 1_0} = a$, zaś na prostej p od punktu A na lewo podziałkę o dowolnej jednostce, a od punktu A na prawo drugą podziałkę, ewentualnie o innej jednostce. Poprowadzone przez punkt $O_0^{1/10}$ promienie równoległe do prostych $I_0 - I$ i $\overline{1_0 - 1}$ przetną linję horyzontu w punktach $D_1^{1/10}$ i $D_2^{1/10}$. Odnosząc odcinek $\overline{O_s D_1^{1/10}}$ dziesięciokrotnie na lewo od punktu głównego, otrzymamy punkt dzielenia D_1; podobnie otrzymamy punkt dzielenia D_2, uwzględniając, że $\overline{O_s D_2} = 10 \cdot \overline{O_s D_2^{1/10}}$.

Rzut punktów X, IX, ... I podziałki linji podstawy p z punktu D_1 na prostą m_s podzieli jej odcinek $\overline{A B_s}$ na dziesięć perspektywicznie równych części. Podobnie rzut punktów *10*, *9*, ... *1* prostej p z punktu D_2 na prostą n_s dzieli bok $\overline{A C_s}$ perspektywy kwadratu.

Punkty B_s i C_s połączymy z punktem głównym, a odmierzywszy $\overline{O_s B_s^{1/5}}$, równe piątej części odcinka $\overline{O_s B_s}$ i $\overline{O_s C_s^{1/5}}$, równe piątej części odcinka $\overline{O_s C_s}$,

wykreślimy proste $B_s^{1/5} Z_2^{1/5}$ i $C_s^{1/5} Z_1^{1/5}$, które przetną się w punkcie $D_s^{1/5}$. Prosta, wykreślona z punktu B_s równolegle do promienia $B_s^{1/5} Z_2^{1/5}$, przetnie prostą, poprowadzoną z punktu C_s równolegle do kierunku $C_s^{1/5} Z_1^{1/5}$, w punkcie D_s, który jest perspektywą czwartego wierzchołka kwadratu. Promień $O_s D_s$ przejdzie przez punkt $D_s^{1/5}$, przyczem $O_s D_s^{1/5} : O_s D_s = 1 : 5$. Prosta $A D_s$, jako perspektywa przekątnej, przejdzie przez punkt Z_p.



Rys. 159.

Czworokąty $A_s^{1/5} B_s^{1/5} C_s^{1/5} D_s^{1/5}$ i $A_s B_s C_s D_s$ są podobne i podobnie położone; ich środkiem podobieństwa jest punkt główny O_s. Pierwszy, o boku pięć razy krótszym od boku drugiego, jest perspektywą kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, której śladem poziomym (linją podstawy) jest prosta $p^{1/5}$. Oddalenie prostej $p^{1/5}$ od linji horyzontu równe jest piątej części odległości linji podstawy p od linji horyzontu.

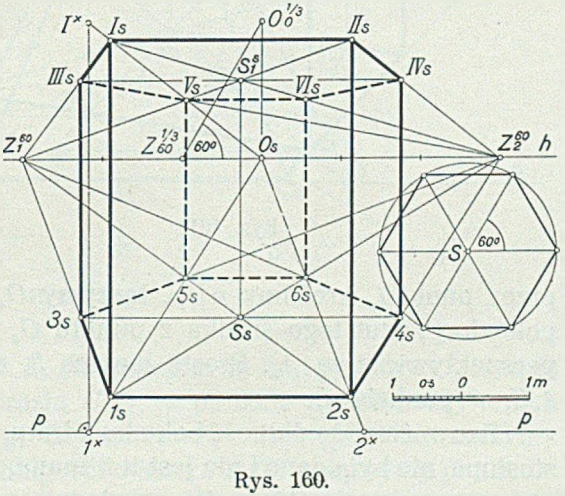
Proste, łączące punkty podziału boków $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$, są równoległe do przekątnej $\overline{AD}$ — punkt Z_p jest więc ich śladem zbiegu. Rzucimy punkty I_s, II_s, ... IX_s, z punktu Z_p na bok $\overline{B_s D_s}$, gdzie otrzymamy perspektywiczny szereg punktów I_s^x, II_s^x, ... IX_s^x. Rzut szeregu punktów

1_s, 2_s, ... 9_s, z punktu Z_p na bok $\overline{C_s D_s}$, jest szeregiem $1_s^\times$, $2_s^\times$, ... $9_s^\times$. Łącząc odpowiednie punkty na przeciwległych bokach czworokąta $A B_s C_s D_s$, otrzymamy perspektywę siatki kwadratów, która pozwoli na narysowanie żądanego ornamentu.

3. *Wykreślić czołową perspektywę graniastosłupa, którego podstawa — umiarowy sześciokąt o boku równym 4 m w podziałce rysunku — leży na płaszczyźnie poziomej. Wysokość graniastosłupa wynosi 6 m* (rys. 160).

Wysokość horyzontu przyjęliśmy 4 *m*, głębokość tłową 6 *m*, przyczem operować będziemy trzecią jej częścią.

Promień wykreślony z punktu $O_0^{1/3}$, pod kątem 60° do linji horyzontu, przecina ją w punkcie $Z_{60}^{1/3}$, częściowym śladzie zbiegu prostych poziomych, nachylonych do tła pod kątem 60°. Znajdziemy właściwe ślady zbiegu Z_1^{60} i Z_2^{60}, położone symetrycznie względem punktu głównego, poczem odmierzymy na linji podstawy odcinek $\overline{1^\times 2^\times}$ równy 4 *m* i połączymy jego punkty końcowe $1^\times$ i $2^\times$ z punktem O_s. Przez punkt 1_s, przyjęty dowolnie na promieniu $1^\times O_s$, wykreślimy równoległą do linji podstawy, która przetnie promień $2^\times O_s$ w punkcie 2_s. Ślady zbiegu Z_1^{60} i Z_2^{60} pozwolą na wyszukanie dalszych wierzchołków sześciokąta, będącego perspektywą podstawy graniastosłupa. Wysokość graniastosłupa równą 6 *m* odmierzymy na tle, jako odcinek $\overline{1^\times I^\times}$ i punkt $I^\times$ rzucimy z punktu głównego na prostopadłą do horyzontu, wykreśloną w punkcie 1_s. Otrzymamy punkt I_s; konstrukcję dalszych punktów perspektywy górnej podstawy graniastosłupa tłumaczy rysunek.



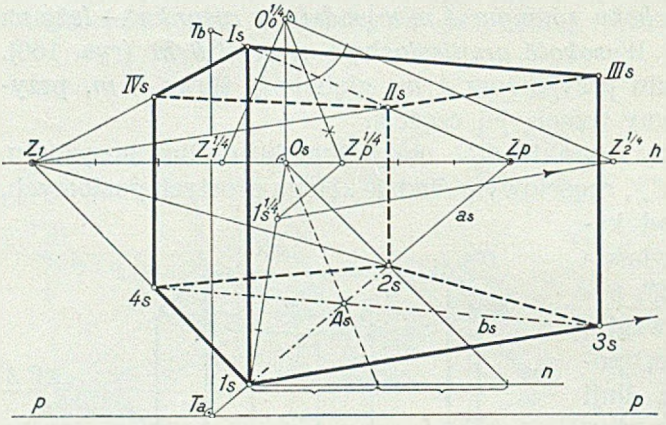
Rys. 160.

4. *Wykreślić boczną perspektywę prostego graniastosłupa, którego podstawa (kwadrat) spoczywa na płaszczyźnie poziomej, wyznaczonej linją podstawy i linją horyzontu* (rys. 161).

Przyjmiemy punkt główny O_s i czwartą część głębokości tłowej, poczem obierzemy dowolnie częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/4}$. Prostopadła, wykreślona w punkcie $O_0^{1/4}$ do promienia $O_0^{1/4} - Z_1^{1/4}$, przetnie linję horyzontu w punkcie $Z_2^{1/4}$, który jest częściowym śladem zbiegu prostych, prostopadłych do kierunku, określonego częściowym śladem zbiegu $Z_1^{1/4}$. Zkolei znajdziemy częściowy ślad zbiegu $Z_p^{1/4}$ przekątnej kwadratu (punkt prze-

cięcia się dwusiecznej kąta prostego $Z_1^{1/4} O_0^{1/4} Z_2^{1/4}$ z linją horyzontu), a następnie ślady zbiegu Z_p i Z_1, wiedząc, że: $\overline{O_s Z_p} = 4 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/4}}$; $\overline{O_s Z_1} = 4 \cdot \overline{O_s Z_1^{1/4}}$.

Dowolnie przyjęty punkt 1_s łączymy z punktami O_s, Z_1 i Z_p. Punkt $1_s^{1/4}$, ograniczający czwartą część odcinka $\overline{1_s O_s}$, połączymy z punktem $Z_2^{1/4}$ prostą, do której wykreślimy równoległą b_s przez punkt 1_s. Dowolny punkt 2_s prostej a_s połączymy ze śladem Z_1 promieniem, który przetnie prostą b_s w punkcie 3_s.



Rys. 161.

Przy pomocy punktu głównego O_s, jako punktu dzielenia, znajdziemy środek perspektywiczny A_s odcinka $\overline{1_s 2_s}$, mianowicie przez punkt 1_s kreślimy $n \parallel p$, łączymy O_s z 2_s i otrzymany na n odcinek połowimy; rzut tego środka z punktu O_s na a_s jest szukanym środkiem perspektywicznym A_s. Prosta łącząca 3_s z punktem A_s przetnie promień $1_s Z_1$ w punkcie 4_s.

Zauważmy, że długość boku kwadratu, stanowiącego podstawę graniastosłupa, nie była dana i nie jest też znana. Dopiero przez wykonanie kładu płaszczyzny poziomej na tło, względnie użycie punktu mierzenia, oznaczyć możemy długość tego boku, a więc i prawdziwą wielkość podstawy.

Perspektywę krawędzi bocznych graniastosłupa wyznaczyliśmy, jak w zadaniu poprzedniem, odmierzając daną wysokość na tle, jako odcinek $\overline{T_s T_b}$.

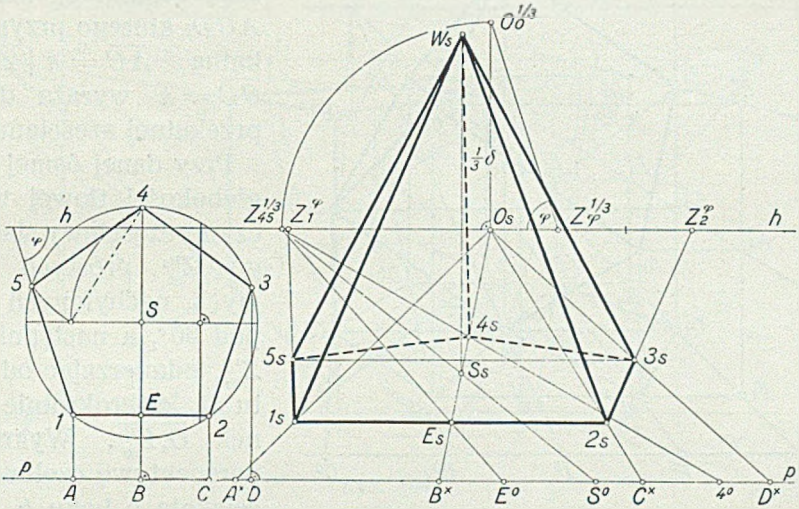
5. *Wykreślić perspektywę pięciościennego, umiarowego ostrosłupa, stojącego na płaszczyźnie poziomej* (rys. 162).

Położenie pięciokąta podstawy względem tła, w zmniejszeniu do trzeciej części, uzmysławia lewa część rys. 162.

Posługujemy się trzecią częścią głębokości tłowej. Z punktu $O_0^{1/3}$ kreślimy prostą pod kątem φ do linji horyzontu, na której otrzymamy częściowy ślad zbiegu $Z_\varphi^{1/3}$. Wyznaczymy ślad zbiegu Z_2^φ i symetrycznie względem punktu głównego leżący ślad Z_1^φ.

Na linji podstawy odmierzymy odcinek $\overline{A^\times C^\times}$, równy długości boku pięciokąta (t. zn. równy potrójnej długości odcinka $\overline{AC}$), i połączymy punkty $A^\times$, $C^\times$, a także punkt środkowy $B^\times$ z punktem głównym O_s.

Odmierzymy $\overline{B^x E^0} = \overline{BE}$ i połączymy punkt E^0 z punktem częściowej głębokości $Z_{45}^{1/3}$ prostą, która przetnie promień $B^x O_s$ w punkcie E_s. Odcinek $B^x E_s$ jest perspektywą odcinka, którego długość równa jest potrójnej długości odcinka BE.



Rys. 162.

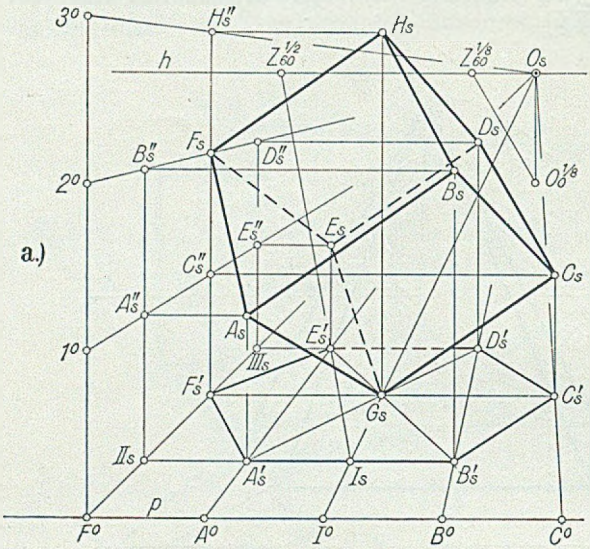
Poprowadzona przez punkt E_s równoległa do linji podstawy przetnie prostą $A^x O_s$ w punkcie 1_s a prostą $C^x O_s$ w punkcie 2_s. Pierwszy z nich połączymy ze śladem Z_1^{φ}, drugi ze śladem Z_2^{φ}. Następnie odmierzymy odcinek $\overline{B^x D^x}$ równy potrójnej długości odcinka BD i połączymy punkt D^x z punktem O_s. Na promieniu $2_s Z_2^{\varphi}$ otrzymamy punkt 3_s, przez który wykreślimy prostą równoległą do linji podstawy. Prosta ta przetnie promień $1_s Z_1^{\varphi}$ w punkcie 5_s. Odniesiemy $\overline{B^x 4^0} = \overline{B4}$ i rzucimy punkt 4^0 z punktu $Z_{45}^{1/3}$ na promień $B^x O_s$, gdzie otrzymamy punkt 4_s. Wyznaczenie perspektywy S_s środka S pięciokąta wymaga odmierzenia na linji podstawy odcinka $\overline{B^x S^0} = \overline{BS}$ i rzucenia punktu S^0 na promień $B^x O_s$. Perspektywa W_s wierzchołka leży na prostopadłej, wykreślonej z punktu S_s do linji horyzontu.

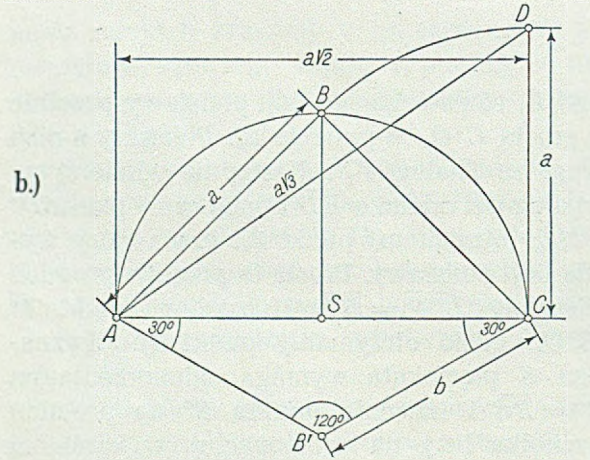
6. *Wykreślić perspektywę sześcianu, którego przekątna ma położenie pionowe* (rys. 163 *a* i *b*).

Znając krawędź *a* sześcianu, wyznaczymy przekątną jego ściany bocznej, równą odcinkowi $\overline{AC} = a\sqrt{2}$ (rys. 163 *b*). Rzut poziomy naszego sześcianu jest umiarowym sześciokątem [1]), a ponieważ odcinek, łączący dwa nieprzyległe wierzchołki tego sześciokąta, jest równy przekątnej kwadratu,

[1]) Patrz autora „Geometrja wykreślna“, wydanie II, Lwów 1922, str. 143—145.

stanowiącego ścianę boczną sześcianu, więc bok $\overline{AB'} = \overline{CB'}$ trójkąta równoramiennego ACB', o kątach przypodstawnych równych 30°, jest bokiem b tego sześciokąta. Odcinek $\overline{AD} = a\sqrt{3}$, równy przeciwprostokątnej trójkąta ACD, którego przyprostokątna $\overline{AC} = a\sqrt{2}$, zaś $\overline{CD} = a$ wyraża długość przekątnej sześcianu.





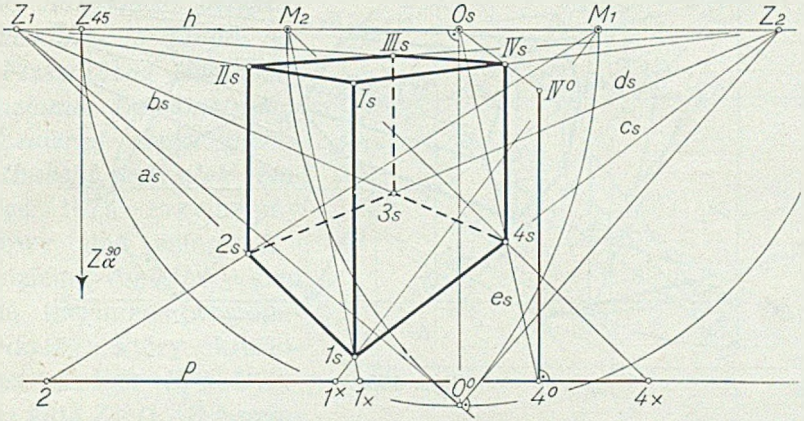
Rys. 163 *a*, *b*.

Przy danej ósmej części głębokości tłowej wyznaczymy częściowy ślad zbiegu $Z_{60}^{1/8}$ prostych poziomych, nachylonych do tła pod 60°, a następnie ślad $Z_{60}^{1/2}$, odmierzając od punktu O_s czterokrotnie odcinek $\overline{O_s Z_{60}^{1/8}}$. Wykreślimy perspektywę czołową sześciokąta o boku b.

Na prostopadłej, wykreślonej w punkcie F^0 do linji podstawy, odmierzymy odcinek $\overline{F^0 3^0}$ — równy odcinkowi $\overline{AD} = a\sqrt{3}$ z rys. 163 *b* — podzielimy go na trzy równe części punktami 1^0 i 2^0 i punkty podziału rzucimy z punktu O_s na proste pionowe, wykreślone w punktach II_s, F'_s i III_s. Promienie, wykreślone równolegle do horyzontu z punktów A''_s, B''_s, ... H''_s, przetną pionowe, poprowadzone w wierzchołkach A'_s, B'_s, ... w punktach A_s, B_s, ... H_s, które są perspektywami wierzchołków sześcianu.

7. *Wykreślić boczną perspektywę sześcianu o danej krawędzi* (rys. 164). Przy danej linji horyzontu, linji podstawy, głębokości tłowej i danym punkcie głównym wykonaliśmy przedewszystkiem kład płaszczyzny horyzontu na tło, a to w szczególności w ten sposób, że oko padło, jako punkt O^0, pod linję horyzontu. Ślad zbiegu Z_1 przyjęliśmy dowolnie; ślad

zbiegu Z_2 kierunku prostopadłego do pierwszego jest punktem przecięcia się promienia, wykreślonego w punkcie O^0 prostopadle do prostej $Z_1 - O^0$, z linją horyzontu. Łuki kół, zakreślone z punktów Z_1 i Z_2, jako środków, promieniami $\overline{Z_1 O^0}$ i $\overline{Z_2 O^0}$, przetną linję horyzontu w istotnych punktach mierzenia M_1 i M_2.



Rys. 164.

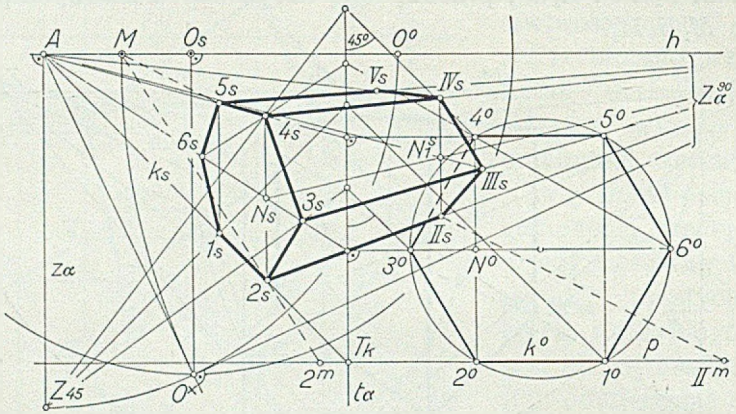
Dowolnie przyjęty punkt 1_s połączymy prostemi a_s i c_s ze śladami Z_1 i Z_2, a potem rzucimy go z punktów M_1 i M_2 na linję podstawy p. Odmierzymy $\overline{1_x 4_x} = \overline{1^x 2^x}$ (u góry punktu 2 na linji p należy dodać ^{x}), równe krawędzi sześcianu, poczem punkt 2^x rzucimy z punktu M_1 na prostą a_s, otrzymując tam punkt 2_s; podobnie promień $4_x M_2$ przetnie prostą c_s w punkcie 4_s. Promienie $Z_1 4_s$ i $Z_2 2_s$ przetną się w punkcie 3_s, który jest perspektywą czwartego wierzchołka podstawy sześcianu.

W celu wyznaczenia perspektywy krawędzi pionowych sześcianu rzuciliśmy punkt 4_s z punktu głównego O_s na podstawę p, odmierzyliśmy $\overline{4^0 IV^0}$ równe krawędzi sześcianu i punkt IV^0 połączyliśmy z O_s. Na prostopadłej wykreślonej do horyzontu przez punkt 4_s otrzymamy punkt IV_s. Perspektywy dalszych krawędzi bocznych są równoległe do $4_s IV_s$, a sposób otrzymania punktów I_s, II_s i III_s tłumaczy dostatecznie jasno rysunek.

8. *Wykreślić perspektywę prostego, sześciościennego, umiarowego graniastosłupa, leżącego ścianą boczną na płaszczyźnie poziomej* (rys. 165).

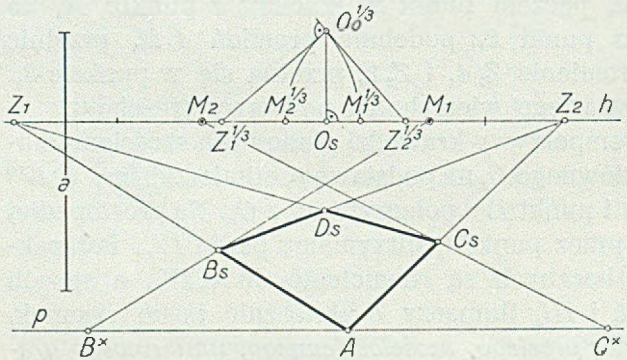
Wyznaczoną śladami t_α i z_α pionową płaszczyznę α uważamy za płaszczyznę podstawy graniastosłupa. Przecina ona płaszczyznę poziomą wzdłuż prostej k, której perspektywą jest prosta k_s, wyznaczona punktami T_k i A. Wykonajmy kład na tło płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny α. Oko zajmie położenie punktu O^0, krawędź k zejdzie się z linją podstawy p. Przyjmiemy w kładzie umiarowy sześciokąt $1^0, \ldots 6^0$ i podniesiemy go na płaszczyznę α, kreśląc jego perspektywę $1_s, \ldots 6_s$.

Następnie znajdziemy ślad zbiegu Z_α^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α (ust. 9) i odpowiadający mu punkt mierzenia M. Punkt Z_α^{90} jest punktem przecięcia się promienia wykreślonego w punkcie $O^\times$ pro-



Rys. 165.

stopadle do odcinka $\overline{O^\times A}$, z linją horyzontu. Punkt 2_s rzucimy z punktu M na linję p, odmierzymy odcinek $\overline{2^m II^m}$, równy żądanej wysokości graniastosłupa i punkt II^m rzucimy z punktu M na prostą $2_s - Z_\alpha^{90}$, jako punkt II_s. Prostopadła do linji horyzontu, wykreślona z punktu II_s, przecina promień $4_s - Z_\alpha^{90}$ w punkcie IV_s a promień $N_s - Z_\alpha^{90}$ w punkcie N_1^s. Promień $A - N_1^s$ przetnie prostą $3_s - Z_\alpha^{90}$ w punkcie III_s.

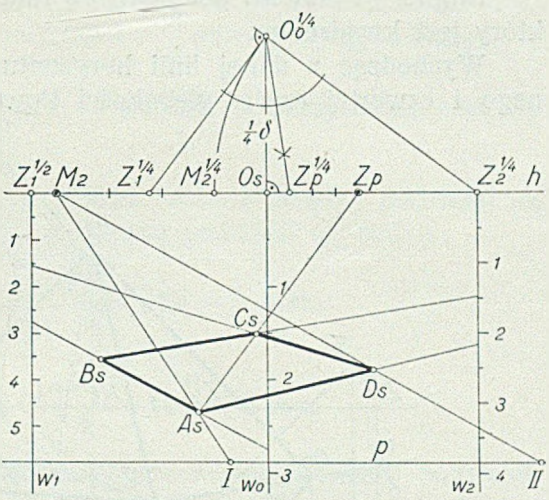


Rys. 166.

9. *Narysować perspektywę kwadratu, który leży na płaszczyźnie poziomej, a którego jeden wierzchołek znajduje się na linji podstawy* (rys. 166). Na linji horyzontu przyjmiemy punkt główny O_s, punkt $O_0^{1/3}$ i częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/3}$. Następnie znajdziemy częściowy ślad zbiegu $Z_2^{1/3}$ prostych prostopadłych do kierunku określonego punktem $Z_1^{1/3}$ oraz punkty $M_1^{1/3}$ i $M_2^{1/3}$. Odmierzymy $\overline{O_s Z_1} = 3 \cdot \overline{O_s Z_1^{1/3}}$; $\overline{O_s Z_2} = 3 \cdot \overline{O_s Z_2^{1/3}}$; $\overline{O_s M_1} = 3 \cdot \overline{O_s M_1^{1/3}}$ i $\overline{O_s M_2} = 3 \cdot \overline{O_s M_2^{1/3}}$. Tym sposobem otrzymamy ślady zbiegu Z_1 i Z_2 oraz istotne punkty mierzenia M_1 i M_2.

Przyjęty na linji podstawy punkt A połączymy ze śladami Z_1 i Z_2; odmierzymy odcinek $\overline{AB^\times} = \overline{AC^\times} = a$ i równy długości boku kwadratu;

punkt $B^{\times}$ połączymy z punktem M_1 a punkt $C^{\times}$ z punktem M_2. Otrzymany na promieniu AZ_1 punkt B_s łączymy ze śladem Z_2 a punkt C_s ze śladem Z_1 i tym sposobem dochodzimy do punktu D_s.



Rys. 167.

10. *Narysować perspektywę kwadratu o danym boku. Płaszczyzna kwadratu jest pozioma. Do konstrukcji użyć czwartej części głębokości tłowej i podziałek zbiegu* (rys. 167). Przyjmiemy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/4}$ i znajdziemy częściowy ślad $Z_2^{1/4}$ dla kierunku prostopadłego do tego, który określony jest śladem $Z_1^{1/4}$. Dwusieczna kąta $Z_1^{1/4} O_0^{1/4} Z_2^{1/4}$ przecina linję horyzontu w punkcie $Z_p^{1/4}$, który jest częściowym śladem zbiegu przekątnej kwadratu. Odmierzymy $\overline{O_s Z_p} = 4 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/4}}$ i otrzymamy ślad zbiegu Z_p. Następnie znajdziemy punkt $M_2^{1/4}$ i istotny punkt mierzenia M_2, a także częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/2}$, odnosząc $\overline{O_s Z_1^{1/2}} = 2 \cdot \overline{O_s Z_1^{1/4}}$.

Kreślimy podstawy w_0, w_1 i w_2 podziałek zbiegu; na pierwszej przyjmujemy jakąś jednostkę, np. $a = 12\ mm$, i obliczamy jednostki dla pozostałych (ust. 23, str. 65):

$$a_1 = \frac{n_1 - m_1}{n_1} \cdot a = \frac{2-1}{2} \cdot 12 = 6\ mm$$

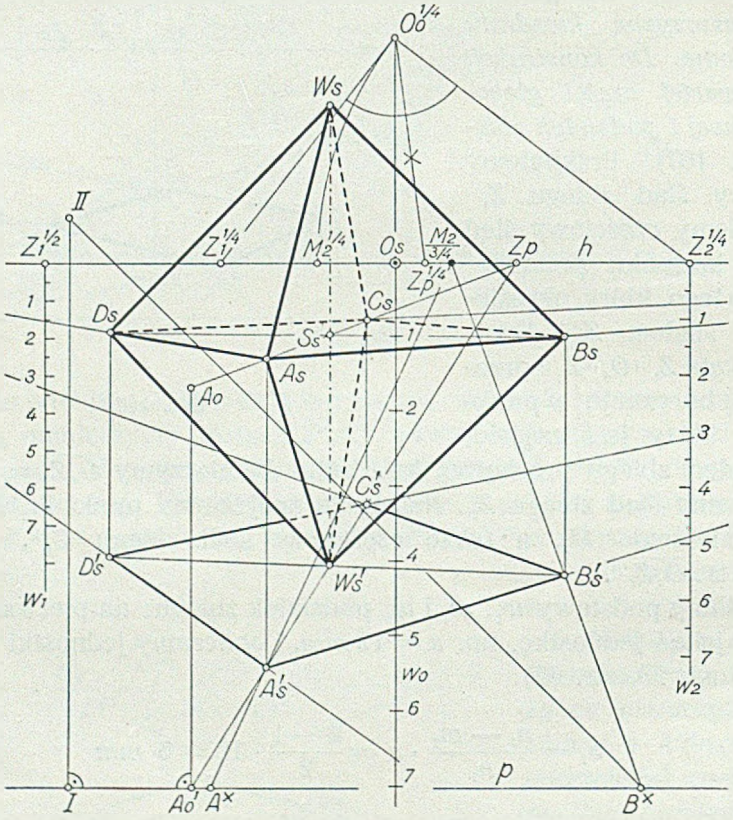
$$a_2 = \frac{n_2 - m_2}{n_2} \cdot a = \frac{4-1}{4} \cdot 12 = 9\ mm$$

Dowolnie przyjęty punkt A_s połączymy przy pomocy podziałek zbiegu ze śladami Z_1 i Z_2, a następnie rzucimy go z punktu mierzenia M_2 na linję podstawy p, gdzie otrzymamy punkt I. Odmierzymy odcinek $\overline{I\,II}$, równy danemu bokowi kwadratu, i połączymy punkt II z punktem M_2 promieniem, który przetnie prostą $A_s Z_2$ w punkcie D_s. Punkt ten połączymy, przy pośrednictwie podziałek zbiegu w_0 i w_1, ze śladem Z_1 prostą, która przetnie promień $A_s Z_p$ w punkcie C_s. Podziałki w_0 i w_2 umożliwią połączenie punktu C_s ze śladem Z_2 prostą, która przetnie promień $A_s Z_1$ w punkcie B_s.

11. *Wykreślić perspektywę umiarowego ośmiościanu, którego oś ma położenie pionowe. Długość krawędzi ośmiościanu wynosi 76 mm* (rys. 168).

Najpierw rysujemy perspektywę rzutu poziomego tego ośmiościanu, który jest kwadratem.

Wychodząc z danej linji horyzontu, linji podstawy, punktu głównego i czwartej części głębokości tłowej, przyjmiemy częściowy ślad



Rys. 168.

zbiegu $Z_1^{1/4}$ i znajdziemy ślad zbiegu $Z_2^{1/4}$ kierunku prostopadłego. Łuk koła, zakreślony z punktu $Z_2^{1/4}$ promieniem $Z_2^{1/4}O_0^{1/4}$, przetnie horyzont w punkcie $M_2^{1/4}$. Odmierzymy $Z_1^{1/4}O_s = Z_1^{1/4}Z_1^{1/2}$ i otrzymamy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/2}$. Dwusieczna kąta $Z_1^{1/4}O_0^{1/4}Z_2^{1/4}$ przetnie horyzont w punkcie $Z_p^{1/4}$. Punkt przekątny Z_p oddalony jest od punktu głównego o czterokrotny odcinek $\overline{O_s Z_p^{1/4}}$.

Szukamy punktu częściowego mierzenia, leżącego wpobliżu punktu głównego. Z rysunku otrzymujemy:

$$\overline{O_s Z_2^{1/4}} = a = 38{\cdot}5\ mm; \quad \overline{M_2^{1/4} O_s} = b = 10{\cdot}5\ mm.$$

Przyjmijmy wykładnik redukcji $r : s = 3 : 4$, to wówczas według równania (4), ust. 28, str. 96:

$$\overline{O_s \frac{M_2}{r/s}} = \frac{n}{m}\left[a - \frac{r}{s}(a+b)\right] = 4\left[38{\cdot}5 - \frac{3}{4}(38{\cdot}5 + 10{\cdot}5)\right] = 7\ mm.$$

Odmierzywszy 7 *mm* na prawo od punktu O_s, otrzymamy szukany punkt częściowego mierzenia $\frac{M_2}{3/4}$.

Zkolei wyznaczymy podziałki zbiegu. Jako jednostkę podziałki w_0 przyjęliśmy 10 *mm*, wobec czego jednostką podziałki w_1 będzie:

$$a_1 = \frac{n_1 - m_1}{n_1} \cdot a = \frac{2-1}{2} \cdot 10 = 5\ mm,$$

zaś podziałki w_2:

$$a_2 = \frac{n_2 - m_2}{n_2} \cdot a = \frac{4-1}{4} \cdot 10 = 7{\cdot}5\ mm$$

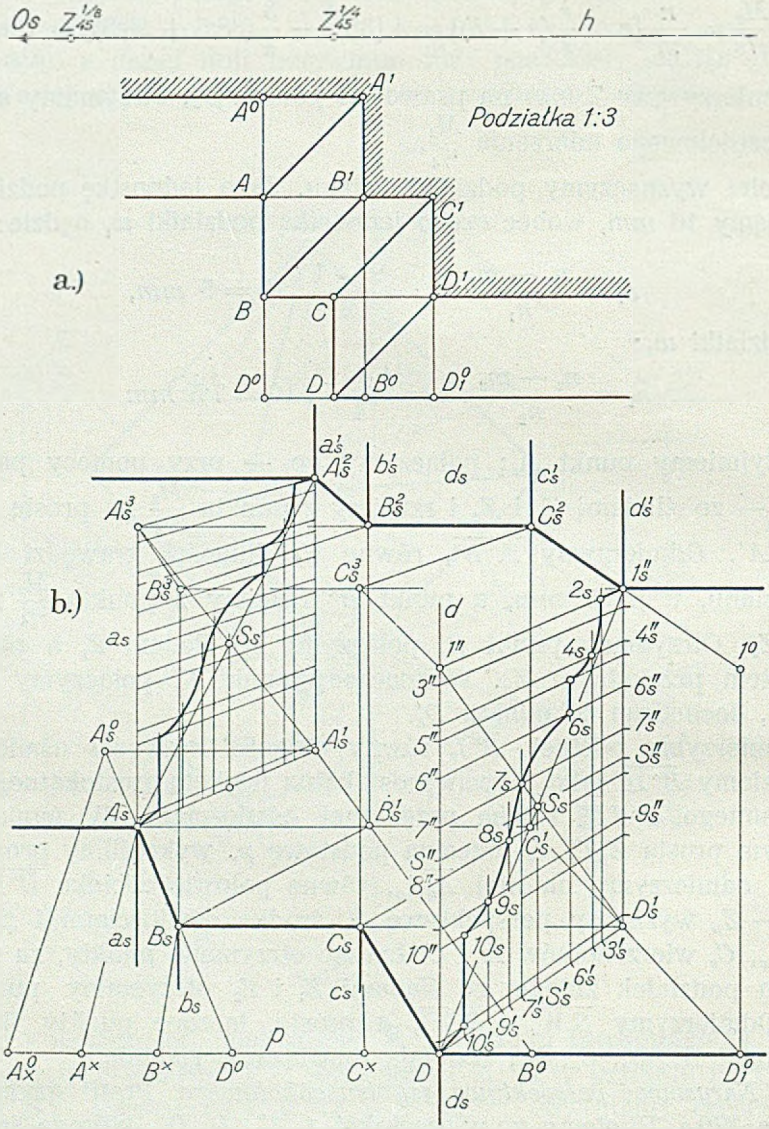
Przyjmiemy punkt A'_s; połączymy go — przy pomocy podziałek zbiegu — ze śladami Z_1 i Z_2 i rzucimy z punktu $\frac{M_2}{3/4}$ na prostą p, jako punkt $A^\times$. Odmierzymy $\overline{A^\times B^\times}$, równe $^3/_4$ długości krawędzi bocznej ośmiościanu, t. j. 57 *mm*, a punkt $B^\times$ rzucimy z punktu $\frac{M_2}{3/4}$ na prostą $A'_s Z_2$. Otrzymany punkt B'_s połączymy ze śladem Z_1 a punkt A'_s z punktem przekątnym Z_p. Wyznaczony punkt C'_s połączymy ze śladem Z_2, dochodząc do punktu D'_s.

Odmierzymy odcinek $\overline{B^\times I}$, równy długości krawędzi ośmiościanu, i znajdziemy $\overline{B^\times II}$, jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego $B^\times I II$, równą przekątnej ośmiościanu. W punkcie A'_0, w którym prosta $Z_p C'_s A'_s$ przecina podstawę p, wykreślimy prostą pionową i odmierzymy na niej $\overline{A'_0 A_0}$, równe połowie odcinka $\overline{B^\times II}$. Prosta $A_0 - Z_p$ wyznaczy perspektywę S_s środka ośmiościanu i perspektywę A_s, C_s wierzchołków A i C. Łącząc otrzymane punkty, za pośrednictwem podziałek zbiegu, ze śladami Z_1 i Z_2 otrzymamy punkty B_s i D_s. Odmierzymy $\overline{S_s W_s} = \overline{S_s W'_s}$, a proste, łączące punkty W_s i W'_s z punktami A_s, B_s, C_s, D_s, dopełnią rozwiązania zadania.

12. *Narysować perspektywę gzymsu cokołowego.* Profil gzymsu podaje rys. 170*a*. Ujmiemy go w prostokąt *1*, *1''*, *D*, D_1, którego środkiem jest punkt *S*, a charakterystyczne punkty tego profilu — w szczególności jego linij krzywych — rzucimy prostopadle na boki *D*, D_1 i *D*, *1''*. Następnie wykreślimy dwa pęki *Pillet'a*, jeden o wierzchołku W_1, drugi o wierzchołku W_2.

Rys. 169*a* przedstawia rzut poziomy gzymsu trzykrotnie zmniejszony w stosunku do wymiarów gzymsu, który ma być narysowany

w perspektywie, a więc w stosunku do rys. 169 *b*. Rzut ten poucza nas, że gzyms, biegnący początkowo równolegle do tła, załamuje się pod



Rys. 169 *a*, *b*.

kątem prostym, biegnie więc prostopadle do tła, poczem wraca do pierwotnego położenia, załamuje się ponownie i wraca do kierunku, z którego wyszedł.

Chęć uzyskania jasności konstrukcji i jej omówienia nakazała nam

wykonać zadanie w dwóch częściach. Rys. 169 *b* podaje fazę początkową, rys. 170 *b* — pełne rozwiązanie.

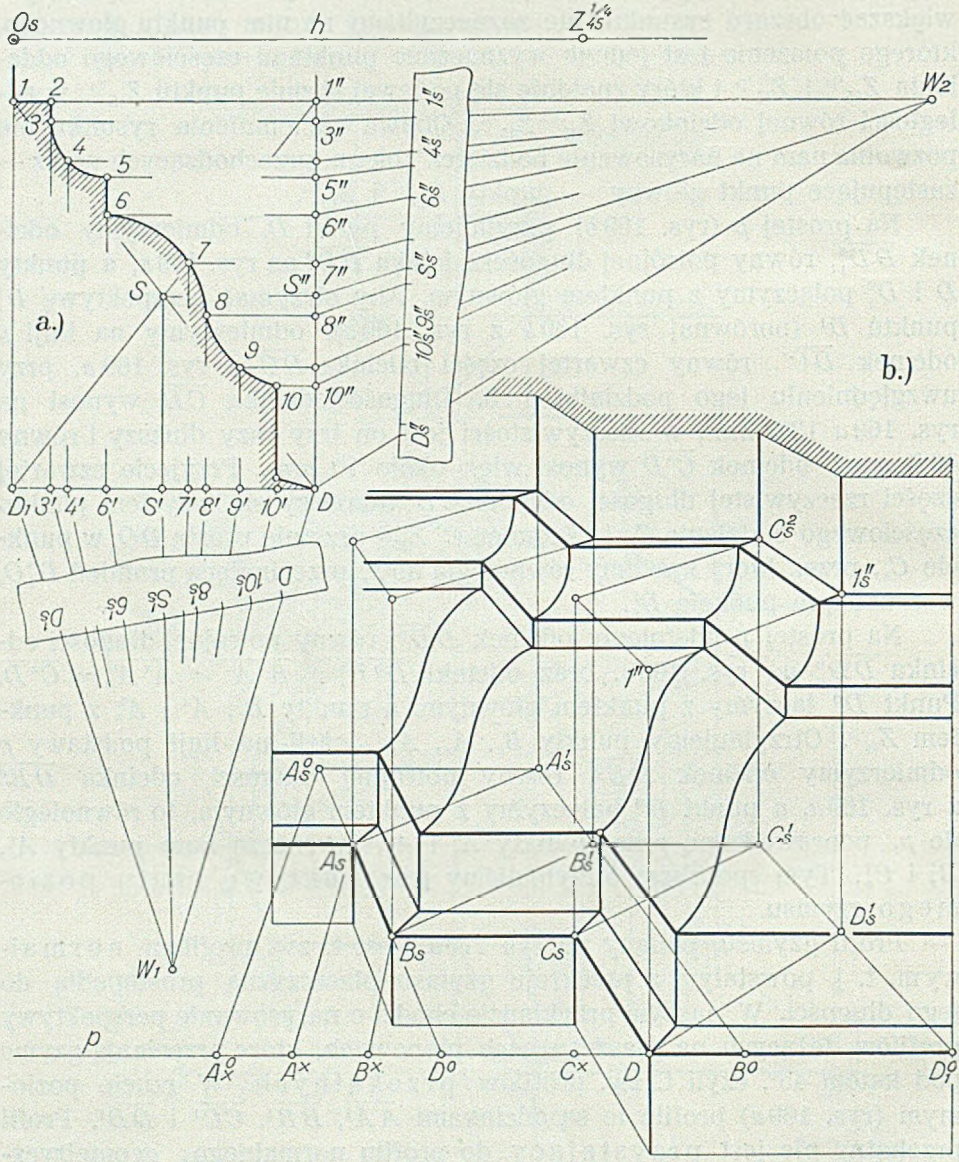
Przyjmijmy linję podstawy p i horyzont h (rys. 169 *b*). Aby nie powiększać obszaru rysunku, nie zaznaczyliśmy na nim punktu głównego, którego położenie jest jednak wyznaczone punktami częściowego oddalenia $Z_{45}^{1/8}$ i $Z_{45}^{1/4}$ i który znajduje się po lewej stronie punktu $Z_{45}^{1/8}$, w odległości równej odcinkowi $Z_{45}^{1/8} Z_{45}^{1/4}$. Obawa zaciemnienia rysunku nie pozwoliła nam na narysowanie podziałek zbiegu, przechodzących przez — zastępujące punkt główny — punkty $Z_{45}^{1/8}$ i $Z_{45}^{1/4}$.

Na prostej p (rys. 169 *b*) przyjmiemy punkt D, odmierzymy odcinek $\overline{DD_1^0}$, równy potrójnej długości odcinka $\overline{DD_1^0}$ na rys. 169 *a*, a punkty D i D_1^0 połączymy z punktem głównym. Aby otrzymać perspektywę D_x^1 punktu D^1 (porównaj rys. 169 *a* z rys. 169 *b*), odmierzymy na linji p odcinek $\overline{DC^\times}$, równy czwartej części odcinka $\overline{DC}$ z rys. 169 *a*, przy uwzględnieniu jego podziałki 1 : 3. Długość odcinka $\overline{CD}$ wynosi na rys. 169 *a* 13·5 *mm*, w rzeczywistości jest on trzy razy dłuższy i równy 40·5 *mm*; odcinek $\overline{C^\times D}$ wynosi więc około 10 *mm*. Przyjęcie czwartej części rzeczywistej długości odcinka $\overline{CD}$ tłumaczy się użyciem punktu częściowego oddalenia $Z_{45}^{1/4}$. Promień $C^\times Z_{45}^{1/4}$ przetnie prostą DO_x w punkcie C_x, przez który kreślimy równoległą do p, przecinającą promień $D_1^0 O_x$ w szukanym punkcie D_x^1.

Na prostej p odetniemy odcinek $\overline{DD^0}$, równy potrójnej długości odcinka $\overline{DD^0}$ na rys. 169 *a*, oraz odcinki $\overline{D^0 B^\times} = \overline{B^\times A^\times} = \overline{A^\times A_x^0} = \overline{C^\times D}$. Punkt D^0 łączymy z punktem głównym, a punkty $B^\times$, $A^\times$ i A_x^0 z punktem $Z_{45}^{1/4}$. Otrzymujemy punkty B_x, A_x, A_x^0. Jeżeli na linji podstawy p odmierzymy odcinek $\overline{DB^0}$, równy potrójnej długości odcinka $\overline{DB^0}$ z rys. 169 *a*, a punkt B^0 połączymy z punktem głównym, to równoległe do p, poprowadzone przez punkty A_x^0 i A_x, wyznaczą nam punkty A_x^1, B_x^1 i C_x^1. Tym sposobem otrzymaliśmy perspektywę rzutu poziomego gzymsu.

Profil gzymsu, podany na rys 170 *a*, jest t. zw. profilem normalnym, t. j. powstałym z przekroju gzymsu płaszczyzną prostopadłą do jego długości. W naszym przykładzie chodzi o narysowanie perspektywy profilów, leżących na płaszczyznach pionowych, które przecinają gzyms pod kątem 45°, czyli t. zw. profilów przekątnych. W rzucie poziomym (rys. 169 *a*) profile te są odcinkami $\overline{AA^1}$, $\overline{BB^1}$, $\overline{CC^1}$ i $\overline{DD^1}$. Profil przekątny nie jest przystający do profilu normalnego; geometrycznie określamy go, jako powinowaty z profilem normalnym. Wspólną cechą profilów powinowatych, różniących się między sobą wielkościami i kształtami, jest zachowanie proporcjonalności między wysokościami i szerokościami odpowiadających sobie elementów. Jeżeli więc np. punkty *3'*, *4'*, *6'* ... *10'*, dzielą odcinek $\overline{D_1 D}$ (rys. 170 *a*), w okre-

ślonych stosunkach, to odpowiadające tym punktom, punkty odcinka, wyrażającego szerokość profilu przekątnego, podzielą go w tychże sa-



Rys. 170 *a*, *b*.

mych stosunkach. To samo odnosiłoby się i do podziału odcinka, wyrażającego wysokość gzymsu, gdyby ta — wskutek dokonanego przekroju — uległa zmianie. W naszym przypadku zmiana ta nie zachodzi,

gdyż wysokość przekroju przekątnego równa jest wysokości profilu normalnego.

Wróćmy do rys. 169*b*. W punktach D, D_1^0, D_n^1, C_n, B_n^1, C_n^1, B_n, A_n i A_n^1, wykreślimy prostopadłe do horyzontu i na pierwszej z nich, t. j. na prostej d, odmierzymy odcinek $\overline{D\,1''}$ równy wysokości gzymsu, czyli równy odcinkowi $\overline{D\,1''}$ na rys. 170*a*. Następnie odmierzymy $\overline{D_1^0\,1^0} = \overline{D\,1''}$, a punkty 1^0 i $1''$ połączymy z punktem głównym. Otrzymamy punkty C_n^2 i C_n^3, a przez wykreślenie z nich równoległych do linji p punkty B_n^2, A_n^3 i B_n^3.

Przekątne trapezu $\overline{D\,1''\,1_n''\,D_n^1}$ (rys. 169*b*) przetną się w punkcie S_n. Szereg punktów $1''$, $3''$, ... S'', ... D, z rys. 170*a*, przeniesiemy zapomocą skrawka papieru na prostą d w rys. 169*b* i punkt S'' połączymy z punktem S_n. Na drugim, równoległym, boku trapezu otrzymamy punkt S_n''. Punkt S_n rzucimy w kierunku prostopadłym do linji podstawy p na bok DD_n^1 i rzut ten oznaczymy jako S_n'. Na skrawku papieru, przyłożonym do prostej d_n^1, odetniemy punkty $1_n''$, S_n'' i D_n^1, poczem przeniesiemy go na rys. 170*a* tak, aby punkty te padły na promienie pęku *Pillet'a* o wierzchołku W_2, przechodzące przez punkty $1''$, S'', D. Na tak ułożonym skrawku papieru, którego krawędź, przy dokładnem konstruowaniu, powinna być równoległa do odcinka $\overline{1''\,D}$, zaznaczymy punkty $10_n''$, $9_n''$ ... $4_n''$, $3_n''$, poczem wrócimy z nim na prostą d_n^1 (rys. 169*b*). Tym sposobem przeniesiony tam szereg punktów połączymy z punktami $3''$, ... $10''$, prostej d. W analogiczny sposób otrzymamy na prostej DD_n^1 szereg punktów D, $10_n'$, $9_n'$, ... $3_n'$, D_n^1, perspektywiczny z szeregiem D, $10'$, $9'$, ... $3'$, D_1 na rys. 170*a*, a to przy pomocy pęku *Pillet'a* o wierzchołku W_1. Przez punkty $10_n'$, ... $3_n'$, wykreślimy równoległe do prostej d, które przetną poprzednio otrzymane promienie w punktach 10_n, 9_n ... 2_n, wyznaczających perspektywę pierwszego profilu przekątnego.

Postępując w ten sam sposób, wyznaczymy perspektywę trzech dalszych profilów przekątnych. Na rys. 169*b* zamieściliśmy jeszcze konstrukcję ostatniego z nich.

Ostateczny wynik zadania przedstawia rys. 170*b*.

13. *Wykreślić perspektywę gzymsu, okalającego otwór okienny.* Profil normalny gzymsu podaje rys. 171. Podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, przyjmujemy pęki *Pillet'a*, o wierzchołkach W_1 i W_2. Część gzymsu, którego perspektywę zamierzamy narysować, znajdować się ma nad horyzontem. Operujemy piątą częścią głębokości tłowej (rys. 172). Przyjmiemy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/5}$ i znajdziemy częściowy ślad zbiegu $Z_2^{1/5}$ kierunku prostopadłego do kierunku określonego punktem $Z_1^{1/5}$. Przystąpimy do wykreślenia podziałek zbiegu w i w_1. Jeżeli przyjętą jednostką pierwszej podziałki będzie a *mm*, to jednostką

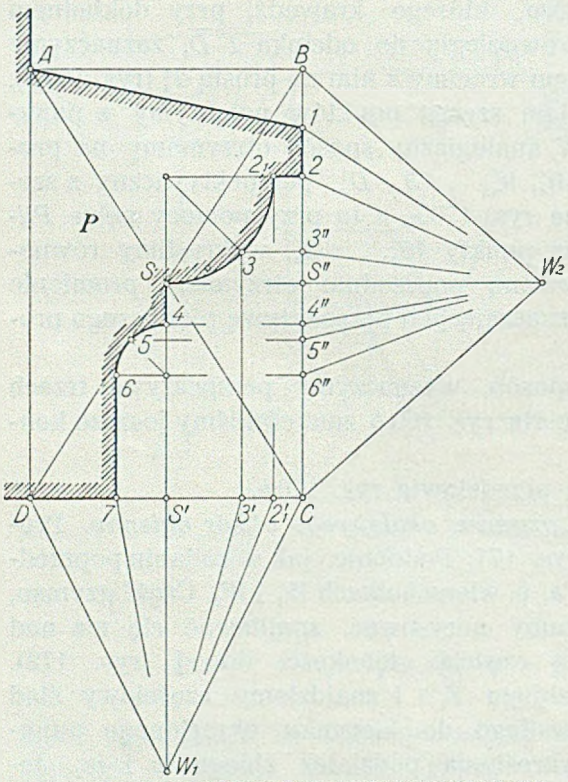
podziałki w_1 będzie według równania (2) str. 65, $a_1 = \frac{5-1}{5} . a = \frac{4}{5} a$ *mm*. Ponieważ podziałka w wchodzi na konstrukcję przekroju, więc dla zachowania przejrzystości rysunku przesuwamy ją równolegle, a to do położenia w'. Promienie, łączące cechy *10* i *20* podziałek w i w_1, przecinają prostą w' w punktach *10* i *20*, które pozwolą wyznaczyć na niej dalsze, potrzebne punkty podziału.

Łuki kół, zakreślone z punktów $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$ promieniami $\overline{Z_1^{1/5} O_0^{1/5}}$ i $\overline{Z_2^{1/5} O_0^{1/5}}$, przetną horyzont w punktach $M_1^{1/5}$ i $M_2^{1/5}$. Wyznaczymy zkolei punkt $\frac{M_1}{1/2}$ częściowego mierzenia.

Ponieważ $a = \overline{O_s Z_1^{1/5}} = \sim 18{\cdot}7$ *mm*; $b = \overline{O_s M_1^{1/5}} = \sim 25{\cdot}6$ *mm*, przeto według równania (4) str. 96:

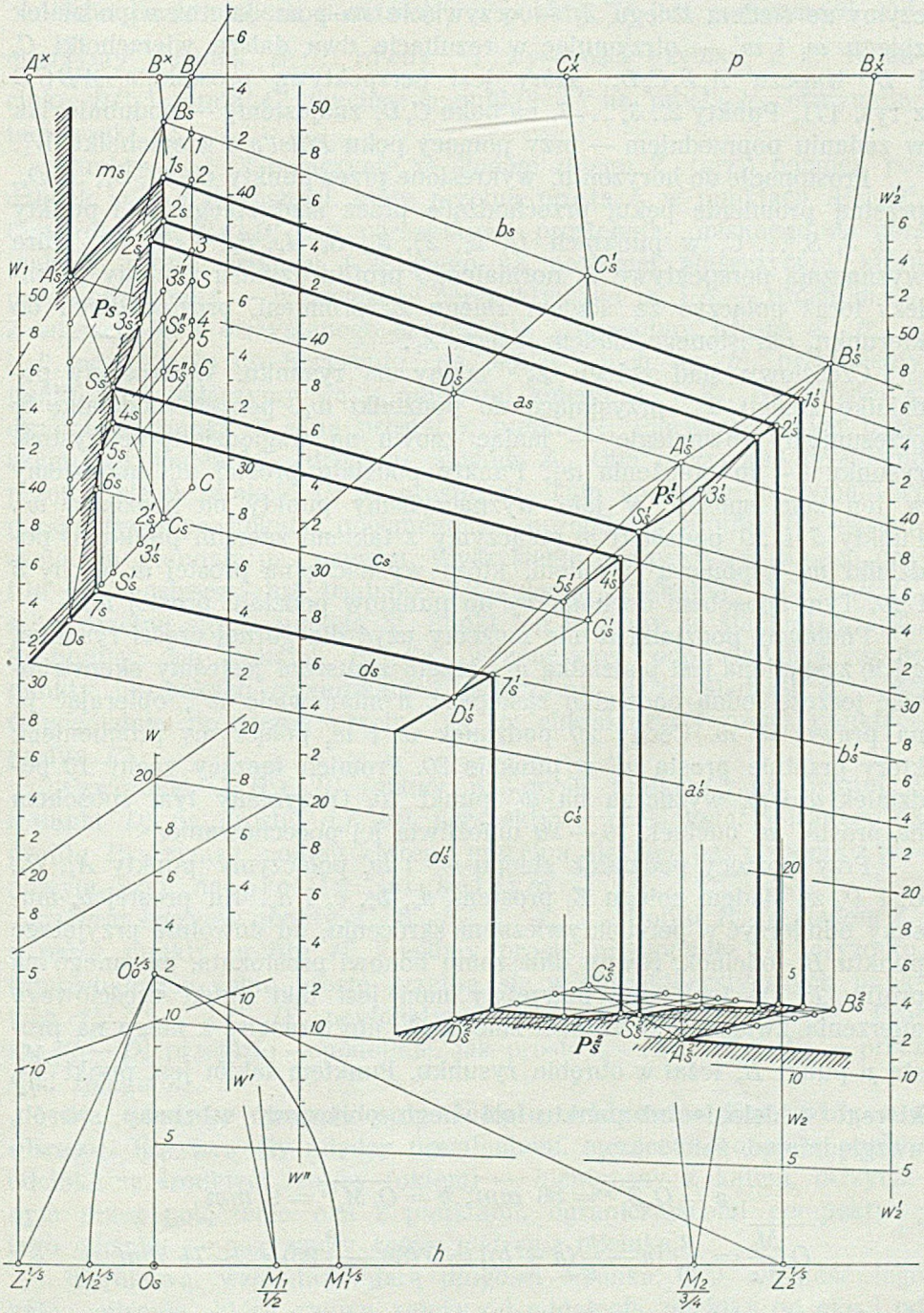
$$\overline{O_s \frac{M_1}{1/2}} = \frac{n}{m} [a - \frac{r}{s}(a+b)] = 5 [18{\cdot}7 - \frac{1}{2} . 44] = -16{\cdot}5 \text{ mm}.$$

Znak ujemny oznacza tu, że częściowy punkt mierzenia $\frac{M_1}{1/2}$ i częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/5}$ leżą po przeciwnych stronach punktu głównego.



Rys. 171.

Przyjęty na podstawie p punkt B połączymy — za pośrednictwem podziałek w_1 i w' — ze śladem zbiegu Z_1 prostą m_s, na której obierzemy następnie punkt B_s. Punkt ten rzucimy z punktu $\frac{M_1}{1/2}$ na podstawę p, oznaczając otrzymany rzut znakiem $B^\times$. Zkolei odmierzymy odcinek $\overline{B^\times A^\times}$, równy połowie odcinka $\overline{AB}$ na rys. 171, a punkt $A^\times$ rzucimy z punktu $\frac{M_1}{1/2}$ na prostą m_s, otrzymując tam punkt A_s. Przez punkty A_s, B_s i B wykreślimy prostopadłe do horyzontu; na ostatniej z nich odmierzymy odcinek $\overline{BC}$ — wraz z punktami *1*, *2*, *3''*, ... *6''* — równy wysokości gzymsu, oznaczonej na rys. 171 temi samemi literami. Punkt C łą-



A^x
B^x
B
C'_x
p
B'_x
B_s
m_s
1_s
2_s
$2'_s$
3_s
$3''_s$
S
S''_s
4
5
$5''_s$
6
A_s
P_s
S_s
4_s
5_s
6_s
C
$2'_s$
C_s
$3'_s$
S'_s
7_s
D_s
b_s
C'_s
D'_s
a_s
B'_s
$1'_s$
$2'_s$
A'_s
P'_s
$3'_s$
S'_s
$5'_s$
$4'_s$
C'_s
c_s
d_s
$7'_s$
D'_s
b'_s
a'_s
c'_s
d'_s
C^2_s
B^2_s
D^2_s
S^2_s
P^2_s
A^2_s
w_1
w'_2
w
w'
w''
w_2
$O_0^{1/5}$
h
$Z_1^{1/5}$
$M_2^{1/5}$
O_s
$\frac{M_1}{1/2}$
$M_1^{1/5}$
$\frac{M_2}{3/4}$
$Z_2^{1/5}$

Rys. 172.

czymy ze śladem zbiegu Z_1 — oczywiście za pośrednictwem podziałek zbiegu w_1 i w' — otrzymując w rezultacie dwa dalsze wierzchołki C_s i D_s trapezu $A_s B_s C_s D_s$, który jest perspektywą prostokąta $ABCD$ z rys. 171. Punkty $2'_s, 3'_s \ldots 7_s$ na boku $C_s D_s$ znajdziemy — podobnie, jak w zadaniu poprzedniem — przy pomocy pęku *Pillet'a* o wierzchołku W_1.

Prostopadłe do horyzontu, wykreślone przez punkty $C_s, 3'_s, S'_s, \ldots D_s$, przetną promienie pęku, przechodzące przez ślad zbiegu Z_1 i punkty $1, 2, 3, S, \ldots C$, w punktach $1_s, 2_s, 2^1_s, 3_s, S_s, 4_s, 5_s, 6_s, 7_s, D$, które wyznaczają perspektywę P_s normalnego profilu gzymsu. Punkty te należy teraz połączyć ze śladem zbiegu Z_2 promieni, prostopadłych do kierunku, określonego śladem zbiegu Z_1.

Częściowy ślad zbiegu $Z_2^{1/5}$ mamy na rysunku. Wykreślimy podziałkę zbiegu w_2, przystającą do podziałki w_1, poczem podziałkę tę przesuniemy równolegle — mając znowu na względzie przejrzystość rysunku — do położenia w'_2. Punkty podziału prostej w'_2 znajdziemy w ten sam sposób, w jaki wyznaczyliśmy punkty na podziałce w'. Punkty *5* i *10* podziałki w połączymy z takiemi samemi punktami podziałki w_2 zapomocą promieni, które wyznaczą na prostej w'_2 cechy *5* i *10*. Tym sposobem dochodzimy do punktów podziału prostej w'_2.

Ponieważ podziałki w nie możemy użyć dla górnej części rysunku, gdzie zastąpiona jest podziałką w', przeto zmuszeni jesteśmy skonstruować jeszcze jedną podziałkę zastępczą, a mianowicie w'', obierając ją na prawo od w. Cechy *20* podziałek w i w'_2 połączymy promieniem, który przetnie prostą w'' w punkcie *20*. Promień łączący cechy *10* podziałek w i w'_2 wyznacza na w'' punkt *10*. Otrzymany tym sposobem na prostej w'' odcinek $\overline{10 - 20}$ umożliwia jej pocechowanie.

Przy pomocy podziałek zbiegu w'' i w'_2 połączymy punkty A_s, B_s, C_s i D_s ze śladem zbiegu Z_2 prostemi a_s, b_s, c_s i d_s. Na prostej b_s musimy odmierzyć w perspektywicznem skróceniu, od dowolnie przyjętego punktu B^1_s, odcinek, równy dłuższemu bokowi prostokąta, opisanego na profilu P. Do tego celu potrzebny nam jest taki punkt częściowego mierzenia, związany ze śladem zbiegu Z_2, aby rzucony z niego na prostą p punkt B^1_s leżał w obrębie rysunku. Punktem takim jest punkt $\frac{M_2}{3/4}$, którego oddalenie od punktu głównego obliczymy w znany sposób, uwzględniając, że:

$$a = \overline{O_s Z_2^{1/5}} = 86 \ mm; \quad b = \overline{O_s M_2^{1/5}} = 9 \ mm$$

$$\overline{O_s \frac{M_2}{3/4}} = \frac{n}{m}\left[a - \frac{r}{s}(a+b)\right] = 5\left(86 - \frac{3}{4}95\right) = \sim 74 \ mm$$

Punkt częściowego mierzenia leży więc po tej samej stronie punktu głównego, co punkt Z_2, w odległości 74 *mm* od O_s.

Rzut punktu B_s^1 na podstawę p z punktu $\frac{M_2}{3/4}$ jest punktem B_x^1. Odmierzymy odcinek $\overline{B_x^1 C_x^1}$, równy $^3/_4$ wysokości gzymsu, t. j. $^3/_4$ odcinka $\overline{BC}$ i punkt C_x^1 rzucimy z punktu $\frac{M_2}{3/4}$ na prostą b_s, otrzymując tam punkt C_s^1.

Punkty B_s^1 i C_s^1 połączymy ze śladem zbiegu Z_1 (przy pomocy podziałek w_1 i w') prostemi, które przetną prostą a_s w punktach A_s^1 i D_s^1. Czworokąt $A_s^1 B_s^1 C_s^1 D_s^1$ jest perspektywą prostokąta, opisanego na normalnym profilu gzymsu i leżącego na poziomej płaszczyźnie, która przechodzi przez — wyznaczone perspektywami m_s i b_s — proste m i b. Z wierzchołków otrzymanego czworokąta wykreślimy proste a_s^1, b_s^1, c_s^1 i d_s^1, prostopadłe do horyzontu; na jednej z nich, np. b_s^1, przyjmiemy punkt B_s^2 i połączymy go z punktami zbiegu Z_1 i Z_2. Na prostej a_s^1 otrzymamy punkt A_s^2 a na prostej c_s^1 punkt C_s^2. Pierwszy z nich połączymy ze śladem Z_2, drugi ze śladem Z_1. Oba otrzymane promienie przetną się w punkcie D_s^2 na prostej d_s^1. Tym sposobem otrzymaliśmy perspektywę prostokąta, opisanego na normalnym profilu P^2, ograniczającym pionowy pas gzymsu. Wykreślenie perspektywy samego profilu nie nastręczy już trudności. Rysujemy przekątne $\overline{A_s^2 C_s^2}$ i $\overline{B_s^2 D_s^2}$, które przetną się w punkcie S_s^2. Punkt ten łączymy ze śladami Z_1 i Z_2. Posługując się pękami *Pillet'a*, wyznaczymy odpowiadające sobie punkty na bokach czworokąta i połączymy je ze śladami Z_1 i Z_2. Odpowiednie promienie przetną się w charakterystycznych punktach profilu P_s^2.

Czworokąt $A_s^1 B_s^1 C_s^1 D_s^1$ (mamy na myśli punkt C_s^1 na prostej c_s i punkt D_s^1 na prostej d_s) jest perspektywą prostokąta, opisanego na profilu P^1 gzymsu, podług którego przecina się jego pas poziomy z pionowym, czyli na profilu przekątnym.

Teraz łączymy punkty 1_s, 2_s, 3_s, S_s, 4_s, ... profilu P_s ze śladem Z_2, a przez punkty profilu P_s^2 kreślimy proste prostopadłe do horyzontu. Odpowiadające sobie proste przetną się w charakterystycznych punktach 1_s^1, 2_s^1, ... 7_s^1, D_s^1, perspektywy P_s^1 przekątnego profilu P^1. Prosta $7_s^1 — D_s^1$ przejdzie — podobnie, jak proste $7_s — D_s$ i $C_s^2 — D_s^2$ — przez ślad zbiegu Z_1.

30. Stożek, obszar, pole i koło widzenia. Kąt widzenia obrazu. Kąt zawarty między promieniami, łączącemi końcowe punkty odcinka ze środkiem rzutów (okiem) — identyczny z kątem, otrzymanym przez połączenie oka z punktami, ograniczającemi perspektywę tego odcinka — nazywamy *kątem widzenia* odcinka.

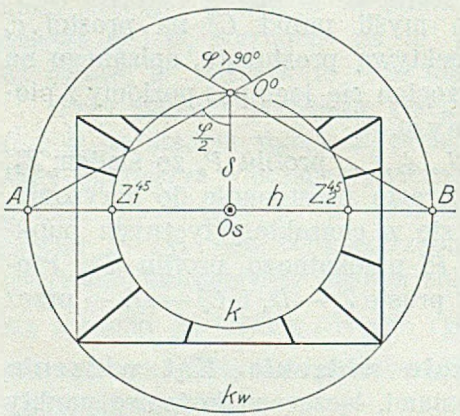
Wzrokową, względną miarą długości odcinka, jest wielkość jego kąta widzenia, która znowu zależy od oddalenia odcinka od oka i od

jego, względem oka, położenia. To ostatnie określamy położeniem odcinka względem tła.

Przy stałem położeniu odcinka względem tła maleje jego kąt widzenia ze wzrostem głębokości tłowej. Gdy głębokość tłowa jest stała, to kąt widzenia odcinka zmienia się w zależności od zmiany oddalenia tego odcinka od tła, względnie od zmiany jego położenia względem tła.

Promienie, łączące punkty obserwowanej przestrzeni z okiem, tworzą wiązkę. Z wiązki tej wyodrębnić można promienie, które zawierają z promieniem głównym określony kąt. Miejscem geometrycznem tych promieni będzie stożek obrotowy, którego osią jest promień główny i który nazywać będziemy *stożkiem widzenia*. W myśl tego określenia, ilość stożków widzenia — przy stałem oku, które jest ich wierzchołkiem — jest nieograniczenie wielka, dowolna. Każdy z tych stożków obejmuje pewien *obszar widzenia*, którego wielkość mierzona jest kątem wierzchołkowym stożka widzenia. Ze wzrostem tego kąta rośnie obserwowany przestrzenny obszar widzenia; zmniejszenie kąta wierzchołkowego stożka widzenia obszar ten ścieśnia.

Przekrój wiązki promieni, zawartej w granicach przyjętego stożka widzenia, płaszczyzną tła jest obrazem perspektywicznym obserwowanego obszaru. Obraz ten, ograniczony kołem, podług którego płaszczyzna tła przecina stożek widzenia — t. zw. *kołem widzenia obrazu* — stanowi *pole widzenia* oka geometrycznego lub oka fotograficznego.



Rys. 173.

Jeżeli prostokąt na rys. 173 określa granicę obrazu perspektywicznego, to koło k_w, zakreślone z punktu głównego O_s, jako środka — a przechodzące przez najdalej od tego środka oddalony wierzchołek prostokąta — jest kołem widzenia obrazu.

Gdy znamy głębokość tłową δ danego obrazu, to — przy danem kole widzenia — otrzymamy z łatwością kąt wierzchołkowy φ stożka widzenia. W tym celu położymy płaszczyznę horyzontu, wraz z okiem, na tło, t. j. odmierzymy $\overline{O_s O^0} = \delta$ na prostopadłej, wykreślonej w punkcie O_s do linji horyzontu (rys. 173); punkt O^0 połączymy z punktami A i B, w których linja horyzontu przecina koło widzenia k_w. Kąt $AO^0B = \varphi$ nazywać będziemy *kątem widzenia* danego *obrazu perspektywicznego*.

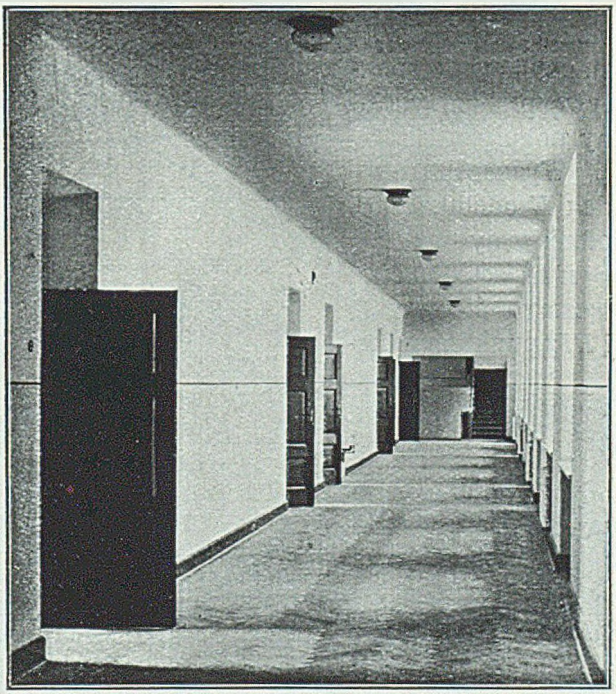
Jeżeli $\overline{O_s A} = r$ oznacza promień koła widzenia, to z relacji:

$$r : \delta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

obliczymy w każdym poszczególnym wypadku kąt widzenia φ.

O wpływie kąta widzenia obrazu na charakter perspektywy mówić będziemy w rozdziale, poświęconym estetyce perspektywy.

31. Perspektywa wnętrz. *a)* Przestrzeń ograniczoną płaszczyznami, powierzchniami krzywemi lub kombinacją jednych i drugich, obserwowaną z wewnątrz, nazywać będziemy językiem architektów „wnętrzem“. Każdy budynek ma swoją architekturę zewnętrzną i swoje „wnętrze“, przez które rozumieć można wyłącznie ściany boczne z otworami, podłogę i sufit (sklepienie), albo także i przedmioty wypełniające przestrzeń. Przykładami czołowej perspektywy wnętrz, otrzymanej drogą fotograficzną, są rys. 174 i 176.



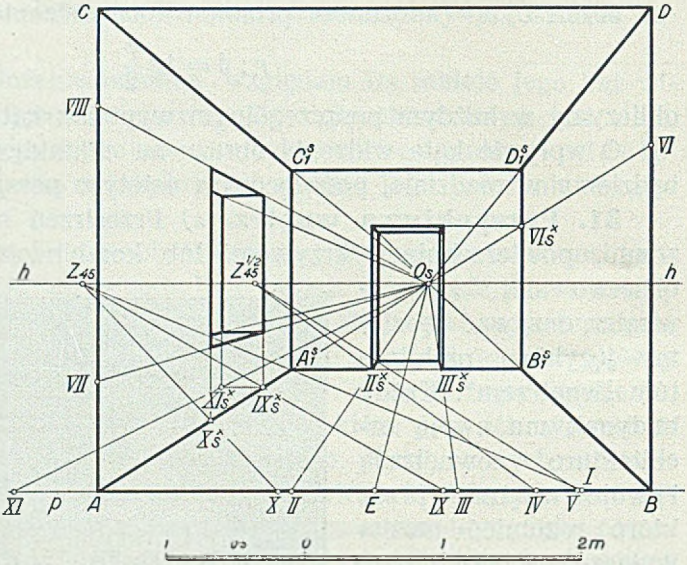
Rys. 174.
Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się wewnątrz pokoju, zwróceni twarzą do jednej ze ścian bocznych. Szerokość pokoju wynosi 4 *m*, jego wysokość 3·5 *m*, w danej na rysunku 175 podziałce. W ścianie czołowej znajdują się drzwi 1·2 *m* szerokie i 2·5 *m* wysokie. W lewej ścianie umieszczony jest otwór okienny szerokości 1·2 *m* i 2 *m* wysoki, przy wysokości parapetu 0·8 *m*. Grubość ścian wynosi 60 *cm*. Tło, równoległe do ściany czołowej, oddalone jest od niej o 3·5 *m*; głębokość tłową przyjęliśmy równą 2·5 *m*.

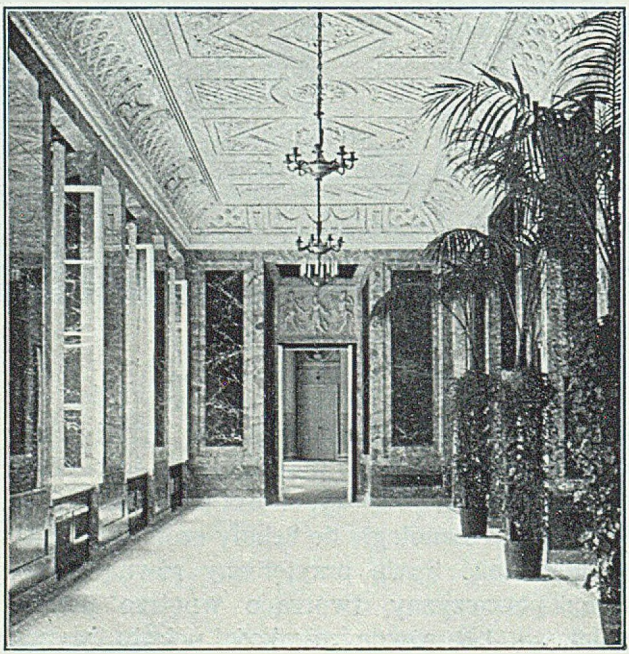
Płaszczyzna tła przecina płaszczyzny, tworzące wnętrze pokoju, w prostokącie, którego podstawa $\overline{AB}$, równa szerokości pokoju, wynosi 4 *m*, a wysokość $\overline{AC} = 3{\cdot}5$ *m* odpowiada wysokości pokoju. Głębokość pokoju, równą 3·5 *m*, odmierzymy na linji podstawy *p*, jako odcinek $\overline{AI}$, poczem punkt *I* połączymy z punktem głębokości Z_{45}. Na promieniu AO_s

otrzymamy punkt A_1^s. Odcinek $\overline{A\,A_1^s}$ jest perspektywą lewej krawędzi podłogi. Punkty *B*, *C*, *D* połączymy z punktem głównym, poczem, wychodząc z punktu A_1^s, wykreślimy prostokąt $A_1^s B_1^s C_1^s D_1^s$, stanowiący perspektywę przedniej ściany pokoju.

Wyznaczmy środek *E* odcinka $\overline{A\,B}$, odmierzmy $\overline{E\,II} = \overline{E\,III} = 0{\cdot}6\ m$ i połączmy punkty *II* i *III* z punktem głównym. Na prostej $A_1^s B_1^s$ otrzymamy punkty $II_s^\times$ i $III_s^\times$, ograniczające perspektywiczną szerokość drzwi. Wysokość drzwi, wynoszącą 2·5 *m*, odmierzymy na boku *BD*, jako odcinek $\overline{BVI}$, a punkt *VI* rzucimy z punktu O_s na prostą $B_1^s D_1^s$, otrzymując punkt $VI_s^\times$. Równoległa do horyzontu, poprowadzona przez punkt $VI_s^\times$, ogranicza wysokość drzwi. Do wyznaczenia grubości ściany w otworze drzwi użyjemy punktu częściowej głębokości $Z_{45}^{1/2}$, z którego rzucimy punkt $II_s^\times$ na linję podstawy, otrzymu-



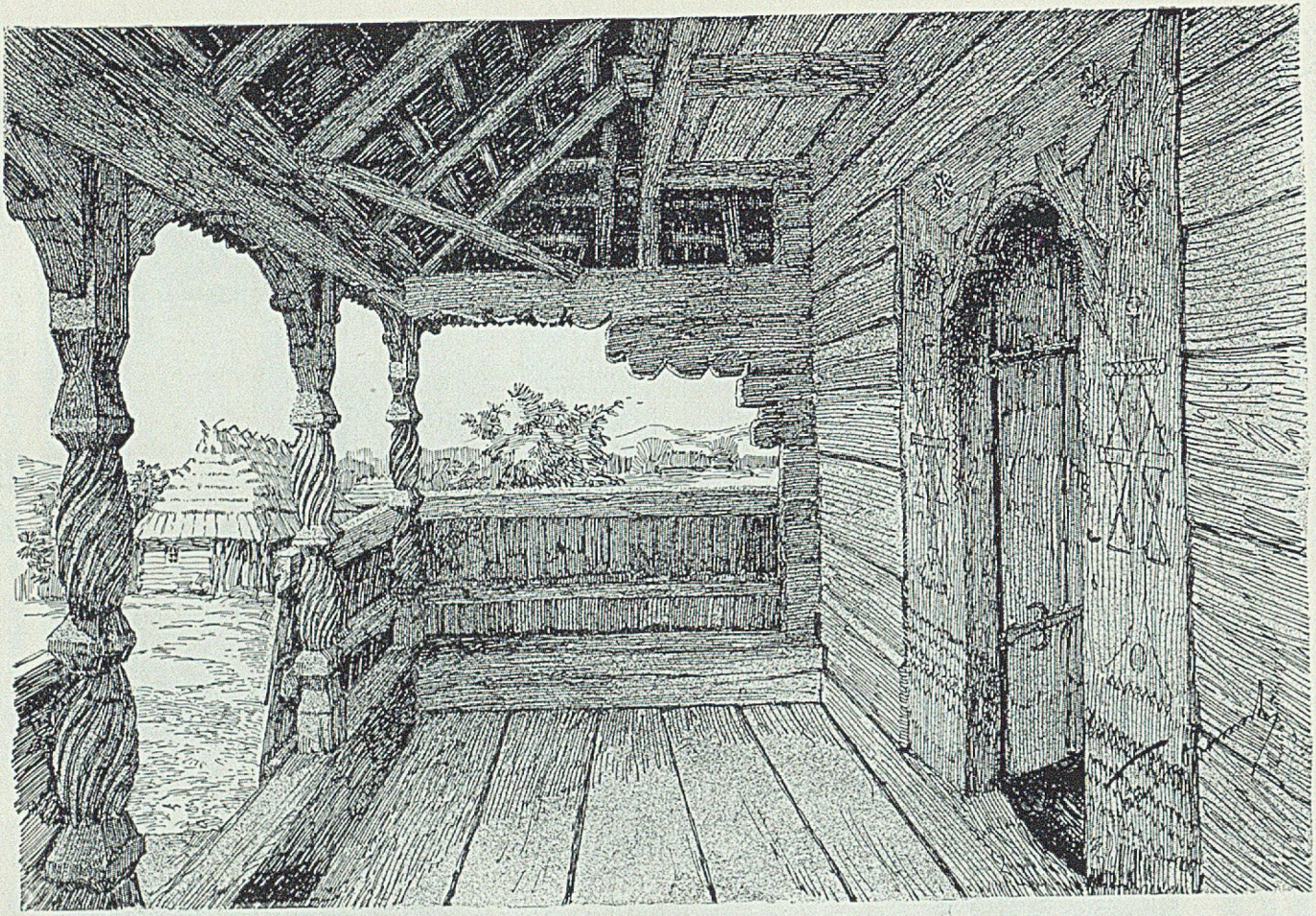
Rys. 175.



Rys. 176.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

nym. Na prostej $A_1^s B_1^s$ otrzymamy punkty $II_s^\times$ i $III_s^\times$, ograniczające perspektywiczną szerokość drzwi. Wysokość drzwi, wynoszącą 2·5 *m*, odmierzymy na boku *BD*, jako odcinek $\overline{BVI}$, a punkt *VI* rzucimy z punktu O_s na prostą $B_1^s D_1^s$, otrzymując punkt $VI_s^\times$. Równoległa do horyzontu, poprowadzona przez punkt $VI_s^\times$, ogranicza wysokość drzwi. Do wyznaczenia grubości ściany w otworze drzwi użyjemy punktu częściowej głębokości $Z_{45}^{1/2}$, z którego rzucimy punkt $II_s^\times$ na linję podstawy, otrzymu-



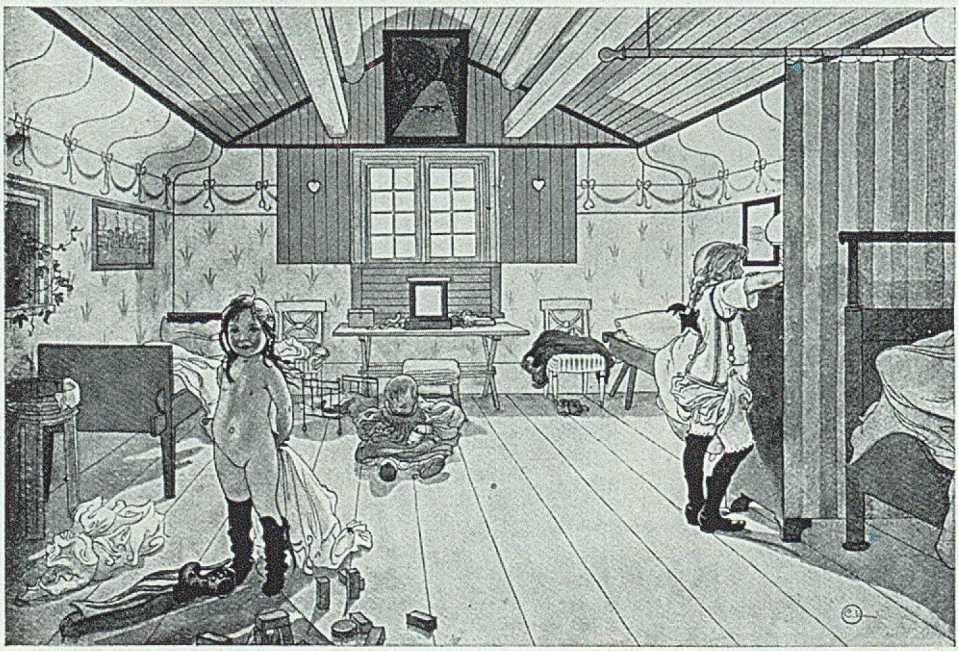
Rys. 177.

Rys. prof. Tad. Obmiński.

jąc na niej punkt *IV*. Ponieważ grubość ścian wynosi 60 *cm*, więc przy użyciu punktu $Z_{45}^{1/2}$ odmierzymy odcinek $\overline{IV\,V} = 30$ *cm* i punkt *V* rzucimy z $Z_{45}^{1/2}$ na prostą $II_s^{\times} O_s$. Otrzymany tam punkt umożliwia uzupełnienie rysunku otworu drzwi.

Pozostaje do wykreślenia otwór okienny w lewej ścianie. Na boku $\overline{A\,C}$ odmierzymy wysokość parapetu $\overline{A\,VII} = 80$ *cm* a także wysokość okna $\overline{VII\,VIII} = 2$ *m*, poczem punkty *VII* i *VIII* połączymy z punktem głównym O_s. Następnie odmierzymy na podstawie *p* odcinek $\overline{I\,IX} = 1$ *m* i odcinek $\overline{IX\,X} = 1{\cdot}2$ *m*, t. j. równy przyjętej szerokości okna. Punkty *IX* i *X* rzucimy z punktu Z_{45} na prostą $A\,O_s$, a przez punkty $IX_s^{\times}$ i $X_s^{\times}$ wykreślimy prostopadłe do linji horyzontu. Grubość ściany bocznej znajdziemy, odnosząc na podstawie *p* odcinek $\overline{A\,XI} = 60$ *cm* i łącząc punkt *XI* z punktem głównym. Dopełnienie linij otworu okiennego nie nastręczy trudności.

Charakter otrzymanego obrazu perspektywicznego wnętrza zależy oczywiście od położenia oka, a przy ustalonem położeniu tła także od głębokości tłowej δ. Im bardziej zbliżone jest oko do jednej ze ścian bocznych, tem większy jest trapez, stanowiący perspektywę ściany przeciwległej, czyli, jak się wyrażamy, ściany tej więcej widzimy. Z obniżaniem się horyzontu zmniejsza się obraz podłogi, a natomiast zwiększa powierzchnia obrazu sufitu.



Rys. 178.

Karol Larsson. Pokój dziecięcy. Klisza F. Bruckmanna, Monachjum.

Ze wzrostem głębokości tłowej — przy niezmiennem położeniu tła — rośnie wielkość figury, stanowiącej obraz przedniej ściany czołowej; obraz staje się bardziej „płaski“, mniej „głęboki“. I przeciwnie: gdy głębokość tłowa — przy stałem położeniu tła — maleje, to figura, będąca perspektywą przedniej ściany czołowej, również maleje; równocześnie trapezy, jako obrazy perspektywiczne ścian bocznych, podłogi i sufitu — rosną. W tym wypadku odniesiemy wrażenie, jakgdyby głębokość pokoju wzrosła — obraz stał się „głębszy“.

Rys. 179.
Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

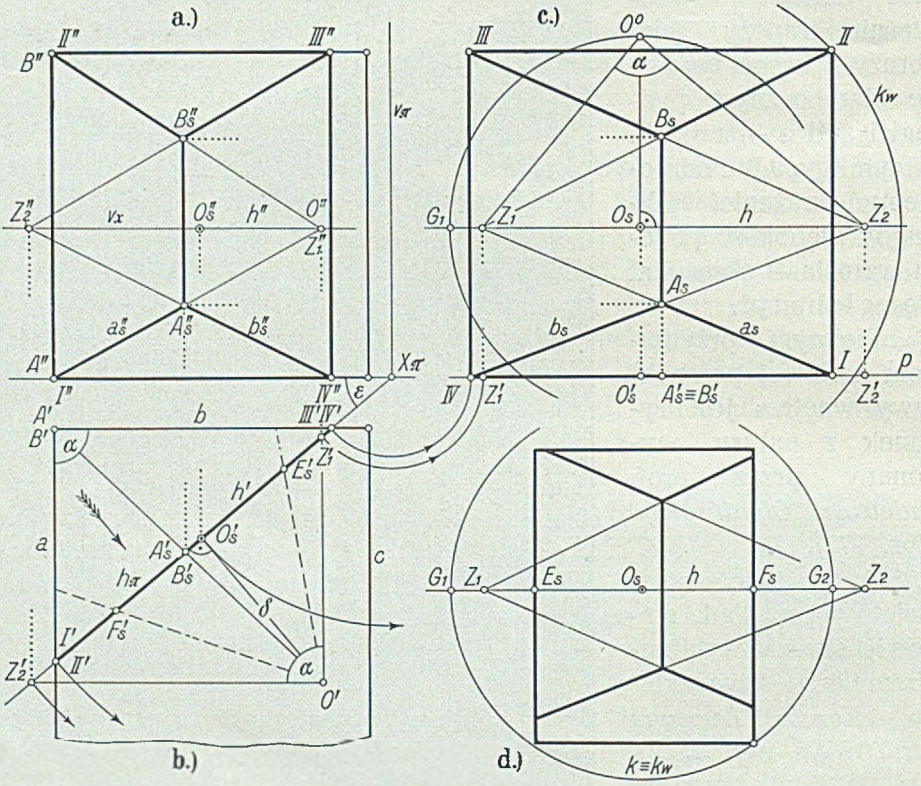
Pięknym przykładem czołowej perspektywy wnętrza jest rysunek z natury, wykonany przez prof. *Tadeusza Obmińskiego* (rys. 177).

Drugi, nie mniej świetny przykład, stanowi obraz wybitnego malarza szwedzkiego, *Karola Larssona* (ur. 1855, um. 1919), rys. 178. Linja horyzontu przechodzi przez dolną krawędź otwartych okiennic, punkt główny leży na osi symetrji pierwszej kolumny szyb.

b) Jeżeli pionowa płaszczyzna tła nie przecina wnętrza pokoju równolegle do jednej ze ścian pionowych, to wówczas otrzymamy „boczną“ perspektywę wnętrza, która zawierać będzie dwie sąsiednie ściany pionowe, a prócz tego część podłogi i sufitu.

Dla łatwiejszego zorjentowania się w zadaniu narysowania takiej bocznej perspektywy wnętrza, wyszliśmy w rys. 180 z rzutów pro-

stokątnych: poziomego (rys. 180 *b*) i pionowego (rys. 180 *a*). Prosta h_π jest śladem poziomym pionowej płaszczyzny tła, na którą rzucimy z oka naroże pokoju, ograniczone w rzucie poziomym (widoku zgóry) trójbokiem *a b* h_π; położenie oka określone jest punktami *O'* i *O''*. Prosta ν_χ, na rys. 180 *a*, przedstawia ślad płaszczyzny horyzontu na pionowej płaszczyźnie rzutów (w widoku zprzodu).



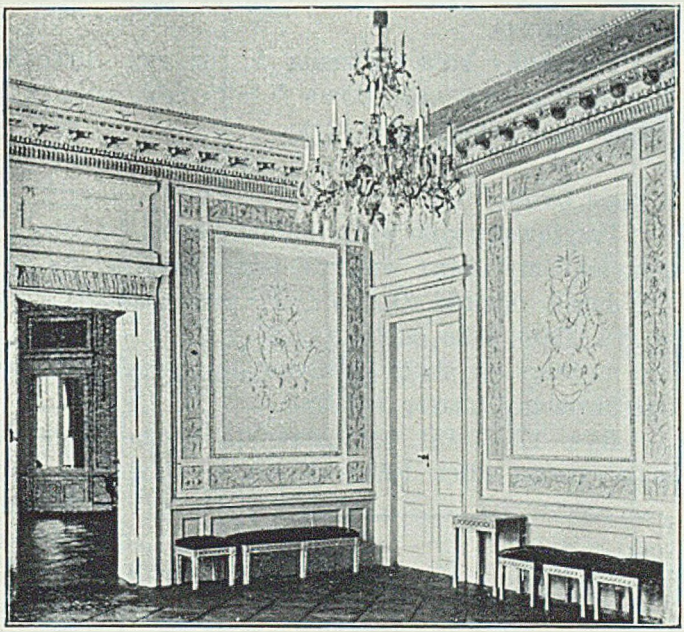
Rys. 180 *a* — *d*.

Tło przecina pionowe ściany boczne, podłogę i sufit w prostokącie *I II III IV*, którego rzut poziomy jest odcinkiem $\overline{I'\,IV'}$, a widok z przodu (rzut pionowy) prostokątem *I'' II'' III'' IV''*.

Promienie wykreślone z punktu *O'*, równolegle do prostych *a* i *b*, przetną prostą h_π w punktach Z_1' i Z_2', które są rzutami poziomemi, śladów zbiegu kierunków *a* i *b*. Rzuty pionowe Z_1'' i Z_2'' tych śladów leżą na rzucie pionowym $h'' \equiv \nu_\chi$ horyzontu.

Płaszczyzna, przechodząca przez oko i pionową krawędź *A B* naroża, przetnie tło wzdłuż prostej pionowej. Rzut poziomy tej prostej jest punktem $A_s' \equiv B_s'$, a rzut pionowy prostą prostopadłą do horyzontu, ograni-

czoną punktami A_s'' i B_s'', które otrzymamy, łącząc punkty I'' i II'' z punktem $O'' \equiv Z_1''$, lub punkty III'' i IV'' z punktem Z_2''. Tym sposobem dochodzimy do rzutu pionowego perspektywy wnętrza. Celem otrzymania samej perspektywy, należy obrócić płaszczyznę tła około jej śladu pionowego v_π na pionową płaszczyznę rzutów, z którą zawiera ona kąt ε. Punkty, leżące na prostej h_π, zakreślą łuki kół o wspólnym środku X_π i padną na prostą p. Punkty Z_1' i Z_2' tej prostej, odniesione na horyzont, staną się śladami zbiegu Z_1 i Z_2; połączymy je z wierzchołkami prostokąta *I II III IV* promieniami, przecinającemi się w punktach A_s i B_s.



Rys. 181.
Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

Szczególne trudności przy perspektywicznem przedstawianiu wnętrz nastręcza przyjęcie położenia oka, wzgl. „stanowiska“ — t. j. rzutu prostokątnego O' oka na płaszczyznę podstawy (podłogi) — (rys. 180*b*).

Jeżeli perspektywa ma oddawać ściśle rzeczywistość, to przyjęcie stanowiska ograniczone jest wymiarami rysowanego wnętrza; oko może znajdować się nie dalej, jak na jednej ze ścian ograniczających rysowany obszar. Oddalenie oka od rysowanego przedmiotu okaże się zazwyczaj zbyt małe.

Potrzeba pomieszczenia, na określonym formacie kliszy fotograficznej, obrazu możliwie dużego obszaru przestrzeni — przy stosunkowo małem oddaleniu przedmiotowem, którego powiększenie nie leży w naszej mocy — zniewala fotografa do posługiwania się objektywami szerokokątnemi o bardzo krótkich ogniskowych. Konsekwencje, wynikające stąd dla charakteru obrazu, omówimy szczegółowo w rozdziale, traktującym o estetyce perspektywy.

Rysownik jest w dogodniejszej sytuacji, aniżeli fotograf. Może on konstruować perspektywę wnętrza przy założeniu, że oko jego znajduje się zewnątrz ścian, okalających wnętrze. Tym sposobem powiększy on oddalenie przedmiotowe do wielkości, dyktowanej wymaganiami poprawnej perspektywy, poświęcając na rzecz tej poprawności warunki rzeczywistości.

Promień r koła widzenia k_w na rys. 180*c* wynosi około 34 *mm*, a ponieważ głębokość tłowa $\delta = 25$ *mm*, więc kąt widzenia obrazu obliczony z relacji (str. 121)

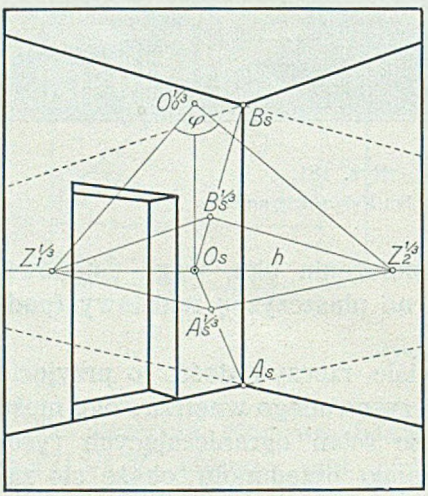
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = r : \delta$$

wynosi około 108°.

Przyjąwszy koło widzenia identyczne z kołem głębokości, t. j. $k_w \equiv k$, otrzymaliśmy obraz wnętrza, przedstawiony na rys. 180*d*.

Jeżeli odcinki $\overline{O_s E_s}$ i $\overline{O_s F_s}$ przeniesiemy z rys. 180*d* na prostą h_π w rys. 180*b*, jako odcinki $\overline{O_s' E_s'}$ i $\overline{O_s' F_s'}$ — to proste $O' E_s'$ i $O' F_s'$ uważać możemy za ślady poziome pionowych płaszczyzn, ograniczających obserwowany obszar wnętrza.

Rys. 179 i 181 przedstawiają boczne perspektywy wnętrz, otrzymane drogą zdjęć fotograficznych. Czytelnik spostrzeże z łatwością, że kąt widzenia obrazu na rys. 181 jest znacznie większy, aniżeli na rys. 179.

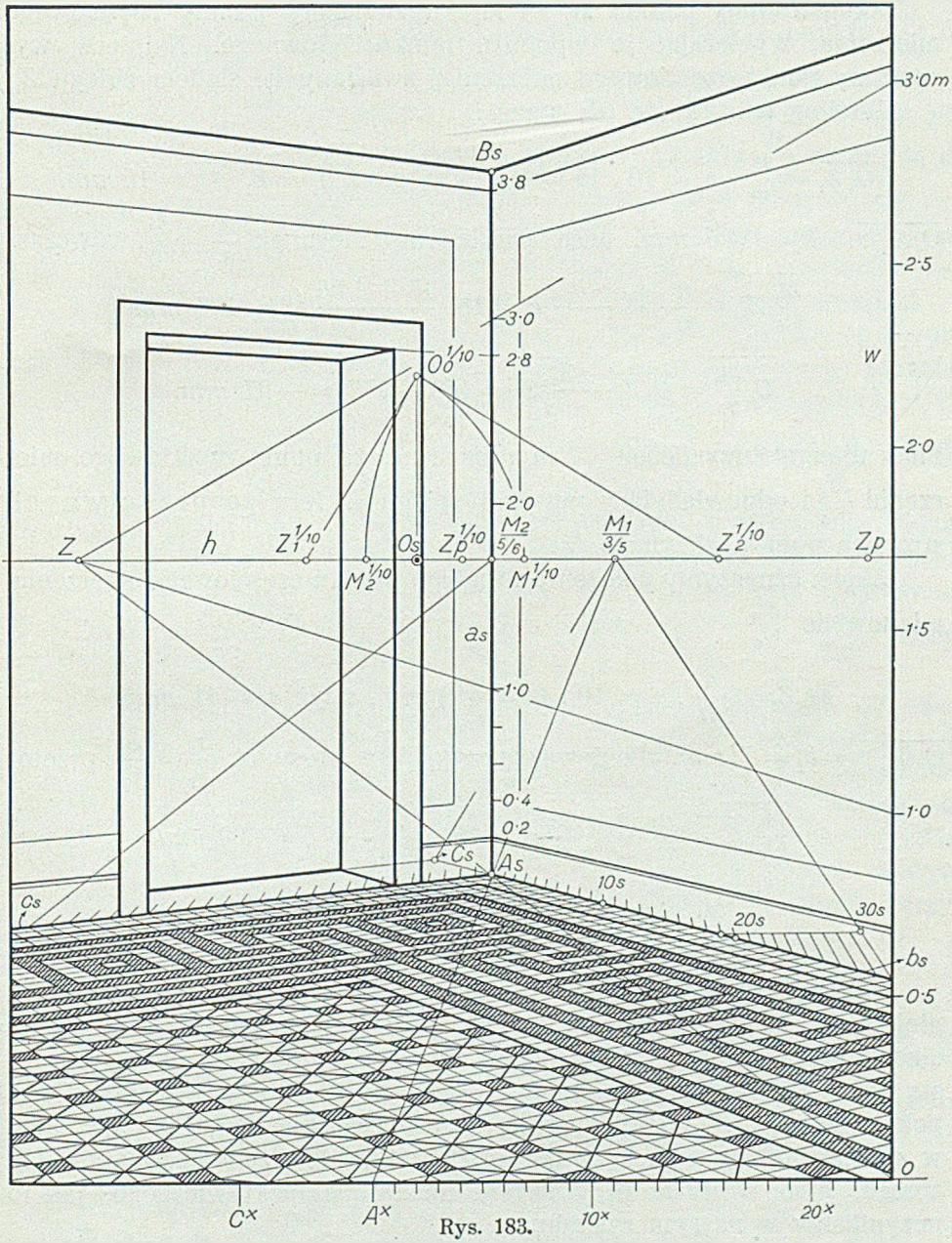


Rys. 182.

Rys. 182 jest boczną perspektywą wnętrza, wykreśloną przy użyciu trzeciej części głębokości tłowej. Wychodząc z częściowego śladu zbiegu $Z_1^{1/3}$, wykreśliliśmy kąt $Z_1^{1/3} O_0^{1/3} Z_2^{1/3} = \varphi$, jaki tworzą ze sobą sąsiednie ściany pionowe naroża. Następnie wykreśliliśmy odcinek $\overline{A_s B_s}$ i połączyliśmy jego punkty końcowe ze śladami zbiegu, w sposób omówiony w ust. 22.

Promień koła widzenia obrazu łączy prawy, górny wierzchołek prostokąta, ograniczającego obraz z punktem O_s, i wynosi 46 *mm*. Ponieważ głębokość tłowa wynosi 66 *mm* — więc kąt widzenia obrazu równy jest 70°.

Dalszym przykładem perspektywy wnętrza, a w szczególności prostokątnego naroża pokoju, jest rys. 183. Przyjmijmy, że wielkość obrazu 119 × 159 *mm* jest zgóry dana. Podziałka rysunku 1 : 20 narysowana jest na prawej jego krawędzi w. Niechaj wysokość horyzontu wynosi 1·7 *m* a głębokość tłowa 5 *m*.



Rys. 183.

Ponieważ, według założenia, ściany boczne są do siebie prostopadłe, więc, przyjąwszy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/10}$, wykreślimy promień prostopadły do prostej $Z_1^{1/10} O_0^{1/10}$ w punkcie $O_0^{1/10}$ i otrzymamy częściowy ślad zbiegu $Z_2^{1/10}$, drugiego kierunku, prostopadłego do pierwszego.

Skonstruujmy punkty $M_1^{1/10}$ i $M_2^{1/10}$ i znajdźmy punkty częściowego mierzenia, wybierając je wpobliżu punktu głównego. Najpierw wyznaczmy punkt częściowego mierzenia, związany ze śladem zbiegu Z_1.

Według ust. 28, str. 95, mamy:

$$\overline{O_s Z_1} = \frac{n}{m} \cdot a_1 = 10 \,.\, 15 = 150 \; mm, \text{ gdyż } a_1 = \overline{Z_1^{1/10} O_s} = 15 \; mm.$$

$\overline{O_s M_1^{1/10}} = b_1 = 14{\cdot}5 \; mm$. Jeśli przyjmiemy stosunek $\frac{r_1}{s_1} = \frac{3}{5}$, wówczas:

$$\overline{M_1^{3/5} Z_1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{a_1 + b_1}{s_1} \cdot r_1 = 10 \cdot \frac{15 + 14{\cdot}5}{5} \cdot 3 = 177 \; mm$$

$$\overline{O_s M_1^{3/5}} = \overline{O_s Z_1} - \overline{M_1^{3/5} Z_1} = 150 - 177 = -27 \; mm.$$

Znak ujemny przy liczbie 27 *mm* oznacza, że punkt częściowego mierzenia $M_1^{3/5}$ i odpowiadający mu ślad zbiegu Z_1 leżą po przeciwnych stronach punktu głównego O_s.

Zkolei oznaczymy położenie drugiego punktu częściowego mierzenia, mianowicie $M_2^{5/6}$

$$\overline{O_s Z_2} = \frac{n}{m} \,.\, a_2 = 10 \,.\, 41 = 410 \; mm, \text{ gdyż } a_2 = 41 \; mm$$

$\overline{O_s M_2^{1/10}} = b_2 = 7 \; mm$. Ponieważ przyjęliśmy stosunek $\frac{r_2}{s_2} = \frac{5}{6}$, przeto:

$$\overline{M_2^{5/6} Z_2} = \frac{n}{m} \cdot \frac{a_2 + b_2}{s_2} r_2 = 10 \cdot \frac{41 + 7}{6} \cdot 5 = 400 \; mm$$

$$\overline{O_s M_2^{5/6}} = \overline{O_s Z_2} - \overline{M_2^{5/6} Z_2} = 410 - 400 = 10 \; mm.$$

Wykreślimy teraz prostą a_s prostopadłą do horyzontu i przyjęty na niej punkt A_s połączymy z punktem O podziałki w. Prosta $O - A_s$ przecina horyzont w punkcie Z; z punktu tego rzucimy podziałkę w na prostą a_s i jej jednostką odmierzymy od punktu A_s 3·8 m równe wysokości pokoju. Punkty A_s i B_s połączymy ze śladami zbiegu Z_1 i Z_2, i to albo w sposób podany w ust. 22 (patrz rys. 93), albo zapomocą podziałek zbiegu, albo wreszcie przy użyciu lineału perspektywicznego, jak to uczyniliśmy w naszym rysunku.

Zkolei narysujemy podziałki perspektywiczne na krawędziach b_s i c_s podłogi. Punktem częściowego mierzenia dla pierwszej jest punkt $M_1^{3/5}$, z niego też rzucimy punkt A_s na linję podstawy, otrzymując tam punkt A^x. Od punktu tego odmierzymy na linji podstawy podziałkę, pomniejszoną

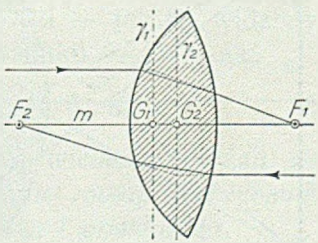
do $^3/_5$ przyjętej jednostki i punkty podziału rzucimy z punktu $\frac{M_1}{3/5}$ na prostą b_s. Teraz wyznaczymy podziałkę perspektywiczną na prostej c_s; odmierzymy na linji podstawy tę samą, co poprzednio, jednostkę, pomniejszoną do $^5/_6$, i rzucimy punkty podziału z punktu $\frac{M_2}{5/6}$ na prostą c_s. Konstrukcji tej nie zamieściliśmy na rysunku, gdyż pokrywa się ona zupełnie z podaną dla prostej b_s. Punkty podziałek perspektywicznych na prostych b_s i c_s połączymy ze śladami Z_1 i Z_2, otrzymując perspektywę siatki kwadratów, w którą wrysujemy ornament posadzki.

Podziałki na prostych a_s i c_s pozwolą narysować perspektywę otworu drzwi o wymiarach 1·4/2·8 *m*. Aby odmierzyć grubość muru, przeniesiemy ją, w zmniejszonej do $^3/_5$ podziałce rysunku, jako odcinek $\overline{A^\times C^\times}$ na linję podstawy i punkt $C^\times$ rzucimy z punktu $\frac{M_1}{3/5}$ na prostą b_s. Otrzymany punkt C_s połączymy następnie z punktem Z_2.

Głębokość tłowa na rys. 183 wynosi 250 *mm*; promień koła widzenia obrazu, które przechodzi przez dolny prawy wierzchołek prostokąta ograniczającego obraz, równy jest 106 *mm*; styczna trygonometryczna połowy kąta widzenia obrazu wynosi: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{\delta} = \frac{53}{125}$, zatem kąt $\varphi = \sim 46°$.

32. Perspektywa fotograficzna. Drogą mechaniczną otrzymujemy obrazy perspektywiczne zapomocą aparatu fotograficznego, którego „o k i e m“ jest objektyw. Zwrócona ku objektywowi fotograficznemu powierzchnia matówki, względnie płyty fotograficznej, odpowiada geometrycznemu pojęciu płaszczyzny tła. Precyzja nowoczesnej techniki optycznej pozwala na założenie, że fotogram, otrzymany dobrym objektywem fotograficznym, pokrywa się zupełnie z wynikami, otrzymanemi drogą konstrukcji geometrycznej.

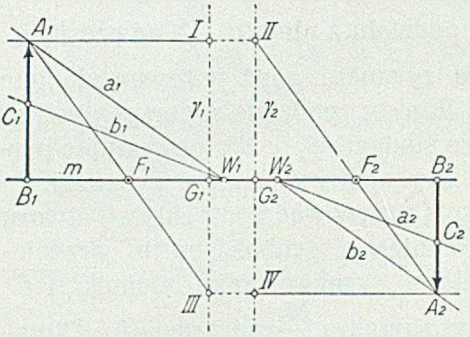
W granicach tego wykładu nie możemy zajmować się szczegółami optyki aparatu fotograficznego; omówimy tylko podstawowe jej prawa, potrzebne do zorjentowania się w analogji, jaka zachodzi między perspektywą konstrukcyjną a fotograficzną.



Rys. 184.

Linja *m*, łącząca środki powierzchni kul, ograniczających soczewkę, nazywa się jej *osią optyczną* (rys. 184). Promienie, biegnące w bezpośredniej bliskości osi optycznej i do niej równoległe, przecinają się — po przejściu przez soczewkę — w jednym punkcie na osi, który zwie się *ogniskiem* (*F*) soczewki. Kierunki wszystkich promieni wchodzących i wychodzących przecinają się na *płaszczyźnie głównej*, prostopadłej

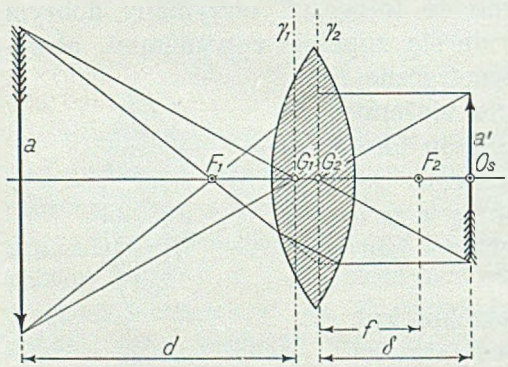
do osi optycznej. Płaszczyzna główna przecina oś optyczną w *punkcie głównym G* soczewki, którego nie należy identyfikować z punktem głównym w perspektywie. Oddalenie ogniska od głównego punktu soczewki nazywa się jej *ogniskową* (*f*). Każda soczewka ma dwa ogniska, dwie płaszczyzny główne i tyleż punktów głównych. Obie ogniskowe soczewki są sobie równe. W soczewce, użytej jako objektyw fotograficzny, wchodzi w grę jedno ognisko i jedna płaszczyzna główna.



Rys. 185.

Kilka soczewek, względnie ośrodków ograniczonych powierzchniami kulistemi o wspólnej osi, tworzy *układ osiowy*, który posiada — podobnie, jak soczewka pojedyncza: dwa ogniska F_1 i F_2 (rys. 185), dwie płaszczyzny główne γ_1 i γ_2 i dwa główne punkty G_1 i G_2. Ogniskiem układu jest punkt przecięcia się z osią układu — w ostatnim ośrodku — promienia, który w pierwszym ośrodku był równoległy do osi. Innemi słowy, określić można ognisko układu osiowego, jako ten punkt jego osi, przez który przechodzące promienie biegną w ostatnim, przeciwległym, ośrodku, równolegle do osi.

Główne płaszczyzny układu osiowego, będące — podobnie, jak główne płaszczyzny soczewki — miejscem geometrycznem punktów przecięcia się wszystkich promieni wchodzących i wychodzących, są prostopadłe do osi, przecinają ją w punktach głównych i posiadają tę własność, że obraz utworu płaskiego, znajdującego się na jednej z nich, leży na płaszczyźnie drugiej, jest prosty (nie odwrócony) i do danego utworu płaskiego przystający.



Rys. 186.

Na osi układu optycznego znajdują się dwa *punkty węzłowe* W_1 i W_2, charakteryzujące się tem, że każdy promień, który przed pierwszem załamaniem się skierowany jest ku pierwszemu z nich — po ostatniem załamaniu się przechodzi przez punkt drugi i pozostaje do swego pierwotnego kie-

runku równoległy. Jeżeli ostatni ośrodek jest ten sam, co pierwszy, to punkty węzłowe układu schodzą się z punktami głównemi.

Oznaczmy oddalenie przedmiotu od soczewki, mierzone do jej punktu głównego, literą *d*, a oddalenie obrazu tego przedmiotu od drugiego punktu głównego — odpowiadające w perspektywie konstrukcyjnej głębokości tłowej — literą δ. Między ogniskową f soczewki, oddaleniem przedmiotowem d i oddaleniem obrazu zachodzi związek:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Suma odwrotności oddalenia przedmiotowego i oddalenia obrazu równa jest odwrotności ogniskowej soczewki.

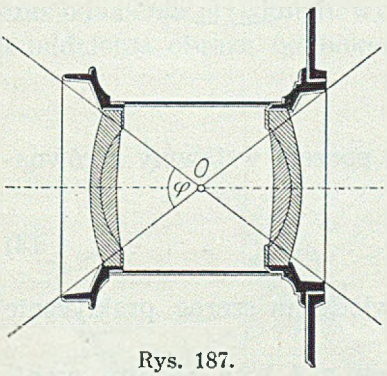
Z równania (5) otrzymamy trzy następujące:

$$f=\frac{d\,.\,\delta}{d+\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

$$d=\frac{\delta\,.\,f}{\delta-f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

$$\delta=\frac{d\,.\,f}{d-f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

Z równań tych możemy obliczyć każdą z trzech, wchodzących w nie wartości, gdy znamy dwie pozostałe.



Rys. 187.

Ustawmy przed objektywem fotograficznym (soczewką) przedmiot (strzałę) o długości *a* (rys. 186) i przyjmijmy, że strzała *a'* jest obrazem pierwszej. Między wielkością *a* przedmiotu a wielkością *a'* jego obrazu zachodzi — jak to widzimy bezpośrednio z rysunku — związek:

$$a' : a = \delta : d \quad \ldots\ldots 9)$$

t. zn., że *stosunek wielkości obrazu do wielkości przedmiotu równy jest stosunkowi oddaleń obrazu i przedmiotu.*

Oznaczmy stosunek wielkości przedmiotu do wielkości obrazu przez ε, to równanie (9) przyjmie formę:

$$\frac{a}{a'}=\varepsilon=\frac{d}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

Wstawmy $\delta=\frac{d}{\varepsilon}$ z równania (10) w (7), to otrzymamy:

$$d=f(1+\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 11)$$

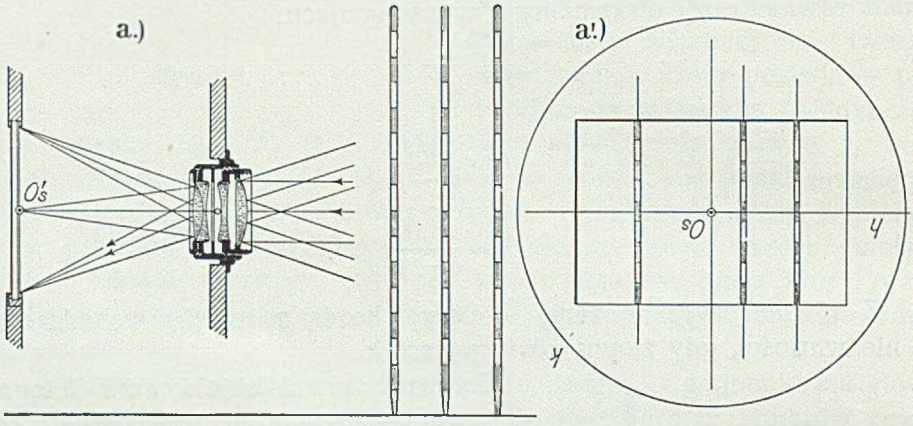
Zastąpmy w równaniu tem czynnik ε stosunkiem $\frac{a}{a'}$ i obliczmy wielkość obrazu a':

$$a' = \frac{f \cdot a}{d - f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

Równanie (12) poucza nas, że wielkość obrazu uzależniona jest — poza wielkością przedmiotu i jego oddalenia — także i od ogniskowej objektywu fotograficznego. *Ze wzrostem ogniskowej rośnie wielkość obrazu.*

Wartość $d = \varepsilon\delta$ z równania (10), wstawiona w równanie (7), daje:

$$\delta = f\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$



Rys. 188 *a*, *a'*.

Pomnóżmy równanie (11) przez $(1 + \varepsilon)$, poczem wstawmy z równania (10) $d = \varepsilon\delta$, to otrzymamy:

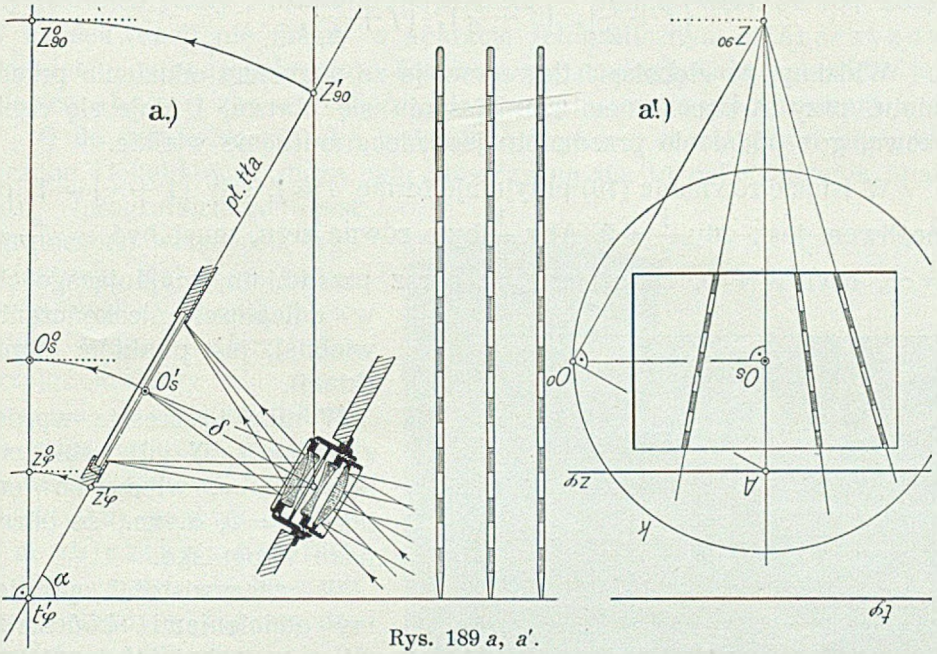
$$f = \frac{\varepsilon(\delta + d)}{(1 + \varepsilon)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 14)$$

Równania (11), (13) i (14) dają odpowiedź na szereg praktycznie ważnych pytań.

Przyjmijmy np., że wielkość obrazu ma być równa wielkości przedmiotu, czyli, że:

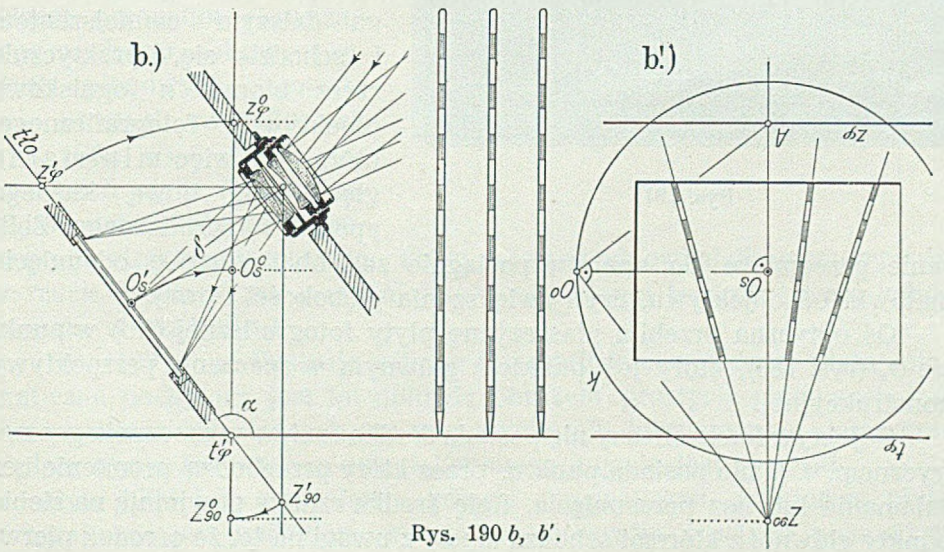
$$\varepsilon = \frac{a}{a'} = 1, \text{ a więc } a = a'.$$

Z równania (11) otrzymujemy przy tem założeniu $d = 2f$, a z równania (13) $\delta = 2f$. Stąd $d = \delta$, co oznacza, że oddalenie przedmiotu równe będzie oddaleniu obrazu a obie te wielkości równe podwójnej ogniskowej objektywu fotograficznego.



Rys. 189 *a*, *a'*.

Niechaj obraz ma być pomniejszony dwu-, trzy-, czterokrotnie w stosunku do przedmiotu, czyli niechaj $\varepsilon = \frac{a}{a'} = 2, 3, 4, \ldots$, to wówczas oddalenia przedmiotu wypadną z równania (11) równe $3f$, $4f$, $5f$, ..., a oddalenia obrazu (głębokości tłowe) z równania (13), kolejno:

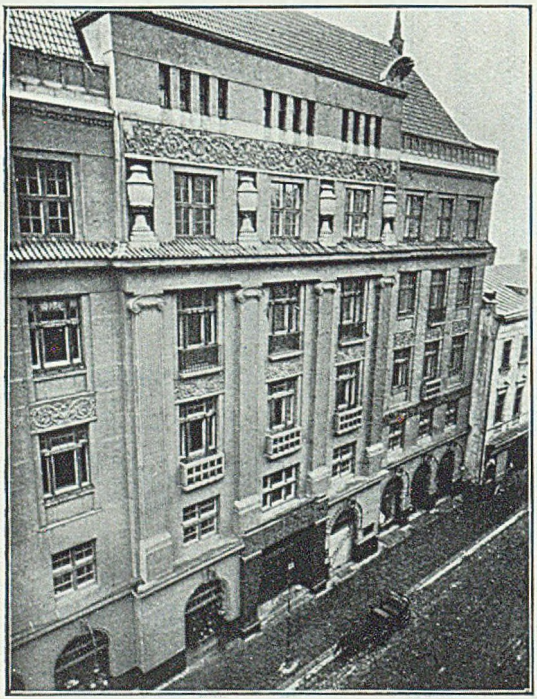


Rys. 190 *b*, *b'*.

$$\left(f+\frac{f}{2}\right),\ \left(f+\frac{f}{3}\right),\ \left(f+\frac{f}{4}\right),\ \ldots$$

Widzimy, że głębokość tłowa maleje ze wzrostem oddalenia przedmiotu, przy równoczesnem zmniejszaniu się obrazu, i staje się ogniskową, gdy oddalenie przedmiotu jest nieograniczenie wielkie.

W istocie równanie (13) przyjmuje formę $\delta = f$, gdy $\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=1$, co możliwem jest, gdy $\frac{1}{\varepsilon}=0$. Aby $\frac{1}{\varepsilon}$ było równe zeru, musi być $\varepsilon=\frac{a}{a'}=$ $=\infty$, czyli $a'=0$, co oznacza, że obraz przedmiotu, znajdującego się w odległości nieskończenie wielkiej, jest punktem (ogniskiem).



Rys. 191.

Wynika to zresztą wprost z równania (5), gdy wstawimy tam $d=\infty$, wtedy bowiem także $f=\delta$, t. zn., że obraz pada w ognisko.

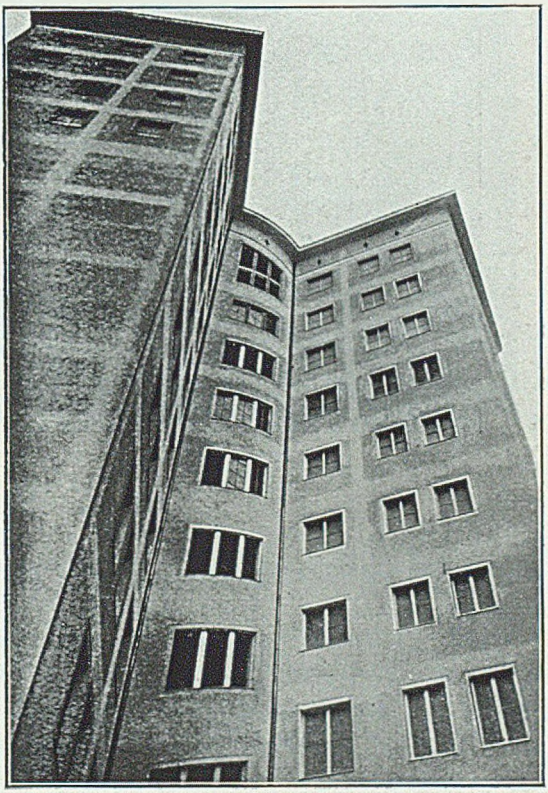
W rzeczywistości operujemy oddaleniami skończonemi, a w technice fotograficznej już po przekroczeniu kilkunastometrowego oddalenia przedmiotu dalsze jego zwiększanie pozostaje bez widocznego wpływu na głębokość tłową. Głębokość ta nie ulega dalszym zmniejszeniom i schodzi się, praktycznie rzecz biorąc, z ogniskową objektywu fotograficznego, która jest więc minimalną głębokością tłową każdego aparatu fotograficznego. Zbliżenie przedmiotu do aparatu pociągnie za sobą potrzebę odsunięcia matówki od objektywu, czyli zwiększenia głębokości tłowej.

Oś optyczna przebija płaszczyznę płyty fotograficznej (tło) w punkcie O_0 (rys. 186), który jest punktem głównym w znaczeniu perspektywy konstrukcyjnej.

Objektyw fotograficzny nie posiada środka rzutów w znaczeniu geometrycznem, t. j. nie posiada punktu, przez który przechodzą promienie bez załamania lub bez przesunięcia. Rolę środka rzutów przyjmują na siebie punkty główne, z któremi schodzą się — z uwagi na to, że ośrodek pierw-

szy jest identyczny z ostatnim (powietrze) — punkty węzłowe (str. 132). W konsekwencji nie mamy w aparacie fotograficznym płaszczyzny zniknienia, w znaczeniu rzutu środkowego; analogja każe wstawić w jej miejsce obszar, zawarty między dwiema płaszczyznami głównemi.

O ile pole widzenia oka geometrycznego jest teoretycznie nieograniczone i obejmować może całą płaszczyznę tła, to pole widzenia aparatu fotograficznego jest ograniczone własnością jego objektywu. Kąt wierzchołkowy φ stożka widzenia objektywu, którego wierzchołek przyjąć możemy dla uproszczenia w środku odcinka, ograniczonego punktami głównemi (środek optyczny objektywu), nazywa się kątem objektywu (rys. 187). W tak zwanych objektywach szerokokątnych kąt ten dochodzi do 140^0.



Rys. 192.

Obraz padający na płytę fotograficzną jest odwrócony; jeżeli płyta ma położenie pionowe, to fotogram odpowiada geometrycznie obrazowi perspektywy, stanowiącej przedmiot rozważań tego rozdziału; obrazy prostych pionowych stanowią pęk prostych równoległych (rys. 188*a*, *a'*).

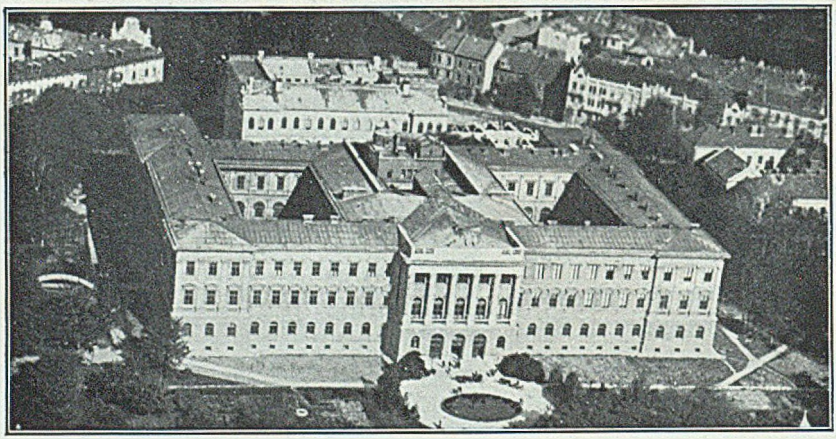
Jeżeli płyta fotograficzna nie ma położenia pionowego, to otrzymamy fotogram, który ma swój odpowiednik geometryczny w rzucie środkowym, w ogólniejszem rozumieniu tego określenia, omówionem w rozdziale I.

Rys. 189*a* i *a'* ilustruje zdjęcie fotograficzne, w którem płyta fotograficzna pochylona jest ku dołowi; obrazem prostych pionowych jest pęk promieni, schodzących się w punkcie Z^{90}, leżącym pod dolną krawędzią płyty. Przykładem tak dokonanego zdjęcia jest rys. 191.

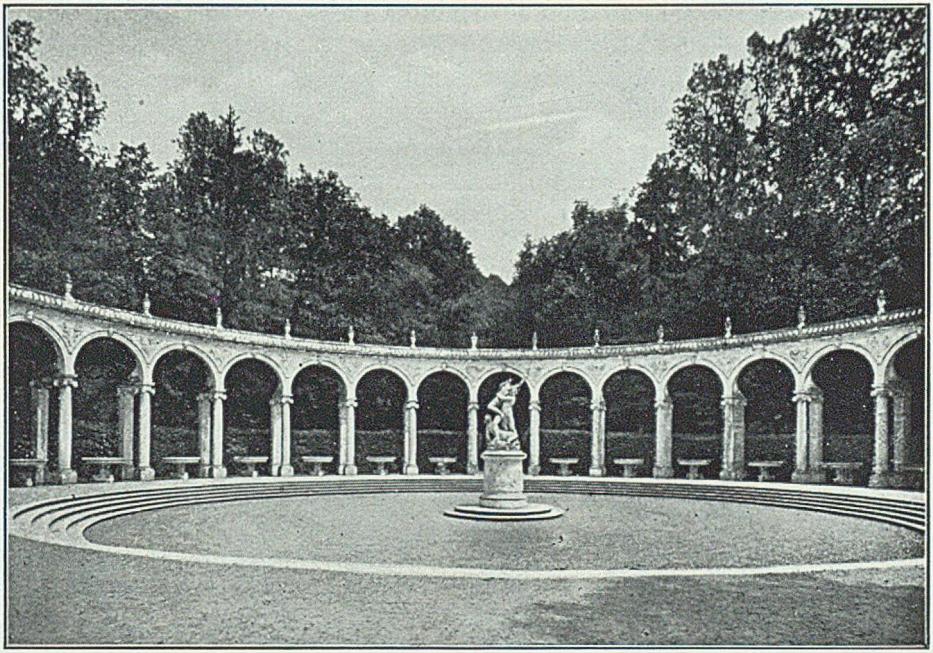
Rys. 190*b* i *b'* uzmysławia zdjęcie fotograficzne, w którem płyta fotograficzna jest nachylona ku górze; fotografją prostych pionowych

są proste, zbiegające się w punkcie Z^{90}, który leży nad dolną krawędzią obrazu. Zdjęcie fotograficzne, odpowiadające takiemu położeniu aparatu fotograficznego, przedstawia rys. 192.

Jako dalszy przykład zdjęcia przy dowolnem położeniu płaszczyzny kliszy, czyli przykład perspektywy ukośnej, służyć może zdjęcie, wykonane z balonu, względnie samolotu (rys. 193).



Rys. 193.

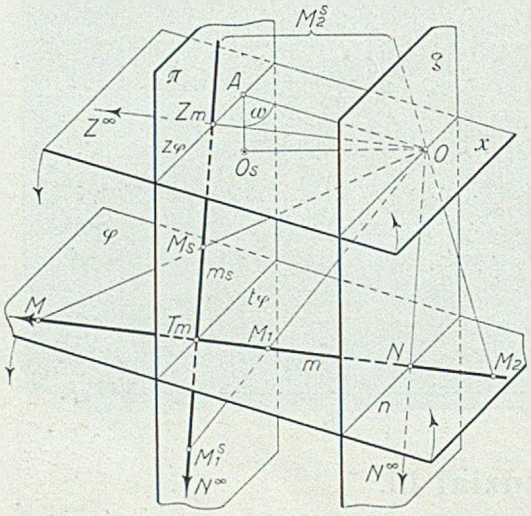


Rozdział III.

Perspektywa krzywych stożkowych.

33. Uwagi ogólne o perspektywie koła. *a)* Spójrzmy przedewszystkiem wstecz i ujmijmy pewne wyniki dotychczasowych rozumowań bardziej ogólnie. Wiemy, że każdy punkt przestrzeni ma swoją perspektywę, którą jest jeden, ściśle określony punkt, że perspektywą linji prostej jest prosta, że każdy trójkąt, czworokąt — ogólnie n-kąt, przyjęty na płaszczyźnie podstawy lub też na innej, dowolnie w przestrzeni leżącej płaszczyźnie, ma swój jednoznacznie wyznaczony obraz perspektywiczny na tle. Posługując się określeniami geometrycznemi, powiemy: między punktami i prostemi dowolnej płaszczyzny φ a ich perspektywami na tle zachodzi tego rodzaju zależność, że każdemu punktowi tej płaszczyzny odpowiada jeden jedyny punkt na tle, jako jego perspektywa, i że każdej prostej, przechodzącej przez punkt płaszczyzny φ, odpowiada na tle jedna jedyna prosta, przechodząca przez punkt, odpowiadający punktowi płaszczyzny φ. Ale ponadto zależność ta jest wzajemna, t. zn., że każdemu punktowi i każdej prostej, przechodzącej przez ten punkt na tle, odpowiada jeden punkt i jedna prosta na płaszczyźnie φ.

Nazywając punkty i proste, przyjęte na płaszczyźnie φ, jej elementami i pojmując płaszczyznę, jako zbiór tych elementów, powiemy: między elementami płaszczyzny φ a elementami płaszczyzny tła założyć się da odpowiedniość jedno-jednoznaczna, polegająca na tem, że punktowi, leżącemu na jednej z tych dwóch płaszczyzn, odpowiada na płaszczyźnie drugiej punkt, leżący z pierwszym na promieniu widzenia, a prostej na jednej płaszczyźnie — prosta na płaszczyźnie drugiej, leżąca z nią na płaszczyźnie, przechodzącej przez oko, czyli na płaszczyźnie widzenia.



Rys. 195.

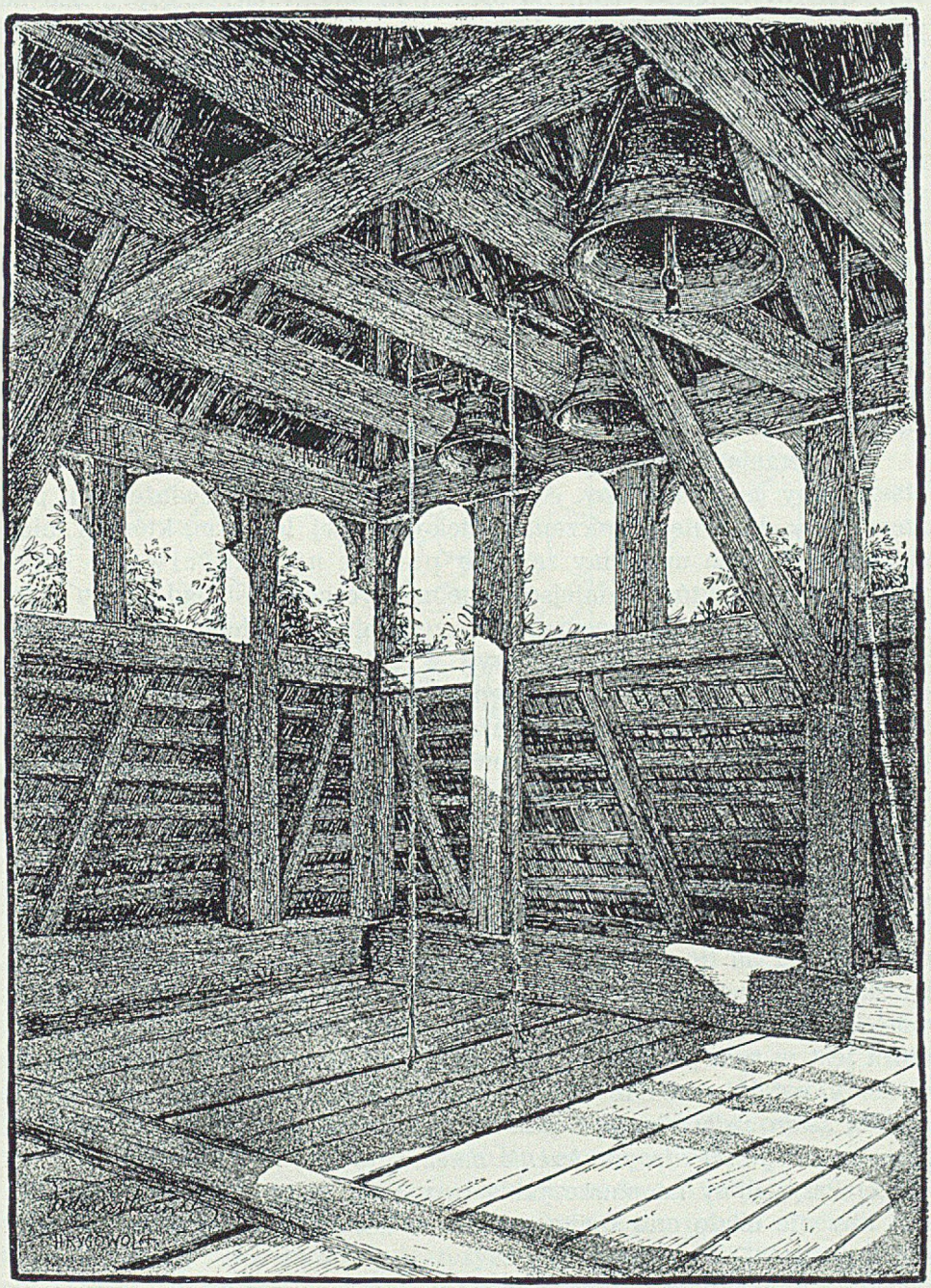
b) Niechaj płaszczyzna π (rys. 195) będzie płaszczyzną tła, punkt O okiem (środkiem rzutów), płaszczyzna $\xi \parallel \pi$ płaszczyzną zniknienia a płaszczyzna φ dowolnie przyjętą płaszczyzną, przecinającą tło wzdłuż śladu tłowego t_φ — i nachyloną do niego pod kątem ω. Przechodząca przez oko, równolegle do płaszczyzny φ, płaszczyzna χ przecina tło wzdłuż prostej $z_\varphi \parallel t_\varphi$, która jest śladem zbiegu płaszczyzny φ.

Przyjęta na płaszczyźnie φ prosta m przebija tło w śladzie tłowym T_m. Promień, wyprowadzony z oka równolegle do prostej m, przebija tło w punkcie Z_m, który jest śladem zbiegu prostej m. Prosta m_s, łącząca punkty T_m i Z_m, jest perspektywą prostej m.

Posługując się sposobem wyrażania, wprowadzonym w punkcie *a)* tego ustępu, powiemy, że prostej m, leżącej na płaszczyźnie φ, odpowiada na tle prosta m_s i wzajemnie — prostej m_s, leżącej na płaszczyźnie tła, odpowiada prosta m na płaszczyźnie φ.

Między punktami prostej m a punktami prostej m_s i wzajemnie zachodzi — stworzona pośrednictwem oka — również odpowiedniość jedno-jednoznaczna. Polega ona na tem, że każdemu punktowi jednej z tych prostych odpowiada jeden punkt na prostej drugiej, leżący z nim na promieniu widzenia.

Wyjdźmy od punktu, leżącego nieograniczenie daleko na prostej m, t. j. od punktu niewłaściwego Z^∞; punktowi temu odpowiada, w znaczeniu odpowiedniości geometrycznej, punkt Z_m (ślad zbiegu) prostej m_s. Zbliżajmy się od punktu Z^∞ prostej m ku jej śladowi tłowemu



Rys. 196. Rysował prof. Tadeusz Obmiński.

T_m. Punktowi M odpowiada na prostej m_s punkt M_s, leżący z nim na promieniu widzenia. Punktowi T_m, uważanemu za element prostej m_s, odpowiada tenże sam punkt T_m. Gdy więc, wychodząc od punktu niewłaściwego Z^∞, punkt przebiega prostą m aż do jej śladu tłowego, to perspektywa tego poruszającego się punktu odbywa na prostej m_s drogę od śladu zbiegu Z_m do śladu tłowego T_m. Gdy punkt porusza się dalej w tym samym kierunku i przebiega odcinek $T_m N$, to perspektywa jego porusza się równocześnie od punktu T_m ku punktowi niewłaściwemu N^∞ prostej m_s. Punkt N prostej m, leżący na śladzie zniknienia n (ust. 4, punkt *a*), którego perspektywą jest punkt niewłaściwy N^∞ prostej m_s, jest *śladem zniknienia* prostej m (ust. 3, punkt *a*). Gdy po przekroczeniu śladu zniknienia punkt — nie zmieniając kierunku ruchu — oddalać się będzie ku punktowi niewłaściwemu, to obraz jego zbliżać się będzie od punktu niewłaściwego N^∞ ku punktowi Z_m.

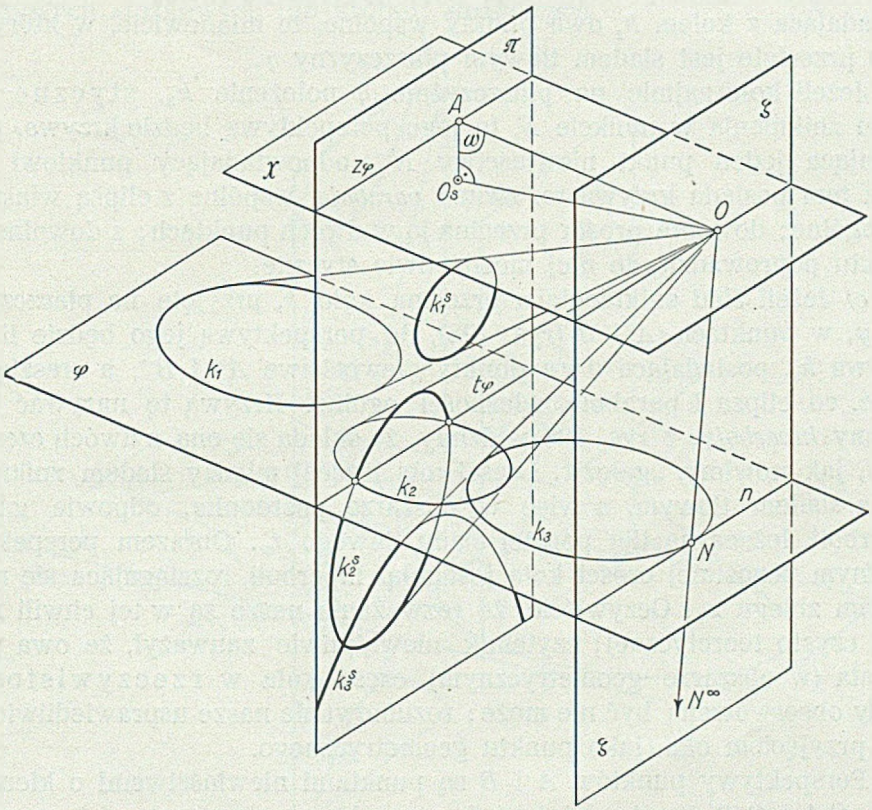
Rozszerzając sprawę przebiegu punktu i linji prostej na cały obszar płaszczyzny φ, zauważymy, co następuje: punktom niewłaściwym płaszczyzny φ, t. j. nieograniczenie daleko na niej leżącym, których miejsce geometryczne uważamy za linję prostą niewłaściwą — odpowiadają punkty, których miejscem geometrycznem jest ślad zbiegu z_φ tej płaszczyzny; punktom leżącym na płaszczyźnie φ „za tłem“, między prostą niewłaściwą a śladem tłowym, czyli w „obszarze istotnym“, odpowiadają na tle punkty, leżące między śladem zbiegu z_φ a śladem tłowym t_φ. Śladowi tłowemu t_φ, uważanemu za element płaszczyzny φ, odpowiada ta sama prosta, jako element płaszczyzny tła; innemi słowy: ślad tłowy płaszczyzny odpowiada sam sobie. Punktom, leżącym między śladem tłowym a śladem zniknienia (w „obszarze pośrednim“), odpowiadają na tle punkty, wypełniające część płaszczyzny tła od śladu tłowego aż do jej punktów niewłaściwych. Pozostałej części płaszczyzny φ, rozciągającej się od śladu zniknienia n (w „obszarze geometrycznym“), odpowiadają na tle punkty, od niewłaściwych począwszy, aż do leżących na śladzie zbiegu z_φ. Śladowi zniknienia n odpowiada na tle prosta niewłaściwa, stanowiąca krawędź płaszczyzny tła z płaszczyzną widzenia, która jest w tym przypadku równoległą do tła. Innemi słowy, wyrazić możemy ostatnie zdanie w sposób następujący: *perspektywa każdego punktu śladu zniknienia jest punktem niewłaściwym tła, t. zn. leży na niem w odległości nieograniczenie dalekiej.*

c) Przyjmijmy na płaszczyźnie φ, w miejsce prostej m, koło k_1 i to tak, aby nie miało ono żadnego punktu wspólnego ze śladem zniknienia n (rys. 197).

Każdemu punktowi koła k_1 odpowie jeden punkt na tle, a miejscem geometrycznem tych punktów będzie linja krzywa k_1^*. Innemi słowy:

linja krzywa k_1^s jest perspektywą koła k_1. Z łatwością zauważymy, że krzywa k_1^s posiada z kołem szereg wspólnych własności.

I tak, stosując twierdzenia, wypowiedziane w punkcie *b)* tego ustępu, stwierdzimy, że krzywa k_1^s nie posiada — podobnie, jak koło — żadnych punktów niewłaściwych, t. j. wszystkie jej punkty leżą w odległości skończonej. Wistocie bowiem, skoro tylko punktom, leżącym na śladzie zniknie-



Rys. 197.

nia n, odpowiadają punkty niewłaściwe, a ślad ten koła k_1 nie przecina, więc wszystkie punkty linji k_1^s są punktami właściwemi, czyli, jak się wyrażamy, krzywa k_1^s jest linją „zamkniętą".

Wiadomo, że linja prosta przecina koło w dwóch punktach, a z dowolnego punktu poprowadzić można do koła dwie proste styczne. Ponieważ między elementami płaszczyzn φ i π zachodzi wzajemna odpowiedniość jedno-jednoznaczna, więc wymienione wyżej własności łączą koło i jego perspektywę k_1^s. Stwierdzamy tem samem, że linja prosta przecina krzywą, która jest perspektywą koła, w dwóch punktach,

i że z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie proste styczne. Perspektywę koła, nie posiadającą punktów niewłaściwych, a więc stanowiącą linję „zamkniętą“, nazywamy *elipsą*. Elipsa jest perspektywą koła, które nie posiada żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną — a więc i ze śladem — zniknienia.

d) Jeżeli koło, leżące na płaszczyźnie φ, zbliży się do płaszczyzny zniknienia i zajmie położenie k_2, to perspektywą jego będzie elipsa k_2^*, posiadająca z kołem k_2 dwa punkty wspólne, te mianowicie, w których koło przecięte jest śladem tłowym płaszczyzny φ.

Jeżeli koło zajmie na płaszczyźnie φ położenie k_3, styczne do śladu zniknienia w punkcie N, to jego perspektywą będzie krzywa, posiadająca jeden punkt niewłaściwy N^∞, odpowiadający punktowi N. Poza tem posiada krzywa ta, zwana *parabolą*, wspólne z elipsą własności ogólne; dowolna prosta przecina ją w dwóch punktach; z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie styczne.

e) Jeżeli ślad zniknienia n przecina koło k, przyjęte na płaszczyźnie φ, w punktach A i B (rys. 198), to perspektywą jego będzie linja krzywa k_s, posiadająca dwa punkty niewłaściwe A^∞ i B^∞, a zresztą te same, co elipsa i parabola, własności ogólne. Krzywą tę nazywać będziemy *hiperbolą;* z rys. 198 widzimy, że składa się ona z dwóch części, czyli, jak mówimy, „gałęzi“. Części koła, leżącej między śladem zniknienia a śladem tłowym, a więc w obszarze pośrednim, odpowie gałąź hiperboli, leżąca na tle, poniżej śladu tłowego t_φ. Obrazem perspektywicznym pozostałej części koła jest gałąź hiperboli, rozciągająca się nad śladem zbiegu z_φ. Oczywiście, że rozważania nasze są w tej chwili natury czysto teoretycznej; czytelnik niewątpliwie zauważył, że owa pozostała (w obszarze geometrycznym) część koła w rzeczywistości nigdy obserwowaną być nie może; rozumowanie nasze usprawiedliwione jest przyjęciem oka, jako punktu geometrycznego.

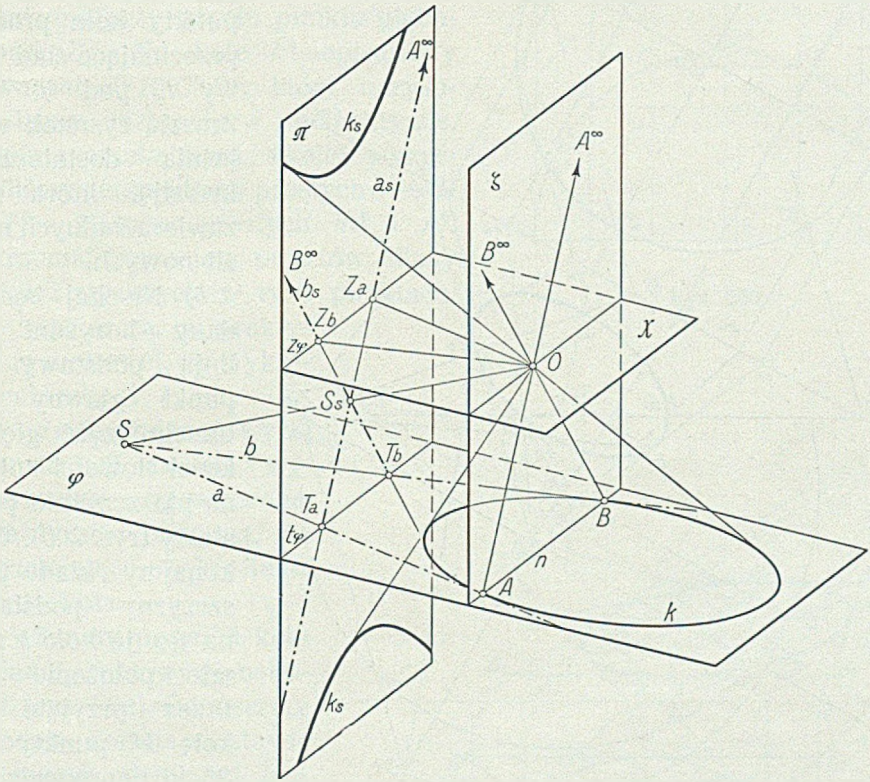
Perspektywy punktów A i B są punktami niewłaściwemi o kierunkach OA i OB. Proste a_s i b_s, t. j. perspektywy stycznych a i b, są prostemi równoległemi do kierunków OA i OB, przecinającemi się w punkcie S_s. Ponieważ stycznej do koła odpowiada styczna do jego perspektywy, więc proste a_s i b_s są stycznemi do hiperboli w punktach niewłaściwych A^∞ i B^∞, odpowiadających punktom A i B, leżącym na śladzie zniknienia n. Proste styczne do krzywej w jej punktach niewłaściwych noszą nazwę asymptot; hiperbola posiada więc dwie asymptoty.

O ile koło leży przed śladem zniknienia (w obszarze geometrycznym) i nie ma z nim żadnych punktów wspólnych, to perspektywą jego jest elipsa; to położenie koła ma znaczenie li tylko teoretyczne.

Reasumując, powiemy: perspektywa koła zależy od jego położenia względem płaszczyzny zniknienia i jest elipsą, parabolą lub hiperbolą.

W szczególności, jeżeli ślad zniknienia koła nie przecina, to jego perspektywą jest elipsa — jeżeli jest styczny do koła, to jego obraz perspektywiczny jest parabolą, a jeżeli przecina koło w dwóch punktach, to perspektywą tak położonego koła jest hiperbola.

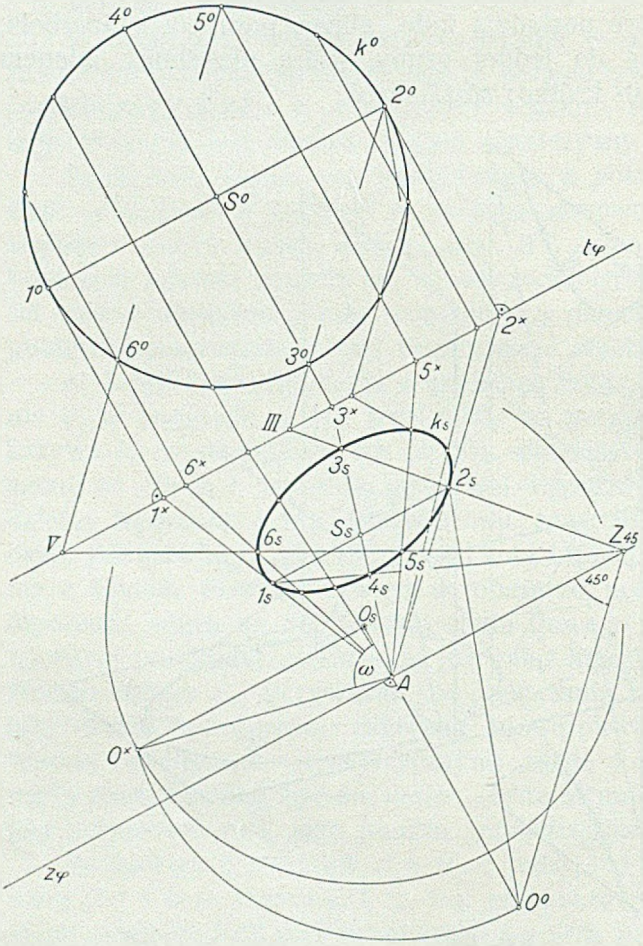
Cechy wspólne, które posiadają koło, elipsa, parabola i hiperbola, każą krzywe te zaliczyć do jednej grupy, którą określamy mianem krzywych stożkowych lub krótko: *stożkowych*.



Rys. 198.

34. Konstrukcja perspektywy koła, jako elipsy. *a)* Jako pierwszą, podajemy konstrukcję perspektywy koła, leżącego na płaszczyźnie φ, nachylonej do tła pod kątem ω (rys. 199). Po dokonaniu kładu tej płaszczyzny na tło przyjęliśmy na kole pewną ilość punktów i znaleźliśmy w znany sposób ich perspektywy. Więc perspektywy prostopadłych do śladu tłowego t_φ stanowią pęk promieni o wierzchołku A. Promień, łączący np. punkt 2^0 z kładem O^0 oka, przecina prostą $2^\times - A$ w punkcie 2_s, a równoległa, wykreślona przez ten punkt do t_φ, wyznacza na dwóch innych promieniach pęku o wierzchołku A punkty S_s i 1_s. Pierw-

szy jest perspektywą środka koła, jednak nie środkiem elipsy, stanowiącej perspektywę tego koła; drugi punktem elipsy. Punkty 1_s i 2_s, połączone ze śladem Z_{45}, wyznaczą na promieniu $3^x - A$ punkty 3_s i 4_s elipsy. Zamiast kładem O^0 oka posłużyć się możemy wprost śladem Z_{45}, kreśląc przez poszczególne punkty koła proste, przecinające ślad tłowy t_φ pod $\sphericalangle$ 45°. Zresztą rysunek wyjaśnia dostatecznie kwestję, która nie zawiera żadnych myśli nowych.



Rys. 199.

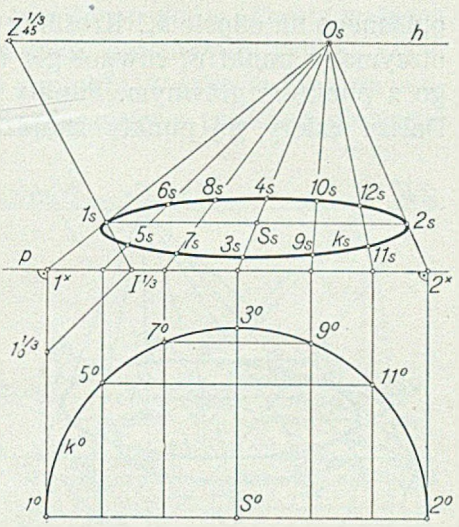
b) Niechaj będzie dany horyzont h, linja podstawy p, punkt główny O_s, trzecia część głębokości tłowej i koło k na płaszczyźnie podstawy (rys. 200). Wykonajmy kład płaszczyzny podstawy na tło, to koło k zajmie położenie k^0. Przez przyjęte na kole k^0 punkty 1^0, 2^0, ... poprowadzimy prostopadłe do podstawy p i połączymy otrzymane na niej punkty 1^x, 2^x, ... z punktem głównym. Ponieważ posługujemy się — zgodnie z warunkiem zadania — punktem $Z_{45}^{1/3}$ częściowej głębokości tłowej, więc proste przekątne, których użyjemy do otrzymania punktów 1_s, 2_s, ..., przechodzić muszą przez punkty 1^0, 2^0, ... zbliżone odpowiednio do podstawy p. Rysunek 200 zawiera konstrukcję punktu 1_s. Jeżeli przez punkt $1_0^{1/3}$, dzielący odcinek $\overline{1^x 1^0}$ w stosunku 1 : 3, poprowadzimy przekątną i punkt $I^{1/3}$ połączymy ze śladem $Z_{45}^{1/3}$, to prosta otrzymana przetnie promień $1^x O_s$ w punkcie 1_s.

W ten sposób skonstruujemy dalsze punkty elipsy, uwzględniając, że proste $5_s - 11_s$, $6_s - 12_s$, $7_s - 9_s$ i $8_s - 10_s$ są równoległe do podstawy p.

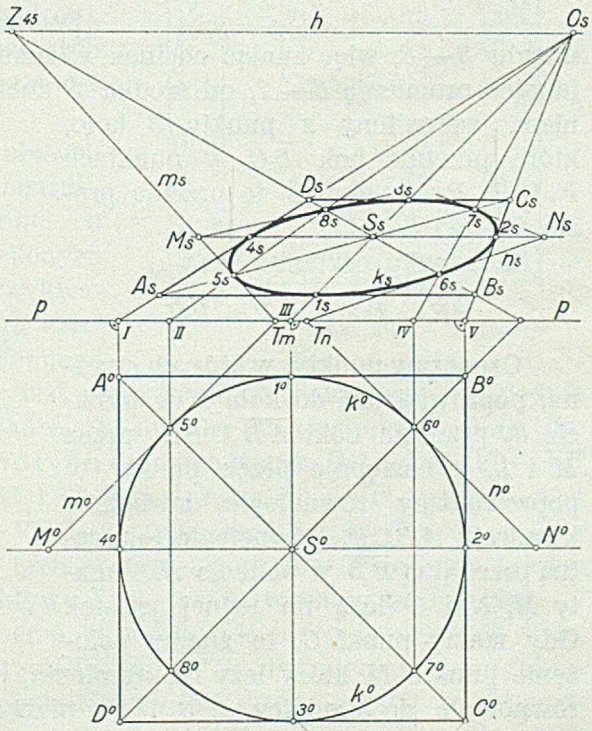
c) Rys. 201 podaje konstrukcję perspektywy koła, leżącego na płaszczyźnie podstawy, którą przeprowadzono przy użyciu punktu głębokości Z_{45}. Na kole k^0 opisaliśmy kwadrat $A^0B^0C^0D^0$, który narysowaliśmy następnie w perspektywie, wraz z przekątnemi. Zkolei wykreśliliśmy perspektywy prostych $8^0 - II$ i $7^0 - IV$ oraz prostych m^0 i n^0. Otrzymaliśmy osiem punktów elipsy i tyleż stycznych w tych punktach, co wystarcza, w praktyce rysunkowej, do wykreślenia elipsy k_s.

d) Z podanej wyżej konstrukcji da się wyprowadzić uproszczona, praktycznie dogodna, nie wymagająca kreślenia kładu koła.

Znamy promień koła i ślad $Z_{45}^{1/2}$ połowy głębokości (rys. 202). Odmierzmy średnicę koła na podstawie p, równą odcinkowi $\overline{DC}$, i połączmy punkty końcowe D i C oraz środek 3 z punktem głównym O_s. Promień $3 - Z_{45}^{1/2}$ przetnie prostą $D - O_s$ w punkcie A_s, przez który prowadzimy równoległą do p. Na prostej $C - O_s$ otrzymamy punkt B_s, który jest czwartym wierzchołkiem trapezu A_sB_sCD,

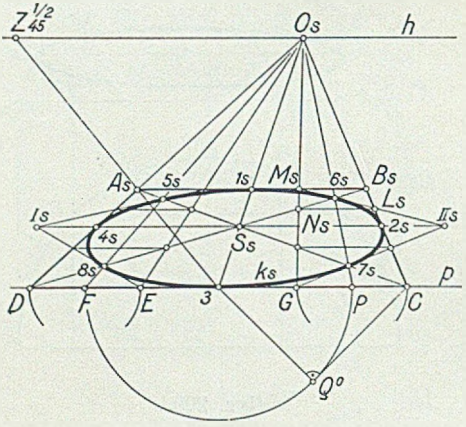


Rys. 200.



Rys. 201.

opisanego na elipsie k_s. Kreślimy przekątne $\overline{A_s C}$ i $\overline{B_s D}$ trapezu, a przez otrzymany punkt S_s równoległą do linji podstawy p i promień, łączący go z punktem głównym. Punkty 1_s, 2_s, 3 i 4_s są punktami elipsy k_s. Dalsze cztery jej punkty znajdziemy na podstawie następującego rozumowania: przekątne kwadratu $ABCD$, opisanego na kole k — czyli stycznego w punktach 1, 2, 3 i 4 (rys. 203) — przetną koło w punktach 5, 6, 7 i 8. Wykreślmy kwadrat styczny w tych punktach do koła i połączmy punkty 5 z 8 i 6 z 7. Następnie narysujmy na boku $3C$, który jest równy promieniowi koła, równoramienny, prostokątny trójkąt $3QC$. Trójkąt ten jest przystający do trójkątów $8RS$ i $8RI$, skąd wynika, że:



Rys. 202.

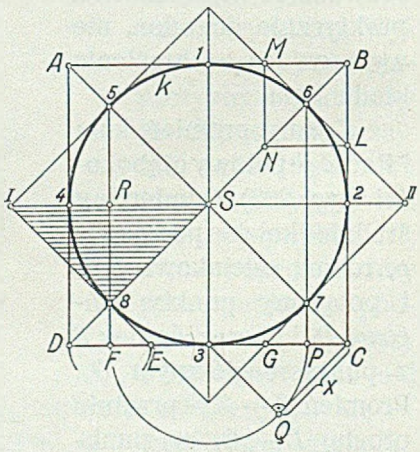
$$\overline{RS} = \overline{QC} = x.$$

Ponieważ punkt R leży na promieniu $5 — 8$, więc znając odcinek x, znamy oddalenie tego promienia, jakoteż promienia $6 — 7$, od środka S koła. Odcinkiem x, jako promieniem, zakreślimy z punktu 3 koło, które przetnie bok $\overline{DC}$ w punktach F i P. Przez punkty te przejdą proste $5 — 8$ i $6 — 7$.

Z rysunku czytamy, że:

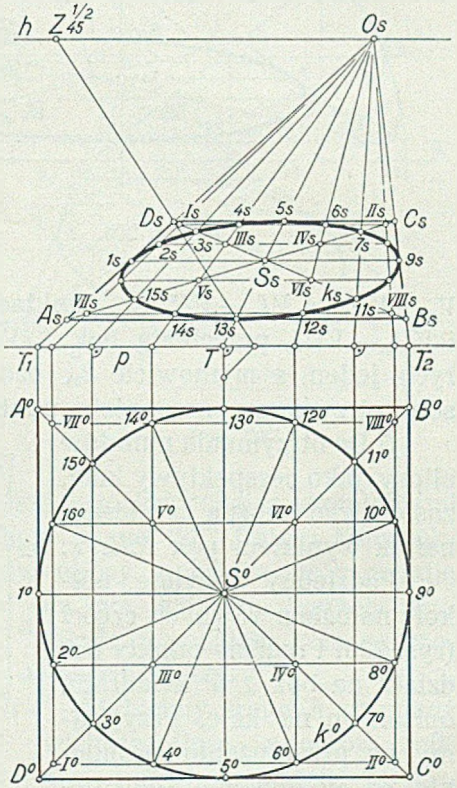
$$\overline{FE} = \overline{DF} = \overline{GP} = \overline{PC}.$$

Oznaczmy punkty, w których styczna, poprowadzona do koła k w punkcie 6, przecina boki $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ przez M i L, a następnie przez punkty te poprowadźmy równoległe do boków kwadratu $ABCD$. Równoległe te przetną przekątną $\overline{BD}$ w punkcie N. Punkty M, N i G leżą na jednej prostej. Gdy mamy punkt G, to znamy położenie punktu N, który leży na promieniu, przechodzącym przez punkt G równolegle do średnicy 1, 3 i na przekątnej $\overline{BD}$. Znając położenie punktu N, znamy też i punkt L, który, połączony z punktem 6, daje styczną do koła w tym punkcie.



Rys. 203.

Wróćmy do rys. 202 i zastosujmy tam konstrukcje, przeprowadzone na rys. 203. Wykreślmy więc równoramienny, prostokątny trójkąt $3Q^0C$ i przenieśmy odcinek $\overline{3Q^0}$ łukiem koła z punktu *3*, jako środka, na podstawę *p*. Otrzymane tam punkty *F* i *P* połączymy z punktem głównym prostemi, które przetną przekątne trapezu w punktach 5_s, 6_s, 7_s i 8_s elipsy k_s. Odcinając $\overline{DF} = \overline{FE}$ oraz $\overline{CP} = \overline{PG}$, znajdziemy punkty *E* i *G* a wreszcie styczne w czterech — otrzymanych na przekątnych trapezu — punktach.



Rys. 204.

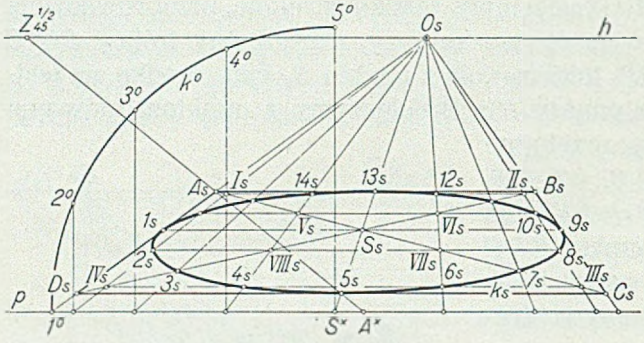
e) Sposób otrzymania szesnastu punktów elipsy, będącej perspektywą koła, znajdującego się na płaszczyźnie poziomej, podaje rys. 204.

Podzielmy koło k^0, na którem opisaliśmy kwadrat $A^0B^0C^0D^0$, na szesnaście równych części i połączmy punkty podziału prostemi, równoległemi do boków tego kwadratu. Jeżeli wykreślimy perspektywę tych prostych, to tem samem otrzymamy punkty 1_s, ..., 16_s elipsy k_s.

Ale wykonany rysunek pozwoli na znaczne uproszczenie konstrukcji, jeżeli uwzględnimy w nim, co następuje: z siatki wykreślonych linij weźmy pod uwagę dwa kwadraty, a mianowicie $I^0\,II^0\,VII^0\,VIII^0$ i $III^0\,IV^0\,V^0\,VI^0$. Każdy bok jednego z tych kwadratów przecięty jest przez dwa boki drugiego, względnie przez przedłużenia tych boków, w dwóch punktach koła. Więc np. bok $I^0 — II^0$ i para prostopadłych do niego boków $III^0 — V^0$ i $IV^0 — VI^0$ przecinają się w punktach 4^0 i 6^0 koła; prosta $V^0 — VI^0$ przecięta jest przez boki $I^0 — VII^0$ i $II^0 — VIII^0$ w punktach 16^0 i 10^0 i t. d.

Zastosowanie własności tych dwóch kwadratów daje nam bardzo dogodną konstrukcję perspektywy koła, jak to widzimy na rys. 205.

Trapez $A_sB_sC_sD_s$ jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole, którego promień równy jest odcinkowi $\overline{1^0S^\times}$. Promieniem tym zakreślimy ćwierć koła k^0, które podzielimy na cztery części; punkty podziału rzucimy prostopadle na podstawę *p* i otrzymane rzuty połączymy z punktem głównym promieniami. Promienie te przetną przekątne

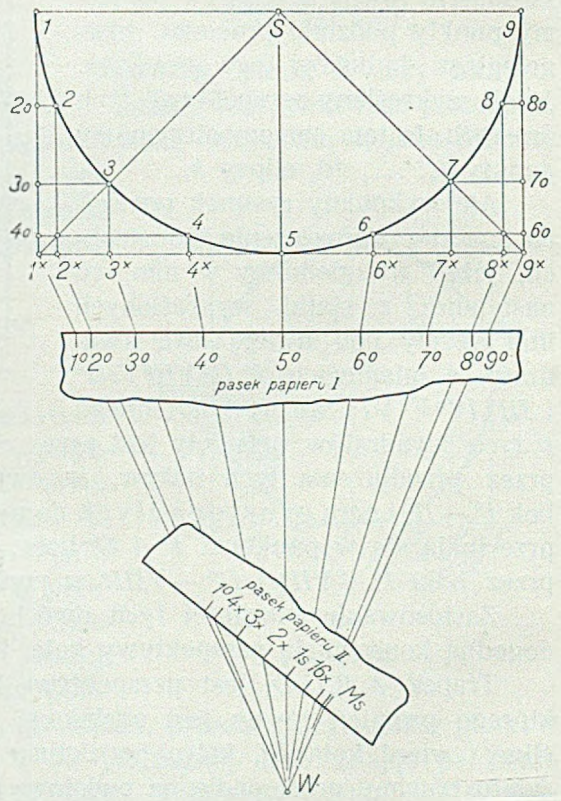


Rys. 205.

trapezu $\overline{A_s C_s}$ i $\overline{B_s D_s}$ w punktach I_s, V_s, IV_s i VIII_s, a proste, wykreślone w tych punktach równolegle do podstawy p, wyznaczą na przekątnych trapezu pozostałe wierzchołki II_s, VI_s, III_s i VII_s perspektywy kwadratów I, II, III, IV i V, VI, VII, VIII. Bok $\overline{III_s IV_s}$ przecina proste $V_s — VIII_s$ i $VI_s — VII_s$ w punktach 4_s i 6_s elipsy k_s. Proste $V_s — VI_s$ i $VII_s — VIII_s$ przecinają bok $\overline{I_s IV_s}$ w dwóch punktach elipsy k_s, z których jeden, a mianowicie 2_s, oznaczony jest na rysunku. W ten sposób otrzymamy szesnaście punktów elipsy, jako perspektywy koła.

f) Do otrzymania punktów elipsy, jako perspektywy koła, zastosować można z doskonałym wynikiem pęk *Pillet'a*.

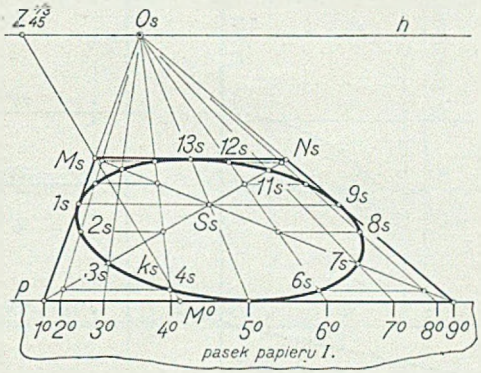
Podzielmy przyjęte półkole na osiem równych części (rys. 206) i rzućmy punkty podziału na bok $\overline{1^× 9^×}$ kwadratu, opisanego na kole. Przyjmijmy na przedłużeniu promienia $\overline{S5}$ w dowolnej odległości punkt W i połączmy go z punktami $1^×, 2^×, \ldots 9^×$. Otrzymaliśmy pęk *Pillet'a* o wierzchołku W, który pozwoli na narysowanie perspektywy koła, o dowolnie dużym promieniu. Pęk taki, którego promienie należałoby dostatecznie przedłużyć, wyrysowany na sztywnym papierze, jest dla rysownika przyrządem, którym posłużyć się może zawsze przy rysowaniu perspektyw kół.



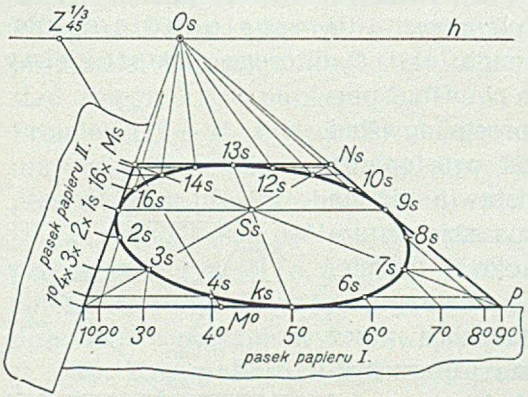
Rys. 206.

Jako przykład zastosowania pęku *Pilleťa*, narysujmy perspektywę koła, leżącego na płaszczyźnie poziomej i stycznego do tła, a więc i do linji podstawy p (rys. 207).

Odetniemy $1^0 9^0$, równe średnicy koła, i punkt M^0, odcinający trzecią część średnicy, połączymy z punktem $Z_{45}^{1/3}$ trzeciej części głębokości. Na promieniu $1^0 - O_s$ otrzymamy punkt M_s, przez który prowadzimy równoległą do p. Na promieniu $9^0 - O_s$ otrzymamy punkt N_s, jako czwarty wierzchołek trapezu, opisanego na elipsie. Przykładamy do prostej p pasek papieru, na którym zaznaczymy punkty 1^0, 9^0 i środek 5^0 tego odcinka. Teraz pasek ten przeniesiemy na pęk *Pilleťa* tak (rys. 206), aby punkt 1^0 padł na promień $1^x - W$, punkt 5^0 na promień $5 - W$, a punkt 9^0 na promień $9^x - W$. Zaznaczmy na pasku punkty 2^0, 3^0, ... 8^0 przecięcia się jego krawędzi z promieniami pęku, poczem przenieśmy je na prostą p w rys. 207. Dalsza konstrukcja, prowadząca do otrzymania punktów elipsy, pokrywa się z podaną na rys. 205, obie bowiem wynikają z podziału koła na sześnaście części.



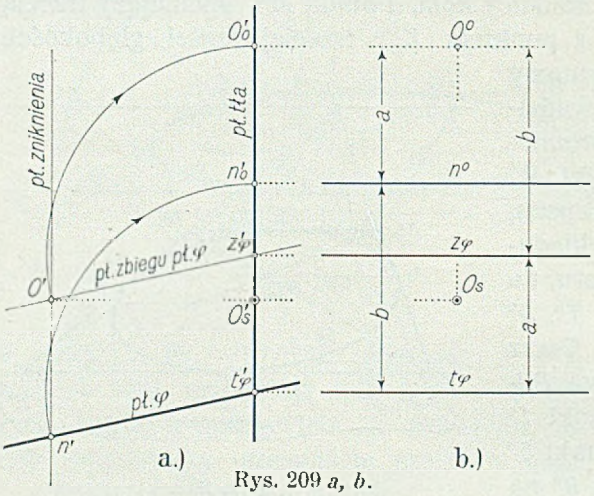
Rys. 207.



Rys. 208.

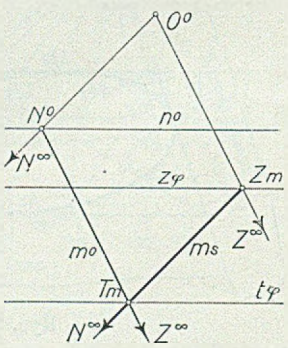
Gdybyśmy pragnęli otrzymać większą ilość punktów elipsy, aniżeli szesnaście, to najpierw wyrysujemy pęk *Pilleťa*, uwzględniający żądaną ilość punktów, a następnie przy jego pomocy wyznaczymy podziałkę na boku $\overline{1^0 9^0}$ (rys. 208) i także na boku $\overline{1^0 M_s}$. Na krawędzi paska papieru *II* zaznaczymy punkty $1^0 1_s M_s$ i pasek przeniesiemy na pęk *Pilleťa* tak, aby punkt 1^0 padł na promień $1^x - W$, punkt 1_s na promień $5 - W$ a punkt M_s na promień $9^x - W$. Zaznaczymy pozostałe punkty podziału i przeniesiemy je na $\overline{1^0 M_s}$. W rys. 208 otrzymujemy wprawdzie także tylko szesnaście punktów, ale konstrukcję przeprowadziliśmy tak, jakgdyby chodziło o dowolną ich ilość.

35. Związek między śladem tłowym, śladem zbiegu, śladem zniknienia i okiem. Weźmy pod uwagę prostą m, leżącą na płaszczyźnie φ (rys. 195), jej perspektywę m_s, jej trzy ślady T_m, Z_m, N i oko O. Ślady te i oko tworzą równoległobok, który wyraża następujący związek: *odległość oka od śladu zbiegu* (odcinek $\overline{OZ_m}$) *równa jest odległości śladu zniknienia od śladu tłowego* (odcinek $\overline{NT_m}$); *odległość $\overline{ON}$ oka od śladu zniknienia równa jest odległości $\overline{Z_mT_m}$ śladu zbiegu od śladu tłowego.* Na podstawie tego związku ślad zniknienia prostej zastąpić może jeden z dwóch innych jej śladów. Jeżeli znamy ślad tłowy T_m i ślad zniknienia N prostej m — to znamy też i jej perspektywę m_s, która przejdzie przez ślad T_m równolegle do $O - N$. Jeżeli dane są ślady Z_m i N, to promienie, łączące je z okiem, wyznaczają kierunki prostych m i m_s, które przechodzą przez te ślady.



Rys. 209 *a*, *b*.

Przyjmijmy płaszczyznę φ i płaszczyznę tła prostopadle do płaszczyzny papieru (rys. 209*a*), a nadto oko O, którego prostokątny rzut na tło jest punktem głównym O_s. Obie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej t_φ (ślad tłowy płaszczyzny φ), która jest prostopadłą do płaszczyzny papieru i przedstawia się na rys. 209*a*, jako punkt. Płaszczyzna zbiegu płaszczyzny φ, przechodząca przez oko i do niej równoległa, przecina tło wzdłuż śladu zbiegu z_φ, a płaszczyzna zniknienia, przechodząca przez oko i równoległa do tła, wyznacza na płaszczyźnie φ ślad zniknienia n. Wypowiedziane wyżej związki, zachodzące między O, z_φ, t_φ i n, występują na rys. 209*a* z elementarną jasnością.

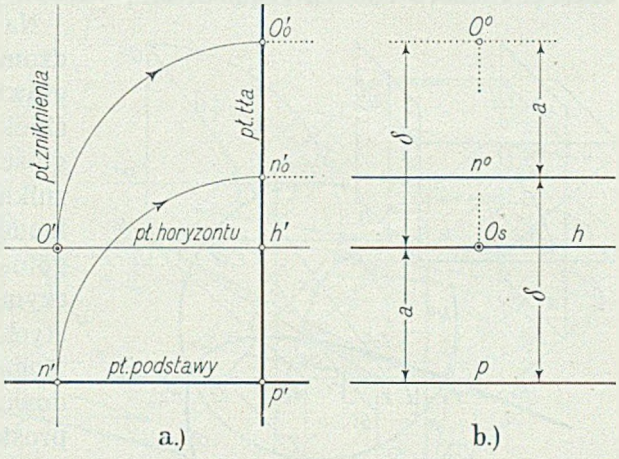


Rys. 210.

Sprowadźmy płaszczyznę φ — zapomocą obrotu około śladu t_φ, w kierunku wskazanym strzałką — na tło. Uczyńmy to samo z płaszczyzną zbiegu, obracając ją około śladu zbiegu z_φ. Obrót płaszczyzny φ sprowadzi na tło ślad zniknienia n, który pozostanie równoległy do śladu tłowego t_φ, względnie śladu zbiegu z_φ.

Obrót płaszczyzny zbiegu położy na tło oko, przyczem odległość kładu O^0 oka od śladu zbiegu pozostanie równą odległości sprowadzonego na tło śladu zniknienia od śladu tłowego. Druga relacja miarowa, wyrażająca, że oddalenie oka od śladu zniknienia jest równe oddaleniu śladu zbiegu od śladu tłowego, pozostaje — po dokonanych obrotach — nienaruszona.

Rys. 209 *b* przedstawia widok tła zprzodu po dokonanych obrotach, przyczem odcinki *a* i *b* wyrażają związki miarowe, zachodzące między kładem O^0 oka, śladami tłowym, zbiegu i śladem zniknienia.



Rys. 211 *a*, *b*.

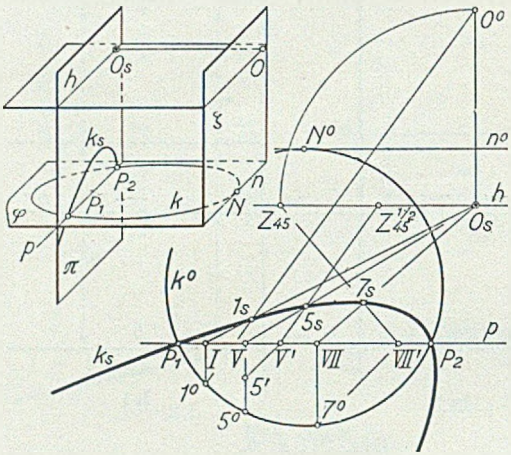
Jeżeli przyjmiemy prostą m^0 (rys. 210), jako kład na tło prostej m, leżącej na płaszczyźnie φ, to punkt, w którym m^0 przecina ślad tłowy t_φ, jest śladem tłowym prostej m, a punkt N^0 przecięcia się śladu zniknienia n^0 płaszczyzny φ z prostą m^0 — śladem zniknienia prostej m. Perspektywa m_s prostej m przejdzie przez punkt T_m, równolegle do promienia, łączącego kład O^0 oka ze śladem zniknienia N^0, i przetnie ślad zbiegu z_φ w punkcie Z_m. Punkt ten jest śladem zbiegu prostej m. Promień $O^0 — Z_m$ będzie równoległy do m^0. Widzimy, że ślad zniknienia prostej zastąpić może jej ślad zbiegu, że zatem dla wyznaczenia perspektywy prostej oba te ślady są równoznaczne.

Przypadek szczególny, gdy płaszczyzna φ jest prostopadła do tła, przedstawia rys. 211 *a*, *b*, który czytelnik porówna z rys. 209 *a*, *b*. Ślad zbiegu z_φ staje się linją horyzontu h, ślad tłowy t_φ linją podstawy p — poza tem wykazane wyżej związki nie ulegają żadnym zmianom.

36. Perspektywa koła — parabolą. W punkcie *d)* ust. 33 zauważyliśmy, że gdy koło styka się ze śladem zniknienia, to perspektywą jego jest parabola. Sytuację w przestrzeni uzmysławia szkic w górnej części rys. 212. Przyjęte na płaszczyźnie poziomej φ koło k styka się ze śladem zniknienia n w punkcie N, a linję podstawy przecina w punktach P_1 i P_2. Punkty te, jako leżące na tle, będą równocześnie punktami paraboli k_s.

Aby stworzyć konstrukcyjną możność otrzymania paraboli, jako perspektywy koła, przyjmiemy linję podstawy p, horyzont h, na nim

punkt główny O_s a wreszcie ślad zniknienia n^0 i koło k^0, styczne do tego śladu w punkcie N^0. Wiemy z ust. 35, a widzimy to także ze szkicu rys. 212 — że dane oddalenie podstawy od śladu zniknienia określa równocześnie głębokość tłową, która jest temu oddaleniu równa.



Rys. 212.

Na prostopadłej, poprowadzonej do horyzontu w punkcie głównym O_s, odmierzymy odcinek $\overline{O_s O^0} = \delta$ i równy odległości podstawy p od śladu zniknienia n^0. Punkt O^0 jest kładem oka na tło. Poszczególne punkty paraboli wyznaczymy za pośrednictwem prostych, przecinających koło k^0. Mogą to być oczywiście proste dowolne; na rys. 212 użyliśmy prostopadłych do podstawy p. Pierwsza z nich przecina podstawę p w punkcie I. Prosta, łącząca ten punkt z punktem głównym, jest jej perspektywą. Punkt 1^0 koła, rzucony z punktu O^0 na prostą $I - O_s$, wyznacza na niej punkt 1_s paraboli k_s. Powtarzając tę konstrukcję, otrzymamy dowolną ilość punktów paraboli. Zamiast punktu O^0 użyć możemy punktu głębokości, względnie punktu częściowej głębokości. W ten sposób znaleźliśmy punkty 5_s i 7_s; pierwszy przy użyciu punktu $Z_{45}^{1/2}$, drugi — punktu Z_{45}.

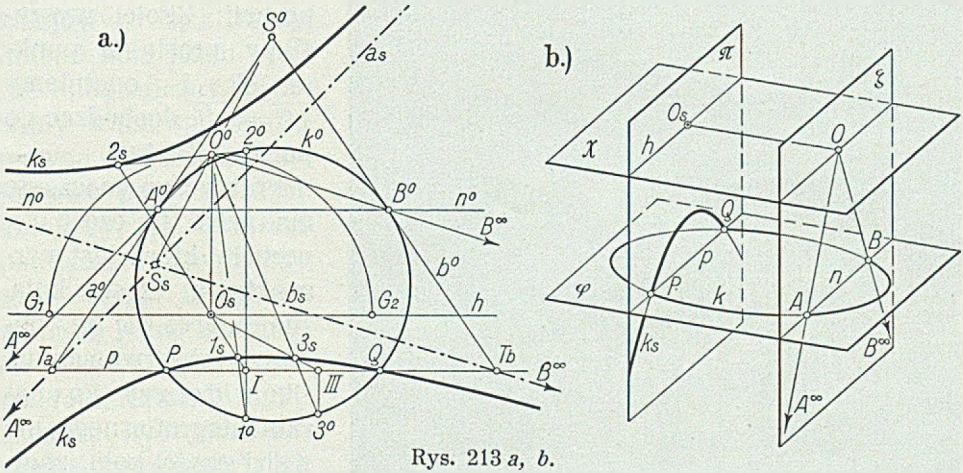
Punktom koła, leżącym w obszarze pośrednim, więc między śladem tłowym (linją podstawy) a śladem zniknienia, odpowiadają perspektywicznie punkty paraboli, leżące poniżej śladu tłowego. Perspektywą części koła, znajdującej się w obszarze istotnym, jest część paraboli, leżąca na tle między śladem tłowym (podstawą) a śladem zbiegu (horyzontem) płaszczyzny koła.

Aby otrzymać parabolę, jako perspektywę koła, drogą fotograficzną, należałoby ustawić aparat w ten sposób, by fotografowane koło było styczne do pierwszej płaszczyzny głównej. Zdjęcie odpowiadające ściśle powyższym warunkom nie jest możliwe poza odpowiednio uposażonem laboratorjum, gdzieby położenie płaszczyzny głównej optycznego układu osiowego (objektywu fotograficznego) dało się dokładnie ustalić.

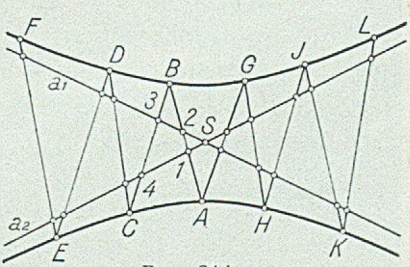
37. Perspektywa koła — hiperbolą. W ust. 33, punkt *e)*, nazwaliśmy linję krzywą, będącą perspektywą koła, przecinającego ślad zniknienia w dwóch punktach — hiperbolą. Sytuację w przestrzeni uzmysławia nam rys. 213*b*.

Przystąpmy do konstrukcyjnego rozwiązania tego zadania.

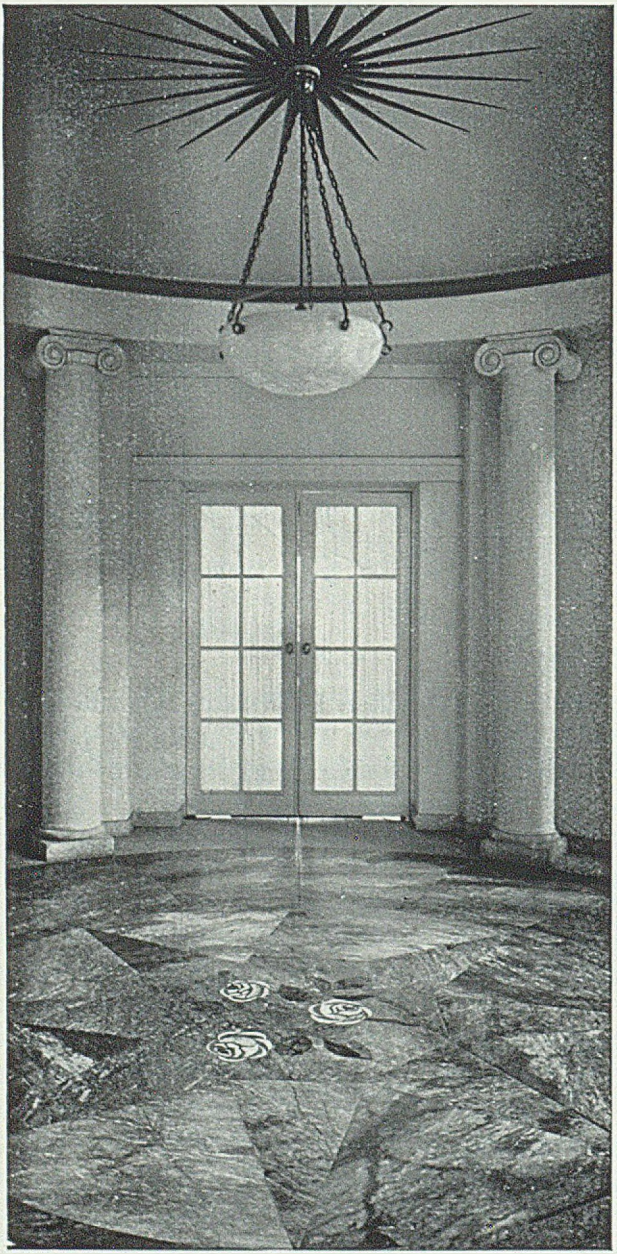
Przyjmijmy horyzont, punkt główny, podstawę i głębokość tłową δ. W odległości δ od podstawy p i do niej równolegle wykreślimy ślad zniknienia n^0, a następnie koło k^0, przecinające ten ślad w dwóch punk-



tach. Poszczególne punkty perspektywy koła (hiperboli) wyznaczymy w ten sam sposób, jak punkty paraboli w rys. 212. Perspektywą prostopadłej do podstawy i przecinającej ją w punkcie I, cięciwy $1^0 2^0$ koła k^0 jest odcinek $1_s 2_s$, przechodzący przez punkty O_s i I. Punkty 1_s i 2_s leżą na promieniach, łączących punkty 1^0 i 2^0 z kładem O^0 oka. Tym sposobem otrzymamy żądaną ilość punktów hiperboli k_s, na którą składają się dwie jej części („gałęzie"). Jedna gałąź odpowiada części koła, leżącej w obszarze obserwowanym, druga — części znajdującej się w obszarze geometrycznym. Stycznym a^0 i b^0 do koła k^0 w punktach A^0 i B^0 odpowiadają asymptoty a_s i b_s hiperboli. Pierwsza z nich będzie równoległą do promienia $O^0 — A^0$, druga do promienia $O^0 — B^0$. Punktowi S^0 przecięcia się stycznych a^0 i b^0 odpowiada punkt S_s przecięcia się asymptot. Punkt ten jest środkiem hiperboli.



Gdybyśmy wyznaczyli asymptoty a_1 i a_2 hiperboli i jeden punkt, np. A (rys. 214), to dalsze jej punkty otrzymamy na podstawie tej własności, że każde dwa odcinki dowolnej prostej, zawarte między asymptotami i hiperbolą, są sobie równe. Z punktu A



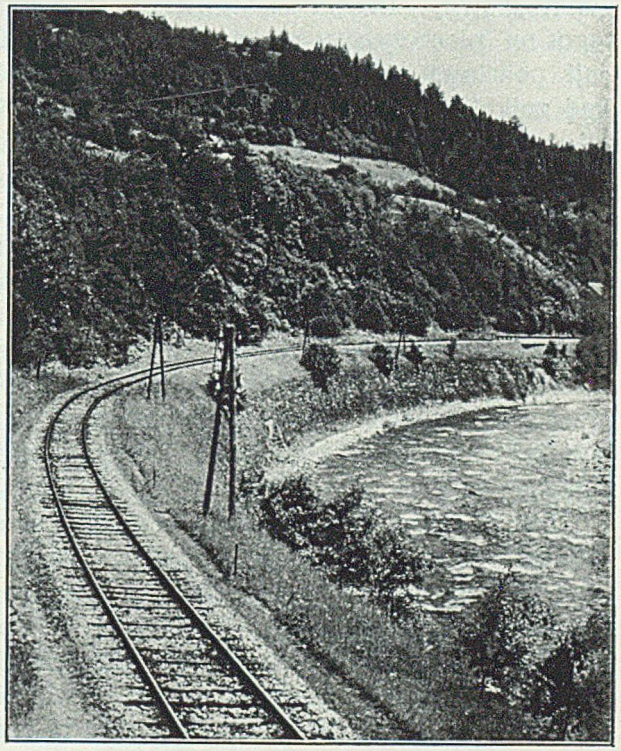
Rys. 215.

wyprowadzimy prostą, przecinającą asymptoty w punktach *1* i *2*. Odmierzymy $\overline{2B} = \overline{A1}$, otrzymując punkt *B* hiperboli. Zkolei wykreślimy prostą z punktu *B* i odetniemy $\overline{4C} = \overline{3B}$, dochodząc do punktu *C* i t. d.

Praktyczne znaczenie ma tylko ta część hiperboli, która jest perspektywą części koła, znajdującej się w obszarze obserwowanym. Oko widza, czy oko aparatu fotograficznego, nie widzi części koła, znajdującej się w obszarze geometrycznym. Widzowi, znajdującemu się w polu koła, przedstawi się obserwowana część tego koła, jako gałąź hiperboli. Aparat fotograficzny, zdejmujący wnętrze walcowe, odbije na kliszy wszystkie koła poziome, leżące na ścianie wnętrza, jako hiperbole. Koła posadzki i sufitu tego wnętrza, nie stykające się z pierwszą płaszczyzną główną objektywu (płaszczyzną zniknienia), ani nie przecięte nią, przedstawią się w fotogramie, jako elipsy. Takie zdjęcie fotograficzne wnętrza walcowego, w którem występują hiperbole i elipsy, widzimy na rys. 215.

Dalszym praktycznym przykładem hiperboli, jako perspektywy koła,

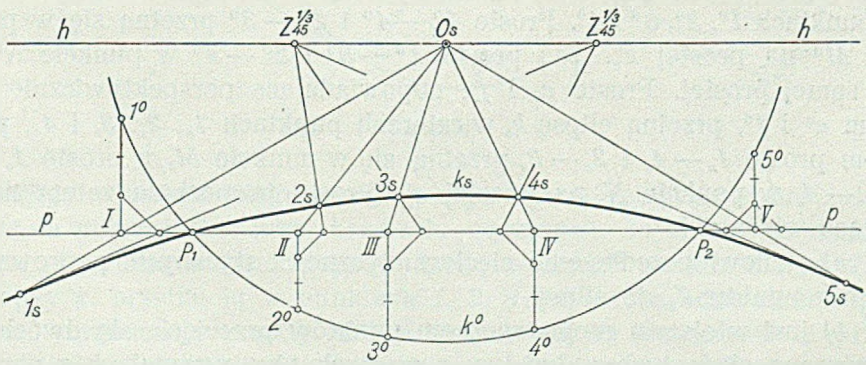
jest zdjęcie fotograficzne krzywizny toru kolejowego, przedstawione na rys. 216.



Rys. 216.

Krzywizny torów kolejowych są z reguły łukami kół; jeżeli aparat fotograficzny ustawimy w ten sposób, że główna płaszczyzna objektywu przecina tor kolejowy, to obrazem perspektywicznym tego toru będą hiperbole, a raczej jedne ich gałęzie. Zauważmy, że aparat fotograficzny umieszczony być może zarówno „wewnątrz“, jak „zewnątrz“ krzywizny toru; decydującem jest tutaj położenie tej krzywizny względem płaszczyzny zniknienia.

Ponieważ rysownik w praktyce swej spotyka się tylko z jedną gałęzią hiperboli i nie będzie posługiwał się asymptotami — więc podajemy w rys. 217 jeszcze inną konstrukcję punktów hiperboli, jako perspektywy koła, uwzględniającą także częściową głębokość tłową. Horyzont, podstawa,



Rys. 217.

punkt główny, trzecia część głębokości i kład k^0 na tło koła k, leżącego na płaszczyźnie podstawy, są dane. Gdybyśmy równolegle do linji podstawy p i w odległości równej głębokości tłowej poprowadzili ślad zniknienia, to przeciąłby on koło k^0 w dwóch punktach, co dowodzi, że perspektywą tego koła będzie hiperbola.

Zamiast niedostępnego dla nas kładu O^0 oka użyjemy do konstrukcji prostych przekątnych. Przez obrane na kole k^0 punkty 1^0, 2^0, ... kreślimy proste prostopadłe do podstawy p, oznaczając punkty przecięcia się przez I, II, ... Perspektywy tych prostych — jako prostopadłych do tła — przechodzą przez punkt główny O_s i przez punkty I, II, ... Przez punkty, ograniczające trzecią część odcinków $\overline{1^0 I}$, $\overline{2^0 II}$, ..., kreślimy proste przekątne, t. j. nachylone pod kątem 45^0 do podstawy p, i punkty przecięcia się tych prostych z podstawą łączymy z jednym z punktów $Z_{45}^{1/3}$ częściowej głębokości. Otrzymujemy punkty 1_s, 2_s, ... hiperboli k_s.

38. Biegun, biegunowa, środek, średnice i osie krzywych stożkowych. Wykreślmy, w jeden z poznanych sposobów, elipsę k_s (rys. 218), jako perspektywę koła k, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Poprowadźmy styczne a^0 i b^0 do koła k^0, do siebie równoległe. Stycznym tym odpowiadają perspektywicznie proste a_s i b_s, styczne do elipsy k_s w punktach A_s i B_s, które są perspektywą punktów A i B koła k.

Promień, wykreślony z punktu $O_0^{1/3}$ równolegle do prostej a^0, przecina horyzont w częściowym śladzie zbiegu $Z_2^{1/3}$, kierunku a. Promień, poprowadzony w punkcie $O_0^{1/3}$ prostopadle do $O_0^{1/3} - Z_2^{1/3}$, przecina horyzont w częściowym śladzie $Z_1^{1/3}$ kierunku, prostopadłego do kierunku a. Punkty Z_1 i Z_2 są właściwemi śladami zbiegu obu wziętych pod uwagę kierunków. Proste a_s i b_s przejdą przez ślad Z_2, zaś prosta z_2^s, odpowiadająca perspektywicznie prostej z_2^0, łączącej punkty A^0 i B^0 — przez ślad Z_1.

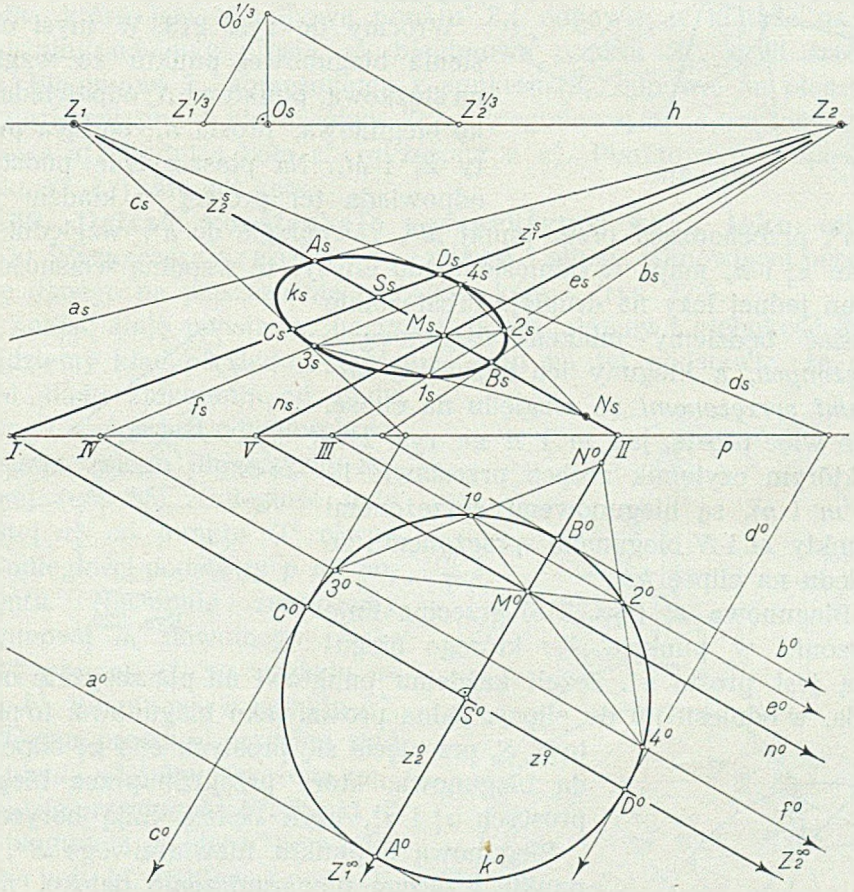
Poprowadźmy proste e^0 i f^0, równoległe do a^0, przecinające koło k^0 w punktach 1^0, 2^0, 3^0 i 4^0. Proste $1^0 - 4^0$ i $2^0 - 3^0$ przetną się w punkcie M^0 na prostej z_2^0, zaś proste $1^0 - 3^0$ i $2^0 - 4^0$ w punkcie N^0 na tej samej prostej. Proste e_s i f_s, odpowiadające perspektywicznie prostym e^0 i f^0, przetną elipsę k_s w czterech punktach 1_s, 2_s, 3_s i 4_s, przyczem proste $1_s - 4_s$ i $2_s - 3_s$ przetną się w punkcie M_s a proste $1_s - 3_s$ i $2_s - 4_s$ w punkcie N_s na prostej z_2^s. Prosta ta posiada zatem następujące własności:

a) stanowi przedłużenie cięciwy styczności stycznych, poprowadzonych z punktu Z_2 do elipsy,

b) jest miejscem geometrycznem punktów przecięcia się dwóch par boków przeciwległych w każdym z czworokątów, powstałych z przecięcia stożkowej promieniami, wykreślonemi z punktu Z_2.

Każdą prostą, posiadającą w odniesieniu do krzywej stożkowej powyższe własności, nazywamy *biegunową* tej stożkowej a punkt Z_2 jej *biegunem*.

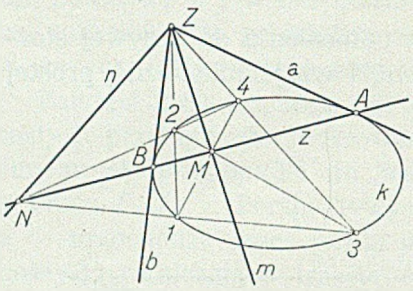
Każdemu punktowi odpowiada — w odniesieniu do krzywej stożkowej — jedna prosta, jako jego biegunowa, i wzajemnie każdej prostej odpowiada jeden punkt, jako biegun.



Rys. 218.

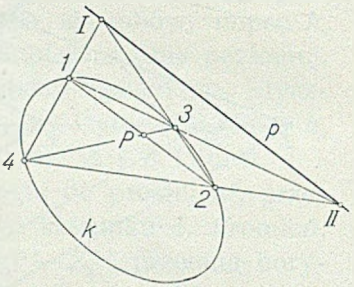
Druga własność biegunowej da się natychmiast praktycznie zużytkować, a mianowicie, przy kreśleniu stycznych do elipsy, z danego punktu. Dowolne sieczne, poprowadzone z danego punktu Z (rys. 219) do elipsy k, przetną ją w punktach *1*, *2*, *3* i *4*, które, odpowiednio połączone, wyznaczają punkty M i N biegunowej z. Biegunowa ta przecina elipsę w punktach A i B, które łączymy z punktem Z, otrzymując tym sposobem żądane styczne a i b.

Biegunowa punktu, z którego wykreślić można styczne rzeczywiste do elipsy, przecina tę krzywą w dwóch punktach; jeżeli punkt P ma takie położenie, że stycznych rzeczywistych z niego do elipsy poprowadzić nie można, to biegunowa p krzywej nie przecina i ma położenie, podane na rys. 220.



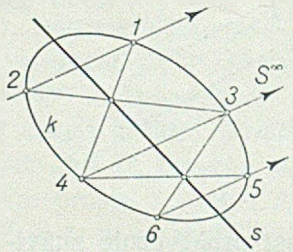
Rys. 219.

Wróćmy do rys. 218. W myśl określenia biegunowej punktu ze względu na stożkową, punktowi N_s odpowiada, jako biegunowa, prosta n_s, łącząca punkty Z_2 i M_s. Na płaszczyźnie podstawy odpowiada tej prostej w kładzie prosta n^0, przechodząca przez punkt M^0, równolegle do a^0, względnie b^0. Proste z_2^s i n_s mają, w odniesieniu do elipsy, tę wspólną własność, że biegun jednej leży na drugiej. Proste takie określać będziemy mianem *biegunowych sprzężonych*, a bieguny ich nazwiemy *biegunami sprzężonemi* ze względu na elipsę. Takie więc proste, jak m i n na rys. 219, (w którym czytelnik zechce przestawić litery m i n), są biegunowemi sprzężonemi a punkty M i N biegunami sprzężonemi, ze względu na elipsę k.



Rys. 220.

Biegunowa z_2^s (rys. 218) przecina linję horyzontu w punkcie Z_1, którego biegunową jest prosta z_1^s. Jeżeli każdemu punktowi na płaszczyźnie odpowiada, w odniesieniu do elipsy, jedna prosta, jako biegunowa, to punktowi S_s przecięcia się prostych z_1^s i z_2^s odpowiada biegunowa, która przejdzie przez bieguny prostych z_1^s i z_2^s, czyli będzie linją horyzontu.



Rys. 221.

Biegunową s punktu niewłaściwego S^∞, t. j. punktu leżącego nieograniczenie daleko, nazywamy *średnicą* elipsy (rys. 221). Biegunowe sprzężone punktów niewłaściwych noszą nazwę *średnic sprzężonych* elipsy. Punkt przecięcia się średnic sprzężonych jest biegunem prostej niewłaściwej i zwie się *środkiem* elipsy. Średnice sprzężone, wzajemnie prostopadłe, są osiami symetrji elipsy i zwą się krótko jej *osiami*.

Ponieważ każdą ze stożkowych uważać można za perspektywę pozostałych, zatem omówiona wyżej sprawa biegunów, biegunowych, śred-

nic, środka i osi odnosi się do wszystkich stożkowych, a więc do koła, elipsy, hiperboli i paraboli.

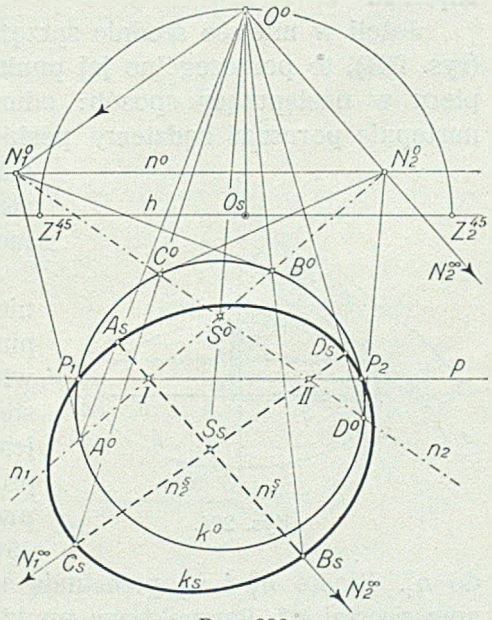
Z pojęcia biegunowych i średnic wynika, że punkt przecięcia się asymptot hiperboli jest jej środkiem.

Zastosujmy określenia powyższe do koła k^0 (rys. 218), którego perspektywą jest elipsa k_s; punktowi Z_2, jako leżącemu na horyzoncie, odpowiada na płaszczyźnie poziomej punkt niewłaściwy Z_2^∞. Prostej z_2^s na tle, która jest biegunową punktu Z_2, odpowie w kładzie na płaszczyźnie podstawy prosta z_2^0, biegunowa punktu Z_2^∞, czyli średnica koła. Biegunowi Z_1, sprzężonemu z punktem Z_2, odpowie na płaszczyźnie poziomej punkt niewłaściwy Z_1^∞, a biegunowej z_1^s, sprzężonej z biegunową z_2^s, średnica koła z_1^0, sprzężona z z_2^0. Punktowi S_s odpowiada punkt S^0, t. j. środek koła.

39. Dalsze konstrukcje perspektywy koła, jako elipsy.

a) Wyznaczmy średnice sprzężone elipsy, stanowiącej perspektywę danego na płaszczyźnie podstawy koła k (rys. 222).

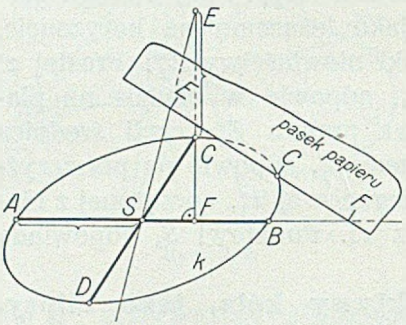
Znając linję podstawy, horyzont, punkt główny i głębokość tłową, znajdziemy kład n^0 śladu zniknienia, a to na tej podstawie, że odległość śladu zniknienia od śladu tłowego równa jest odległości oka od śladu zbiegu płaszczyzny poziomej (ust. 35). Odległość tedy prostej n^0 od punktu O^0 równa jest odległości podstawy p od horyzontu. Następnie znajdziemy biegunową n_1 dowolnego punktu N_1^0 prostej n^0, ze względu na koło k^0. Biegunowa n_2 punktu N_2^0, w którym prosta n_1 przecina ślad zniknienia n^0, jako sprzężona z n_1, przejdzie przez punkt N_1^0. Punkt S^0 jest biegunem prostej n^0 ze względu na koło k^0. Ponieważ perspektywą śladu zniknienia jest prosta niewłaściwa, a perspektywą punktów, leżących na śladzie zniknienia, punkty niewłaściwe, więc punktowi N_1^0 odpowie na tle punkt niewłaściwy N_1^∞ a prostej n_1 prosta n_1^s, stanowiąca średnicę elipsy. Perspektywą biegunowej n_2, sprzężonej z n_1 ze względu na koło, będzie średnica n_2^s, sprzężona ze średnicą n_1^s. Punktowi S^0 odpowie punkt S_s, którego biegunowa odpowiada biegunowej punktu S^0, t. j. prostej n^0.



Rys. 222.

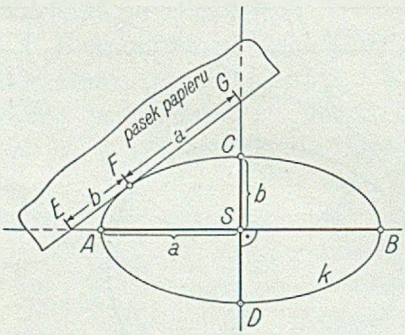
Punkt S_s jest więc środkiem elipsy, gdyż jego biegunowa jest prostą niewłaściwą.

Ponieważ koło k^0 przecina linję podstawy p w punktach P_1 i P_2, więc przez punkty te przejdzie elipsa k_s. Poszczególne jej punkty wyznaczymy w jeden ze sposobów, jakie podaje geometrja. Jako szczególnie praktyczną, przypomnimy konstrukcję przy pomocy paska papieru (rys. 223). Jeżeli odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ są parą średnic sprzężonych elipsy, to z punktu C wykreślimy prostopadłą do średnicy $\overline{AB}$, odmierzymy $\overline{CE} = \overline{AS}$ i punkt E połączymy ze środkiem S elipsy. Na pasku papieru odmierzymy odcinek $\overline{ECF}$, poczem ustawiać będziemy pasek kolejno tak, aby punkt E znajdował się zawsze na prostej $E - S$, zaś punkt F na prostej, wyznaczonej punktami A i B. Miejscem geometrycznem punktów C będzie elipsa k.



Rys. 223.

Jeżeli w miejsce średnic sprzężonych dane są osi $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ elipsy (rys. 224), to poszczególne jej punkty otrzymamy zapomocą paska papieru w następujący sposób: odmierzymy odcinki $\overline{EF} = b$ i $\overline{FG} = a$, następnie poruszać będziemy paskiem tak, aby punkt E znajdował się stale na prostej AB a punkt G na prostej CD; elipsa k będzie miejscem geometrycznem punktów F.

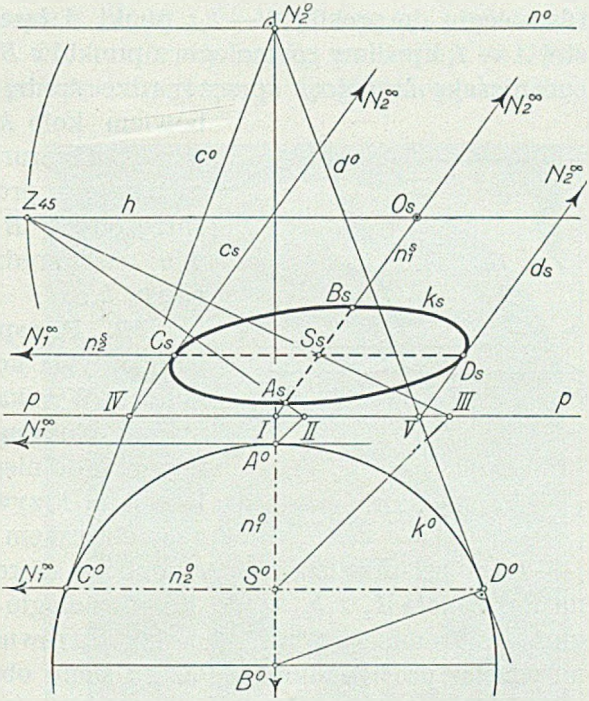


Rys. 224.

b) Rys. 225 przedstawia poprzednie zadanie, z tą jedynie różnicą, że punkt N_1 przyjęliśmy, jako punkt niewłaściwy N_1^∞ śladu zniknienia n^0. W następstwie tego biegunową punktu N_1^∞ jest średnica n_1^0 koła, która przetnie prostą n^0 w punkcie N_2^0. Biegunowa n_2^0 punktu N_2^0 ze względu na koło k^0 jest równoległa do n^0, a więc prostopadła do n_1^0. Proste n_1^0 i n_2^0 przecinają się w punkcie S^0, który jest biegunem prostej n^0. Perspektywą punktu S jest środek elipsy, jako biegun prostej niewłaściwej tła, a owa prosta niewłaściwa jest perspektywą śladu zniknienia n. Perspektywą biegunowych sprzężonych n_1 i n_2 jest para średnic sprzężonych n_1^s i n_2^s elipsy k_s.

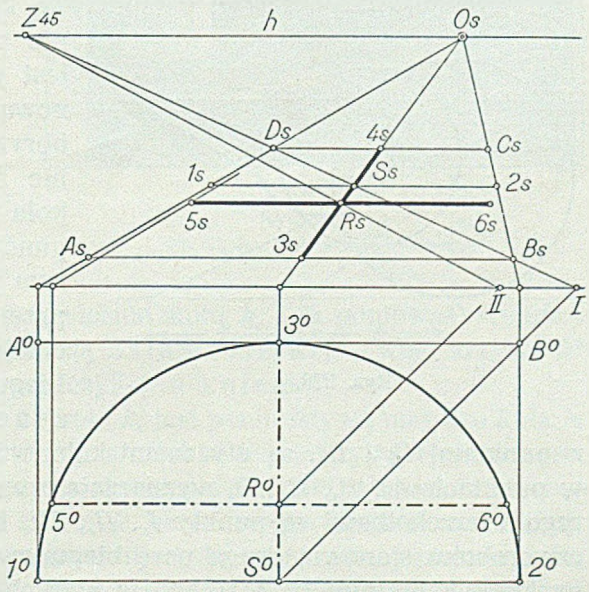
c) Z wywodów powyższych wynika, że perspektywa prostopadłej do linji podstawy średnicy koła, leżącego na płaszczyźnie poziomej, jest

średnicą elipsy. Jeżeli trapez $A_s B_s C_s D_s$ w rys. 226 jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole k, czyli trapezem, opisanym na elipsie k_s, to odcinek $\overline{3_s 4_s}$ jest średnicą tej elipsy. Aby znaleźć średnicę, sprzężoną ze średnicą $\overline{3_s 4_s}$, znajdziemy środek R_s elipsy, rzucimy go z punktu głębokości Z_{45} na linję podstawy, a przez otrzymany punkt II poprowadzimy prostą, nachyloną do tej linji pod kątem 45°. Otrzymamy punkt R^0, przez który poprowadzimy cięciwę $\overline{5^0 6^0}$. Perspektywa $\overline{5_s 6_s}$ tej cięciwy jest szukaną średnicą elipsy k_s.



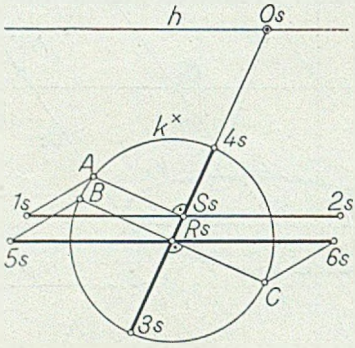
Rys. 225.

d) Jeżeli znamy perspektywę $\overline{1_s 2_s}$ i $\overline{3_s 4_s}$ pary prostopadłych średnic koła k, z których jedna jest równoległa a druga prostopadła do tła (rys. 226) — to średnicę $\overline{5_s 6_s}$, (rys. 227), sprzężoną ze średnicą $\overline{3_s 4_s}$ elipsy k_s, znajdziemy w następujący sposób: na odcinku $\overline{3_s 4_s}$, jako na średnicy, zakreślimy koło $k^\times$. W środku R_s tego koła i w punkcie S_s poprowadzimy prostopadłe do prostej $3_s - 4_s$. Pierwsza prostopadła przetnie koło $k^\times$ w punktach B i C, druga w punkcie A. Przez punkt R_s prowadzimy



Rys. 226.

równoległą do prostej $1_s - 2_s$; punkt A łączymy z punktem 1_s i do prostej $A - 1_s$ kreślimy równoległe z punktów B i C. Otrzymane punkty 5_s i 6_s ograniczają średnicę, sprzężoną ze średnicą 3_s4_s elipsy k_s. Wistocie bowiem koło $k^\times$ jest spowinowacone z elipsą k_s, a kierunek tego powinowactwa oznaczony jest prostą $A - 1_s$. Parze średnic sprzężonych BC i 3_s4_s w kole $k^\times$ odpowie para średnic sprzężonych 3_s4_s i 5_s6_s elipsy k_s.

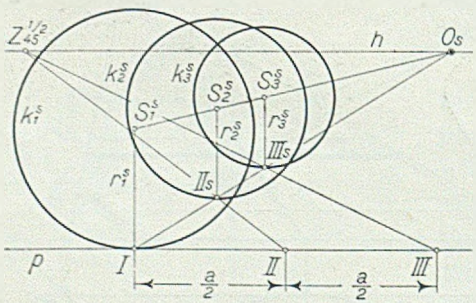


Rys. 227.

40. Perspektywa koła — kołem. Perspektywa koła, równoległego do tła, jest kołem. Wynika to stąd, że perspektywa utworu płaskiego, równoległego do tła, jest utworem do niego podobnym (ust. 25, pkt. *d*), i że linją krzywą, podobną — w znaczeniu geometrycznem — do koła, jest koło.

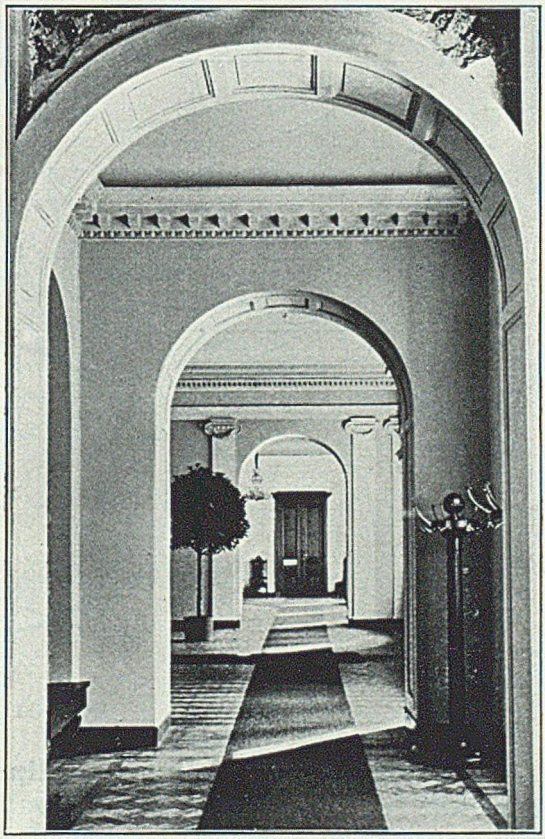
Rys. 228 przedstawia perspektywę szeregu kół, z których koło k_1 leży na tle, a koła k_2 i k_3 są do tła równoległe i oddalone od siebie o odległość a. Promienie wszystkich kół są równe, a ich środki znajdują się na prostej prostopadłej do tła. To samo obserwujemy na rys. 229.

W tem miejscu nasuwa się pytanie, czy także i przy innych położeniach koła względem tła perspektywa jego może być kołem. Przypuściwszy możność odpowiedzi twierdzącej, przyjmijmy na tle koło k_s (rys. 230) i uważajmy je za perspektywę koła k, leżącego na płaszczyźnie poziomej, której horyzontem jest prosta h. Wyznaczmy biegunową m_1^s dowolnego punktu M_1^s horyzontu, a to przez poprowadzenie z tego punktu stycznych do koła k_s w punktach A_s i B_s. Biegunowa m_2^s punktu M_2^s, w którym prosta m_1^s przecina horyzont, przejdzie przez punkt M_1^s, przecinając koło w punktach C_s i D_s. Biegunowe m_1^s i m_2^s są sprzężone, a proste, łączące punkt M_2^s z punktami C_s i D_s, są stycznemi koła w tych punktach. Styczne koła w punktach A_s, B_s, C_s i D_s wyznaczają czworobok, opisany na kole, którego wierzchołkami są punkty I_s, II_s, III_s i IV_s. Przekątne n_1^s i n_2^s tego czworoboku stanowią drugą parę biegunowych sprzężonych ze względu na koło k_s, a punkty N_1^s i N_2^s, w których biegunowe te przetną horyzont, parę biegunów sprzężonych.



Rys. 228.

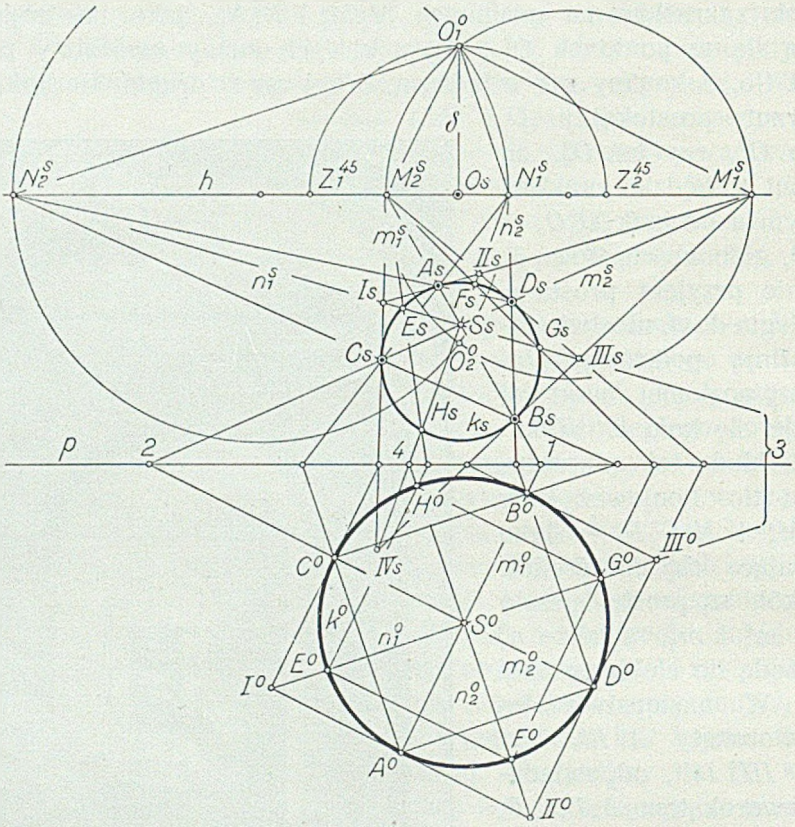
Koła zakreślone na odcinkach $\overline{M_1^s M_2^s}$ i $\overline{N_1^s N_2^s}$, jako na średnicach, przetną się w punktach O_1^0 i O_2^0, z których każdy uważajmy za kład oka na tło, dokonany raz w jednym, drugi raz w drugim kierunku. Niechaj rzut prostokątny O_s punktu O_1^0, czy też O_2^0, na horyzont h będzie punktem głównym a odcinek $\overline{O_1^0 O_s} = \overline{O_2^0 O_s}$ głębokością tłową δ; dowolnie przyjęta prosta p, równoległa do h, niechaj stanowi linję podstawy płaszczyzny poziomej, na której znajduje się koło k. Wykonajmy kład tej płaszczyzny na tło. Ponieważ kąty $M_1^s O_1^0 M_2^s$ i $N_1^s O_1^0 N_2^s$ — jako wspierające się na średnicach kół, są proste, przeto proste m_1^0 i m_2^0, a także n_1^0 i n_2^0, będą do siebie prostopadłe. W następstwie tego czworokąty $A^0 B^0 C^0 D^0$ i $I^0 II^0 III^0 IV^0$, odpowiadające czworokątom $A_s B_s C_s D_s$ i $I_s II_s III_s IV_s$, są kwadratami.



Rys. 229.
Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

Tak więc każdej parze biegunowych sprzężonych m_1^s, m_2^s; n_1^s, n_2^s; ..., ze względu na koło k_s, odpowiada para średnic sprzężonych m_1^0, m_2^0; n_1^0, n_2^0; ... ze względu na krzywą k^0, odpowiadającą perspektywicznie kołu k_s. A ponieważ średnice sprzężone, prostopadłe do siebie, są osiami krzywej — więc krzywa k^0 posiada nieograniczoną ilość osi, czyli jest kołem.

Z ust. 13, pkt. *c)* wynika, że koło k_s jest perspektywą nietylko koła k, leżącego na płaszczyźnie poziomej, ale także perspektywą tych wszystkich kół, które otrzymamy, gdy pozioma płaszczyzna α obracać się będzie, wraz z leżącem na niej kołem k, około swego śladu tłowego (linji podstawy), a oko zakreślać równocześnie koło na pionowej płaszczyźnie, prostopadłej do tła. Tym sposobem stwierdzamy, że koło może być perspektywą koła, niezależnie od nachylenia jego płaszczyzny do tła.



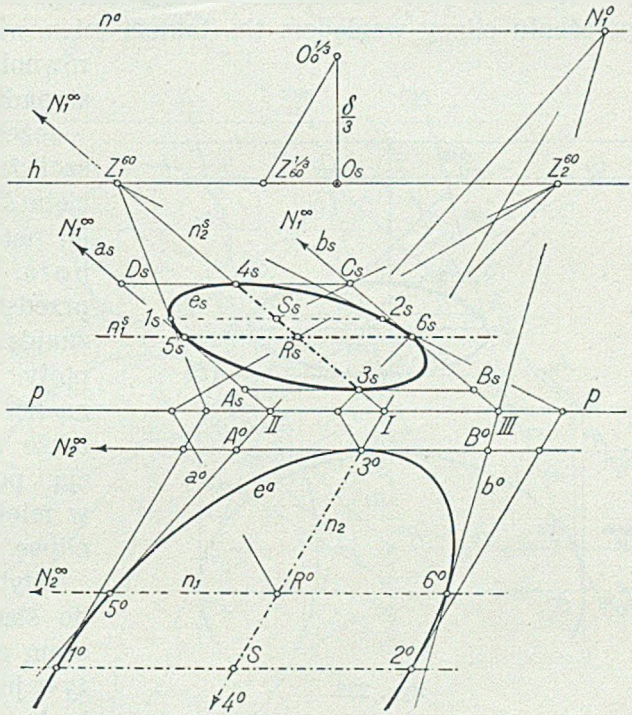
Rys. 230.

41. Perspektywa elipsy — elipsą, hiperbolą lub parabolą. Ponieważ odpowiedniość, zachodząca między elementami płaszczyzny, t. j. między punktami i prostemi a ich perspektywami, jest jednojednoznaczna, czyli, jak mówimy, doskonała, więc elipsie, przyjętej na płaszczyźnie φ, odpowie perspektywicznie krzywa, którą dowolna prosta przecina — podobnie, jak koło, w dwóch punktach, a do której poprowadzić można z dowolnego punktu — podobnie, jak do koła — dwie styczne.

Jeżeli elipsa, przyjęta na płaszczyźnie φ, nie ma żadnych punktów wspólnych z płaszczyzną zniknienia — t. zn. nie jest przez tę płaszczyznę przecięta, ani też nie jest do niej styczną — to perspektywą tak położonej elipsy jest w ogólnym wypadku elipsa a w szczególnym koło (ust. 42).

Jeżeli płaszczyzna zniknienia przecina elipsę w dwóch punktach, to jej perspektywa będzie hiperbolą. Jeżeli wreszcie elipsa jest styczną do płaszczyzny zniknienia, to jej perspektywą będzie parabola.

Wykreślmy perspektywę elipsy e, przyjętej na płaszczyźnie poziomej i nie przecinającej śladu zniknienia (rys. 231). Para średnic sprzężonych $\overline{1^0 2^0}$ i $\overline{3^0 4^0}$ tej elipsy jest dana, przyczem średnica $\overline{1^0 2^0}$ jest równoległa do linji podstawy. Otrzymaną krzywą będzie elipsa e_s. Pomińmy sposób, polegający na wyznaczaniu poszczególnych punktów szukanej elipsy, a znajdźmy parę jej średnic sprzężonych.



Rys. 231.

Użyjemy trzeciej części głębokości tłowej. Ślad zniknienia n^0 biegnie równolegle do linji podstawy, w odległości równej głębokości tłowej. Średnica $S - 3^0$ przecina ślad n^0 w punkcie N_1^0, którego biegunową — ze względu na elipsę e^0, jest prosta n_1, równoległa do linji podstawy p i przecinająca elipsę e^0 w punktach 5^0 i 6^0. Punktowi N_2^∞, sprzężonemu z punktem N_1^0 ze względu na e^0, odpowiada biegunowa n_2, średnica elipsy e^0.

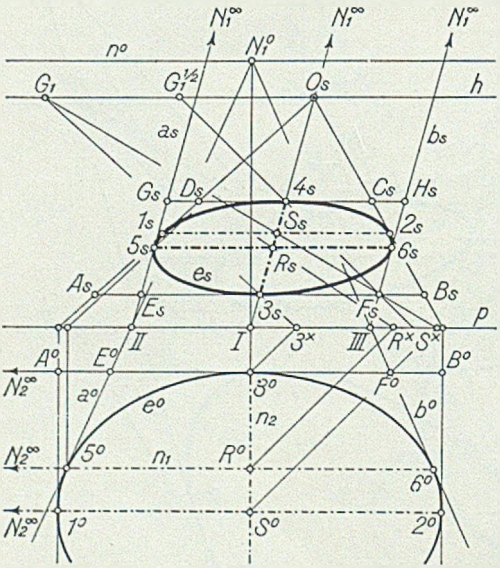
Parze biegunowych sprzężonych n_1 i n_2 odpowiada perspektywicznie para średnic sprzężonych n_1^s i n_2^s a punktowi R^0 środek R_s elipsy e_s. Perspektywą trapezu, opisanego na elipsie e^0 i stycznego do niej w punktach 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, będzie romboid $A_s B_s C_s D_s$, opisany na elipsie e_s i styczny do niej w punktach 3_s, 4_s, 5_s, 6_s. Ponieważ w naszym przykładzie średnica n_2 zawiera z linją podstawy p kąt 60°, więc znajdziemy ślad zbiegu Z_1^{60} i połączymy go ze śladem tłowym I promieniem n_2^s. Ponieważ proste a^0 i b^0 przecinają się wraz z prostą n_2 w punkcie N_1^0 śladu zniknienia n^0 — więc ich perspektywy a_s i b_s będą prostemi, równoległemi do prostej n_2^s.

Romboidowi, opisanemu na elipsie e^0 i stycznemu do niej w punktach 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, odpowiada perspektywicznie trapez, opisany na eli-

psie e_s i styczny do niej w punktach 1_s, 2_s, 3_s i 4_s. Nierównoległe boki tego trapezu zbiegają się w śladzie $Z_1^{(\infty)}$.

Dalsza konstrukcja nie wymaga wyjaśnień.

Rys. 232 jest rozwiązaniem tego samego zadania przy szczególnem położeniu elipsy względem tła, takiem mianowicie, że jedna jej oś jest równoległa a więc druga prostopadła do tła.



Rys. 232.

Jeżeli elipsa, leżąca na płaszczyźnie poziomej, jest przecięta śladem zniknienia n^0, to jej perspektywą będzie hiperbola. Stosując konstrukcję, przedstawioną na rys. 213, znajdziemy z łatwością asymptoty tej hiperboli i dowolną ilość jej punktów. Możemy także zadowolić się konstrukcją, podaną na rys. 217, jeśli w miejsce koła k^0 przyjmiemy elipsę.

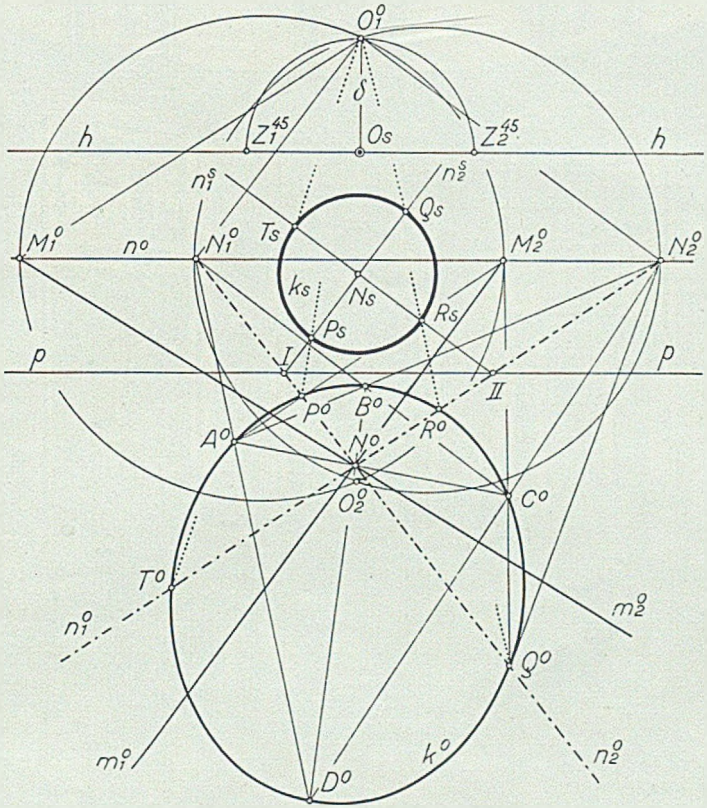
Gdyby elipsa była styczną do śladu zniknienia, to miejscem geometrycznem perspektyw jej punktów będzie parabola.

42. Perspektywa elipsy — kołem. Przyjmijmy linję podstawy p, linję horyzontu h, ślad zniknienia n^0, a na płaszczyźnie podstawy, sprowadzonej zapomocą obrotu około prostej p na tło, elipsę k^0 (rys. 233). Biegunowa n_1^0 dowolnego punktu N_1^0 prostej n^0 ze względu na elipsę przecina ją w punkcie N_2^0, który jest sprzężony z punktem N_1^0 i którego biegunowa n_2^0, sprzężona z n_1^0, przechodzi przez ten punkt. Wychodząc z dowolnie na prostej n^0 przyjętego punktu M_1^0, znajdziemy jego biegunową m_1^0, biegun M_2^0, sprzężony z punktem M_1^0, i jego biegunową m_2^0. Zarówno m_1^0, jak i m_2^0, przejdą przez punkt N^0 przecięcia się biegunowych n_1^0 i n_2^0.

Na średnicach $\overline{N_1^0 N_2^0}$ i $\overline{M_1^0 M_2^0}$ zakreślimy koła, które przetną się w punktach O_1^0 i O_2^0. Punkty te uważać należy za kłady oka na tło, ich oddalenia od linji horyzontu za głębokości tłowe. Zadanie posiada więc dwa rozwiązania, z których jedno — przy użyciu punktu O_1^0 i głębokości tłowej δ — przeprowadziliśmy na rysunku.

Biegunowym sprzężonym n_1^0 i n_2^0 odpowiedzą średnice n_1^s i n_2^s koła k_s; perspektywą punktu N^0 jest środek N_s koła k_s. Perspektywą

czworokąta $P^0Q^0R^0T^0$, wpisanego w elipsę k^0, jest kwadrat $P_sQ_sR_sT_s$, wpisany w koło k_s.

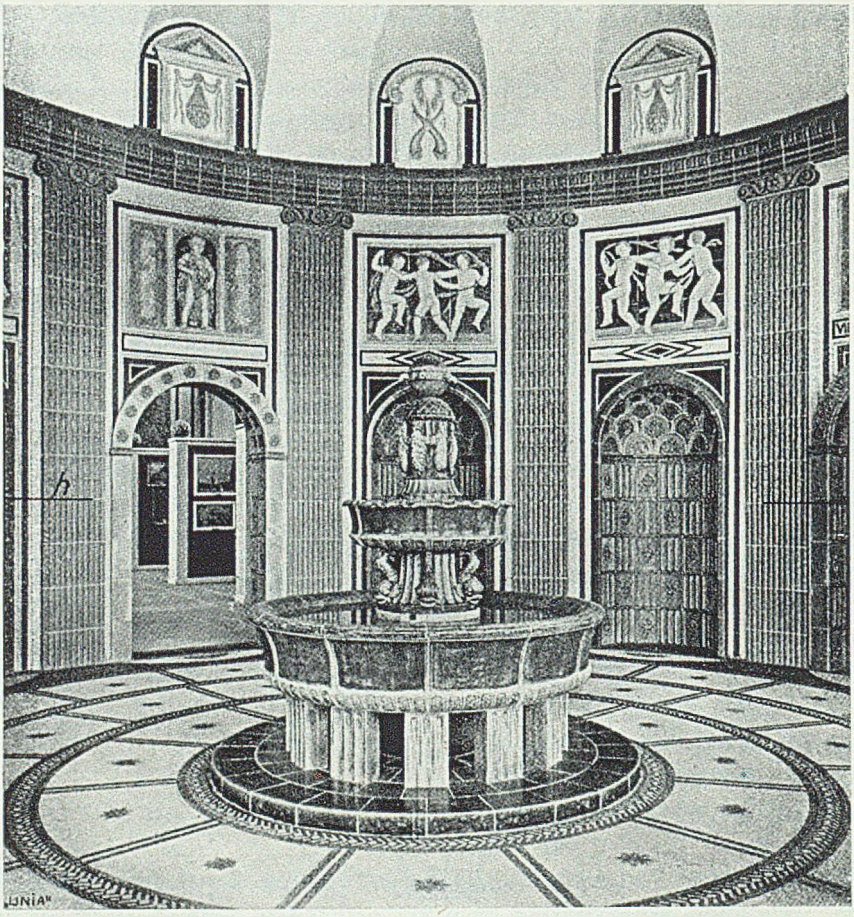


Rys. 233.

43. Perspektywa pęku kół współśrodkowych. *a)* Z rozważań ustępu 41 wynika wprost, że perspektywą kół, należących do jednego pęku, posiadających wspólny środek i leżących na jednej płaszczyźnie, mogą być elipsy, hiperbole i parabole.

Jeżeli położenie pęku kół jest takie, że płaszczyzna zniknienia żadnego z nich nie przecina, to perspektywą tego pęku będzie pęk elips. Jeżeli pęk kół jest przecięty płaszczyzną zniknienia, to perspektywami wszystkich przeciętych kół będą hiperbole. Perspektywa koła, stycznego do płaszczyzny zniknienia, będzie parabolą.

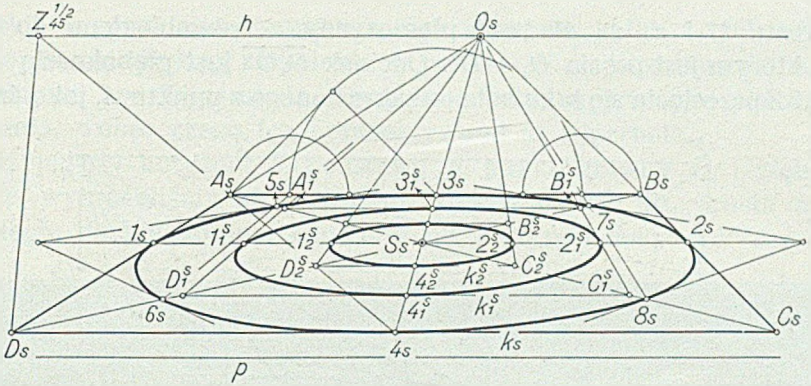
Rys. 234 jest reprodukcją fotogramu wnętrza walcowego, na którym widzimy perspektywę pęku kół. Na posadzce występują elipsy i hiperbole, na ścianie wnętrza wyłącznie hiperbole. W miarę zbliżania się do horyzontu, od podstawy, hiperbole na ścianie wnętrza pomniej-



Rys. 234.

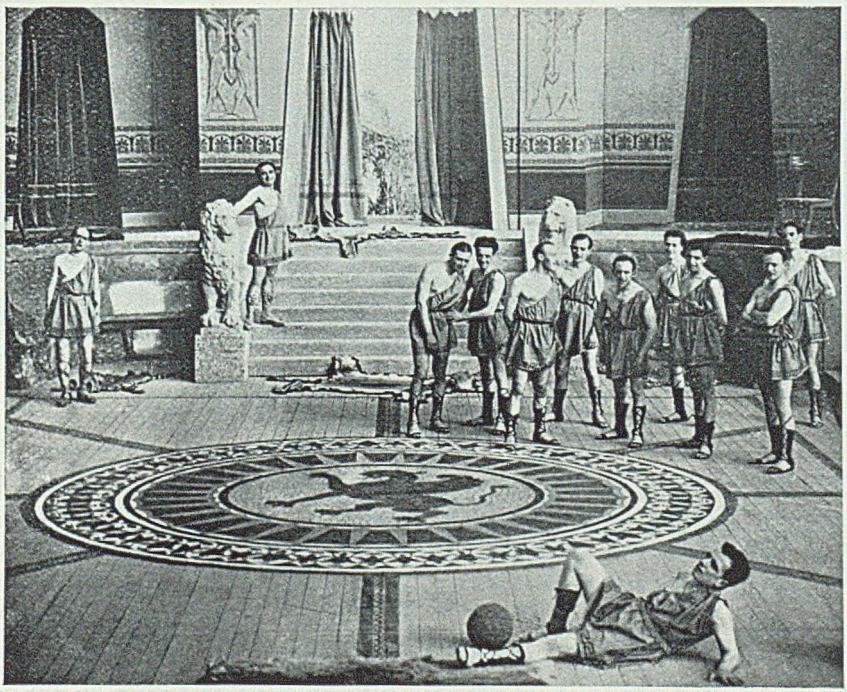
szają swoje krzywizny, zbliżając się do linji prostej. Po przekroczeniu horyzontu krzywizny hiperbol rosną. Gdziekolwiek ustawimy aparat fotograficzny we wnętrzu walcowem, zawsze otrzymamy hiperbole, jako perspektywy kół, zawsze bowiem główna płaszczyzna objektywu, odpowiadająca płaszczyźnie zniknienia, przetnie koło, ograniczające podłogę w dwóch punktach. Jeżeli na podłodze — jak w przykładzie na rysunku 234 — znajduje się pęk kół, to główna płaszczyzna objektywu przeciąć może jeszcze inne koła, względnie do jednego z nich może być styczną. Fotogram zawiera w takim wypadku więcej hiperbol (zawsze tylko jedną gałąź każdej z nich), a ewentualnie także jedną parabolę.

b) Przykład perspektywy trzech współśrodkowych kół, leżących na płaszczyźnie poziomej, podaje rys. 235. Ślad zniknienia nie przecina



Rys. 235.

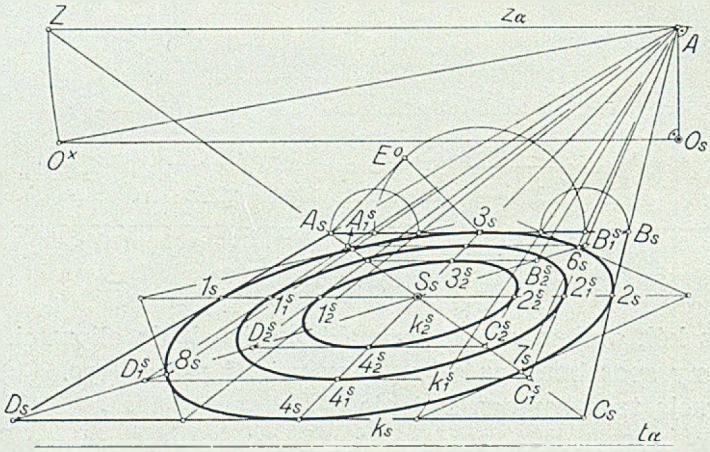
żadnego z kół, wobec czego perspektywy ich będą elipsami, które narysowaliśmy sposobem, omówionym w ust. 34, pkt *d)* (rys. 202). Rys. 236 jest ilustracją tego samego zadania.



Rys. 236.

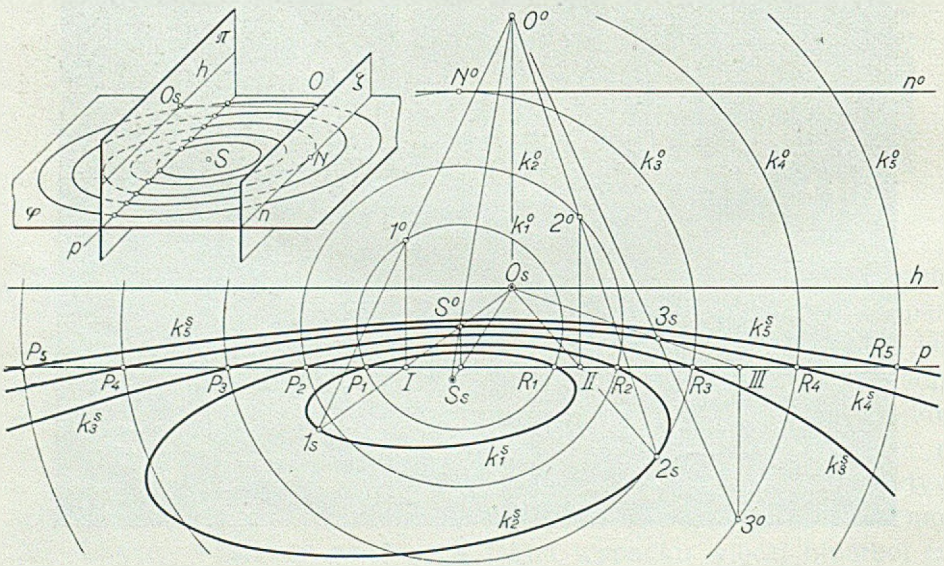
c) Perspektywę trzech współśrodkowych kół, leżących na płaszczyźnie α, równoległej do linji horyzontu, jednak nie prostopadłej do tła, podaje rys. 237.

Proste t_α i z_α są śladami płaszczyzny α, równoległemi do horyzontu, którym jest prosta $O_s - O^\times$. Odcinek $\overline{O_s O^\times}$ jest głębokością tłową a punkt Z przecięcia się łuku koła — zakreślonego z punktu A, jako środka,



Rys. 237.

promieniem $\overline{A O^\times}$ — ze śladem zbiegu z_α, śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny α a nachylonych do horyzontu pod $\sphericalangle 45^0$.

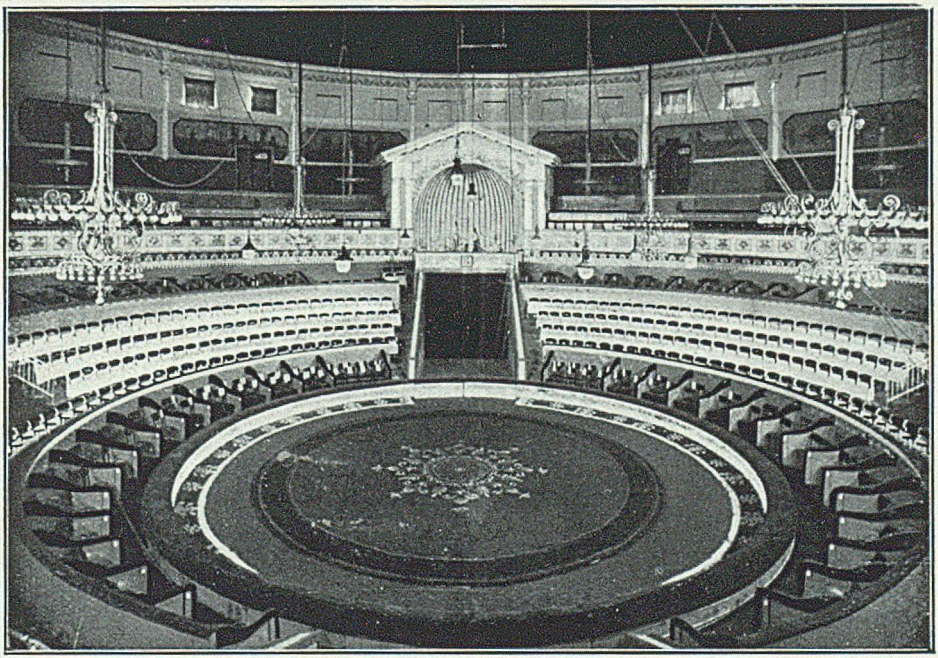


Rys. 238.

d) Rys. 238 przedstawia konstrukcję perspektywy pięciu kół współśrodkowych, leżących na płaszczyźnie poziomej.

Szkic u góry tego rysunku mówi nam, że jedno z tych kół jest styczne do płaszczyzny zniknienia w punkcie N śladu zniknienia n. Jego perspektywą będzie parabola. Dwa inne koła są przecięte płaszczyzną zniknienia, wobec czego ich perspektywami są hiperbole.

Przyjąwszy horyzont h, podstawę p, punkt główny O_s i głębokość tłową δ, wykreśliliśmy kład n^0 śladu zniknienia na tło. Prosta n^0 jest równoległa do horyzontu i oddalona od linji podstawy o δ. Teraz wy-

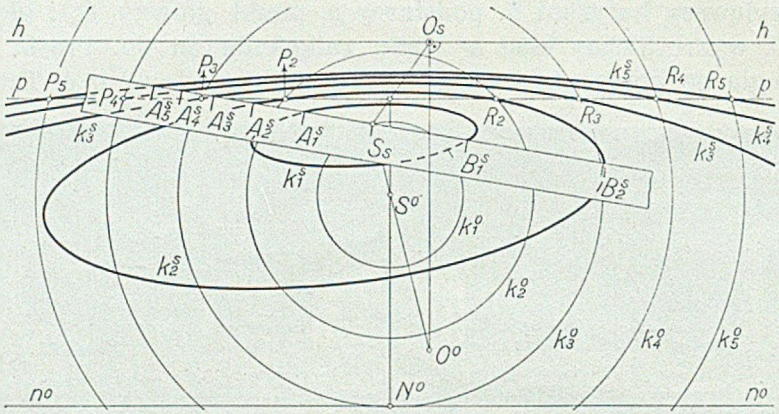


Rys. 239. Wnętrze cyrku w Warszawie.
Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

kreślimy pięć współśrodkowych kół, z których koło k_3^0 styka się ze śladem n^0 w punkcie N^0, a koła k_1^0 i k_5^0 ślad ten przecinają. Punkty P_1, R_1; P_2, R_2; .... w których linja podstawy p przecina koła, są równocześnie punktami krzywych stożkowych, odpowiadających perspektywicznie tym kołom.

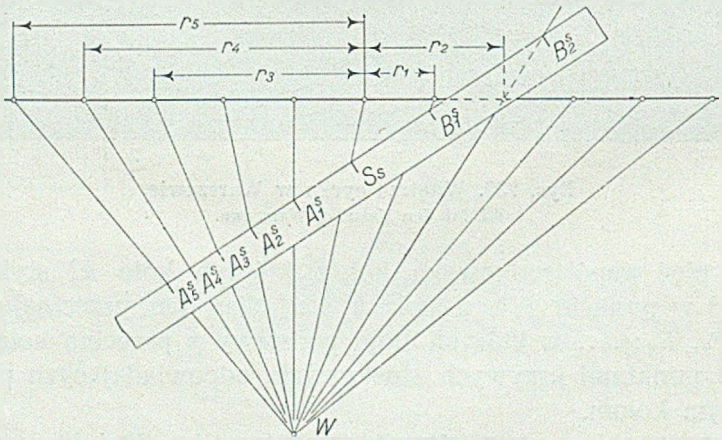
Dla otrzymania poszczególnych punktów elips k_1^s i k_2^s, paraboli k_3^s, i hiperbol k_4^s i k_5^s zastosować możemy jedną z poznanych konstrukcyj. Troska o zachowanie przejrzystości rysunku nie pozwoliła na przeładowanie go linjami pomocniczemi. Wskazaliśmy konstrukcję tylko trzech punktów. W punktach *I*, *II* i *III* podstawy p poprowadziliśmy do niej prostopadłe. Perspektywy tych prostopadłych będą prostemi, łączącemi punkty *I*, *II* i *III* z punktem głównym. Punkty 1^0, 2^0 i 3^0 kół k_1^0, k_2^0 i k_4^0,

rzucone z kładu O^0 oka na te proste, są punktami 1_s, 2_s i 3_s. Pierwszy z nich jest punktem elipsy k_1^s, drugi elipsy k_2^s a trzeci hiperboli k_4^s. Pięknemi przykładami rozpatrzonego zadania są fotogramy rys. 239 i 242.



Rys. 240.

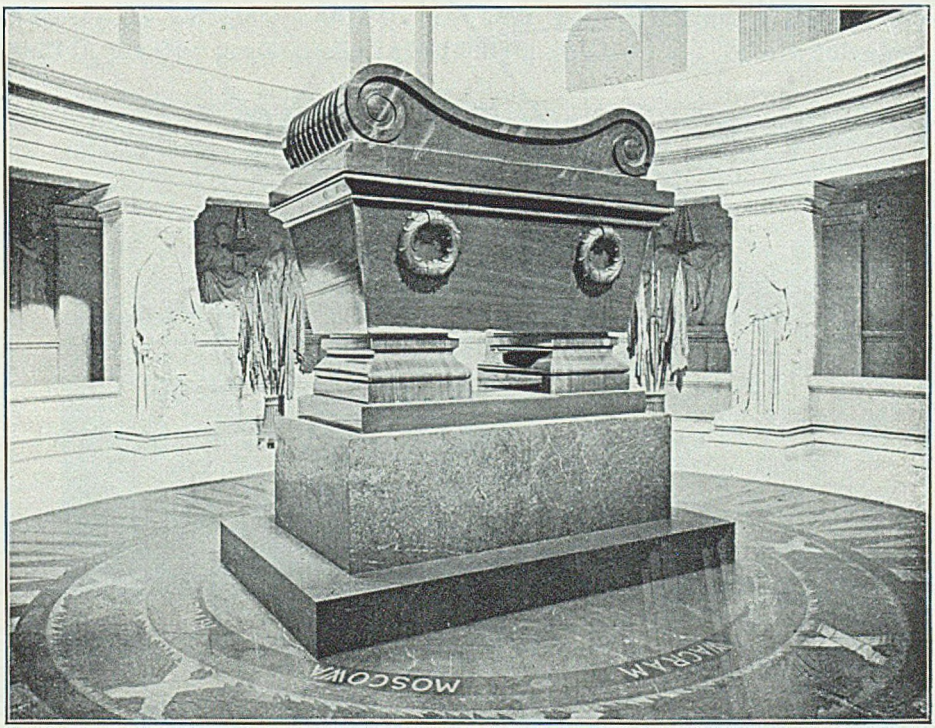
e) Do narysowania perspektywy pęku kół współśrodkowych nadaje się znakomicie pęk *Pilleťa*. Dla zademonstrowania sposobu jego użycia powtórzymy zadanie, rozwiązane w poprzednim punkcie *d)*. Mamy więc



Rys. 241.

pięć kół, z których trzecie styka się ze śladem zniknienia. Kładu płaszczyzny poziomej, na której znajdują się koła, dokonaliśmy w kierunku przeciwnym, aniżeli na rys. 238, wskutek czego ślad n^0 i punkt O^0 znalazły się pod horyzontem (rys. 240).

Z pięciu krzywych stożkowych, które mamy narysować, jedną, np. elipsę k_2^s, wykreślimy w jeden ze znanych sposobów, możliwie dokładnie. Punkt S_s jest perspektywą środka kół. Teraz przyjmiemy prostą i po obu stronach dowolnego jej punktu, który czytelnik zechce nazwać na rys. 241 literą S, odmierzymy odcinki, równe promieniom r_1, r_2, r_3, r_4 i r_5 kół. Punkty końcowe tych odcinków połączymy z dowolnym punktem W, uzyskując tym sposobem potrzebny pęk *Pilleť a*.

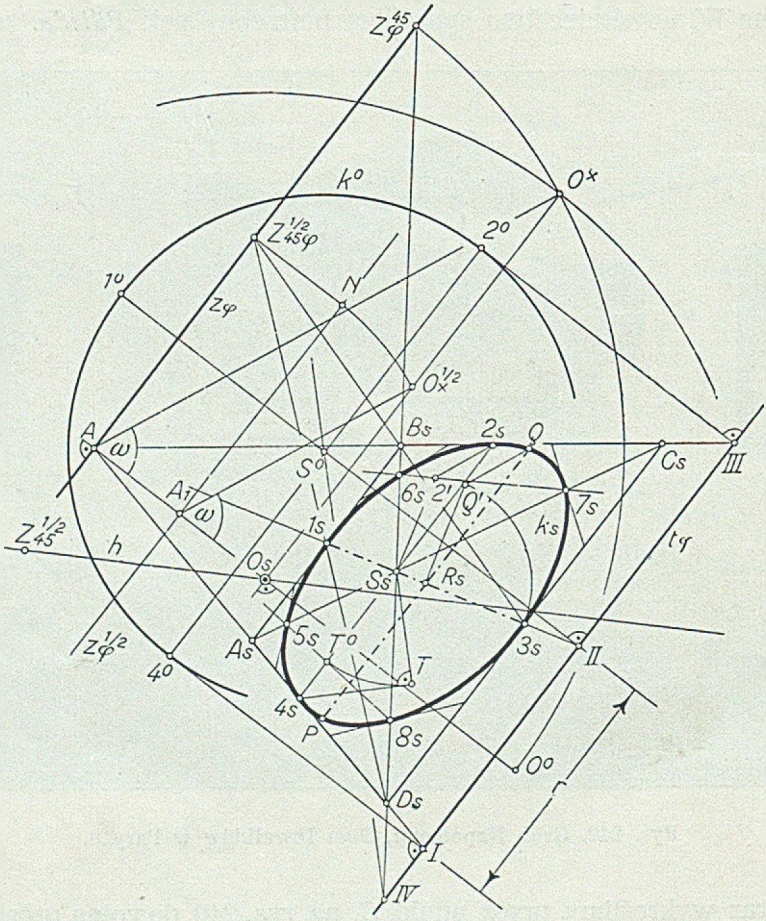


Rys. 242. Grób Napoleona, Dom Inwalidów w Paryżu.

Teraz wykreślimy przez punkt S_s na rys. 240 dowolną prostą, która przetnie elipsę k_2^s w punktach A_2^s i B_2^s. Punkty te oraz punkt S_s zaznaczymy na krawędzi skrawka papieru i przeniesiemy je na pęk *Pilleť a* w ten sposób, by punkt S_s padł na promień $S - W$ a dwa pozostałe punkty na promienie, łączące końcowe punkty odcinków r_2 z wierzchołkiem W. Reszta promieni pęku przetnie krawędź paska papieru w punktach A_1^s, B_1^s, A_3^s, ..., które przeniesiemy na rys. 240, jako punkty szukanych krzywych. W tym celu przyłożymy krawędź paska papieru do wykreślonej przez punkt S_s prostej, tak, aby punkty A_2^s, S_s i B_2^s nakryły się. Pozostałe punkty odbijemy ostrym ołówkiem. Operację tę

powtórzymy dostateczną ilość razy, otrzymując na prostych, przechodzących przez S_s, potrzebne do wykreślenia linij stożkowych punkty.

Dla celów praktycznych ten sposób rysowania perspektywy pęku kół jest godny zalecenia. Dokładność jego zależy od poprawności, z jaką narysowana została pierwsza elipsa, i od precyzji odnoszenia punktów zapomocą pasków papieru.



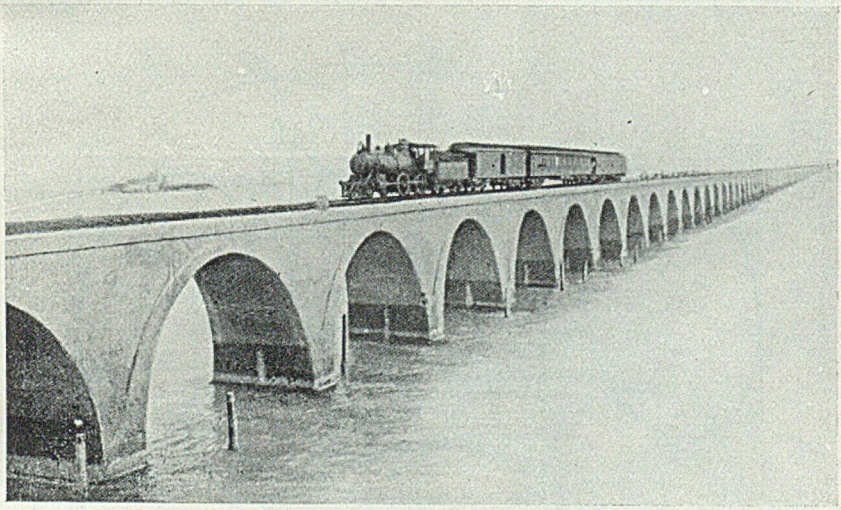
Rys. 243.

44. Zadania. 1. *Wykreślić perspektywę koła, leżącego na płaszczyźnie, nachylonej dowolnie do tła.* W punkcie *a)* ustępu 34 omówiliśmy sposób rysowania perspektywy koła, które zajmuje dowolne położenie w przestrzeni. W dalszych rozważaniach zajmowaliśmy się przypadkiem szczególnym, mianowicie kołem, leżącem na płaszczyźnie poziomej. Poznane konstrukcje odnoszą się oczywiście do wszystkich płaszczyzn prostopadłych do tła, a więc np. także do płaszczyzn pionowych.

Poniżej wracamy do zadania perspektywy koła, leżącego dowolnie w przestrzeni, rozwiązując je w sposób geometrycznie bardziej zadowalający.

Płaszczyzna φ koła k wyznaczona jest zapomocą śladu tłowego t_φ i śladu zbiegu z_φ (rys. 243). Ponadto dany jest punkt główny O_s, głębokość tłowa δ i promień r koła.

Wykreślmy horyzont h, na którym przyjmijmy punkt $Z_{45}^{1/2}$ połowy głębokości, poczem wykonajmy kład płaszczyzny φ, względnie kład jej płaszczyzny zbiegu, na tło. W tym celu poprowadzimy z punktu głównego O_s proste: prostopadłą i równoległą do śladu z_φ. Na równoległej od-



Rys. 244.

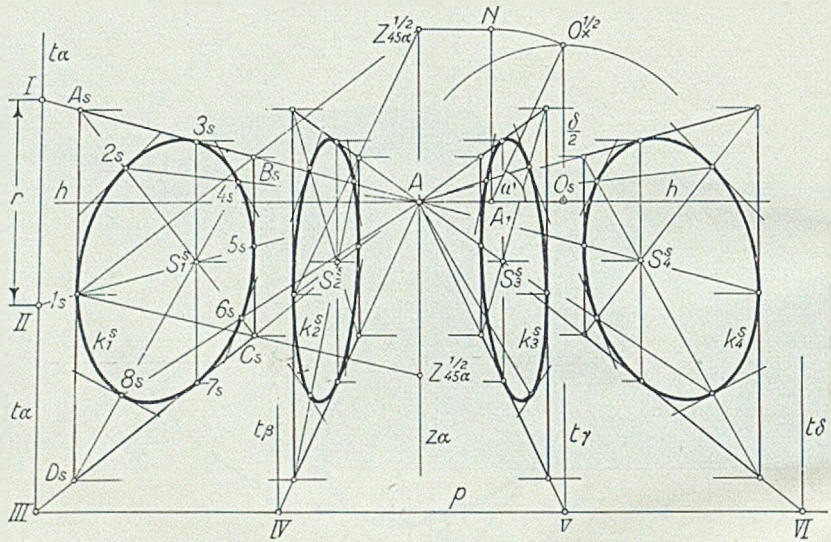
mierzymy odcinek $\overline{O_s O^\times}$, równy głębokości tłowej, i punkt $O^\times$ połączymy z punktem A. Kąt ω równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny φ do tła.

Łuk koła, zakreślony z punktu A, jako środka, przetnie prostą $A - O_s$ w punkcie O^0, który jest kładem oka na tło. Łuk ten przetnie ślad zbiegu z_φ płaszczyzny φ w punkcie Z_φ^{45}, który jest śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny φ i zawierających ze śladem z_φ kąt 45°. Jest to t. zw. ślad przekątny płaszczyzny φ (patrz ust. 13, pkt. *d*).

Na śladzie t_φ odmierzymy odcinek $\overline{I\,III}$, równy średnicy koła, i punkty końcowe tego odcinka, jakoteż jego środek II, połączymy z punktem A. Równoległe do śladu t_φ wykreślony odcinek $\overline{C_s D_s}$ jest perspektywą boku kwadratu, opisanego na kole k. Promień $D_s - Z_\varphi^{45}$ przecina prostą $II - A$ w punkcie S_s, który jest perspektywą środka koła. Ten sam promień przecina ślad tłowy t_φ w punkcie IV a prostą $III - A$ w punkcie B_s. Odcinek $\overline{I\,IV}$ wyraża prawdziwe oddalenie prostej $\overline{CD}$ od śladu t_φ.

Przez punkt B_s prowadzimy równoległą do t_φ, która przetnie promień $I - A$ w punkcie A_s. Otrzymany czworokąt $A_s B_s C_s D_s$ jest trapezem, opisanym na elipsie, będącej perspektywą danego koła.

Gdybyśmy musieli posługiwać się np. połową głębokości tłowej, to wówczas postąpimy w sposób następujący: przez środek A_1 odcinka $\overline{O_s A}$ poprowadzimy prostą $z_\varphi^{1/2}$, równoległą do z_φ, i przeniesiemy na nią łukiem koła o środku A_1 punkt $O_x^{1/2}$, połowiący odcinek $\overline{O_s O^x}$. Prostokątny rzut otrzymanego na prostej $z_\varphi^{1/2}$ punktu N na ślad z_φ jest częściowym śladem zbiegu $Z_{45^\circ\varphi}^{1/2}$ prostych, nachylonych do kierunku z_φ pod kątem 45°, a równoległych do płaszczyzny φ. Promień, łączący punkt 3_s ze śladem $Z_{45^\circ\varphi}^{1/2}$, przetnie prostą $III - A$ w punkcie B_s.



Rys. 245.

Na równoległych bokach trapezu, opisanego na elipsie, mamy jej punkty 1_s i 3_s. Prosta, przeprowadzona przez punkt S_s równolegle do t_φ, przecina dwa pozostałe boki trapezu w punktach 2_s i 4_s elipsy.

Dalsze cztery punkty elipsy, a mianowicie 5_s, 6_s, 7_s i 8_s, znaleźliśmy przez zastosowanie konstrukcji, omówionej w punkcie *d)* ust. 34. Wchodzący w grę równoramienny trójkąt prostokątny (patrz trójkąt $3Q^0C$ na rys. 202) wykreśliliśmy tutaj na odcinku $\overline{4_s S_s}$.

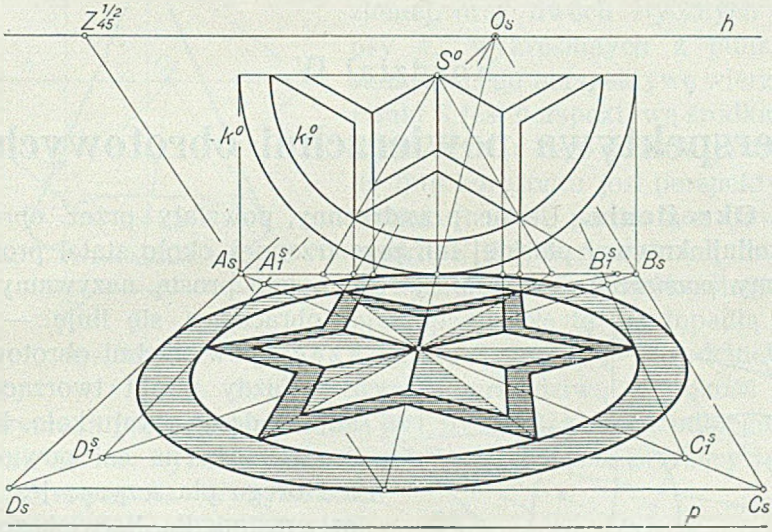
Przy pomocy konstrukcji, poznanej w punkcie *d)* ustępu 39, rysunek 227, wyznaczyliśmy także i średnicę $\overline{PQ}$, sprzężoną ze średnicą $\overline{1_s 3_s}$ elipsy.

Wkońcu wykonaliśmy kład płaszczyzny φ, który sprowadził na tło koło k, oznaczone na rysunku znakiem k^0.

2. *Wykreślić perspektywę czterech kół, o jednakowym promieniu, leżących na równoległych do siebie pionowych płaszczyznach, nachylonych do tła pod kątem* ω.

Przyjmijmy, że dane są: punkt główny O_s, horyzont, głębokość tłowa, wspólny czterem płaszczyznom ślad zbiegu z_a, ich ślady tłowe t_a, t_β, t_γ, t_δ i promień r kół (rys. 245). Operujemy połową głębokości tłowej.

Do konstrukcji potrzebny jest częściowy ślad przekątny $Z_{45}^{1/2}{}_a$ danych pionowych płaszczyzn równoległych, t. j. częściowy ślad zbiegu prostych, równoległych do tych płaszczyzn a nachylonych do kierunku pionowego pod kątem 45°.

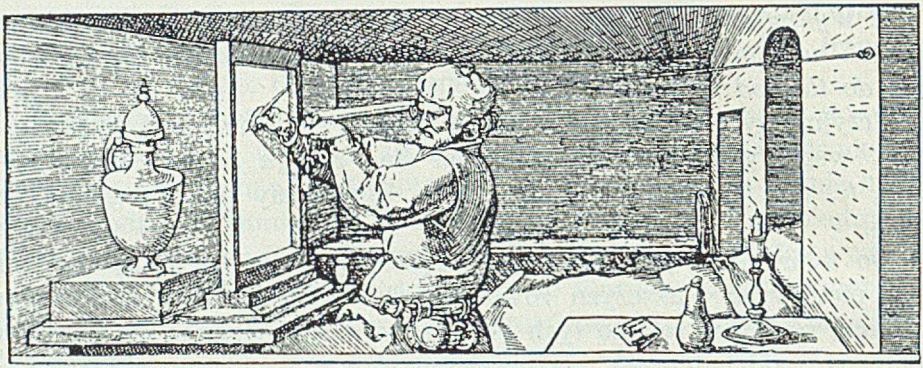


Rys. 246.

Stosując przeprowadzone w zadaniu poprzedniem konstrukcje, wykreślimy trapezy, opisane na elipsach, punkty styczności tych trapezów, a następnie dalsze cztery punkty każdej elipsy.

3. Do narysowania perspektywy ornamentu w kole (rys. 246) zastosowaliśmy konstrukcję, poznaną w ust. 21, pkt. *g)*, rys. 91 *a, b*.

Przyjęliśmy więc na pomocniczej płaszczyźnie poziomej, leżącej między płaszczyzną horyzontu a płaszczyzną poziomą ornamentu, ornament zmniejszony. Przy pomocy połowy głębokości tłowej wyznaczyliśmy perspektywę $A_sB_sC_sD_s$ i $A_1^sB_1^sC_1^sD_1^s$ kwadratów, opisanych na obu współśrodkowych kołach, a następnie w jeden z poznanych sposobów wkreśliliśmy w otrzymane trapezy elipsy. Wyznaczenie perspektywy sześcioramiennej gwiazdy oparte jest również o znane nam konstrukcje.

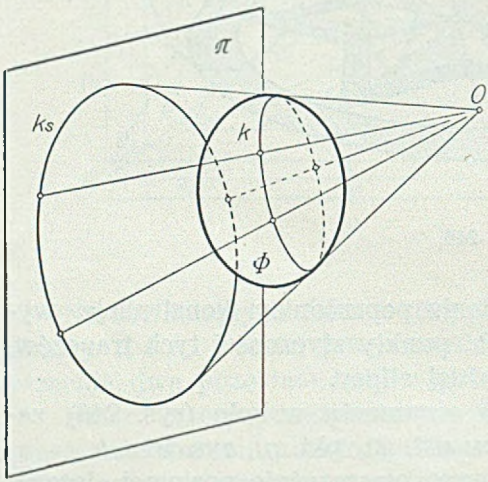


Rysunek A. Dürera.

Rozdział IV.

Perspektywa powierzchni obrotowych.

45. Określenia. Utwór przestrzenny, powstały przez obrót linji prostej, linji krzywej płaskiej lub przestrzennej około stałej prostej — nazywamy *powierzchnią obrotową*. Ową stałą prostą nazywamy osią a obracającą się linję — tworzącą powierzchni obrotowej.



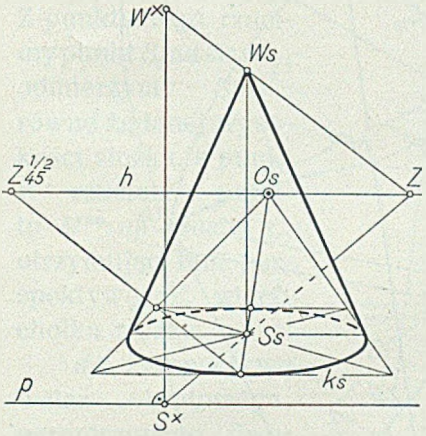
Rys. 248.

Każdy punkt tworzącej opisuje podczas obrotu koło, którego środek leży na osi powierzchni, a którego płaszczyzna jest do tej osi prostopadłą. Największe z tych kół zwie się równikiem, najmniejsze — kołem szyjnem, a wszystkie inne równoleżnikami. Płaszczyzny, przechodzące przez oś, przecinają powierzchnię wzdłuż krzywych przystających, zwanych południkami. Oczywiście, że każdy z południków może być tworzącą tej samej powierzchni obrotowej.

Jeżeli tworząca jest linją prostą, przecinającą oś, to otrzymana powierzchnia zwie się *stożkiem* obrotowym; jeżeli tworząca jest równoległa do osi, otrzymujemy *walec* obrotowy.

Opisany na powierzchni obrotowej Φ (rys. 248), z oka, jako wierzchołka, stożek, zwany *stożkiem widzenia* tej powierzchni, styka się z nią wzdłuż linji k, która stanowi t. zw. *zarys* lub *kontur istotny* powierzchni. Rzut tego zarysu z oka O na tło, równoznaczny z przekrojem stożka widzenia powierzchni Φ płaszczyzną π, jest perspektywą tej powierzchni i zwie się także jej *zarysem* (konturem) *pozornym*.

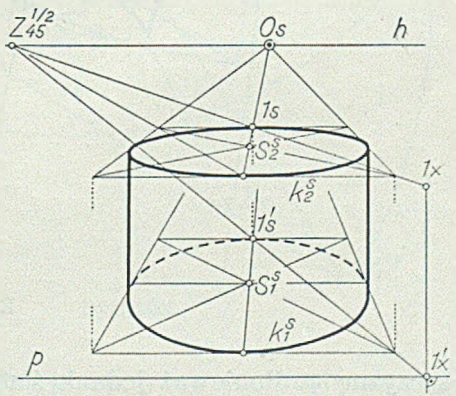
46. Przybliżone sposoby rysowania perspektyw obrotowych stożków i walców. *a)* Zadanie wykreślenia perspektywy stożka obrotowego o osi pionowej (rys. 249) sprowadza się do narysowania elipsy k_π, która jest perspektywą koła podstawy stożka, przyjętego na płaszczyźnie poziomej, oraz dwóch stycznych do elipsy k_π, wykreślonych z punktu W_π, stanowiącego perspektywę wierzchołka. Punkt S_π jest perspektywą środka koła k; wykreślona z tego punktu prostopadła do linji horyzontu jest perspektywą osi stożka. Rzućmy punkt S_π z dowolnego punktu Z linji horyzontu na linję podstawy i w punkcie $S^\times$ wykreślmy do niej prostopadłą. Na tę prostopadłą rzućmy z punktu Z punkt W_π — to odcinek $\overline{W^\times S^\times}$ wyraża prawdziwą wysokość stożka.



Rys. 249.

Otrzymana perspektywa stożka jest przybliżoną i odbiega o tyle od ścisłej, że nie wyznaczyliśmy punktów styczności tworzących konturowych z elipsą k_π. W rysunkach praktycznych znajomość tych punktów jest zbędna.

b) Rys. 250 jest perspektywą walca obrotowego o osi pionowej i wysokości równej odcinkowi $\overline{1'_\times 1_\times}$. Na zarys pozorny tego walca składają się elipsy k_1^π i k_2^π oraz wspólne do nich styczne.

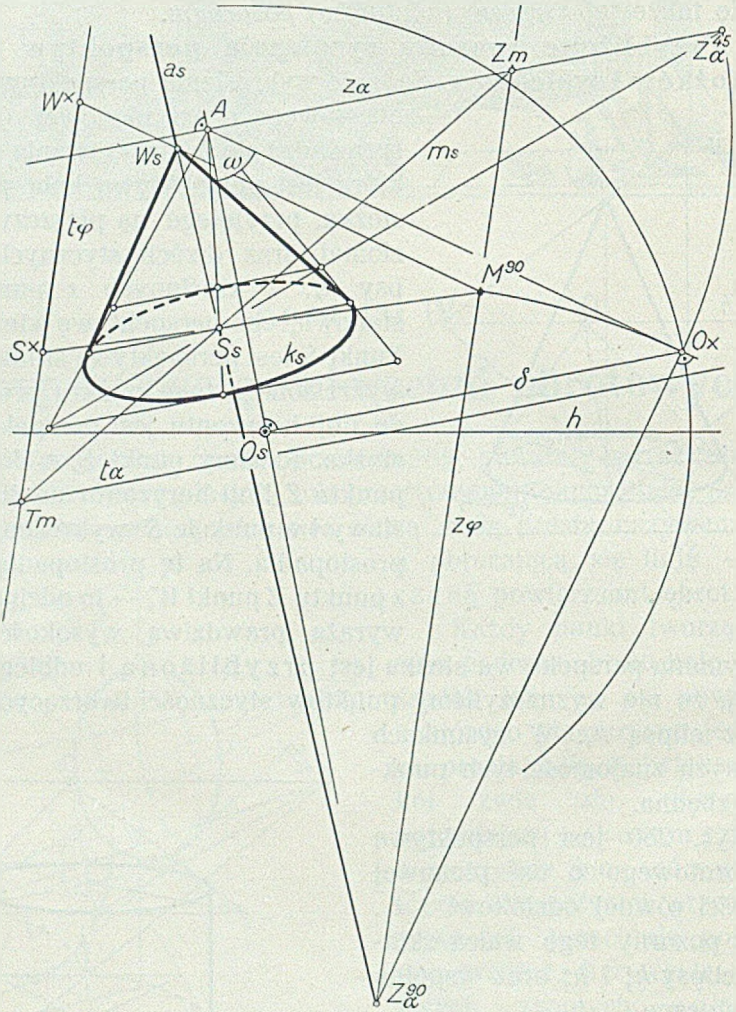


Rys. 250.

c) Rys. 251 jest perspektywą stożka obrotowego, którego podstawa k leży na płaszczyźnie α, nachylonej do tła pod kątem ω. Najpierw wykreślimy elipsę k_π, jako perspektywę koła k, poczem znajdziemy ślad zbiegu Z_α^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny α. Prosta a_π, łącząca ten ślad z punktem S_π,

jest perspektywą osi stożka; każdy jej punkt uważany być może za perspektywę wierzchołka.

Jeżeli wysokość stożka jest dana, to wówczas, celem wyznaczenia perspektywy W_s jego wierzchołka, poprowadzimy przez jego oś a pła-

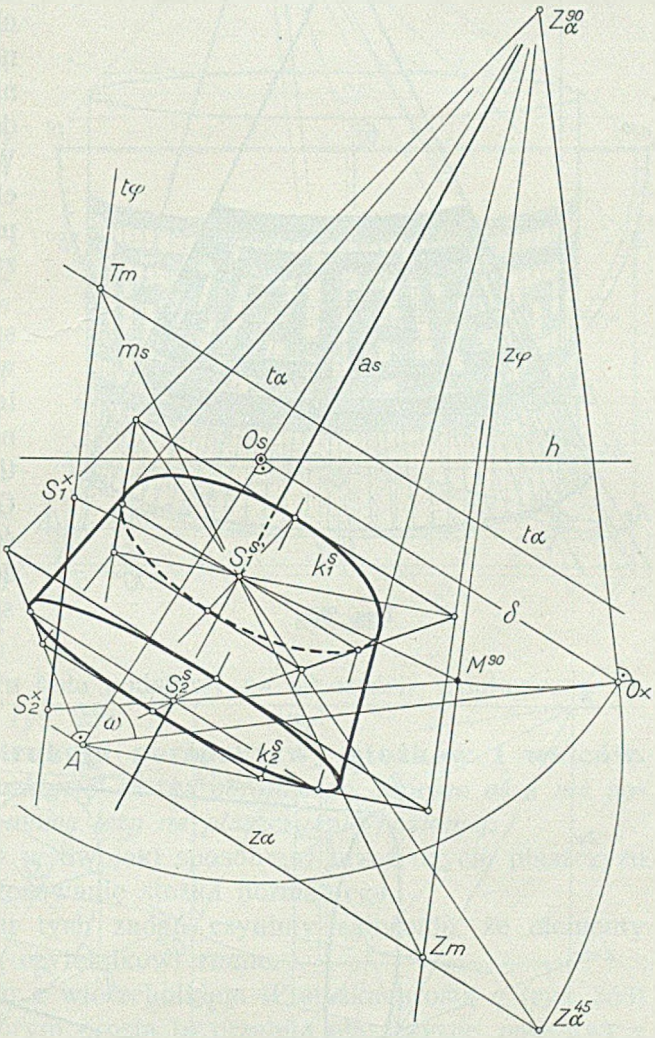


Rys. 251.

szczyznę φ. Ponieważ jednak ślad tłowy prostej a nie jest znany, więc przez punkt S_s poprowadzimy prostą m_s, którą uważać będziemy za perspektywę prostej m, leżącej na płaszczyźnie α, a przecinającej prostą a w punkcie S. Śladami prostej m są punkty T_m i Z_m. Prosta z_φ, łącząca ślad Z_m ze śladem Z_α^{90}, jest śladem zbiegu, a prosta t_φ, wykre-

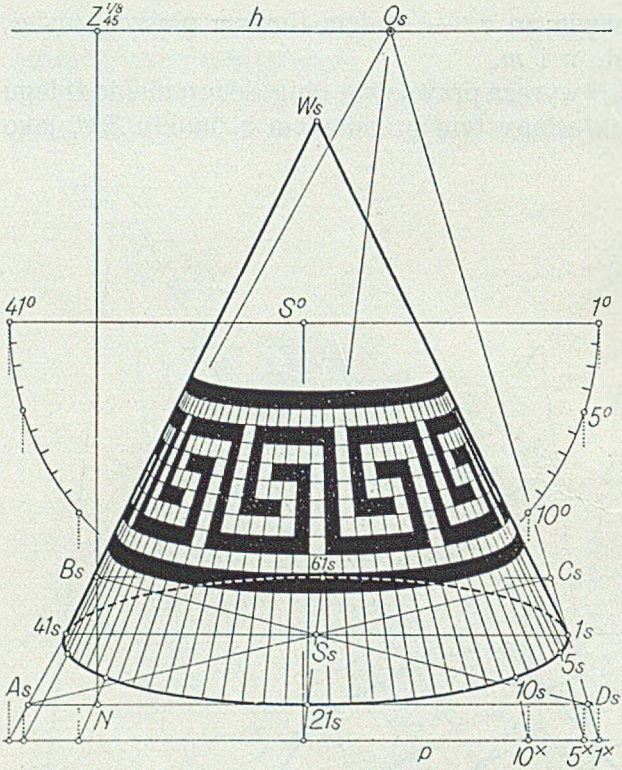
ślona przez ślad T_m równolegle do z_φ — śladem tłowym płaszczyzny φ, poprowadzonej przez proste a i m.

Ponieważ odcinek $\overline{O_\times Z_\alpha^{90}}$ wyraża prawdziwą długość promienia zbiegu prostej a, więc łuk koła, zakreślony tym promieniem z punktu Z_α^{90}, jako środka, przetnie ślad zbiegu z_φ w punkcie mierzenia M^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α. Z punktu tego rzucimy punkt S_s na ślad t_φ, odmierzymy $\overline{S^\times W^\times}$, równe żądanej wysokości stożka, a punkt $W^\times$ rzucimy z punktu M^{90} na prostą a_s, otrzymując tam perspektywę W_s wierzchołka stożka.



Rys. 252.

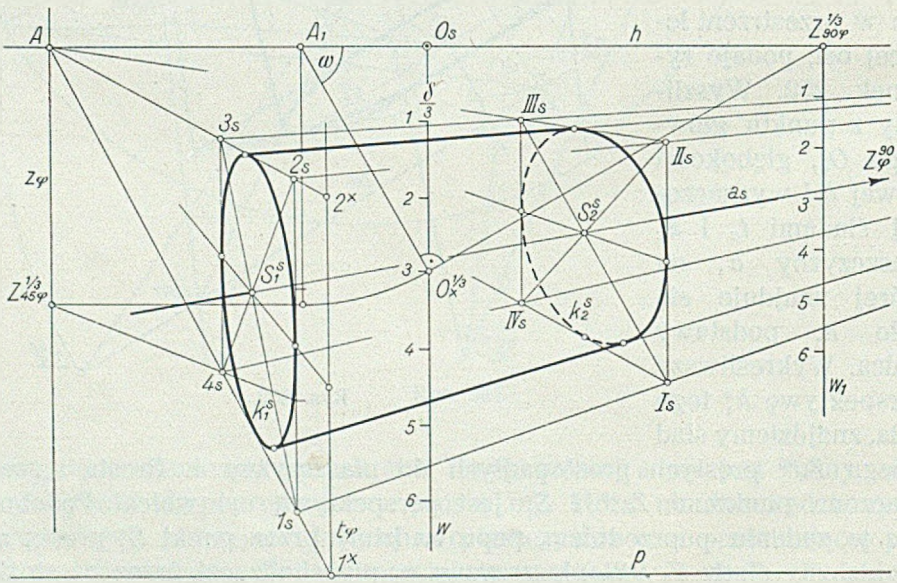
d) Perspektywę walca obrotowego, ograniczonego dwoma przekrojami, prostopadłemi do dowolnie w przestrzeni leżącej osi, podaje rysunek 252. Wyszliśmy z punktu głównego O_s, głębokości tłowej δ i wyznaczonej śladami t_α i z_α płaszczyzny α, na której znajduje się koło k_1 podstawy walca. Wykreśliwszy perspektywę k_1^s tego koła, znajdziemy ślad zbiegu Z_α^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α. Prosta a_s, wyznaczona punktami Z_α^{90} i S_1^s, jest perspektywą osi walca. Podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, poprowadzimy przez punkt S_1^s prostą m_s, znajdziemy ślady z_φ i t_φ płaszczyzny φ, przechodzącej przez oś stożka, a wreszcie punkt mierzenia M^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny α.



Rys. 253.

Z punktu tego rzucimy punkt S_1^s na ślad t_φ, odmierzymy odcinek $\overline{S_1^\times S_2^\times}$, równy żądanej wysokości walca, i punkt $S_2^\times$ przeniesiemy, jako punkt S_2^s, na prostą a_s. Wykreślenie elipsy k_2^s wyjaśnia dostatecznie rysunek. Wspólne styczne do obu elips, przechodzące przez punkt Z_a^{90}, uzupełniają zarys pozorny walca.

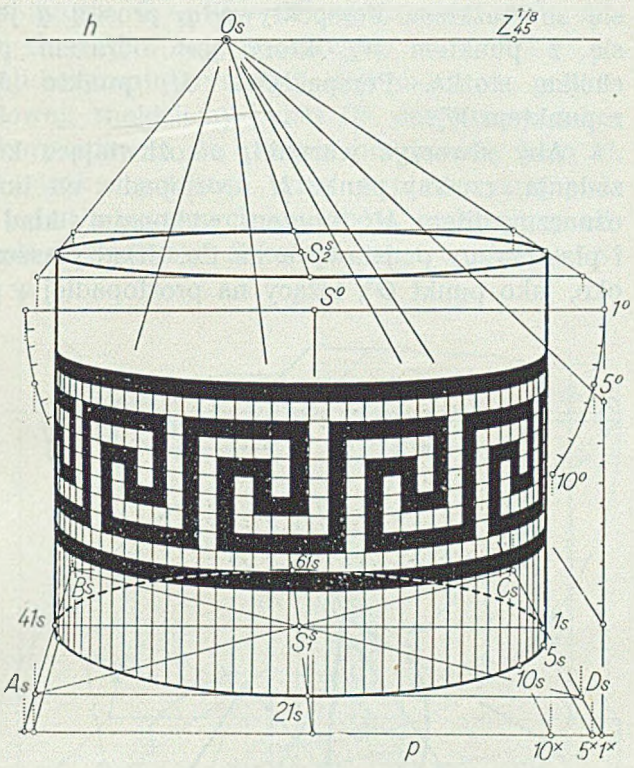
e) Wykreślmy perspektywę walca obrotowego, którego podstawa leży na płaszczyźnie pionowej φ, nachylonej do tła pod kątem ω (rys. 254). Operujemy trzecią częścią głębokości tłowej. Jeżeli ślady t_φ i z_φ płaszczyzny φ są dane, szu-



Rys. 254.

kamy na linji horyzontu punktu A_1, dzielącego odcinek $O_s A$ w stosunku 1 : 3, i znajdujemy częściowy ślad zbiegu $Z_{90\,\varphi}^{1/3}$ prostych, prostopadłych do płaszczyzny φ, a także punkt $Z_{45\,\varphi}^{1/3}$. Kreślimy trapez $1_s 2_s 3_s 4_s$ i elipsę k_1^s, a wierzchołki trapezu i punkt S_1^s łączymy z punktem Z_{φ}^{90}. Kreślimy trapez $I_s II_s III_s IV_s$ i elipsę k_2^s. Wspólne styczne do obu elips, przechodzące przez punkt Z_{φ}^{90}, dopełniają rozwiązania zadania.

f) Rys. 253 przedstawia perspektywę obrotowego stożka o pionowej osi. Na powierzchni tego stożka znajduje się ornament, który wymaga do narysowania podziału koła podstawy na 82 części. Analogiczne zadanie z walcem podaje rys. 255.



Rys. 255.

47. Dalsze konstrukcje perspektywy stożków i walców.

a) Wykreślmy perspektywę stożka obrotowego, którego oś a ma położenie pionowe, a kierownica leży na płaszczyźnie poziomej.

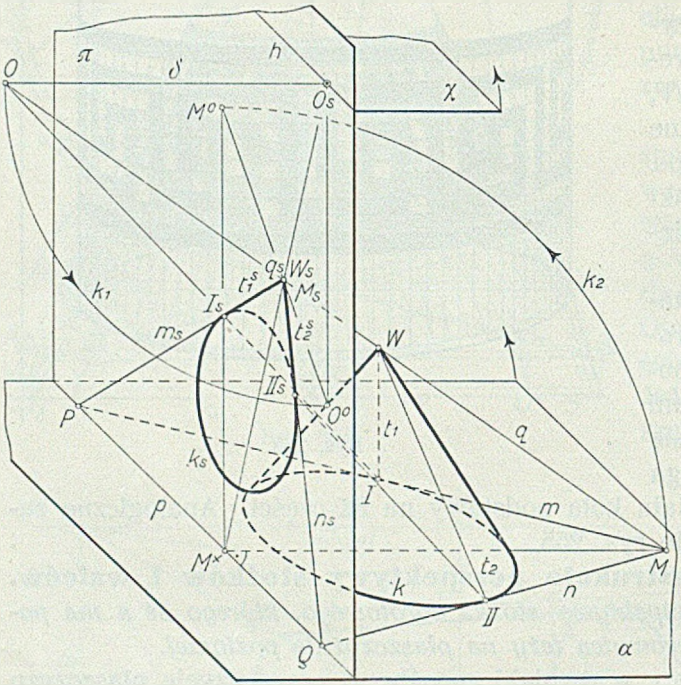
Zadanie rozwiążemy w dwojaki sposób: *α)* przez użycie płaszczyzn stycznych, *β)* przez zastosowanie stożka normalnego.

Przy rozwiązywaniu tych zadań czynimy założenie, że elementy geometrji wykreślnej są czytelnikowi znane.

ad α). Połączmy oko z wierzchołkiem W stożka prostą q (rys. 256) i oznaczmy punkt, w którym prosta ta przebija płaszczyznę podstawy α literą M. Styczne m i n, wykreślone z punktu M do koła k, stanowiącego kierownicę stożka, są śladami płaszczyzn stycznych σ_1 i σ_2 do stożka, wzdłuż tworzących t_1 i t_2; płaszczyzny te przecinają się w prostej q, a więc przechodzą przez oko. Proste $P - W_s \equiv m_s$ i $Q - W_s \equiv n_s$, w których płaszczyzny σ_1 i σ_2 przecinają tło, stanowią (wraz z elipsą k_s, będącą perspektywą koła k) kontur pozorny stożka na tle, czyli perspektywę tworzących t_1 i t_2, wzdłuż których płaszczyzny σ_1 i σ_2 stykają

się ze stożkiem. Perspektywa q_s prostej q jest punktem, schodzącym się z punktem W_s, który jest obrazem perspektywicznym wierzchołka stożka. Perspektywa M_s punktu M schodzi się również z punktem W_s.

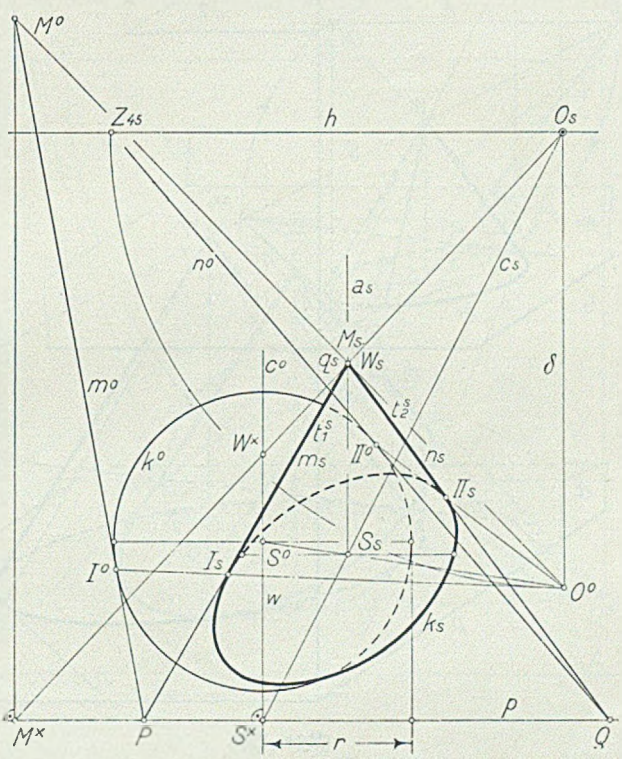
Aby stworzyć warunki, umożliwiające konstrukcyjne rozwiązanie zadania, rzućmy punkt M prostopadle na linję podstawy p. Rzut ten oznaczmy literą $M^\times$, poczem wykonajmy kład płaszczyzny horyzontu χ i płaszczyzny podstawy α na tło. Kład płaszczyzny χ sprowadzi na tło oko, jako punkt O^0, leżący na prostopadłej w punkcie głównym do linji horyzontu i odległy od niego o głębokość tłową δ. Obrót płaszczyzny podstawy na tło, dokonany w tym samym kierunku, co obrót płaszczyzny horyzontu, sprowadzi na tło koło k, punkt M, prostą $M - M^\times$, prostopadłą do linji podstawy p, oraz styczne m i n. Podczas obrotu obu płaszczyzn oko i punkt M zakreślą koła k_1 i k_2, leżące na płaszczyznach prostopadłych do linji horyzontu, gdy równocześnie prosta q, przechodząc stale przez punkt W_s, opisze stożek. W chwili, kiedy oko padnie na tło, jako punkt O^0, punkt M zajmie położenie na tle, jako punkt M^0, leżący na prostej, poprowadzonej prostopadle do linji podstawy p w punkcie $M^\times$. Ponieważ punkt M uważać można za punkt przecięcia się prostej q z prostopadłą, wykreśloną w punkcie $M^\times$ do linji podstawy p, więc punkt M^0 otrzymamy, jako przecięcie się tej prostopadłej, sprowadzonej obrotem płaszczyzny podstawy na tło, z prostą $O^0 - W_s$, t. j. tą, z którą zejdzie się opisująca stożek o wierzchołku W_s prosta q, gdy płaszczyzny horyzontu i podstawy padną na tło. Chodzi jeszcze o wyznaczenie położenia punktu $M^\times$; zauważywszy, że perspek-



Rys. 256.

tywą prostej $M — M^{\times}$ jest prosta $O_s — W_s — M^{\times}$, otrzymamy punkt $M^{\times}$, jako przecięcie się prostej $O_s — W_s$ z linją podstawy p.

Wychodząc z danej linji horyzontu (rys. 257), linji podstawy, punktu głównego i głębokości tłowej, znajdziemy punkt O^0, dowodzący dokonania kładu płaszczyzny horyzontu na tło, poczem przyjmiemy koło k^0, stanowiące kierownicę k stożka, położoną wraz z płaszczyzną podstawy α na tło. Stosując jeden z poznanych sposobów, wykreślimy elipsę k_s, t. j. perspektywę koła k. Środkowi S koła k, a więc punktowi S^0 koła k^0, odpowie punkt S_s, z którego wykreślimy prostopadłą do horyzontu, poczem obierzemy na niej punkt W_s, stanowiący perspektywę wierzchołka stożka. Łącząc punkt O_s z W_s, otrzymamy na p punkt $M^{\times}$. Prostopadła, wykreślona w nim do linji podstawy, przetnie prostą $O^0 — W_s$ w punkcie M^0, z którego kreślimy styczne m^0 i n^0 do koła k^0. Punkty P i Q, w których styczne te przecinają linję podstawy, łączymy z punktem W_s prostemi, stanowiącemi perspektywy zarówno prostych m i n, jak i tworzących t_1 i t_2 zarysu istotnego stożka (porównaj rysunek 256).

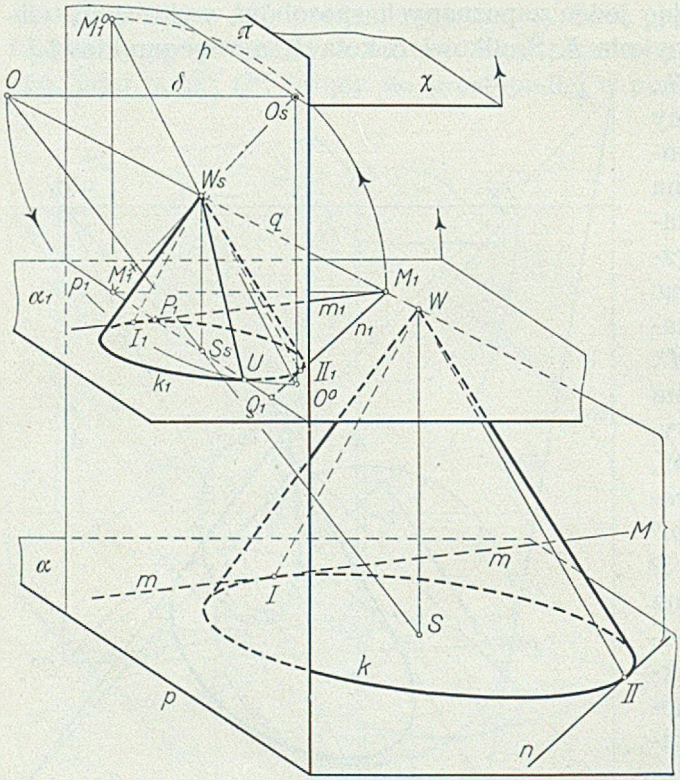


Ryc. 257.

Punkty I^0 i II^0, rzucone z punktu O^0 na proste t_1^s i t_2^s, są punktami styczności tych ostatnich z elipsą k_s.

Jeżeli stożek oddalony jest zbytnio od tła, to punkt M, po dokonanym kładzie płaszczyzny podstawy, padnie na tło zbyt daleko linji horyzontu, co przy ograniczonej płaszczyźnie rysunku utrudni konstrukcyjne przeprowadzenie zadania. W tym wypadku postąpimy w sposób następujący: znajdziemy perspektywę S_s, środka S koła k (rys. 258), będącego kierownicą danego stożka Φ, i perspektywę W_s jego wierzchołka. Punkt W_s uważajmy za wierzchołek nowego stożka obrotowego Φ_1, którego tworzące są równoległe do danego, a punkt S_s za

środek koła k_1, stanowiącego kierownicę stożka Φ_1, leżącą na płaszczyźnie poziomej α_1. Promień q, przechodzący przez oko i wierzchołek W, przebije płaszczyznę α_1 w punkcie M_1, z którego poprowadzimy styczne m_1 i n_1 do koła k_1 i prostopadłą do p_1, przecinającą ją w punkcie $M_1^\times$. Oczywiście, że m_1 jest równoległe do m, $n_1 \parallel n$, a $M_1 - M_1^\times \parallel M - M^\times$.



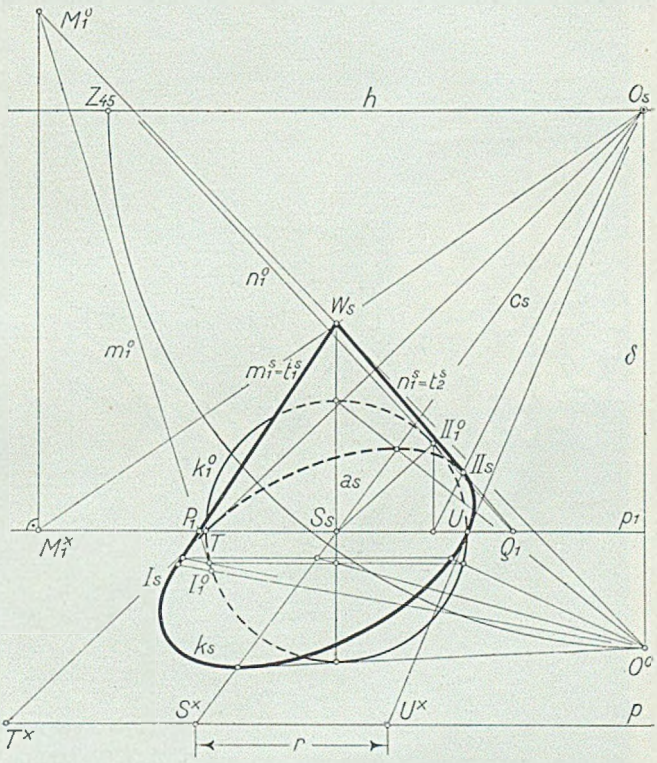
Rys. 258.

Perspektywa stożka Φ_1, którego oś leży na tle, pokrywa się z perspektywą stożka Φ. Znajdziemy ją w sposób zupełnie analogiczny z przeprowadzonym w rys. 257. Kład płaszczyzny α_1 na tło wyrazi się kładem k_1^0 koła k_1 (rys. 259), które zakreślimy na odcinku $\overline{TU}$, jako średnicy, z punktu S_s, jako środka. Następnie kreślimy prostą $O_s - W_s$, która przetnie prostą p_1 w punkcie $M_1^\times$. Prowadzimy w $M_1^\times$ prostopadłą do horyzontu, otrzymując jako przecięcie się jej z prostą $O^0 - W_s$ punkt M_1^0. Styczne m_1^0 i n_1^0, wykreślone z punktu M_1^0 do koła k_1^0, przecinają prostą p_1 w punktach P_1 i Q_1, które, połączone z W_s, dają tworzące konturu pozornego stożka Φ_1, identyczne z prostemi konturu stożka Φ.

ad β). Niechaj elipsa r_s (rys. 260) będzie perspektywą koła r, leżącego na płaszczyźnie podstawy a stanowiącego kierownicę stożka obrotowego. Prosta a_s, prostopadła do horyzontu, wykreślona przez punkt S_s, jako perspektywa środka S koła r, jest perspektywą osi tego stożka.

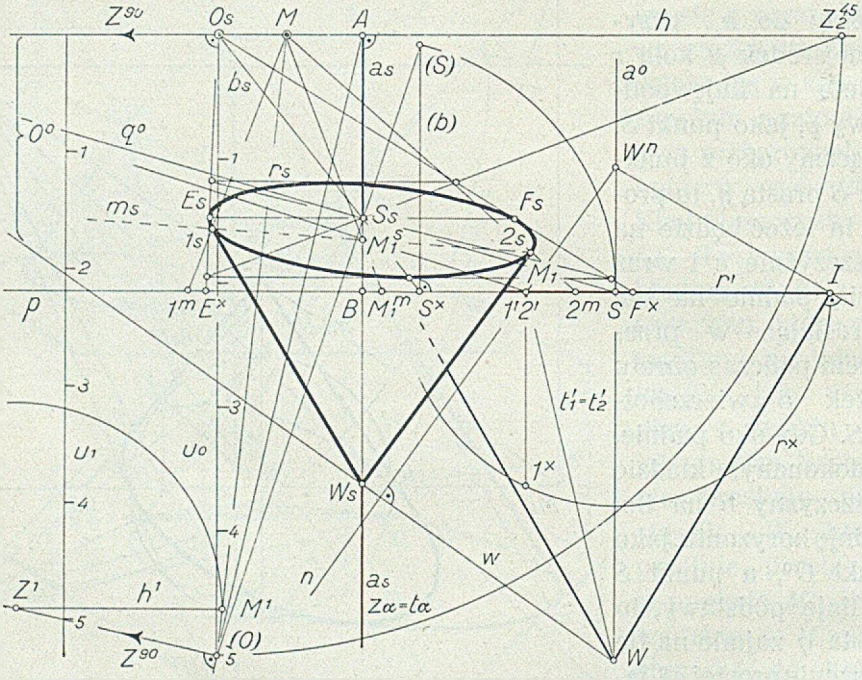
Poprowadźmy przez oko i oś a płaszczyznę α i obróćmy ją na tło. Osią obrotu będzie oczywiście ślad tłowy t_α płaszczyzny α, schodzący się, wraz ze śladem zbiegu z_α, z prostą a_s — płaszczyzna α jest bo-

wiem rzucającą. Połączmy punkt A, w którym a_s przecina horyzont, z punktem (O), w którym prostopadła do horyzontu, wykreślona w punkcie głównym, przecina koło głębokości, a punkt (O) przenieśmy łukiem koła, zakreślonym z punktu A, jako środka, na linję horyzontu. Otrzymany tam punkt O^0 jest położeniem oka po dokonanym kładzie płaszczyzny α na tło; w naszym przypadku punkt ten leży poza obszarem rysunku. Kład a^0 osi a będzie oczywiście równoległy do a_s, przyczem środek S koła r padnie na linję podstawy p, jako punkt S. Połączmy oko z punktem S prostą q, to prosta ta leżeć będzie na płaszczyźnie α i wraz z nią padnie na tło, zakreślając w przestrzeni podczas obrotu stożek o wierzchołku S. Gdy oko padnie, po dokonanym kładzie płaszczyzny α na tło, na linję horyzontu, jako punkt O^0, a punkt S na linję podstawy, to prosta q zajmie na tle położenie prostej q^0, łączącej punkt O^0 z punktem S, leżącym na p. Tak tedy punkt S jest przecięciem się prostych q^0 i p. Ale punkt ten otrzymać można także i w inny sposób. Zauważmy, że gdy płaszczyzna α obraca się około prostej $a_s \equiv t_a$, jako osi, to punkt S zakreśla na płaszczyźnie podstawy koło, którego środkiem jest punkt B przecięcia się prostej a_s z linją podstawy p. Punkt, w którym koło to przetnie prostą p, jest punktem S. Aby punkt ten otrzymać, wyobraźmy sobie, że ze środka S koła r poprowadziliśmy prostą b, prostopadłą do p. Jej perspektywą jest prosta b_s, łącząca punkt główny z punktem S_s. Punkt S^x, w którym promień b_s przecina podstawę p, jest punktem przecięcia się prostej b z p. Obróćmy teraz płaszczyznę podstawy około prostej p a płaszczyznę horyzontu około linji horyzontu na tło. Prosta b padnie na tło, jako prostopadła (b) w punk-



Rys. 259.

cie S^x do p, zaś prosta q, łącząca oko z punktem S, przechodząc stale przez punkt S_s, zakreśli stożek i wraz z okiem padnie na tło, jako prosta, łącząca punkt (O) z punktem S_s. Punkt, w którym ta ostatnia prosta przetnie prostą (b), jest punktem (S), t. j. punktem S, sprowadzonym na tło wskutek obrotu płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny podstawy o 90°. Jeżeli z punktu B, jako środka, zakreślimy promieniem $\overline{B(S)}$ koło, to przecięcie się jego z podstawą p jest punktem S.



Rys. 260.

Odmierzmy $\overline{SI} = \overline{S^x E^x} = \overline{S^x F^x}$ i połączmy przyjęty na a^0 punkt W z punktem I. Tak samo odmierzymy odcinek $\overline{SI}$ po lewej stronie punktu S i otrzymany tam punkt II (nie zaznaczony na rysunku) połączymy z punktem W. Wykreślony w ten sposób trójkąt $IIIW$, który jest przekrojem stożka obrotowego o wysokości równej odcinkowi $\overline{WS}$ płaszczyzną α, uważany być może za rzut prostokątny naszego stożka na tło, jako płaszczyznę rzutów. Jeżeli wyznaczymy tworzące, wzdłuż których płaszczyzny, przechodzące przez punkt O^0, stykają się ze stożkiem, a następnie wracając z płaszczyzną α, sprowadzoną na tło, w jej pierwotne położenie, obrócimy równocześnie i owe tworzące, nie zmieniając wzajemnego ich położenia i położenia względem płaszczyzny α, to ich perspektywa dopełni konturu pozornego stożka.

Rys. 261.

Aleksander Gierymski. Wnętrze kościoła św. Marka. Ze zbiorów T-wa Zachęty Sztuk Pięknych w Warszawie.

Czytelnik, znający elementarne konstrukcje geometrji wykreślnej, zna także sposób wyznaczania, przy pomocy stożków normalnych, płaszczyzn stycznych do stożków obrotowych, jak również sposób wyznaczania stożków, opisanych na powierzchniach obrotowych (patrz autora „Geometrja wykreślna“, wydanie II, Lwów, 1922).

Stosując metodę stożków normalnych, wykreślimy w punkcie I prostopadłą do prostej $W-I$ a z punktu W^n prostopadłą do $W-O^0$. Otrzymany na prostej p punkt M_1 łączymy z punktem W; prosta M_1-W jest rzutem tworzących t_1 i t_2, wzdłuż których płaszczyzny, przechodzące przez punkt O^0, stykają się ze stożkiem. Tworzące t_1 i t_2 przecinają koło r w punktach 1 i 2. Prosta, punktami temi wyznaczona (cięciwa styczności śladów poziomych płaszczyzn stycznych do stożka), jest prostopadła do tła, a długość jej znajdziemy, kładąc koło r około średnicy $I-II$ na tło i kreśląc w punkcie M_1 prostopadłą do r'. Odcinek $\overline{M_1 1^x}$ wyraża połowę tej cięciwy; punkt M_1 jest jej środkiem.

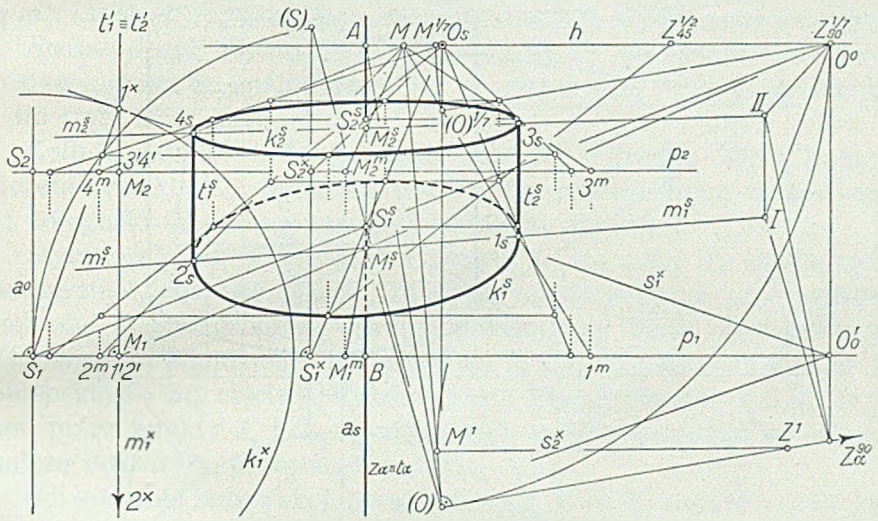
Perspektywą M_1^s punktu M_1 jest rzut punktu M_1 z punktu O^0 na prostą a_s. Śladem zbiegu cięciwy $1, 2$ jest punkt Z^{90}, w którym prostopadła, wykreślona w punkcie (O) do $A-(O)$, przetnie linję horyzontu; jest to ślad zbiegu prostych prostopadłych do płaszczyzny α. Ponieważ punkt ten leży poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, więc użyjemy podziałek zbiegu. Jedną, a mianowicie u_0, przyjmiemy na prostej $O_s(O)$, dzieląc ten odcinek na pewną ilość, np. pięć równych części. Drugą podziałkę u_1 utworzymy w ten sposób, że odcinek, równoległy do u_0 a dający się podzielić z łatwością na pięć równych części, wstawimy między horyzont i prostą $(O)\,Z^{90}$. Korzystając z tych podziałek, połączymy punkt M_1^s ze śladem Z^{90} prostą m_s.

Przy pomocy punktu mierzenia M dla kierunku $(O)\,Z^{90}$ wyznaczymy punkty 1_s i 2_s.

Aby otrzymać punkt M, przyjmiemy prostą h^1, równoległą do linji horyzontu i przecinającą ramiona kąta $Z^{90}(O)\,A$ w obrębie rysunku. Łukiem koła, zakreślonym z otrzymanego punktu Z^1, jako środka, przeniesiemy punkt (O) na prostą h^1. Punkt Z^1 uważać można za ślad zbiegu prostych prostopadłych do płaszczyzny α, gdy tło zbliżymy do oka na odległość równą oddaleniu punktu (O) od prostej h^1. Punkt M^1 jest wobec tego punktem mierzenia kierunku $O-Z^1$ na przesuniętem do oka tle. Punkt M, w którym prosta $(O)\,M^1$ przetnie linję horyzontu, jest punktem mierzenia dla kierunku $O\,Z^{90}$. Z punktu tego rzucimy punkt M_1^s na prostą p i odmierzymy $\overline{M_1^m 1^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M^1 1^x}$; promienie $M1^m$ i $M2^m$ przetną prostą m_s w punktach 1_s i 2_s, które, połączone z punktem W_s, dopełniają konturu pozornego stożka. Punkty te są mianowicie punktami, w których styczne, wykreślone z punktu W_s do elipsy r_s, z krzywą tą się stykają.

b) Wykreślmy perspektywę walca obrotowego o osi pionowej, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej.

Sposób pierwszy. Najpierw wykreślimy elipsę k_1^s (rys. 262), t. j. perspektywę koła podstawy walca. Następnie poprowadzimy przez oko i oś a walca płaszczyznę α i obrócimy ją około prostej a_s, z którą schodzą się oba ślady tej płaszczyzny — na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0 na horyzoncie, a oś położenie prostej a^0, równoległej do a_s i przechodzącej przez punkt S_1, rzut punktu S_1^s z punktu O^0 na linję podstawy p_1. Obrót płaszczyzny α sprowadzi na tło także i rzut oka na płaszczyznę podstawy, t. j. punkt O', nazwany w ust. 17 stanowiskiem.

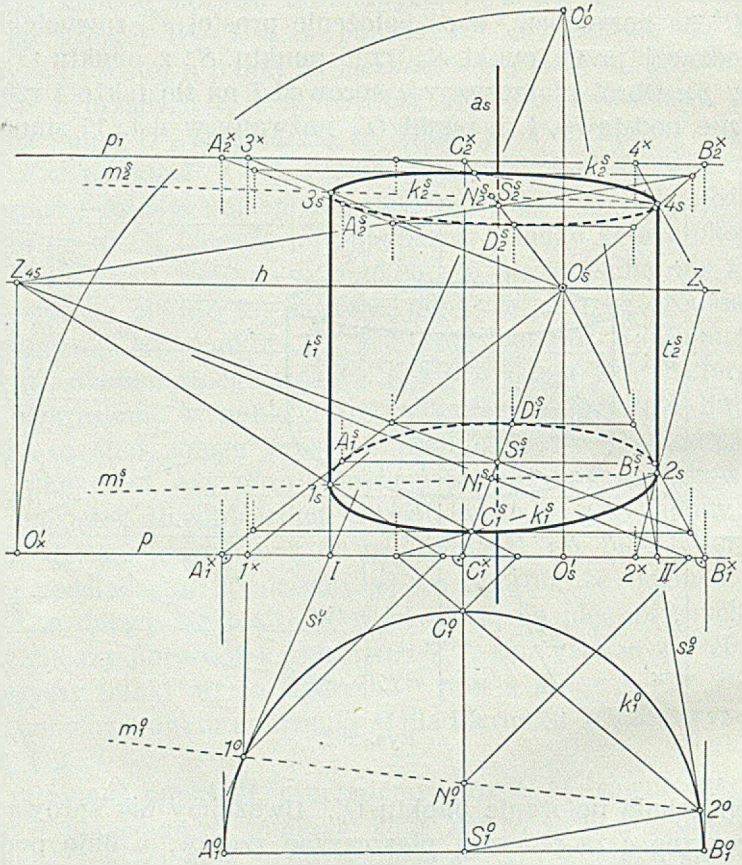


Rys. 262.

Punkt ten zajmie położenie punktu O_0'. Uważajmy tak sprowadzoną na tło płaszczyznę α za pionową płaszczyznę rzutów, a linję podstawy p_1 za oś rzutów x. Punkt O^0 uważać wtedy można za oko, leżące na rzutni pionowej, punkt O_0' za jego rzut poziomy, a prostą a^0 za oś walca, leżącą na rzutni pionowej. Obróćmy poziomą płaszczyznę podstawy około linji p_1 na tło. Rzut poziomy walca będzie kołem $k_1^\times$, zakreślonem z punktu S_1 promieniem, równym promieniowi koła k_1; styczne $s_1^\times$ i $s_2^\times$, wykreślone z punktu O_0' do koła $k_1^\times$, są śladami płaszczyzn stycznych do walca, wzdłuż tworzących t_1 i t_2, na płaszczyźnie podstawy, którą sprowadziliśmy zapomocą obrotu około prostej p_1 na tło. Rzut pionowy $t_1' \equiv t_2'$ tych tworzących schodzi się z cięciwą styczności $1^\times - 2^\times \equiv m_1^\times$. Chodzi o wyznaczenie perspektywy tej cięciwy, która jest prostopadła do płaszczyzny α. Jej śladem zbiegu Z_α^{90} jest punkt przecięcia się promienia

prostopadłego w punkcie *(O)* do prostej *(O)A* z linją horyzontu, leżący poza obszarem płaszczyzny rysunkowej.

Aby znaleźć punkt mierzenia, odpowiadający śladowi zbiegu Z_a^{90}, weźmiemy pod uwagę siódmą część oddalenia i z punktu $(O)^{1/7}$ poprowadzimy równoległą do promienia $(O)Z_a^{90}$. Na horyzoncie otrzymamy



Rys. 263.

częściowy ślad zbiegu $Z_{90}^{1/7}$, prostych prostopadłych do płaszczyzny α, który przypadkowo schodzi się w naszym rysunku z punktem O^0. Łuk koła, zakreślony z punktu $Z_{90}^{1/7}$, jako środka, promieniem $(O)^{1/7}Z_{90}^{1/7}$, przetnie horyzont w punkcie $M^{1/7}$. Odmierzymy $\overline{O_s M}$, równe siedmiokrotnemu odcinkowi $\overline{O_s M^{1/7}}$, otrzymując szukany punkt mierzenia M. Prócz tego znaleźliśmy punkt M jeszcze i sposobem, zastosowanym w rysunku 260.

Punkt M_1, w którym cięciwa m_1^x przecina linję podstawy p_1, rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s i otrzymany punkt M_1^s połączymy z punk-

tem Z_a^{90} prostą m_1^s. Połączenia tego dokonaliśmy za pośrednictwem poznanej w ust. 22 konstrukcji.

Punkt M_1^s rzucimy z punktu mierzenia M na p_1 i odmierzymy $\overline{M_1^m 1^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M_1 1^\times}$. Promienie $1^m - M$ i $2^m - M$ przetną prostą m_1^s w punktach 1_s i 2_s, które są punktami styczności prostych t_1^s i t_2^s z elipsą k_1^s.

W odległości równej przyjętej wysokości walca wykreślimy równolegle do p_1 prostą p_2, która jest śladem tłowym płaszczyzny poziomej, ograniczającej walec. Wykreślenie trapezu, opisanego na elipsie k_2^s, a potem i samej elipsy nie nastręcza trudności.

Punkt M_1^m rzucimy prostopadle na p_2, jako punkt M_2^m, i ten połączymy z punktem M, otrzymując na a_s punkt M_2^s, który łączymy ze śladem Z_a^{90} prostą m_2^s. Proste t_1^s i t_2^s przecinają m_2^s w punktach 3_s i 4_s styczności z elipsą k_2^s.

Sposób drugi. Wykonajmy kład płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny podstawy, wraz ze znajdującem się na niej kołem k_1 i stanowiskiem O', na tło (rys. 263).

Koło k_1 zajmie na tle położenie koła k_1^0 o środku S_1^0, a punkt O' położenie punktu O_0'. Punkt O_s' jest rzutem prostokątnym stanowiska na tło; odległość $O_s' - O_0'$ równa jest oddaleniu tłowemu.

Styczne s_1^0 i s_2^0, wykreślone z punktu O_0' do koła k_1^0, są śladami na płaszczyźnie podstawy płaszczyzn stycznych do walca a przechodzących przez oko, sprowadzonemi wskutek dokonanego kładu płaszczyzny podstawy na tło. Znajdziemy perspektywę 1_s i 2_s punktów 1^0 i 2^0, a więc i perspektywę m_1^s cięciwy styczności m_1^0. Proste pionowe t_1^s i t_2^s, wykreślone przez punkty 1_s i 2_s, są stycznemi w tych punktach do elipsy k_1^s i należą do zarysu pozornego walca.

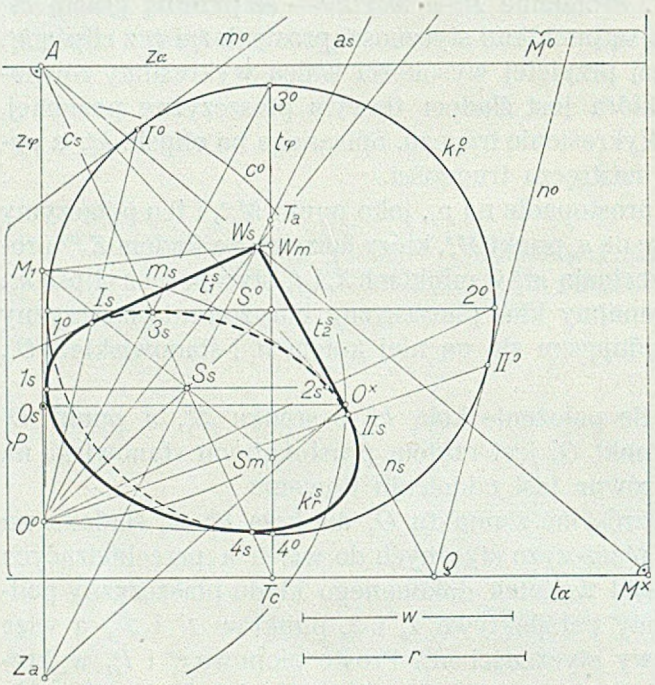
Odtworzenie konstrukcji perspektywy k_2^s koła k_2, stanowiącego górne ograniczenie walca, pozostawiamy czytelnikowi.

c) Wykreślić perspektywę stożka obrotowego, którego oś a, wyznaczona śladami: tłowym T_a i zbiegu Z_a, nachylona jest do tła pod dowolnym kątem. Punkt główny, oddalenie tłowe, położenie środka S koła równoleżnikowego stożka, jego promień r i wysokość w stożka są dane.

Sposób pierwszy: użycie płaszczyzn stycznych (rys. 264). W punkcie S prostej a poprowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą α (patrz ust. 10, pkt. *b*), znajdując jej ślady z_α i t_α. Następnie wykonamy kład tej płaszczyzny na tło. Środek rzutów zajmie położenie punktu O^0, prosta c, krawędź płaszczyzn α i φ, zejdzie się ze śladem t_φ, a rzut S^0 punktu S_s, z punktu O^0 na c^0, będzie środkiem koła k_r^0, które zakreślimy danym promieniem r. Koło to jest kładem koła równoleżnikowego stożka, znajdującego się na płaszczyźnie α.

Wyznaczenie punktów 1_s, 2_s, 3_s i 4_s, a więc i perspektywy kwadratu, opisanego na kole k_r^0 nie nastręcza żadnych trudności, podobnie jak i wykreślenie elipsy k_r^s.

Aby otrzymać perspektywę W_s wierzchołka stożka, wyznaczymy punkt mierzenia M_1 dla kierunku a, rzucimy z niego punkt S_s na prostą t_φ, odmierzymy $\overline{S_m W_m}$, równe danej wysokości w stożka, połączymy W_m z M_1 prostą, która przetnie A_s w szukanym punkcie W_s.



Rys. 264.

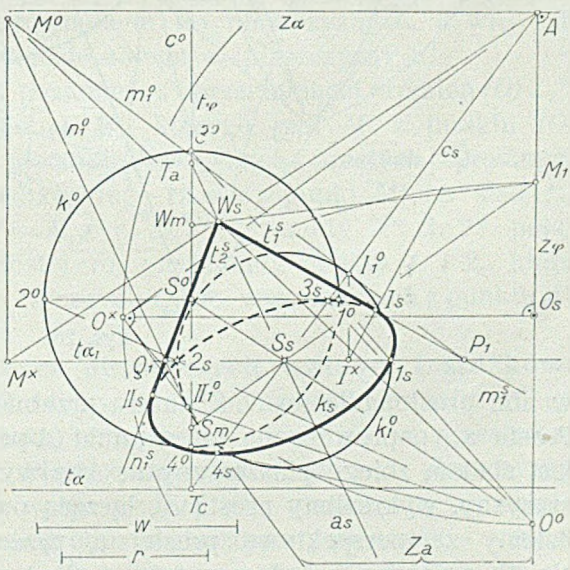
Styczne t_1^s i t_2^s, wykreślone z punktu W_s do elipsy k_r^s, dopełniają zarysu pozornego stożka. Znajdziemy je najzupełniej w ten sam sposób, jak w zadaniu rys. 256, gdzie wyznaczyliśmy punkt M, w którym prosta q, łącząca oko z wierzchołkiem stożka, przebija płaszczyznę kierownicy stożka; punkt ten rzuciliśmy na linję podstawy i wykonaliśmy kład płaszczyzny podstawy, wraz z kierownicą stożka i punktem M, na tło. To samo uczynimy i w rozpatrywanem zadaniu — różnica polega jedynie na tem, że rolę płaszczyzny podstawy przyjmie w niem płaszczyzna α. Śladem zbiegu prostej $M - M^\times$ jest w rys. 256, względnie rys. 257, punkt główny; przy dowolnem nachyleniu płaszczyzny α do tła śladem tym jest punkt A.

Tak tedy łączymy punkt W_s z A, aż do przecięcia się w punkcie $M^\times$ ze śladem t_α, gdzie kreślimy prostopadłą, która przetnie promień $O^0 - W_s$ w punkcie M^0. Z punktu M^0 prowadzimy styczne m^0 i n^0 do koła k_r^0, które przetną t_α w punktach P i Q. Proste $W_s - P$ i $W_s - Q$ są perspektywami t_1^s i t_2^s tworzących konturowych t_1 i t_2 stożka, a punkty I_s i II_s, w których promienie $O^0 - I^0$ i $O^0 - II^0$ przecinają proste t_1^s i t_2^s, są punktami styczności tych ostatnich z elipsą k_r^s.

To samo zadanie rozwiązaliśmy także, podobnie, jak w rysunkach 258 i 259, posługując się stożkiem pomocniczym Φ_1, o tworzących równoległych do danego a o wierzchołku W_s, leżącym na tle. Perspektywy obu stożków pokrywają się i w tem leży istota tego rozwiązania.

Elipsę k_s (rys. 265), perspektywę koła kierowniczego k stożka, które znajduje się na płaszczyźnie α, uważać możemy także za perspektywę koła k_1, stanowiącego kierownicę stożka Φ_1, leżącą na płaszczyźnie α_1, równoległej do α. Śladem tłowym tej płaszczyzny jest prosta t_{α_1}, równoległa do t_α, przechodząca przez punkt S_s. Wykonamy kład płaszczyzny α_1 na tło. Koło k_1^0, zakreślone na średnicy $1_s - 2_s$, będzie kładem koła k_1 na tło. Zresztą postąpimy, jak w rysunku poprzednim: łączymy A z W_s; na t_{α_1} otrzymamy punkt $M^\times$, w którym kreślimy prostopadłą, przecinającą promień $O^0 - W_s$ w punkcie M^0. Styczne m_1^0 i n_1^0, wykreślone z M^0 do koła k_1^0, przecinają t_{α_1} w punktach P_1 i Q_1, które łączymy prostemi m_1^s i n_1^s z punktem W_s, perspektywą wierzchołka stożka. Znalezieniem punktów I_s i II_s, odpowiadających punktom styczności I_1^0 i II_1^0 prostych m_1^0 i n_1^0 z kołem k_1^0, uzupełnimy rozwiązanie zadania.

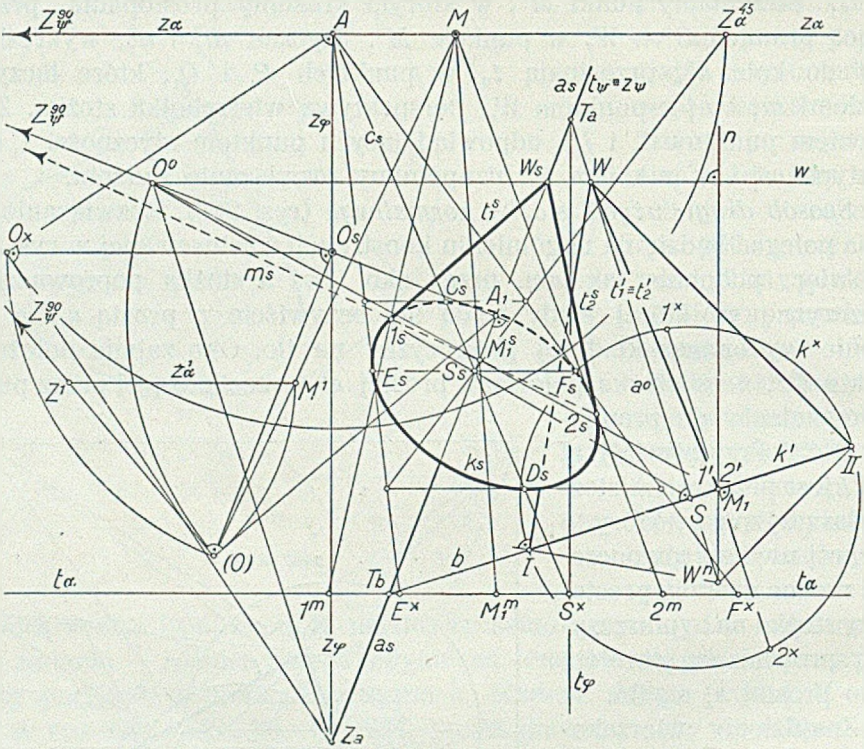
Sposób drugi: użycie stożka normalnego (rys. 266). Rozwiązanie zadania polegać będzie na uogólnieniu konstrukcji, zastosowanej w rys. 260. Tak więc, podobnie jak tam, przez oko i oś a stożka poprowadzimy płaszczyznę ψ, której ślady zejdą się oczywiście z prostą a_s, a następnie wykonamy kład tej płaszczyzny na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0, a oś stożka położenie prostej a^0, przechodzącej przez punkt T_a równolegle do promienia $O^0 Z_a$. Przyjęty trójkąt $W\,I\,II$ jest przekrojem stożka płaszczyzną ψ, który to przekrój uważać równocześnie można za rzut prostokątny stożka na tę płaszczyznę, sprowadzoną obrotem około prostej a_s na tło.



Rys. 265.

Znajdziemy wierzchołek W^n stożka normalnego i z niego wykreślimy promień n, prostopadły do prostej w, łączącej punkt O^0 z punktem W. Na k' otrzymamy punkt, oznaczony jako $1'$, $2'$ i M_1. Uważajmy odcinek $\overline{I\,II} = k'$ za rzut podstawy stożka na płaszczyznę tła, to koło $k^\times$, zakreślone na średnicy $\overline{I\,II}$, jest kładem podstawy stożka na tło, dokonanym zapomocą obrotu około średnicy $\overline{I\,II}$. Na kole $k^\times$ leżą też punkty $1^\times$ i $2^\times$, a mianowicie, jako ograniczające cięciwę prostopadłą w punkcie M_1 do k'.

Rzut S_s, środka S odcinka $\overline{I\,II}$, na prostą a_s z punktu O^0 jest perspektywą środka koła k, stanowiącego podstawę stożka. W celu wykreślenia perspektywy k_s koła k wyznaczymy płaszczyznę α tego koła, prostopadłą do osi a w punkcie S, znajdując jej ślady z_α i t_α. W tym celu połączymy ślad Z_α z punktem głównym prostą i wykreślimy do niej w tym punkcie prostopadłą, na której odmierzymy odcinek $\overline{O_s O_x}$, równy oddaleniu tłowemu. Punkt Z_α połączymy z punktem O_x i wykreślimy



Rys. 266.

w nim prostopadłą do $O_x Z_\alpha$, która przetnie prostą $O_s Z_\alpha$ w punkcie A. Prosta z_α, poprowadzona przez punkt A prostopadle do prostej $A\,O_s Z_\alpha$, jest śladem zbiegu płaszczyzny α. Aby wyznaczyć ślad tłowy tej płaszczyzny, wykreślimy prostą c_s, łączącą punkty A i S_s, i uważać ją będziemy za perspektywę prostej c, przecinającej prostą a w punkcie S, a leżącej na płaszczyźnie α. Śladami płaszczyzny, wyznaczonej prostemi a i c, są proste z_φ i t_φ. Ślad tłowy t_α płaszczyzny α przejdzie przez punkt przecięcia się prostej c_s z prostą t_φ — który to punkt jest śladem tłowym prostej c. Oznaczony jest on na rysunku literą $S^\times$. Ślad t_α przejdzie równocześnie przez punkt T_b, w którym prosta b przecina prostą a_s.

Koło, zakreślone z punktu A, jako środka, promieniem $\overline{A\,O_\times}$, przetnie ślad z_a w punkcie Z_a^{45}, który jest, jak wiadomo, śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny α, względnie na niej leżących, a nachylonych do jej śladów pod kątem 45°.

Punkt S_s rzucimy z punktu A na t_a, odmierzymy $\overline{S^\times E^\times} = \overline{S^\times F^\times} = \overline{S\,I}$, równe promieniowi koła k, i punkty $E^\times$ i $F^\times$ rzucimy z punktu A na prostą poziomą, poprowadzoną przez punkt S_s. Otrzymamy tam punkty E_s i F_s, a pośrednictwo promienia $S_s Z_a^{45}$ pozwoli wyznaczyć jeszcze średnicę $\overline{C_s D_s}$ elipsy.

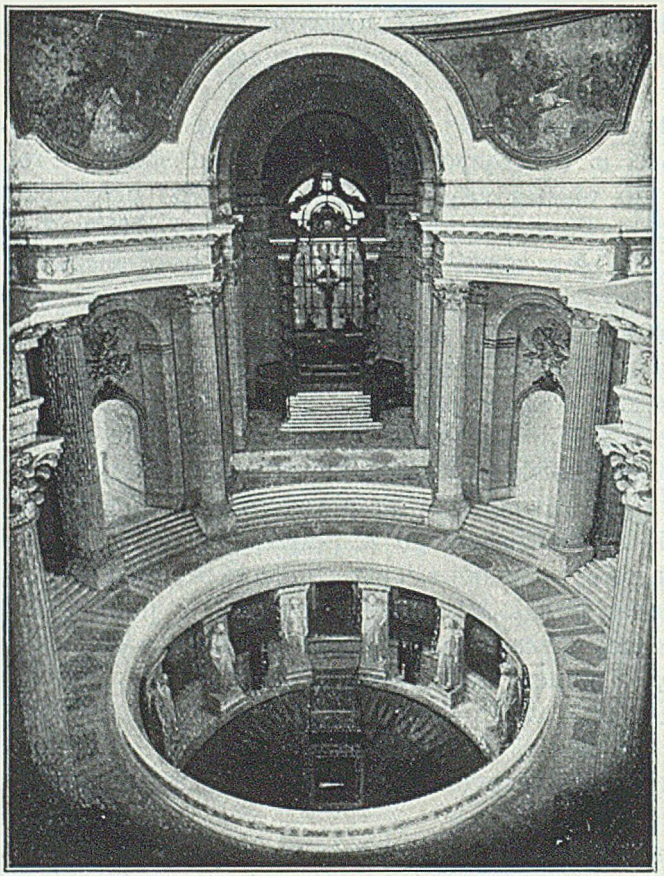
Rzut M_1^s punktu M_1 z punktu O^0 na prostą a_s jest perspektywą środka cięciwy styczności m tworzących zarysu istotnego stożka. Prosta m jest prostopadłą do płaszczyzny ψ, która przechodzi przez oko i oś a stożka, jej perspektywa m_s przejdzie więc przez ślad zbiegu Z_ψ^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny ψ. Ślad ten leży poza obszarem rysunku i jest punktem przecięcia się prostej $A_1 O_s O^0$ z promieniem, wykreślonym w punkcie (O) prostopadle do prostej $(O)\,A_1$.

Ponieważ płaszczyzna ψ, jako przechodząca przez oś stożka, jest prostopadłą do płaszczyzny α, więc promień, łączący oko ze śladem zbiegu Z_ψ^{90}, leży na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny α, a co za tem idzie, punkt Z_ψ^{90} leżeć będzie na śladzie z_a. Wszystkie zresztą proste prostopadłe do płaszczyzny ψ są równoległe do płaszczyzny α, a więc ich ślad zbiegu leżeć będzie na śladzie zbiegu z_a płaszczyzny α.

Za pośrednictwem prostej poziomej z_a^1, przecinającej promień $(O)\,Z_\psi^{90}$ w punkcie Z^1, znajdziemy punkt M^1, którego rzut M z punktu (O) na ślad z_a jest punktem mierzenia wszystkich prostych, prostopadłych do płaszczyzny ψ. Z punktu tego rzucimy punkt M_1^s na ślad t_a, odmierzymy $\overline{M_1^m 1^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M_1 1^\times} = \overline{M_1 2^\times}$ i punkty 1^m i 2^m połączymy z punktem M. Na prostej m_s otrzymamy punkty 1_s i 2_s, które ograniczają cięciwę styczności stycznych t_1^s i t_2^s, wykreślonych z punktu W_s do elipsy k_s.

48. Perspektywa wnętrz obrotowych walców i stożków. Weźmy pod uwagę walec obrotowy o osi pionowej; wewnątrz niego przyjmijmy środek rzutów (oko) a następnie dowolnie w przestrzeni p i o n o w ą płaszczyznę tła. Płaszczyzny równoległe do płaszczyzny podstawy przecinać będą ten walec wzdłuż kół, płaszczyzny dowolnie położone przecinać go będą podług elips, a płaszczyzny pionowe — wzdłuż dwóch tworzących. Płaszczyzna zniknienia przetnie każde przyjęte na walcu koło lub każdą elipsę w dwóch punktach — perspektywą więc tych linij krzywych będą wyłącznie h i p e r b o l e. Jedynie tworzące walca przejdą po odwzorowaniu perspektywicznem w pęk prostych równoległych, prostopadłych do linji horyzontu. Przykładami perspektyw wnętrz walców obrotowych są rys. 215, 234, 239, 242 i 285.

Jeżeli płaszczyzna tła nie ma położenia pionowego, to przy perspektywie wnętrza walca występują — podobnie, jak w poprzednim wypadku — hiperbole i linje proste, z tą tylko różnicą, że perspektywa tworzących nie jest pękiem prostych równoległych, lecz zbiegających się w punkcie właściwym. Przykładem takiej perspektywy jest fotogram wnętrza Domu Inwalidów z grobem Napoleona w Paryżu (rys. 267). Zdjęcie wykonane jest „zgóry"; klisza fotograficzna nachylona była ku dołowi, podobnie, jak to widzimy na rysunku 189*a*.



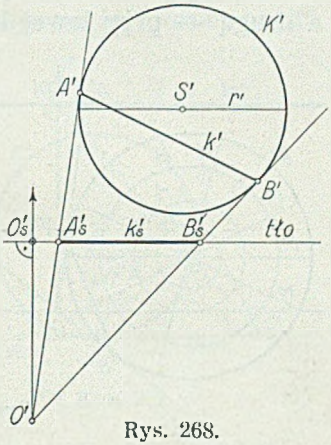
Rys. 267.

Inaczej przedstawia się sprawa perspektywy wnętrza obrotowego stożka. Przekrojami płaskiemi stożka są, jak wiemy, koła, elipsy, hiperbole i parabole, jeśli nie uwzględnimy linij prostych. Stożkowe te zajmować mogą względem płaszczyzny zniknienia trojakie położenia: będą przecięte przez płaszczyznę zniknienia w dwóch punktach, będą do płaszczyzny zniknienia styczne, lub wreszcie nie będą miały z nią żadnych rzeczywistych punktów wspólnych. Perspektywą pierwszych stożkowych będą hiperbole, drugich parabole, trzecich elipsy. Perspektywą tworzących stożka będą oczywiście linje proste. Tak tedy, gdy przy perspektywie wnętrza walca obrotowego wchodzą w grę hiperbole i linje proste — to przy perspektywie obrotowego stożka występować mogą wszystkie stożkowe i linje proste.

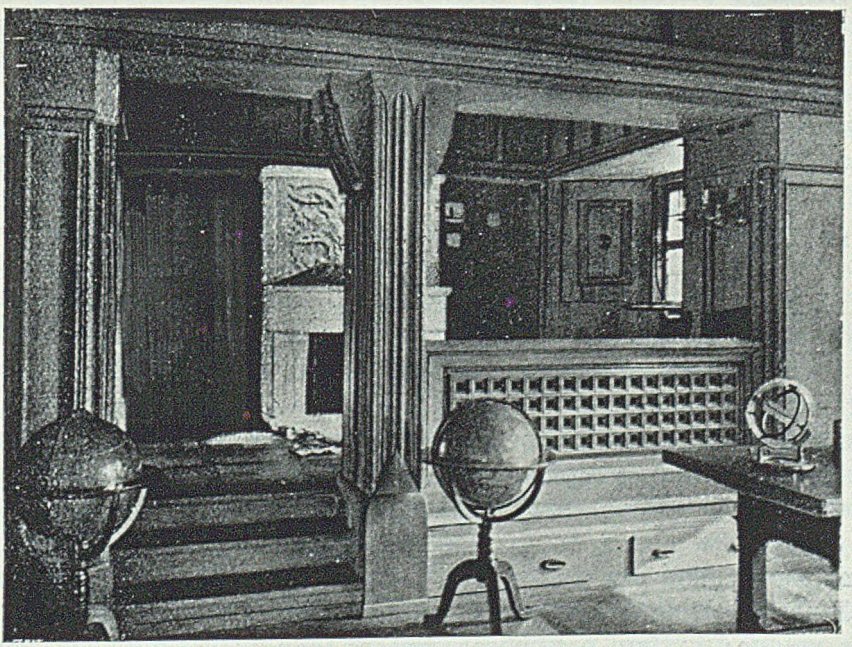
49. Perspektywa kuli. *a)* Stożek, opisany na kuli, z oka, jako wierzchołka (stożek widzenia kuli), jest stożkiem obrotowym. W zależ-

ności od położenia kuli względem płaszczyzny zniknienia, płaszczyzna tła przetnie stożek widzenia kuli wzdłuż elipsy, hiperboli lub paraboli. Zarys pozorny kuli może więc być elipsą, hiperbolą lub parabolą.

W szczególności, jeżeli płaszczyzna zniknienia nie przecina kuli, ani też nie jest do niej styczna, to przy takiem położeniu kuli perspektywą jej jest elipsa. Rys. 268 objaśnia nam tę sprawę w widoku zgóry (w rzucie poziomym). Koło K' jest rzutem poziomym kuli, punkt O' rzutem poziomym oka, odcinek $\overline{A'B'} = k'$ przedstawia rzut poziomy zarysu istotnego, a odcinek $\overline{A'_s B'_s} = k'_s$ rzut poziomy zarysu pozornego, t. j. rzut poziomy elipsy, podług której pionowa płaszczyzna obrazu (tła) przecina stożek widzenia kuli. Ponieważ płaszczyzna zniknienia nie przecina kuli, więc nie przecina też żadnego koła, przyjętego na kuli — perspektywą zatem tych kół będą elipsy. Perspektywą koła południkowego r, którego płaszczyzna jest równoległa do tła, będzie koło. Jeżeli płaszczyzna zniknienia nie przecina kuli, ani nie jest do niej styczną — a promień, łączący



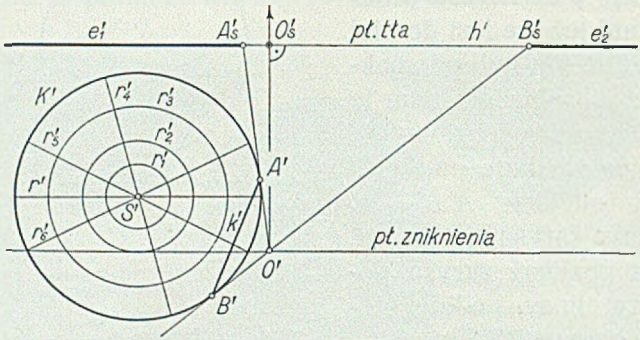
Rys. 268.



Rys. 269.

środek kuli z okiem, jest prostopadły do tła — to perspektywą kuli będzie koło.

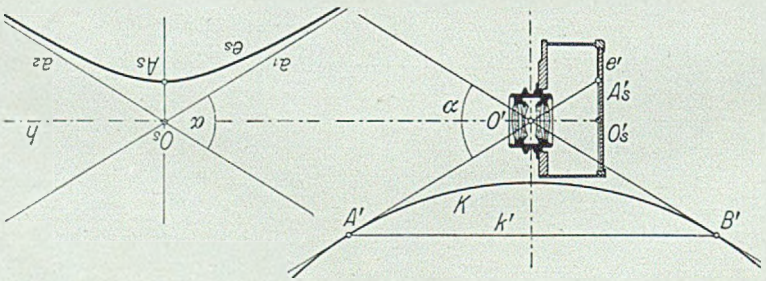
Na rys. 269 widzimy perspektywę dwóch kul: jedną jest koło a drugą — przy lewej krawędzi obrazu — wyraźnie elipsa.



Rys. 270.

Jeżeli położenie kuli względem środka rzutów jest takie, że płaszczyzna zniknienia kulę tę przecina — to wówczas jej zarysem pozornym jest hiperbola.

Rys. 270 uzmysławia nam sytuację w rzucie poziomym. Odcinek $\overline{A'B'} = k'$ jest rzutem poziomym koła, stanowiącego zarys istotny kuli; e_1 i e_2 przedstawiają dwie gałęzie hiperboli k_s, leżące na pionowej płaszczyźnie tła. Gałąź e_2 ma znaczenie jedynie geometryczne; praktycznie wchodzi w grę tylko gałąź e_1. Perspektywami kół, przyjętych na kuli K, będą w tym wypadku elipsy, parabole i hiperbole. Perspektywą koła południkowego r, równoległego do tła, będzie koło. Perspektywami kół, przyjętych na kuli, nie przeciętych płaszczyzną zniknienia (np. koło równoleżni-

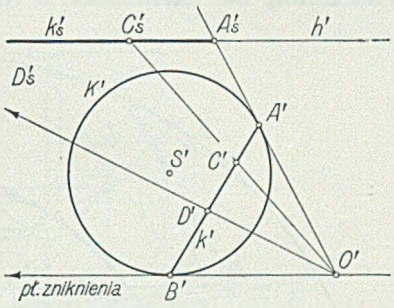


Rys. 271.

kowe r_1), będą elipsy. Perspektywą równoleżnika r_3 lub południka r_4 będzie hiperbola, gdyż płaszczyzna zniknienia przecina każde z tych kół w dwóch punktach. Odwzorowania perspektywiczne równoleżnika r_2 lub południków r_5 i r_6 są parabolami; koła te są bowiem styczne do płaszczyzny zniknienia.

Hiperbola, jako zarys pozorny kuli, zdarza się w praktyce stosunkowo rzadko; wystąpi przy obserwacji lub jako fotogram kulistej kopuły albo kulistego budynku. Zdjęcie fotograficzne powierzchni morza, zro-

bione ze szczytu latarni morskiej lub z aeroplanu, względnie balonu — stanowi również przykład perspektywy kuli, jako hiperboli. Stożek widzenia kuli ziemskiej o wierzchołku, którym jest środek objektywu, przecięty płaszczyzną kliszy fotograficznej, rysuje na jej górnej części odwrócony obraz jednej gałęzi hiperboli. Schematyczny rys. 271 tłumaczy sprawę wystarczająco jasno. Ową gałąź hiperboli e_s nazywać będziemy *horyzontem naturalnym*.



Rys. 272.

Jeżeli kula jest styczną do płaszczyzny zniknienia, to perspektywą jej jest parabola (rys. 272).

b) Przybliżona konstrukcja perspektywy kuli. Polega ona na wykreśleniu zarysu pozornego kuli, jako obwiedni perspektywy jej równoleżników i południków.

Przykład, podany na rys. 273, odnosi się do kuli, która jest styczną do płaszczyzny podstawy w punkcie M i styczną do tła w punkcie P.

Punkt P rzucimy prostopadle na linję podstawy p, a następnie promieniem równym odcinkowi $\overline{PP'}$ zakreślimy z punktu P, jako środka, koło k. Koło to uważać należy za rzut prostokątny kuli na tło. Weźmy pod uwagę równik r oraz równoleżniki r_1, r_2 i r_3 na kuli i znajdźmy ich perspektywę. W tym celu rzućmy je na płaszczyznę podstawy i opiszmy na nich kwadraty. Perspektywą tych kwadratów są trapezy $A'B'C'_sD'_s$, $1'_s2'_s3'_s4'_s$ i $9'_s10'_s11'_s12'_s$; ich wspólny środek M_s jest perspektywą punktu styczności kuli z płaszczyzną podstawy. Elipsa r'_s, wpisana w pierwszy trapez, jest perspektywą rzutu poziomego równika kuli, co jest równoznaczne z perspektywą rzutu poziomego samej kuli. Prosta a_s, wykreślona z punktu M_s prostopadle do linji horyzontu, jest perspektywą osi kuli; punkt N_s jest perspektywą drugiego „bieguna".

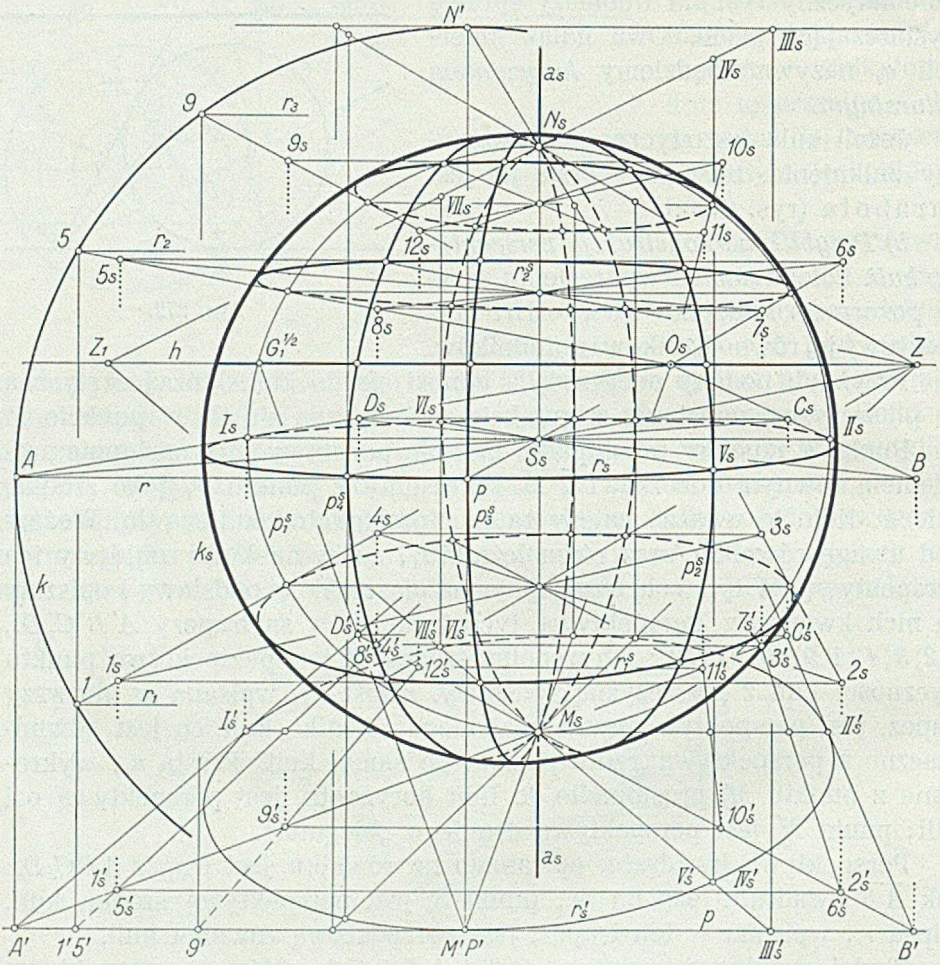
Perspektywą kwadratu, opisanego na równiku, jest trapez ABC_sD_s; bok $\overline{AB}$ kwadratu leży na tle, punkt S_s jest perspektywą środka kuli. Elipsa r_s, wpisana w ten trapez, jest perspektywą równika kuli.

Zkolei rysujemy trapezy $1_s2_s3_s4_s$ i $5_s6_s7_s8_s$, które są perspektywą kwadratów, opisanych na równoleżnikach r_1 i r_2, poczem wrysowujemy w nie elipsy r_1^s i r_2^s. Pierwsza leży pod, druga nad linją horyzontu. Trzeci równoleżnik wyrazi się perspektywicznie, jako elipsa, wpisana w trapez $9_s10_s11_s12_s$.

Co się tyczy południków kuli, to przyjęliśmy ich cztery. Jako pierwszy, przyjęliśmy ten, którego płaszczyzna jest równoległa do tła; jego perspektywą jest koło p_1^s, zakreślone z punktu S_s, jako środka, promieniem, równym odcinkowi $\overline{S_sI_s} = \overline{S_sII_s} = \overline{M_sI_s} = \overline{M_sII_s} = \overline{M_sS_s}$. Perspektywą

innych południków będą elipsy. Aby wykreślić je, postąpimy, jak z równoleżnikami: wykreślimy trapezy, jako perspektywy kwadratów, opisanych na południkach, a następnie w trapezy te wpiszemy elipsy.

Przejdźmy konstrukcję, prowadzącą do wykreślenia elipsy p_2^s, która jest perspektywą południka p_2. Połączmy dowolny punkt Z_1 linji hory-

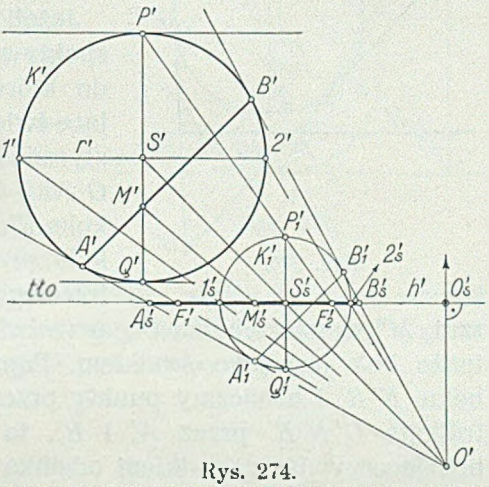


Rys. 273.

zontu z punktem M_s, aż do przecięcia się z linją podstawy p w punkcie III_s'. Kreślimy $III_s' III_s = \overline{M'N'}$ prostopadle do p i punkt III_s łączymy z punktem Z_1. Prosta $Z_1 III_s'$ przecina elipsę r_s' w punktach IV_s' i VII_s', z których prowadzimy prostopadłe do linji horyzontu, aż do przecięcia się z promieniem $Z_1 III_s$. Trapez $IV_s' IV_s VII_s' VII_s$ jest perspektywą kwadratu, opisanego na południku p_2; elipsa p_2^s, wpisana w ten trapez, jest

perspektywą koła p_2. W analogiczny sposób znajdziemy elipsy p_3^s i p_4^s. Obwiednią wykreślonych elips r_s, r_1^s, r_2^s, r_3^s, p_2^s, p_3^s i p_4^s jest elipsa k_s, będąca zarysem pozornym, czyli perspektywą kuli.

50. Dalsze konstrukcje perspektywy kuli. *a)* Wiemy, że perspektywą kuli jest krzywa stożkowa, którą w zależności od położenia kuli względem płaszczyzny zniknienia jest bądź elipsa, względnie koło, bądź hiperbola, bądź też parabola. W ustępie poprzednim wykreśliliśmy zarys pozorny kuli przy pomocy perspektywy jej równoleżników i południków. Metoda geometrycznie ścisła polega na wykreśleniu zarysu pozornego kuli drogą bezpośrednią. Rozwiązanie zadania oprzemy na następującem twierdzeniu: „Punkty styczności kul, wpisanych w stożek obrotowy, z płaszczyzną sieczną, są ogniskami elipsy (hiperboli), podług której płaszczyzna ta przecina stożek“ (Twierdzenie *Dandelain'a*)[1]. Przypomnijmy jeszcze, że miejscem geometrycznem ognisk elips, względnie hiperbol, które otrzymamy, tnąc stożek obrotowy płaszczyznami równoległemi, są dwie proste, przechodzące przez wierzchołek stożka, to wówczas zrozumiemy przebieg konstrukcyj, odnoszących się do bezpośredniej perspektywy kuli.



Rys. 274.

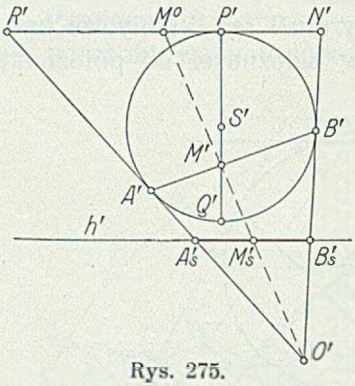
Rzućmy kulę K, o środku S, na pionową płaszczyznę tła z punktu O (rys. 274), przyczem niechaj promień, łączący punkty S i O, ma położenie poziome.

Zarys istotny kuli jest kołem, którego rzut poziomy jest odcinkiem $\overline{A'B'}$; zarysem pozornym kuli jest elipsa, przedstawiona na rys. 274, jako odcinek $\overline{A'_sB'_s}$. Niechaj punkty P' i Q' ograniczają średnicę koła K', prostopadłą do tła; rzuty tych punktów z punktu O' na h', t. j. punkty F'_1 i F'_2, są rzutami poziomemi ognisk elipsy, będącej zarysem pozornym kuli K.

W stożek widzenia kuli K, t. j. w stożek obrotowy, opisany z oka na kuli K, wpisać można dowolną ilość kul, których środki leżą na osi stożka. Wszystkie one mają wspólny zarys pozorny. Weźmy pod uwagę tę kulę K_1, której środek leży na tle, którą zatem tło przecina wzdłuż koła południkowego. Istotnym zarysem tej kuli jest koło, którego rzut

[1]) Patrz autora „Geometrja wykreślna“, wydanie II. ust. 163.

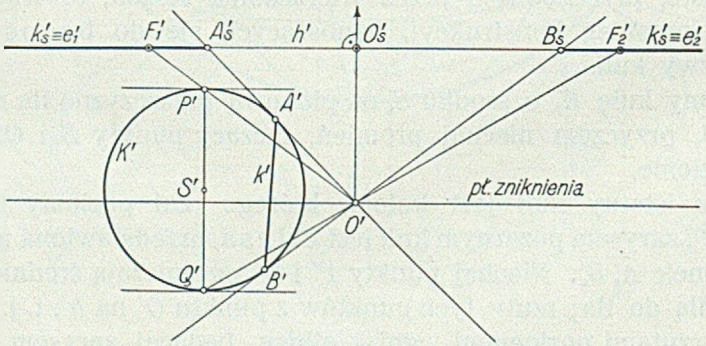
poziomy jest odcinkiem $A_1'B_1'$; odcinek ten jest równoległy do odcinka $A'B'$, który jest, jak wiemy, rzutem poziomym zarysu istotnego kuli K. Zarys pozorny kuli K_1 jest zatem identyczny z zarysem pozornym kuli K, z czego wynika, że perspektywę tej ostatniej znaleźć można, posługując się kulą K_1.



Rys. 275.

Jeżeli znamy ogniska elipsy, będącej perspektywą kuli, to znamy i środek elipsy, do którego odnieść także można następujące twierdzenie geometrji płaskiej: cięciwa styczności $A'B'$ (rys. 275) dwóch boków $O'N'$ i $O'R'$ trójkąta $O'N'R'$, opisanego na kole K', przecina się ze średnicą $P'Q'$ tego koła, przechodzącą przez punkt styczności P' trzeciego boku $N'R'$, w punkcie M', którego rzut M^0 z wierzchołka O', przeciwległego temu trzeciemu bokowi, na tenże bok jest jego środkiem. Poprowadźmy prostą h' równoległe do boku $N'R'$ i oznaczmy punkty przecięcia się jej z pozostałemi bokami trójkąta $O'N'R'$ przez A_s' i B_s', to rzut M_s' środka M^0 odcinka $N'R'$ będzie oczywiście środkiem odcinka $A_s'B_s'$.

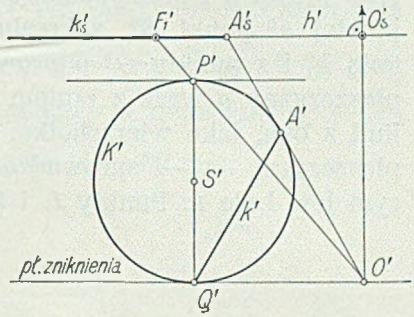
Porównanie rysunków 274 i 275 wykaże ich analogję: cięciwa styczności $A'B'$ przecina średnicę $P'Q'$ w punkcie M'; rzut M_s' tego punktu na prostą h' jest środkiem odcinka $A_s'B_s'$, czyli rzutem poziomym środka elipsy, jako perspektywy kuli.



Rys. 276.

W przypadku, gdy płaszczyzna zniknienia przecina kulę (rys. 276), perspektywą jej jest, jak wiemy, *hiperbola*. Zarys istotny kuli jest oczywiście kołem, które w rzucie poziomym wyraża się odcinkiem $A'B' \equiv k'$. Płaszczyzny równoległe do tła stykają się z kulą w punktach P i Q; rzut tych punktów z oka na tło daje ogniska F_1 i F_2 hiperboli k_s. Ga-

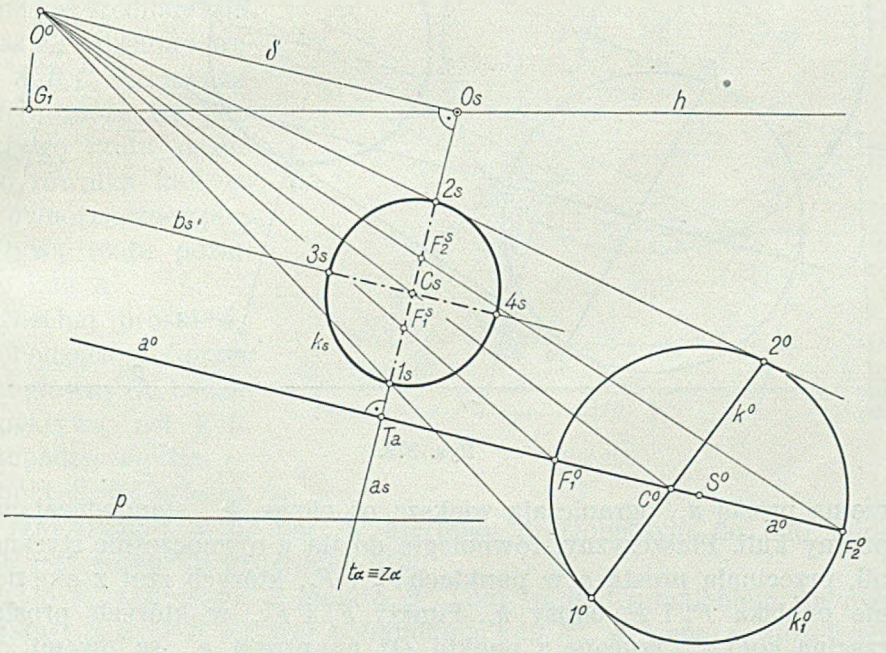
łąż e_2 tej hiperboli ma znaczenie wyłącznie geometryczne; praktycznie wchodzi w grę jedynie część e_1 hiperboli. Rys. 277 przedstawia w rzucie poziomym takie położenie kuli względem płaszczyzny zniknienia, że perspektywą jej jest parabola; kula jest styczną do płaszczyzny zniknienia. Rzut z oka na płaszczyznę tła punktu P, w którym płaszczyzna równoległa do tła styka się z kulą, jest ogniskiem paraboli.



Rys. 277.

b) Przystąpmy do zastosowania powyższych uwag.

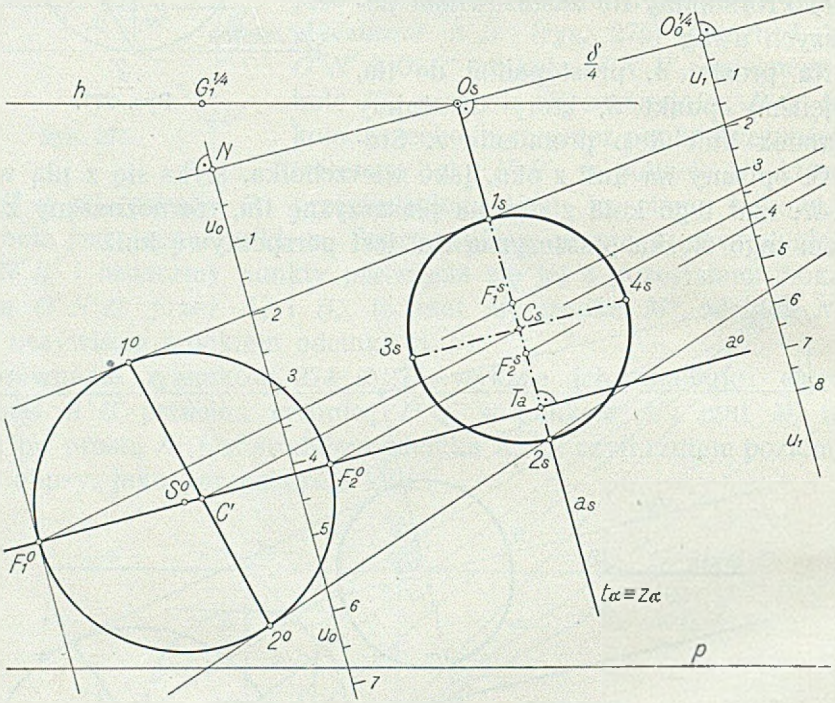
Na prostej a, prostopadłej do tła, przyjęliśmy punkt S, który uważajmy za środek kuli K o promieniu r. Stożek Φ, opisany na kuli z oka, jako wierzchołka, styka się z nią wzdłuż koła k; rzut tego koła z oka na płaszczyznę tła, równoznaczny z przekrojem tego stożka płaszczyzną tła, jest perspektywą kuli.



Rys. 278.

Poprowadźmy przez oko i prostą a płaszczyznę α; przetnie ona kulę w kole k_1, które uważać możemy za rzut na nią — kuli K. Wykonajmy kład płaszczyzny α na tło: oko zajmie położenie punktu O^0

(rys. 278) na prostopadłej, wykreślonej w punkcie głównym O_s do prostej a_s, w odległości równej głębokości tłowej; prosta a padnie na tło, jako prosta a^0, prostopadła w punkcie T_a do prostej a_s. Przyjmijmy na prostej a^0 punkt S^0, zakreślmy z niego, jako środka, promieniem r koło k_1^0 i z punktu O^0 poprowadźmy doń styczne. Otrzymaliśmy kład płaszczyzny α wraz z rzutem na niej kuli i stożka, opisanego na tej kuli z oka, jako wierzchołka. Cięciwa styczności $1^0 2^0$ jest rzutem na płaszczyznę α — sprowadzoną na tło — zarysu istotnego kuli, którym jest koło k. Punkty 1_s i 2_s, w których promienie $O^0 — 1^0$ i $O^0 — 2^0$

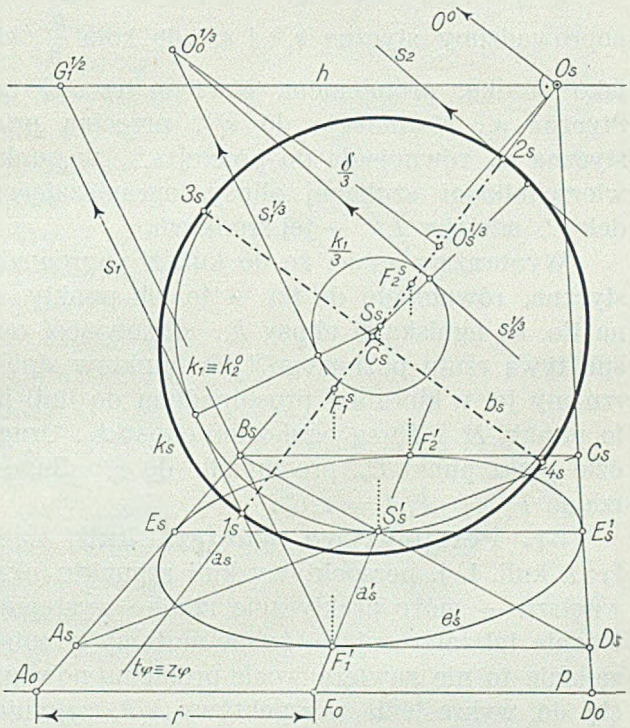


Rys. 279.

przetną prostą a_s, ograniczają większą oś elipsy k_s, stanowiącej zarys pozorny kuli. Płaszczyzny, równoległe do tła a równocześnie styczne do kuli, przecinają prostą a w punktach F_1 i F_2, których rzut z oka na tło daje ogniska F_1^s i F_2^s elipsy k_s. Punkty F_1^0 i F_2^0, w których prosta a^0 przecina koło k_1^0, rzucone z punktu O^0 na prostą a_s, są owemi ogniskami. Środek C_s odcinka $1_s 2_s$ jest środkiem elipsy k_s, przez który wykreślimy prostą b_s, prostopadłą do prostej a_s. Połową osi $1_s 2_s$ zakreślimy z jednego z ognisk łuki, aż do przecięcia się z prostą b_s w punktach 3_s i 4_s. Punkty te ograniczają drugą, krótszą, oś elipsy k_s, która tym sposobem jest wyznaczona.

Jeżeli głębokość tłowa jest tak wielka, że kład O^0 oka znajdzie się poza obrębem rysunku — to wówczas posłużymy się podziałką zbiegu, jak to uczyniliśmy na rys. 279. Gdybyśmy przyjęli, jako jednostkę podziałki, na prostej a_s, 8 *mm*, to jednostką podziałki u_1 będzie $a_1 = \frac{4-1}{4} \cdot 8 = 6$ *mm*. Podziałkę z prostej a_s przesunęliśmy równolegle w położenie u_0 o odległość $\overline{O_s N} = \overline{O_s O_0^{1/3}} = \frac{\delta}{4}$; jednostką jej będzie $a_0 = 10$ *mm*.

c) To samo zadanie, rozwiązane w cośkolwiek odmienny sposób, podaje rys. 280.



Rys. 280.

Wykreślmy perspektywę $A_s B_s C_s D_s$ kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Długość boku kwadratu równa jest średnicy kuli. Elipsa e_s', wpisana w trapez $A_s B_s C_s D_s$, uważana być może za perspektywę rzutu poziomego równika kuli, co jest równoznaczne z perspektywą rzutu poziomego kuli K.

Niechaj prosta a_s, przechodząca przez punkt główny O_s, będzie perspektywą osi kuli, prostopadłej do tła — to punkt S_s tej prostej, jako rzut punktu S_s' na nią, w kierunku prostopadłym do linji horyzontu, jest perspektywą środka kuli.

Koło k_1, zakreślone z punktu S_s, jako środka, promieniem równym odcinkowi $\overline{S_s' E_s} = \overline{S_s' E_s^1}$, jest południkiem kuli K_1, wpisanej w stożek widzenia kuli K, a mającej swój środek na tle. Południk ten jest — jak wiemy — zarazem perspektywą południka kuli K, równoległego do płaszczyzny tła (porównaj rys. 274 i związany z nim tekst). Wiemy, że perspektywa kuli K schodzi się z perspektywą kuli K_1. Wyobraźmy sobie, żeśmy przez oko i prostą a poprowadzili płaszczyznę φ, która przecięła kulę K_1 w kole wielkiem k_2, a następnie wykonali kład tej pła-

szczyzny na tło. Koło k_2 zejdzie się, po dokonanym kładzie, z kołem k_1, promień główny będzie prostopadły do prostej a_s. Ponieważ głębokość tłowa jest znaczna, więc, uważając środek kuli za punkt stały, dokonamy redukcji całego układu, i to do $^1/_3$ części. Operację tę wyobrazić sobie może czytelnik, jako skurczenie się wszystkich odcinków o $^2/_3$ części ich długości. Punkt główny zajmie położenie $O_s^{1/3}$ na promieniu a_s, przyczem $\overline{S_s O_s^{1/3}}$ równe jest trzeciej części odcinka $\overline{S_s O_s}$. W punkcie $O_s^{1/3}$ wykreślimy prostopadłą do prostej a_s, odmierzymy $\overline{O_s^{1/3} O_0^{1/3}} = \frac{\delta}{3}$ i z punktu $O_0^{1/3}$ poprowadzimy styczne $s_1^{1/3}$ i $s_2^{1/3}$ do koła $\frac{k_1}{3}$, zakreślonego z punktu S_s, jako środka, promieniem, równym trzeciej części promienia koła k_1. Styczna s_1, równoległa do $s_1^{1/3}$, przecina promień a_s w punkcie 1_s; styczna s_2, równoległa do prostej $s_2^{1/3}$, w punkcie 2_s. Punkty 1_s i 2_s są wierzchołkami szukanej elipsy, ograniczającemi jej oś większą, środek C_s odcinka $\overline{1_s 2_s}$ — jej środkiem.

Wyobraźmy sobie, że do kuli K poprowadziliśmy dwie płaszczyzny styczne, równoległe do tła — to ich punkty styczności, rzucone z oka na tło, są ogniskami elipsy k_s, stanowiącej zarys pozorny kuli K. Perspektywą rzutu poziomego tych punktów styczności są punkty F_1' i F_2'; rzućmy je, w kierunku prostopadłym do linji horyzontu, na prostą a_s — to punkty F_1^s i F_2^s są ogniskami elipsy k_s. Druga, krótsza oś elipsy przejdzie przez punkt C_s, prostopadle do a_s; długość jej otrzymamy, odmierzając $\overline{F_1^s 3_s} = \overline{F_1^s 4_s} = \overline{1_s C_s}$.

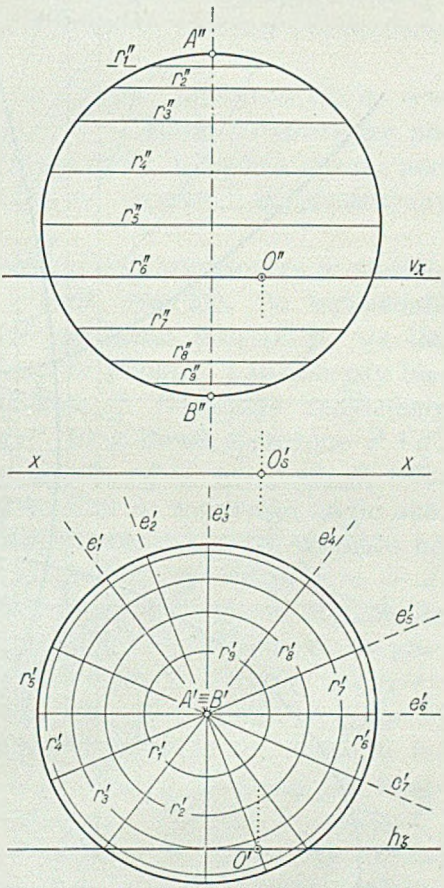
51. Perspektywa wnętrza kuli. Zadanie perspektywy wnętrza kuli, t. j. perspektywy kuli z punktu (oka), znajdującego się w jej wnętrzu — może praktycznie rzadko występujące — jest jednak teoretycznie tak interesujące, że nie możemy go tutaj pominąć. W istocie swej zadanie to nie zawiera wcale problemu nowego i praktycznie sprowadza się do wykreślenia perspektywy kół, zajmujących rozmaite położenia względem tła i płaszczyzny zniknienia.

Miejscem geometrycznem rzutów perspektywicznych wszystkich punktów kuli z oka, znajdującego się wewnątrz tej kuli, jest płaszczyzna tła; punktom koła, podług którego płaszczyzna zniknienia przecina kulę, odpowiedzą perspektywicznie punkty niewłaściwe płaszczyzny tła. Tak pojęta perspektywa kuli ma znaczenie czysto teoretyczne.

Aby zagadnieniu perspektywy wnętrza kuli nadać charakter mniej oderwany, przyjmijmy na wewnętrznej powierzchni kuli — pojętej materjalnie — szereg równoleżników r_1, r_2, ... r_9, których środki leżą na osi $\overline{AB}$ kuli, oraz szereg południków e_1, e_2, ... e_7 (rys. 281). Niechaj środek rzutów (oko) O znajduje się wewnątrz kuli na płaszczyźnie równoleżnika r_6. Rys. 281 przedstawia nam sprawę w rzutach prostokątnych na płaszczyznę poziomą i pionową. Jeżeli tę ostatnią płaszczyznę przyj-

miemy, jako tło, to pozioma płaszczyzna χ, poprowadzona przez oko, będzie płaszczyzną horyzontu, zaś równoległa do tła płaszczyzna ζ — płaszczyzną zniknienia.

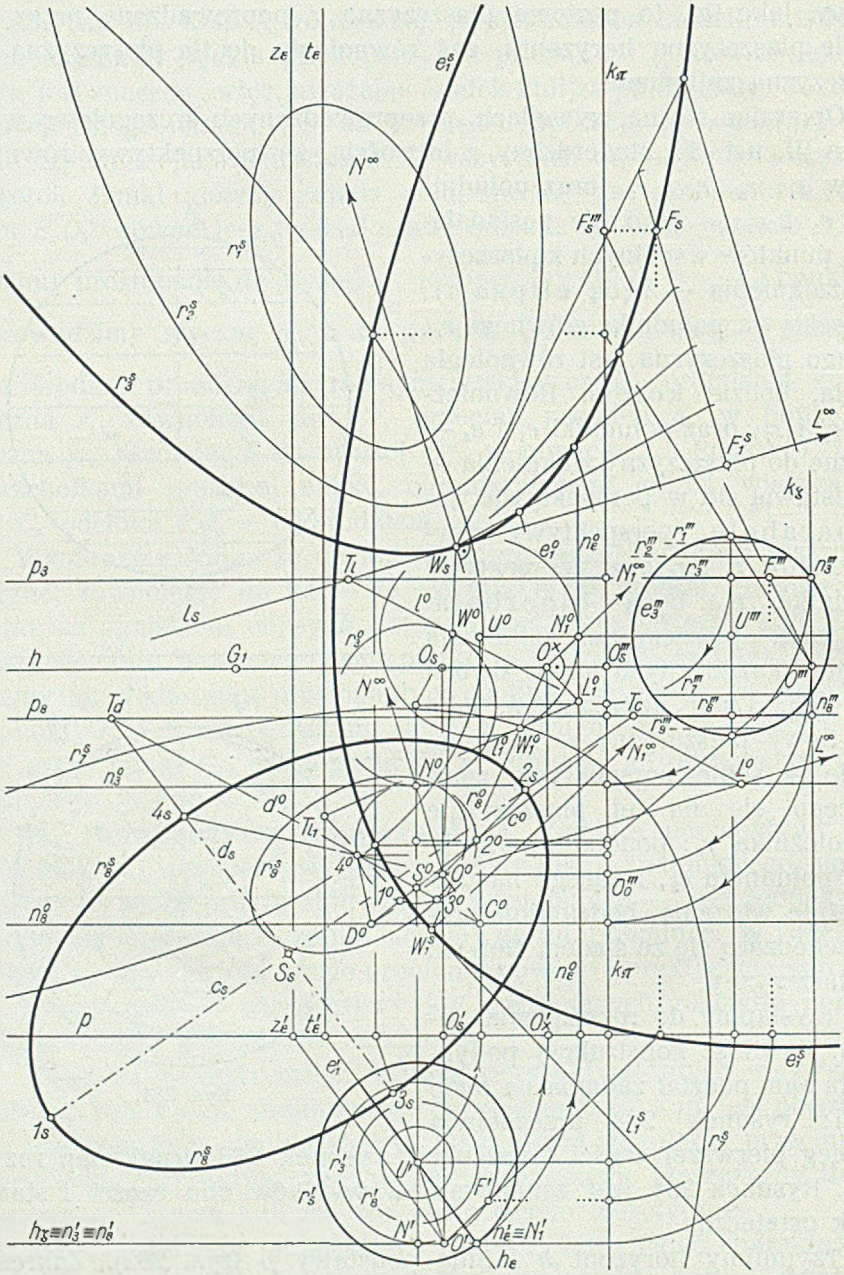
Opierając się na wywodach, przeprowadzonych szczegółowo w rozdziale III, ust. 33, stwierdzimy z łatwością, że perspektywy równoleżników r_1, r_2, r_8 i r_9, oraz południków e_5 i e_7 — jako nie posiadających punktów wspólnych z płaszczyzną zniknienia — będą elipsami; perspektywa południka głównego e_6, którego płaszczyzna jest równoległa do tła, będzie kołem. Równoleżniki r_3 i r_7, oraz południki e_1 i e_4 — styczne do płaszczyzny zniknienia — przedstawią się w perspektywie, jako parabole; perspektywy równoleżników r_4 i r_5 oraz perspektywa południka e_3 będą hiperbolami, gdyż płaszczyzna zniknienia przecina każde z tych kół w dwóch punktach. Linja horyzontu h, jako ślad tłowy płaszczyzny χ, zawierać będzie w sobie perspektywę znajdującego się na tej płaszczyźnie równoleżnika r_6; podobnie perspektywa południka e_2, leżącego na płaszczyźnie widzenia, będzie linją prostą, schodzącą się ze śladem tłowym tej płaszczyzny.



Rys. 281.

Przystąpmy do rozwiązania zadania. Zawiłość konstrukcyj podyktowała nam podział zadania na dwie części: rysunek 282 przedstawia przebieg pierwszej części konstrukcji, rysunek 283 drugi etap rozwiązania. Rysunek 284 jest zsumowaniem wyników obu części i stanowi wynik ostateczny.

Przyjmijmy horyzont h i linję podstawy p (rys. 282). Zakreślmy z punktu U' koło r'_5 i uważajmy je za rzut poziomy kuli, punkt zaś O', obrany „wewnątrz“ koła r'_5, za rzut poziomy oka. Rzut prostokątny O'_s punktu O' na linję horyzontu będzie punktem głównym, punkt O'_s rzutem poziomym punktu głównego na płaszczyznę podstawy, a odcinek $\overline{O'O'_s}$ — głębokością tłową. Płaszczyzna ζ, poprowadzona przez



Rys. 282.

oko równolegle do tła, jest płaszczyzną zniknienia; jej ślad poziomy jest prostą h_φ, przechodzącą przez punkt O' równolegle do linji podstawy p.

Przyjmijmy boczną płaszczyznę rzutów, prostopadłą do płaszczyzny tła i do płaszczyzny poziomej; rzućmy na nią prostokątnie kulę i oko i sprowadźmy tę płaszczyznę następnie na tło. Śladem tłowym tej płaszczyzny (a równocześnie „śladem bocznym“ tła) jest prosta k_{π}, prostopadła do linji horyzontu; punkt O''' jest rzutem bocznym oka, a koło e_3''', zakreślone z punktu U''', jako środka, promieniem równym promieniowi koła r_5', rzutem bocznym kuli.

Zadanie, jakie postawiliśmy sobie na rys. 282, ogranicza się do wykreślenia perspektywy równoleżników r_3 i r_8, a nadto perspektywy południka e_1. Wiemy, że perspektywa równoleżnika r_8 będzie elipsą, perspektywy zaś równoleżnika r_3 i południka e_1, stycznych do płaszczyzny zniknienia — parabolami.

Elipsę r_8^s, jako perspektywę równoleżnika r_8, otrzymamy w sposób, omówiony szczegółowo w rozdz. III, ust. 39, rys. 222. Po wykonaniu kładu płaszczyzny równoleżnika r_8, około jej śladu tłowego p_8, na tło, przyjmiemy na prostej zniknienia n_8^0 dowolny punkt C^0 i znajdziemy biegunową c^0 tego punktu ze względu na koło r_8^0. Następnie znajdziemy biegun sprzężony D^0 i jego biegunową d^0. Biegunowe sprzężone c^0 i d^0, przecinające się w punkcie S^0, przetną prostą p_8 w punktach T_c i T_d. Obrót płaszczyzny horyzontu na tło, około linji h, sprowadzi na tło oko, jako punkt O^0. Parze biegunowych sprzężonych c^0 i d^0 ze względu na koło r_8^0, odpowie perspektywicznie para średnic sprzężonych c_s i d_s elipsy r_8^s. Pierwsza z nich przejdzie przez punkt T_c i będzie równoległa do promienia O^0D^0, druga przejdzie przez punkt T_d, równolegle do prostej O^0C^0. Średnice c_s i d_s przetną się w punkcie S_s, środku elipsy r_8^s. Punkt ten leży na promieniu O^0S^0. Biegunowa c^0 przecina koło r_8^0 w punktach 1^0 i 2^0; punkty te rzucimy z punktu O^0 na średnicę c_s, otrzymując ograniczające ją punkty 1_s i 2_s. W analogiczny sposób znajdziemy punkty 3_s i 4_s, ograniczające średnicę d_s, rzucając z punktu O^0 punkty 3^0 i 4^0 przecięcia się biegunowej d^0 z kołem r_8^0. Na rys. 282 wyznaczyliśmy w powyższy sposób punkty 2_s i 4_s, a dwa dalsze punkty otrzymaliśmy, odmierzając $\overline{S_s1_s} = \overline{S_s2_s}$ i $\overline{S_s3_s} = \overline{S_s4_s}$.

Zkolei przystąpimy do wykreślenia p a r a b o l i, jako perspektywy równoleżnika r_3. W tym celu wykonamy kład płaszczyzny tego równoleżnika, około podstawy p_3, na tło. Po dokonanym kładzie równoleżnik r_3, styczny w punkcie N do śladu zniknienia n_3, zajął położenie koła r_3^0, stycznego w punkcie N^0 do prostej n_3^0. Oko — obrócone około linji horyzontu h — padło na tło w punkcie O^0. Promień O^0N^0 określa — jak wiadomo z rozdz. III, ust. 33, pkt. d — punkt niewłaściwy N^∞ stożkowej, będącej perspektywą koła r_3. Punkt N^∞ nazywamy *środkiem* paraboli, zaś proste przez niego przechodzące, a więc równoległe, jej *średnicami*. Styczna paraboli, p r o s t o p a d ł a do kierunku średnic, nazywa się *styczną*

wierzchołkową, a jej punkt styczności — *wierzchołkiem* paraboli. Średnica, przechodząca przez wierzchołek paraboli, jest jej *osią*.

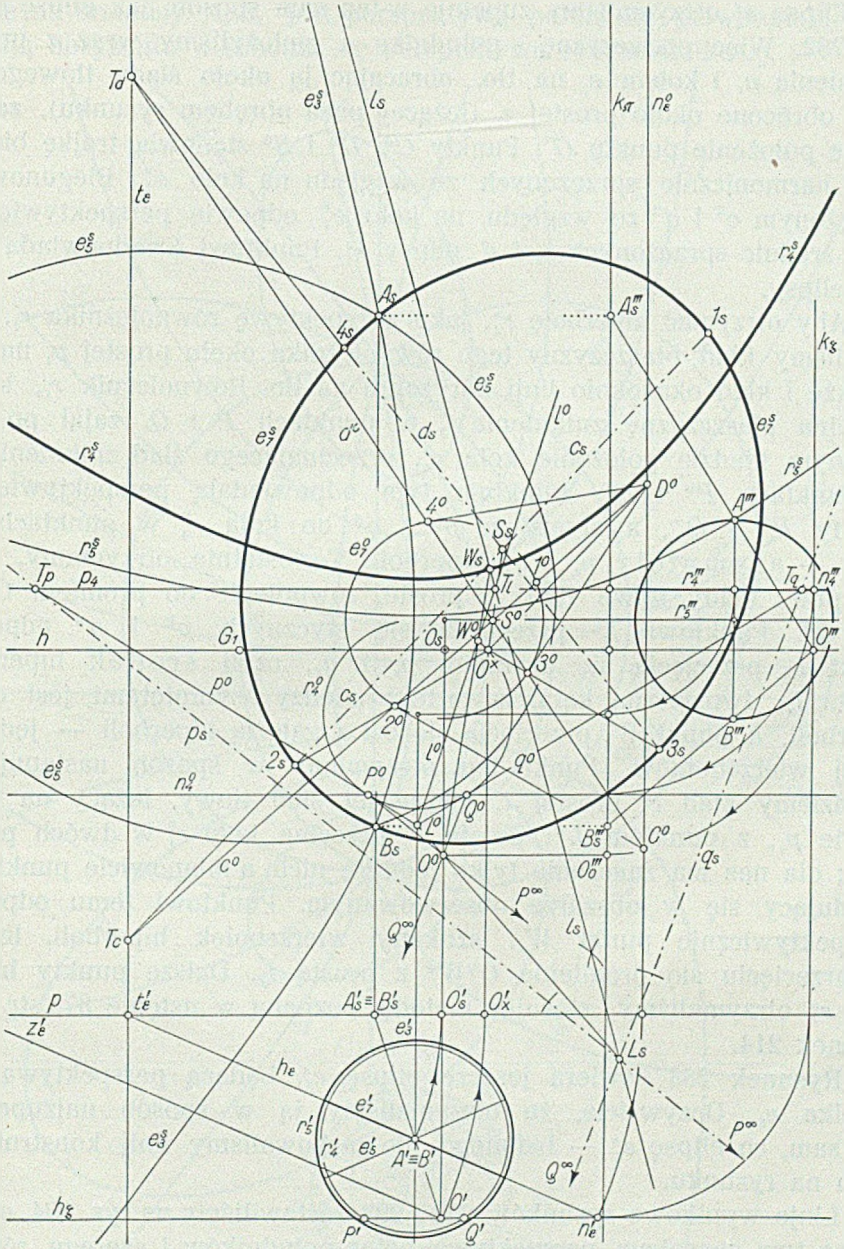
Poprowadźmy z punktu O^0 promień prostopadły do kierunku O^0N^0 średnic paraboli. Promień ten przetnie ślad zniknienia n_3^0 w punkcie L^0; stycznej l^0, poprowadzonej z punktu L^0 do koła r_3^0, odpowie, jako jej perspektywa, styczna do paraboli, równoległa do promienia O^0L^0, a prostopadła do kierunku średnic — czyli styczna wierzchołkowa. Będzie nią prosta l_s, przechodząca przez ślad tłowy T_l, równolegle do kierunku O^0L^0. Według podanych wyżej określeń, punkt styczności W_s, odpowiadający perspektywicznie punktowi styczności W^0, jest wierzchołkiem, a prosta W_sN^∞, prostopadła do prostej l_s, osią paraboli.

Do wyznaczenia paraboli potrzeba, prócz osi i wierzchołka, jednego jej punktu. Będzie nim perspektywa F_s dowolnego punktu F równoleżnika r_3. Znaleźliśmy ją, jako punkt przebicia się promienia widzenia OF z tłem π, w sposób elementarny, uwidoczniony na rysunku. Przyjąwszy punkt F' na kole r_3', znajdziemy F'''; punkt F' rzucimy z punktu O' na prostą p, a punkt F''' z punktu O''' na prostą k_π. Punkt F_s będzie przecięciem się prostych odnoszących, wykreślonych prostopadle do prostych p i k_π.

Dalsze punkty paraboli znajdziemy w sposób, którego uzasadnienie znajdzie czytelnik w książce autora p. t. „Geometrja wykreślna“, wyd. II, Lwów 1922, str. 247, rys. 379. Kreślimy mianowicie przez punkt F_s prostą, równoległą do osi paraboli, dzielimy odcinek, zawarty między punktami F_s i F_1^s, np. na cztery części i punkty podziału łączymy z wierzchołkiem W_s paraboli. Otrzymany na stycznej wierzchołkowej l_s odcinek $\overline{W_sF_1^s}$ dzielimy na tę samą, co poprzednio, ilość równych części — więc na cztery — i przez punkty podziału kreślimy równoległe do osi paraboli. Promienie pęku o wierzchołku W_s i pęku prostych równoległych przetną się w punktach paraboli r_3^s.

Perspektywą południka e_1 będzie parabola e_1^s, której konstrukcja pokrywa się z przeprowadzoną wyżej. Płaszczyznę południka e_1 obróciliśmy około jej śladu tłowego t_ε na tło. Południk e_1 zajął położenie koła e_1^0, stycznego w punkcie N_1^0 do prostej zniknienia $n_\varepsilon{}^0$. Oko, obrócone około śladu zbiegu z_ε, padło na tło w punkcie $O^\times$. Promień, poprowadzony z punktu $O^\times$ prostopadle do kierunku $O^\times N_1^\infty$, przecina ślad zniknienia w punkcie L_1^0; stycznej l_1^0, wykreślonej z punktu L_1^0 do koła e_1^0, odpowie perspektywicznie styczna wierzchołkowa l_1^s paraboli, zaś punktowi styczności W_1^0 — wierzchołek paraboli W_1^s. Prosta $W_1^sN_1^\infty$ jest osią paraboli.

Na rys. 282 zamieściliśmy jeszcze elipsy r_1^s, r_2^s i r_0^s, jako perspektywy odpowiednich równoleżników, jednak bez zachowania linij konstrukcyjnych.



Rys. 283.

Rys. 283 zawiera konstrukcję elipsy e_7^s, jako perspektywy południka e_7, i konstrukcję hiperboli r_4^s, jako perspektywy równoleżnika r_4 kuli.

Elipsę e_7^s otrzymaliśmy zupełnie w ten sam sposób, jak elipsę r_8^s na rys. 282. Więc płaszczyznę ε południka e_7 położyliśmy wraz z prostą zniknienia n_t i kołem e_7 na tło, obracając ją około śladu tłowego t_t. Oko, obrócone około prostej z_t (leżącej poza obrębem rysunku), zajęło na tle położenie punktu $O^\times$. Punkty C^0, D^0 i S^0 stanowią trójkę biegunów harmonicznie sprzężonych ze względu na koło e_7^0. Biegunowym sprzężonym c^0 i d^0 ze względu na koło e_7^0 odpowie perspektywicznie para średnic sprzężonych c_s i d_s elipsy e_7^s. Punktowi S^0 odpowiada środek elipsy.

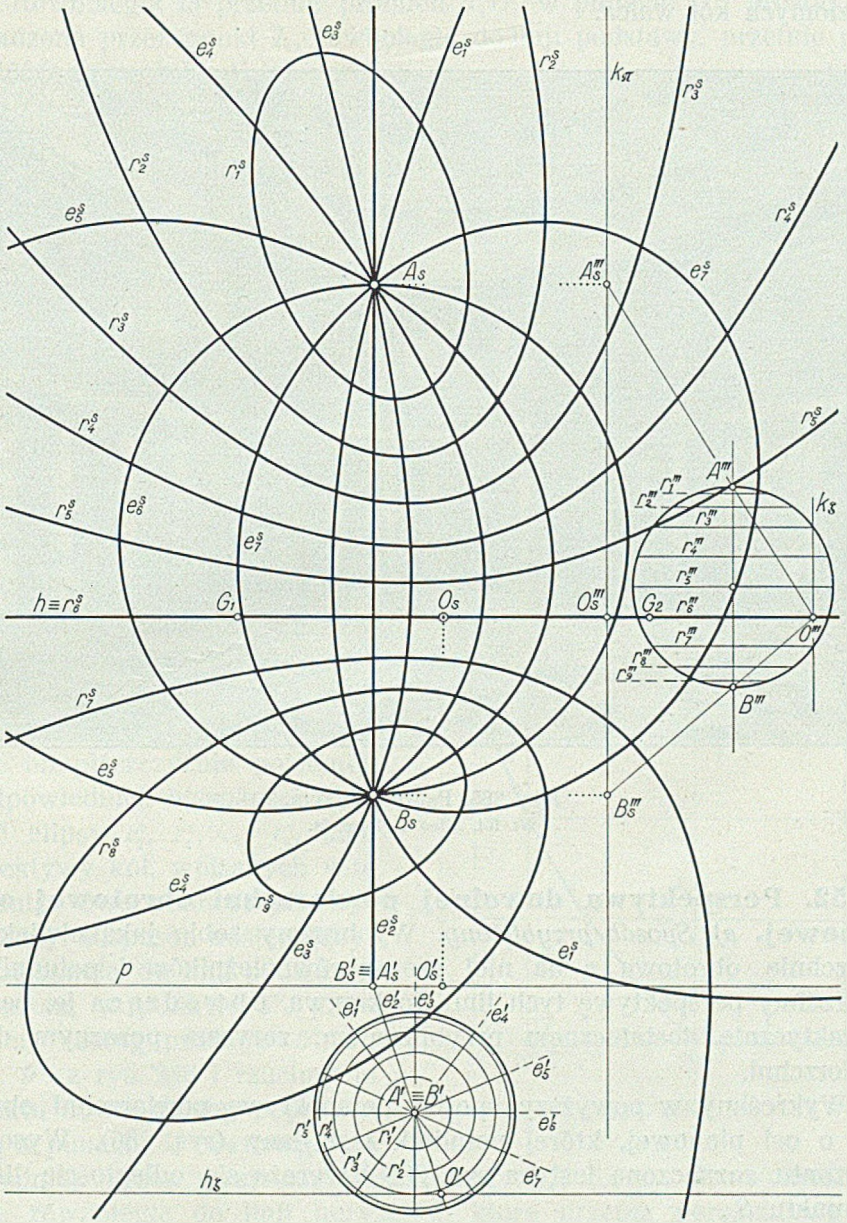
Aby otrzymać hiperbolę r_4^s, jako perspektywę równoleżnika r_4, wykonaliśmy kład płaszczyzny tego równoleżnika około prostej p_4 na tło, a także i kład oka około linji horyzontu na tło. Równoleżnik r_4, który przecina płaszczyznę zniknienia ζ w punktach P i Q, zajął po dokonanym kładzie położenie koła r_4^0, przecinającego ślad zniknienia n_4^0 w punktach P^0 i Q^0. Punktom tym odpowiadają perspektywicznie punkty P^∞ i Q^∞, a stycznym p^0 i q^0 do koła r_4^0 w punktach P^0 i Q^0 — asymptoty p_s i q_s hiperboli. Te ostatnie otrzymamy, kreśląc przez ślady tłowe T_p i T_q proste, równoległe do promieni O^0P^0 i O^0Q^0. Punktowi L^0 przecięcia się stycznych p^0 i q^0 odpowie punkt L_s przecięcia się asymptot p_s i q_s, czyli środek hiperboli. Prosta l_s, dwusieczna kąta, zawartego między asymptotami, jest osią hiperboli, a punkt W_s przecięcia się osi z gałęzią hiperboli — jednym z jej wierzchołków. Punkt ten otrzymamy w sposób następujący: znajdziemy kład l^0 prostej l, łącząc jej ślad tłowy, leżący na podstawie p_1, z punktem L^0; prosta l^0 przecina koło r_4^0 w dwóch punktach; dla nas ma znaczenie tylko jeden z nich, a mianowicie punkt W^0, znajdujący się w obszarze obserwowanym. Punktowi temu odpowie perspektywicznie punkt W_s, szukany wierzchołek hiperboli, leżący na przecięciu się promienia O^0W^0 z prostą l_s. Dalsze punkty hiperboli r_4^s otrzymaliśmy, stosując metodę, poznaną w ustępie 37, str. 155, rysunek 214.

Rysunek 283 zawiera jeszcze elipsę e_5^s, będącą perspektywą południka e_5. Oczywiście, że otrzymaliśmy ją w sposób najzupełniej ten sam, co elipsę e_7^s — i dlatego nie zachowaliśmy linij konstrukcyjnych na rysunku.

Linje wynikowe rysunków 282 i 283 zestawiliśmy na rys. 284, otrzymując tym sposobem perspektywę pęku południków i szeregu równoleżników kuli z punktu, znajdującego się „wewnątrz“ kuli. Perspektywy A_s i B_s biegunów A i B kuli otrzymamy, jako punkty przebicia się promieni OA i OB z płaszczyzną tła π.

Odcinek $\overline{A_sB_s}$ jest perspektywą osi kuli a prosta A_sB_s perspektywą południka e_2, leżącego na płaszczyźnie widzenia OAB. Koło e_6^s, zakre-

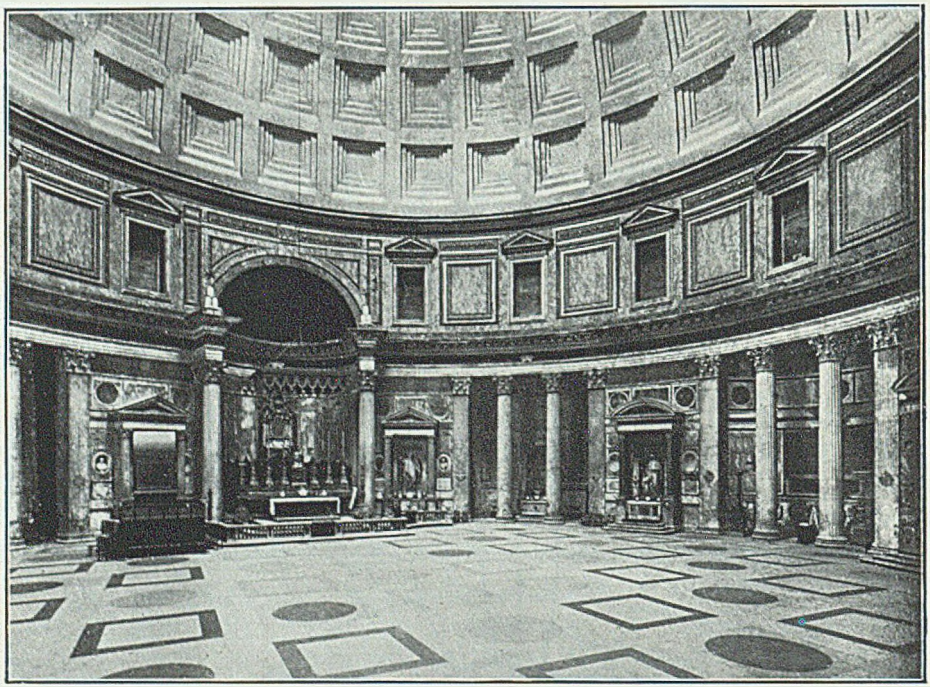
ślone na średnicy $\overline{A_s B_s}$, jest perspektywą południka głównego e_0 kuli; z linją horyzontu h schodzi się perspektywa równoleżnika r_0.



Rys. 284.

Jako praktyczną ilustrację rozpatrzonego zagadnienia, przyjąć możemy z pewnem przybliżeniem fotogram rys. 285, przedstawiający wnę-

trze Panteonu w Rzymie. Dolna część wnętrza jest walcem. Na rysunku występują hiperbole, jako perspektywy równoleżników wnętrza kopuły i poziomych kół walca.



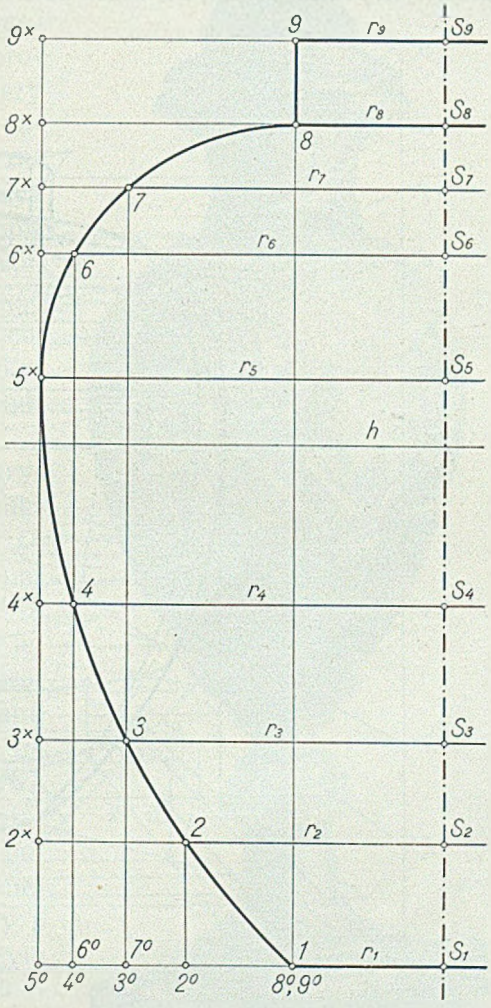
Rys. 285. Panteon, Rzym.
Wł. fot. Alinari, Florencja.

52. Perspektywa dowolnej powierzchni obrotowej o osi pionowej. *a) Sposób przybliżony.* Wyobraźmy sobie jakąkolwiek powierzchnię obrotową a na niej szereg równoleżników i południków. Wykreślmy perspektywę tych linij, to krzywa, o b w o d z ą c a je, będzie, z praktycznie dostatecznem przybliżeniem, zarysem pozornym danej powierzchni.

Wykreślmy w powyższy sposób perspektywę powierzchni obrotowej, o osi pionowej, której południk jest dany (rys. 286). Wysokość horyzontu zaznaczona jest na rys. 286 i wyraża się odległością linji h od punktu S_1.

Uwzględniając tę wysokość, wykreślmy proste p i h (rys. 287), a na tej ostatniej przyjmijmy punkt główny O_s i punkt połowy głębokości $G_1^{1/2}$. Obierzmy na linji podstawy p punkt S_1^0, odmierzmy $\overline{S_1^0 1^0} = r_1$, $\overline{S_1^0 2^0} = r_2$, ... $\overline{S_1^0 5^0} = r_5 = \overline{S_1^0 5_1^0}$ i połączmy punkty S_1^0, 1^0, 2^0, ... 5^0, 5_1^0 z punktem O_s,

a punkt I_s, przyjęty na promieniu $S_1^0 O_s$, z punktem $G_1^{1/2}$. Prosta $I_s G_1^{1/2}$ przetnie promień $5^0 O_s$ w punkcie B_s', przez który wykreślimy równoległą do p. Równoległa ta przetnie promień $5_1^0 O_s$ w punkcie C_s'; prosta, poprowadzona przez punkt I_s, równolegle do linji podstawy, przetnie promień $5^0 O_s$ w punkcie A_s', zaś promień $5_1^0 O_s$ w punkcie D_s'. Proste $A_s' C_s'$ i $B_s' D_s'$ przetną się w punkcie S_1^s promienia $S_1^0 O_s$. Punkt ten jest perspektywą środka koła r_1, stanowiącego podstawę powierzchni. Trapez $A_s' B_s' C_s' D_s'$ jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole równikowem r_5, rzuconem prostokątnie na płaszczyznę poziomą. Cztery dalsze współśrodkowe trapezy odnoszą się do równoleżników r_4 i r_6, r_3 i r_7, r_2, r_1 i r_8 względnie r_9, rzuconych na płaszczyznę podstawy.

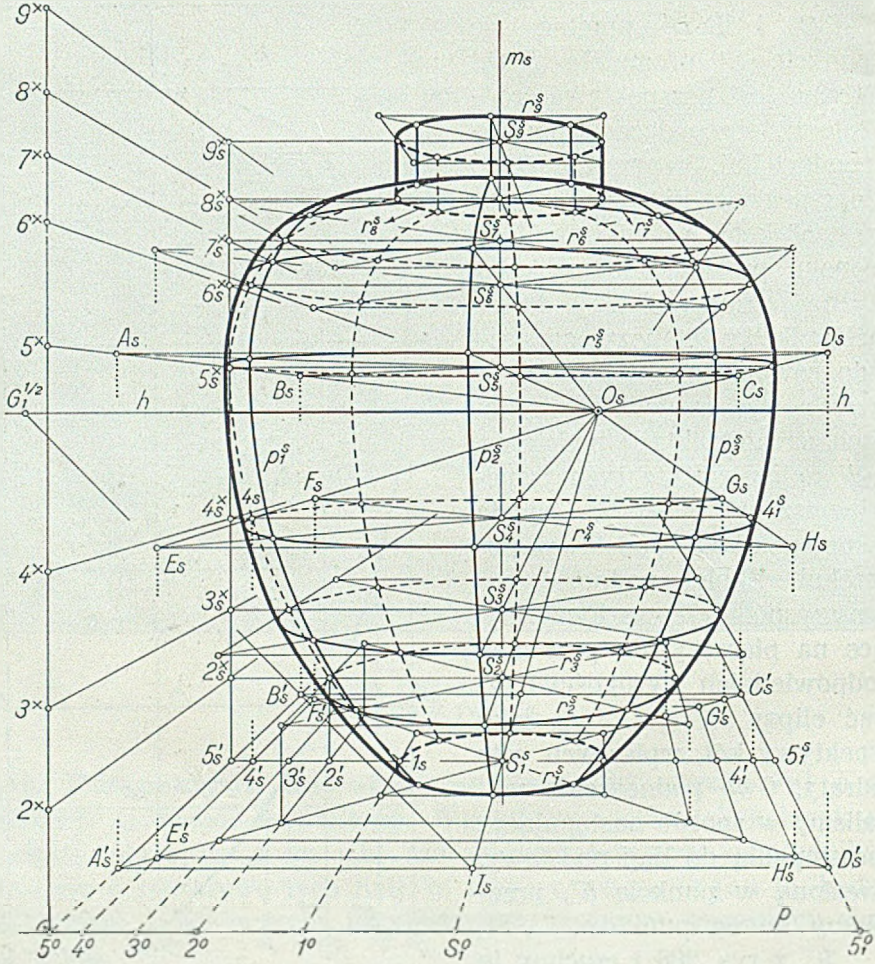


Rys. 286.

W najmniejszy z tych trapezów wpiszemy elipsę r_1^s; będzie ona perspektywą podstawy powierzchni. Zkolei podnosić będziemy współśrodkowe kwadraty, leżące na płaszczyźnie poziomej, do odpowiednich wysokości i rysować elipsy r_2^s, r_3^s, ... r_9^s, jako perspektywy kół, wpisanych w te kwadraty. Owo podnoszenie wykonaliśmy w sposób następujący: na prostopadłą do linji podstawy, wykreśloną w punkcie 5^0, przeniesiemy szereg punktów 5^0, $2^\times$, $3^\times$, ... $9^\times$ z rys. 286 i rzucimy je z punktu O_s na prostą, poprowadzoną w punkcie $5_s'$ równolegle do poprzedniej. Przez otrzymane tam punkty $2_s^\times$, $3_s^\times$, ... $9_s^\times$ wykreślimy proste równoległe do linji horyzontu, które przetną perspektywę m_s osi powierzchni w punktach S_2^s, S_3^s, ... S_9^s. Punkty te, które są perspektywą środków kół równoleżnikowych, połączymy z punktem głównym O_s.

Omówmy konstrukcję perspektywy równoleżnika np. r_4^s; perspek-

tywę innych otrzymamy w sposób analogiczny. Trapez $E_s' F_s' G_s' H_s'$ jest perspektywą rzutu poziomego kwadratu, opisanego na kole r_4. Punkty $4_s'$ i $4_1'$ rzucimy prostopadle na prostą, przechodzącą przez punkt S_4^s równolegle do linji horyzontu. Otrzymane punkty 4_s i 4_1^s połączymy z punktem głównym promieniami, na które rzucimy punkty $E_s' F_s' G_s'$ i H_s'. Otrzymamy



Rys. 287.

trapez $E_s F_s G_s H_s$, w który wrysujemy elipsę r_4^s. Podobnie otrzymamy elipsy r_2^s, r_3^s, ... r_9^s.

Płaszczyzny, przechodzące przez oś powierzchni, przecinają równoleżniki w punktach, których miejscami geometrycznemi są południki. Jeden z tych południków leży na płaszczyźnie równoległej do tła; jego perspektywą jest linja, przechodząca przez punkty 1_s, 4_s i 4_1^s, która jest

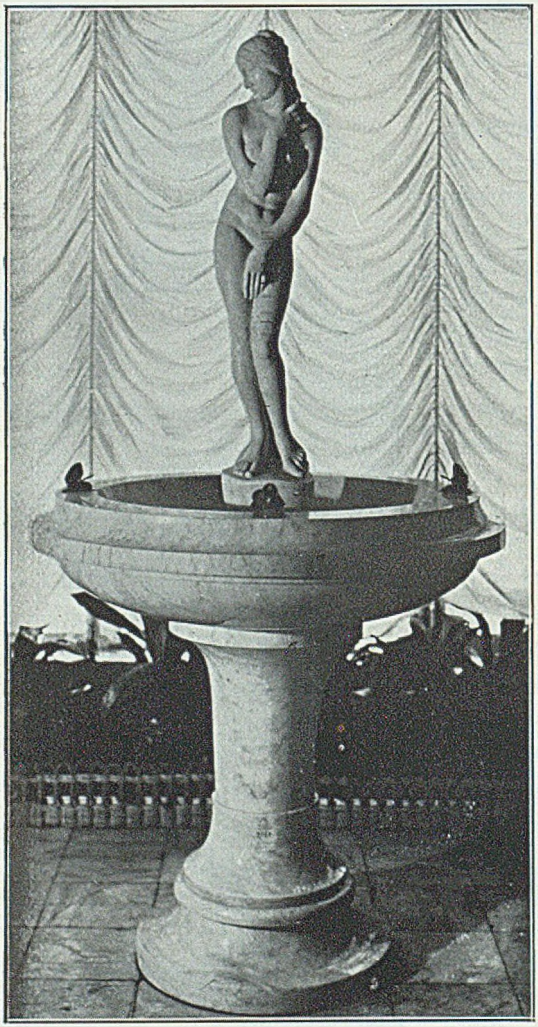
podobną, w znaczeniu geometrycznem, do południka powierzchni, danego na rysunku 286. Linja krzywa, opisana na otrzymanych równoleżnikach i południkach, czyli ich obwiednia, stanowi zarys pozorny powierzchni obrotowej.

b) Inny, ogólniejszy sposób rysowania perspektywy powierzchni obrotowej, geometrycznie poprawniejszy i ściślejszy, polega na wykreśleniu zarysu istotnego a następnie dopiero zarysu pozornego powierzchni. Zarys istotny, t. j. linję styczności stożka, opisanego na powierzchni obrotowej z oka, jako wierzchołka, otrzymamy, stosując metodę stożków normalnych. W istocie swej zadanie sprowadza się do kilkakrotnego powtórzenia zadania, przedstawionego na rys. 260.

Przyjmijmy linję horyzontu h (rysunek 290), linję podstawy p, punkt główny O_s, punkty głębokości G_1 i G_2 i prostą a_s, jako perspektywę osi powierzchni. Poprowadźmy przez oś a i oko płaszczyznę φ i wykonajmy jej kład na tło. Oko padnie, po przeprowadzonym kładzie, na linję horyzontu, jako punkt O^0. Uważajmy przyjęty na prostej a_s punkt C_2^s za perspektywę środka koła równoleżnikowego r, stanowiącego podstawę powierzchni, i połączmy go z punktem głównym promieniem, który przetnie linję podstawy p w punkcie C_2^0. Wykreślmy w tym punkcie prostopadłą b^0 do linji podstawy. Po obrocie płaszczyzny horyzontu na tło oko zajmie położenie punktu $O^\times$. Promień $\overline{O^\times C_2^s}$ przetnie prostą b^0 w punkcie $C_2^\times$; łuk koła, zakreślony z punktu C_2^0, jako środka, promieniem $\overline{C_2^0 C_2^\times}$, przetnie linję podstawy w punkcie C_2. Prosta a^0, prostopadła w punkcie C_2 do linji podstawy, jest osią powierzchni obrotowej, sprowadzoną na tło wraz z płaszczyzną α.

Rys. 288.

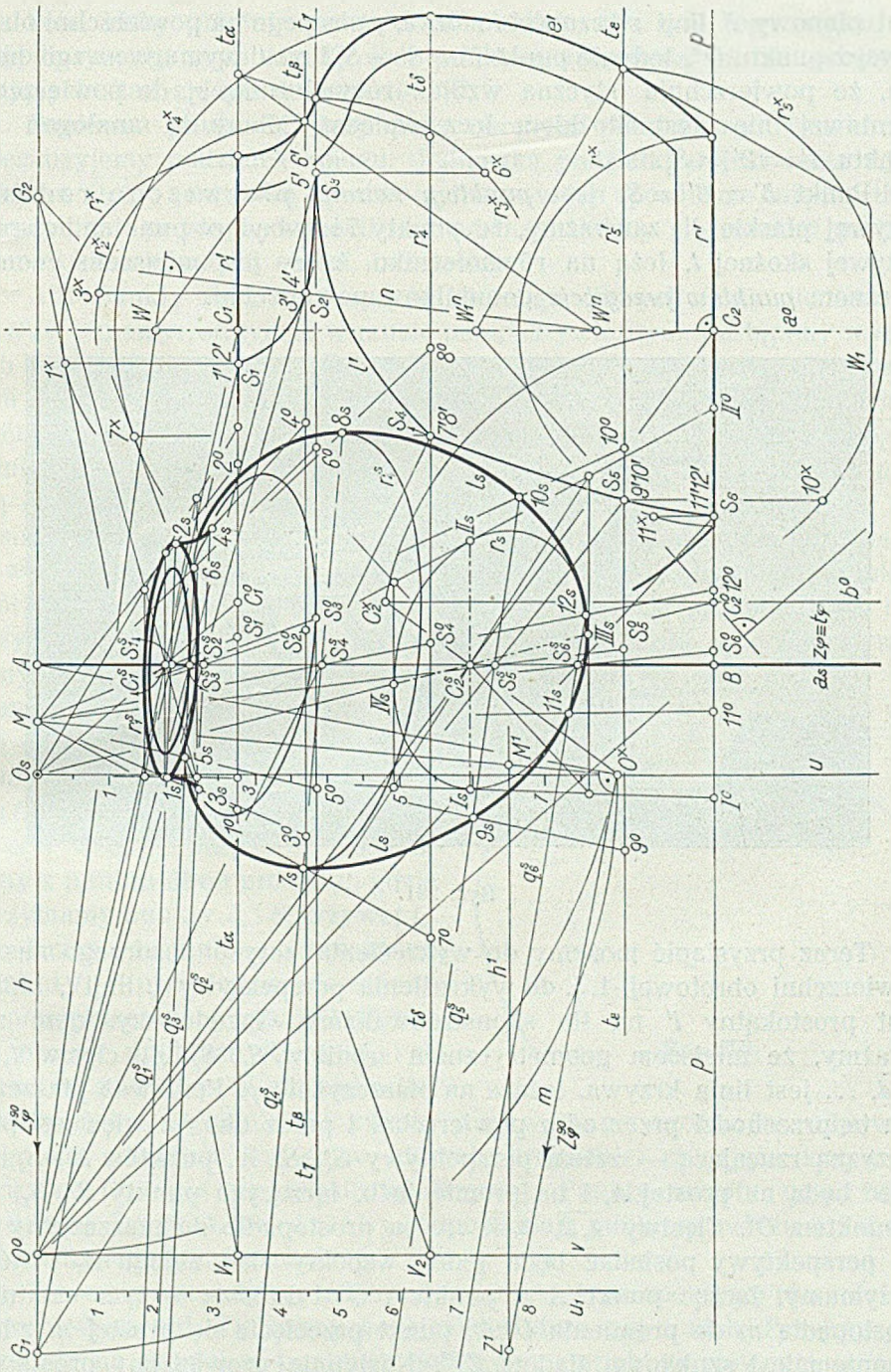
Uważajmy prostą a^0 za rzut pionowy osi powierzchni obrotowej i wykreślmy rzut pionowy e' tej powierzchni, t. j. rzut jej południka głównego. Punkt O^0 będzie wierzchołkiem stożka widzenia powierzchni; wyznaczmy rzut pionowy l' linji styczności tego stożka z powierzchnią. Rozpoczniemy od równoleżnika r_1, którego rzut pionowy jest odcinkiem r_1', a którego płaszczyzna α przecina tło wzdłuż prostej t_α, zaś prostą v, poprowadzoną w punkcie O^0 prostopadle do linji horyzontu — w punkcie V_1. Koło $r_1^\times$ jest kładem równoleżnika r_1 na tło, jako na pionową płaszczyznę rzutów. Z punktu V_1 kreślimy styczną do koła $r_1^\times$ i punkt styczności $1^\times$ rzucamy prostopadle na $t_\alpha \equiv r_1'$, gdzie otrzymamy punkt $1'$. Z punktem tym schodzi się i punkt $2'$, który jest rzutem pionowym, symetrycznie względem płaszczyzny tła położonego punktu 2.



Rys. 289.

Zkolei bierzemy pod uwagę równoleżnik r_2, leżący na płaszczyźnie β, którego kład na tło jest kołem $r_2^\times$. Szukamy wierzchołka W stożka obrotowego, stycznego do powierzchni obrotowej wzdłuż równoleżnika r_2, i wierzchołka W^n odpowiadającego mu stożka normalnego. Punkty O^0 i W łączymy prostą; do niej kreślimy z punktu W^n prostopadłą n, przecinającą ślad t_β w punkcie, łączącym w sobie rzuty $3'$ i $4'$ oraz punkt S_2. Dwa pierwsze są rzutami punktów zarysu istotnego; punkt S_2 jest środkiem cięciwy, ograniczonej punktami 3, 4, i leży na tle.

W analogiczny sposób znajdziemy punkt $5' \equiv 6'$, jako rzut prostokątny na tło punktów 5 i 6, leżących na równoleżniku r_3. Punkt S_3 leży

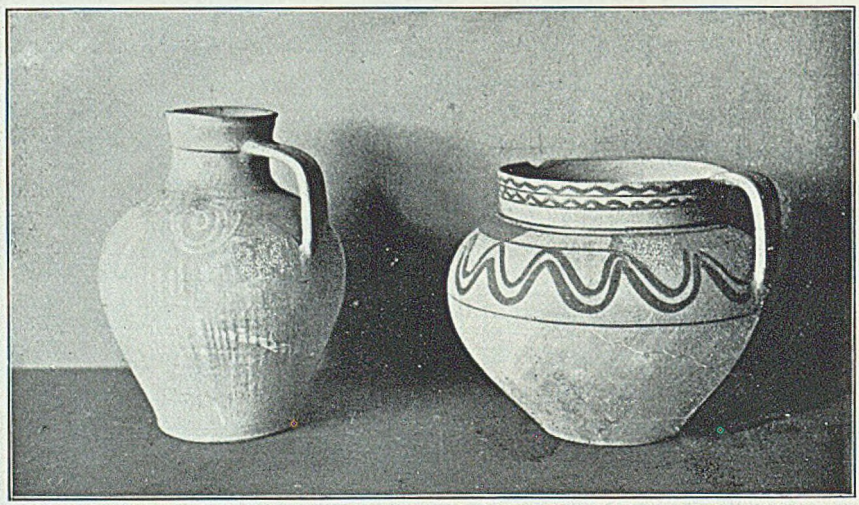


Rys. 290.

na tle i jest środkiem cięciwy $\overline{5, 6}$. W ten sposób, przy pomocy stożków normalnych, znajdziemy dalszą, dowolną ilość punktów, stanowiących

rzut pionowy l' linji styczności l stożka, opisanego na powierzchni obrotowej z punktu O^0. Jedynie punkt $7' \equiv 8' \equiv S_4$ linji l' wymaga uwzględnienia, że powierzchnia styczna wzdłuż równoleżnika r_4 do powierzchni obrotowej nie jest stożkiem lecz walcem. Mamy tu analogon do punktu $1' \equiv 2' \equiv S_1$.

Punkt $5' \equiv 6' \equiv S_3$ jest *punktem zwrotu* pierwszego rodzaju krzywej płaskiej l'; zauważmy, że punkty *5* i *6*, będące punktami zwrotu krzywej skośnej l, leżą na równoleżniku, który jest miejscem geometrycznem *punktów przegięcia* południków powierzchni.



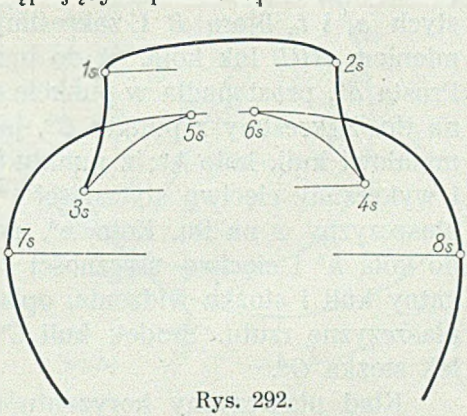
Rys. 291.

Teraz przystąpić możemy do wykreślenia zarysu pozornego naszej powierzchni obrotowej, t. j. do wykreślenia perspektywy l_s linji l, której rzut prostokątny l' na tło skonstruowaliśmy. Przedewszystkiem zauważmy, że miejscem geometrycznem środków S_1, S_2, ... cięciw $\overline{1, 2}$, $\overline{3, 4}$, ... jest linja krzywa, leżąca na płaszczyźnie φ. Ponieważ płaszczyzna ta przechodzi przez oś a powierzchni i przez oko, a więc jest płaszczyzną rzucającą — zatem perspektywy S_1^s, S_2^s, ... punktów S_1, S_2, ... leżeć będą na prostej A_s i na promieniach, łączących punkty S_1, S_2, ... z punktem O^0. Cięciwy $\overline{1, 2}$, $\overline{3, 4}$, ... są prostopadłe do płaszczyzny φ, ich perspektywy posiadać będą jeden wspólny ślad zbiegu Z_φ^{90}, który otrzymamy, łącząc punkt A z punktem $O^\times$ i kreśląc w tym ostatnim prostopadłą m do promienia $O^\times A$; punkt przecięcia się prostej m z horyzontem jest szukanym śladem Z_φ^{90}. Następnie prowadzimy prostą h^1, równoległą do linji horyzontu, przecinającą prostą m, w obrębie rysunku, w punkcie Z^1. Z punktu tego, jako środka, zakreślimy, promieniem $\overline{Z_1 O^\times}$,

łuk koła, który przetnie prostą h^1 w punkcie M^1; rzut tego punktu na linję horyzontu z punktu $O^\times$ jest punktem mierzenia M dla prostych, mających ślad zbiegu w punkcie Z_φ^{90}.

Ponieważ punkt Z_φ^{50} leży poza obrębem płaszczyzny rysunkowej, więc użyjemy podziałek zbiegu. Jednostką podziałki u jest ósma część odcinka $\overline{O_s O^\times}$; podziałkę u_1 utworzyliśmy w ten sposób, że między linję horyzontu a prostą m wstawiliśmy odcinek, dający się również podzielić na osiem równych części, bez reszty.

Aby punkty *1*, *2*, *3*, ... zarysu istotnego, których rzuty pionowe *1'*, *2'*, *3'*, ... znamy, otrzymać w rzucie perspektywicznym, postąpimy w sposób następujący: rzucimy punkt S_1 z punktu O^0 na prostą A_s; otrzymany tam punkt S_1^s połączymy z punktem Z_φ^{90} prostą q_1^s. Punkt S_1^s rzucimy z punktu mierzenia M na prostą t_a, gdzie odmierzymy $\overline{S_1^0 1^0} = \overline{S_1^0 2^0} = \overline{S_1 1^\times}$; punkty 1^0 i 2^0 połączymy z punktem M promieniami, które przetną prostą q_1^s w punktach 1_s i 2_s. Punkty te są perspektywą punktów *1* i *2* zarysu istotnego powierzchni obrotowej, a więc punktami zarysu pozornego. Powtarzając tę konstrukcję dla każdego punktu linji l', otrzymamy punkty, których miejscem geometrycznem jest linja l_s. Tak np. punkty 7_s i 8_s krzywej l_s otrzymamy w sposób następujący: punkt $S_1 \equiv 7' \equiv 8'$ rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s i otrzymany tam punkt S_1^s połączymy prostą q_1^s z punktem Z_φ^{90}, a równocześnie rzucimy z punktu M na prostą t_b. Następnie odmierzymy $\overline{S_1^0 7^0} = \overline{S_1^0 8^0} = \overline{S_1 7^\times}$ i punkty 7^0 i 8^0 rzucimy z punktu M na prostą q_1^s, gdzie otrzymamy punkty 7_s i 8_s krzywej l_s.



Rys. 292.

Krzywa ta ma — począwszy od punktu 1_s — przebieg, uwidoczniony w powiększeniu na rys. 292. Posiada ona w punktach 3_s, 4_s, 5_s i 6_s punkty zwrotu. W szczególności punkty 3_s i 4_s są punktami zwrotu pierwszego rodzaju; odpowiadają one punktom *3* i *4*, w których promienie, rzucające krzywą l z oka na tło, są styczne do tej krzywej. Punkty zwrotu drugiego rodzaju 5_s i 6_s, t. zw. dzióby, odpowiadają punktom zwrotu *5* i *6* zarysu istotnego powierzchni.

Wreszcie narysujemy elipsy r_s, r_1^s, ..., t. j. perspektywę równoleżników powierzchni. Opiszemy konstrukcję pierwszej z nich. Przyjęty poprzednio na prostej a_s punkt C_2^s połączymy z punktem głównym O_s promieniem, który przetnie ślad tłowy płaszczyzny równoleżnika r — w danym wypadku linję podstawy p — w punkcie C_2^0. Odmierzymy od-

cinki $\overline{C_2^0 I^0} = \overline{C_2^0 II^0}$, równe promieniowi koła r, i rzucimy punkty I^0 i II^0 z punktu O_s na prostą, poprowadzoną przez punkt C_2^s, równolegle do linji podstawy. Otrzymamy punkty I_s i II_s. Wykreślimy proste przekątne $C_2^s G_1$ i $C_2^s G_2$, które przetną promienie $I^0 O_s$ i $II^0 O_s$ w czterech punktach, stanowiących wierzchołki trapezu, opisanego na elipsie r_s. W analogiczny sposób postąpimy przy wyznaczaniu elipsy r_1^s i dalszych.

Przykładami perspektyw powierzchni obrotowych o osiach pionowych, otrzymanych drogą fotograficzną, są rysunki 288, 289 i 291.

c) Opisany wyżej sposób otrzymania zarysu pozornego powierzchni obrotowej w rzucie środkowym zastosowaliśmy na rys. 293 do kuli.

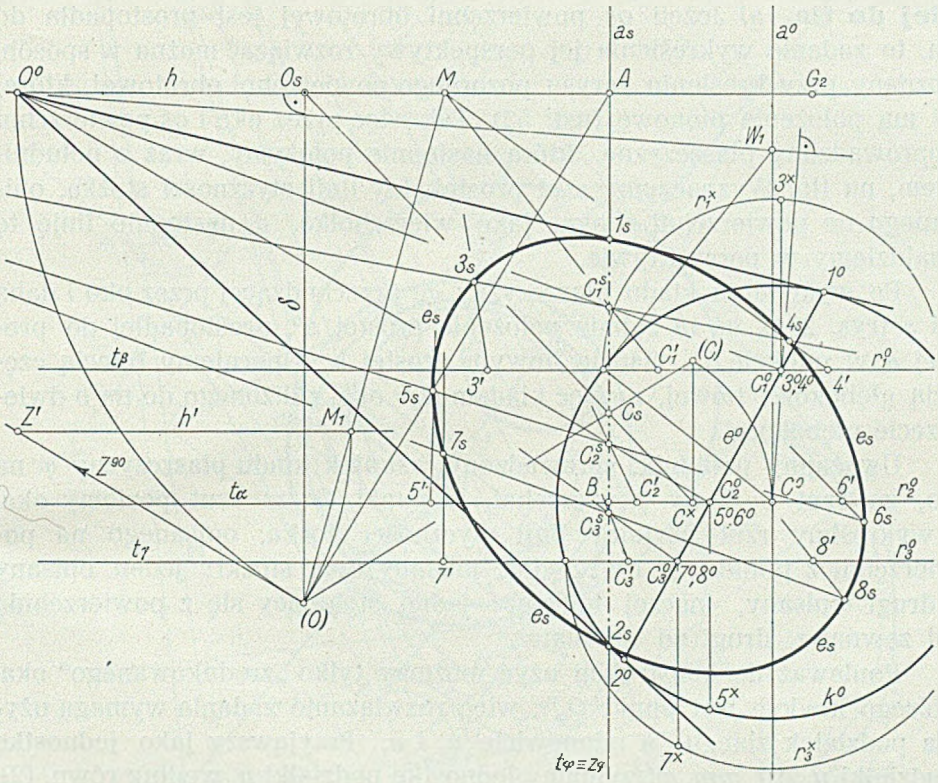
Prosta a_s jest perspektywą pionowej osi kuli, punkt C_s perspektywą jej środka, a prosta t_a, równoległa do linji horyzontu, śladem tłowym płaszczyzny równika. Przez oś a i oko poprowadzimy płaszczyznę φ i wykonamy jej kład na tło, a następnie punkt C_s rzucimy z punktu O^0 na prostą t_a, gdzie otrzymamy punkt C^0.

Promień, łączący punkt główny O_s z punktem C_s, przecina prostą t_a w punkcie $C^\times$, w którym kreślimy prostopadłą. Ta ostatnia przecina prostą $(O)C_s$ w punkcie (C). Oznaczmy punkt przecięcia się prostych a_s i t_a literą B i zakreślmy z tego punktu, jako środka, promieniem $B(C)$ łuk koła, aż do przecięcia się z prostą t_a w punkcie C^0. Prosta a^0, prostopadła w punkcie C^0 do prostej t_a, jest kładem osi kuli na tło. Zakreślmy z punktu C^0, jako środka, promieniem, równym promieniowi kuli, koło k^0; z punktu O^0 poprowadźmy do tego koła styczne i wykreślmy cięciwę styczności $\overline{1^0 2^0}$. Tym sposobem dokonaliśmy kładu płaszczyzny φ na tło. Koło k^0, punkt O^0, styczne, wykreślone z niego, do koła k^0 i cięciwę styczności $\overline{1^0 2^0}$ uważać możemy za rzut prostokątny kuli i stożka widzenia, opisanego na niej, na płaszczyznę tła, jako płaszczyznę rzutu. Środek kuli C^0 leży na tle, podobnie, jak wierzchołek stożka O^0.

Kład płaszczyzny horyzontu na tło sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu (O), przyczem odcinek $\overline{(O)O_s}$, prostopadły do linji horyzontu, równy jest głębokości tłowej δ. Połączmy punkt (O) z punktem A prostą i poprowadźmy do niej w punkcie (O) prostopadłą. Prostopadła ta przetnie linję horyzontu w punkcie Z^{90}, który jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do płaszczyzny φ. Dla dalszej konstrukcji potrzebny nam jest punkt mierzenia M, związany z punktem Z^{90}; otrzymamy go, jako punkt przecięcia się łuku koła, zakreślonego z punktu Z^{90}, jako środka, promieniem $\overline{Z^{90}(O)}$, z linją horyzontu h. Ponieważ punkt Z^{90} leży poza obszarem rysunkowym, postąpiliśmy podobnie, jak na rys. 260: wykreśliliśmy prostą $h' \parallel h$, która przecięła prostą $(O)Z^{90}$ w punkcie Z'; z punktu tego zakreśliliśmy łuk promieniem $Z'(O)$

aż do przecięcia się z prostą h' w punkcie M_1. Prosta $(O)M_1$ przetnie linję horyzontu w szukanym punkcie mierzenia M.

Weźmy pod uwagę równoleżnik r_1 kuli, leżący na płaszczyźnie β, i opiszmy wzdłuż niego stożek styczny z kulą. Wierzchołkiem tego stożka będzie punkt W_1 na osi a kuli; stożek normalny, odpowiadający poprzedniemu, ma wierzchołek w punkcie C^0. Połączmy punkt O^0



Rys. 293.

z punktem W_1 prostą, a z punktu C^0 wykreślmy do niej prostopadłą. Ta ostatnia przejdzie przez punkt C_1^0, w którym cięciwa $\overline{1^0 2^0} \equiv e^0$ przecina się ze śladem tłowym t_β płaszczyzny β. Równoleżnik r_1, obrócony na tło około średnicy, leżącej na tle, jest kołem r_1^x; odcinek $\overline{C_1^0 3^x}$, prostopadły do r_1^0, wyraża połowę długości odcinka $\overline{3, 4}$, prostopadłego do płaszczyzny rysunku, którego punkty końcowe leżą na kole e. Perspektywę C_1^s punktu C_1 znajdziemy, jako przecięcie się promienia $C_1^0 O^0$ ze śladem tłowym t_φ płaszczyzny φ. Rzuciwszy C_1^s z punktu M na ślad t_β, otrzymamy punkt C_1'. Odmierzmy $\overline{C_1' 3'} = \overline{C_1' 4'} = \overline{C_1^0 3^x}$ i rzućmy punkty $3'$ i $4'$ z punktu mierzenia M na prostą, łączącą punkt C_1^s ze

śladem Z^{90}. Otrzymane punkty 3_s i 4_s są punktami zarysu pozornego kuli. W ten sam sposób otrzymaliśmy punkty 5_s, 6_s, 7_s i 8_s. Punkty 1_s i 2_s, w których styczne do koła k^0, poprowadzone z punktu O^0, przecinają prostą a_s, są także punktami szukanego zarysu pozornego kuli w rzucie perspektywicznym. Miejscem geometrycznem wszystkich w ten sposób otrzymanych punktów jest elipsa e_s.

53. Perspektywa powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła. *a)* Jeżeli oś powierzchni obrotowej jest prostopadła do tła, to zadanie wykreślenia jej perspektywy rozwiązać można w sposób, poznany przy kreśleniu zarysu pozornego powierzchni obrotowej, której oś ma położenie pionowe (ust. 52). Tak więc przez oko i oś powierzchni poprowadzimy płaszczyznę, którą następnie położymy, wraz z południkiem, na tło. Wyznaczymy rzut prostokątny linji styczności stożka, opisanego na powierzchni z oka, jako wierzchołka, a następnie linję tę znajdziemy w perspektywie.

Po wykonaniu kładu płaszczyzny φ, przechodzącej przez oko i daną oś a (rys. 294), oś ta zajmie położenie prostej a^0, prostopadłej do prostej a_s w punkcie T_s, śladzie tłowym prostej a. Operujemy trzecią częścią głębokości tłowej, a więc kładem $O_0^{1/3}$ oka, zbliżonego do tła o dwie trzecie głębokości.

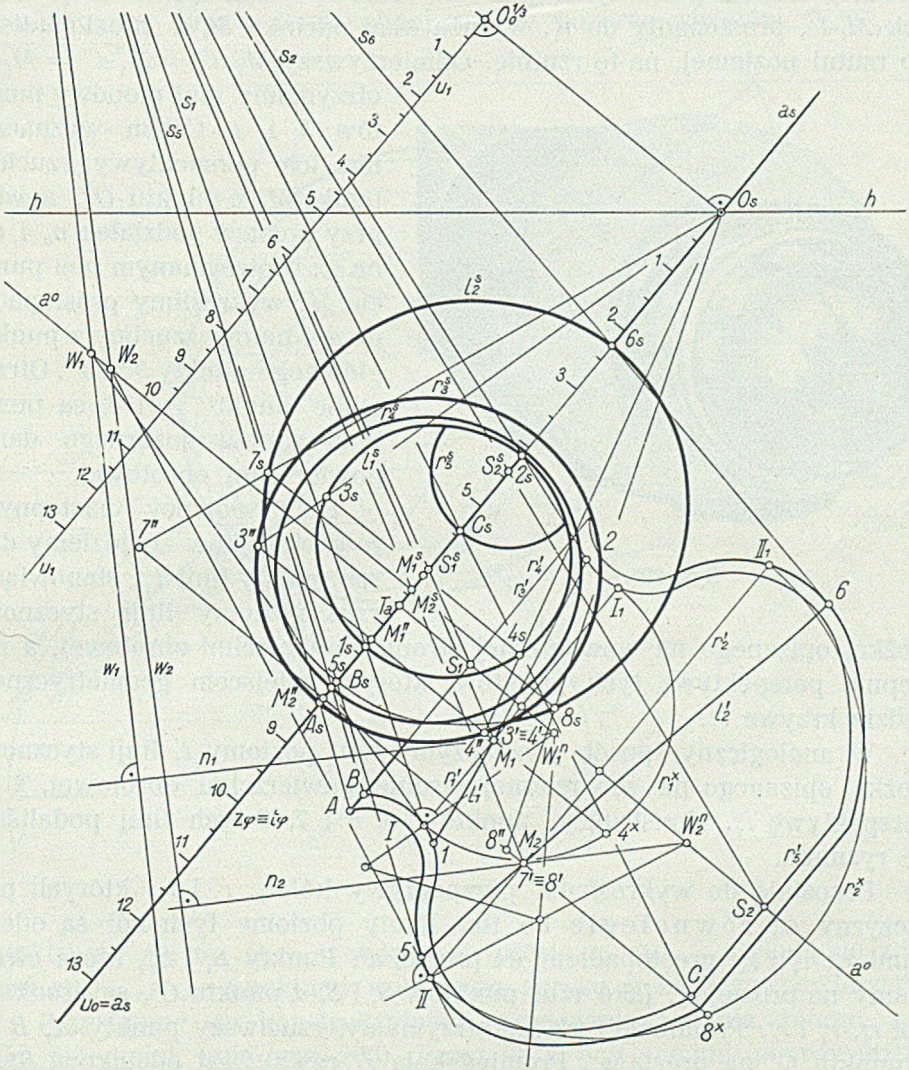
Uważajmy południk, sprowadzony wskutek kładu płaszczyzny φ na tło, za rzut poziomy powierzchni, a punkt O^0 za rzut poziomy oka, i wykreślmy rzut poziomy linji styczności stożka, opisanego na powierzchni z punktu O. Uwzględnić musimy dwa stożki: jeden opisany i drugi wpisany, inaczej mówiąc: jeden stykający się z powierzchnią od zewnątrz, drugi od wewnątrz.

Ponieważ do konstrukcji użyć możemy tylko „zredukowanego“ oka, którego kładem jest punkt $O_0^{1/3}$, więc rozwiązanie zadania wymaga użycia podziałek zbiegu, a mianowicie u_0 i u_1. Przyjąwszy jako jednostkę podziałki u_0 10 *mm*, otrzymamy jednostkę podziałki u_1 według równ. (2), ust. 23, str. 65:

$$a_1 = \frac{n-m}{n} \cdot a = \frac{3-1}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3} = \sim 6{\cdot}6\ mm.$$

Styczne s_1 i s_2, wykreślone przy pomocy podziałek u_0 i u_1 z punktu O^0 do południka wewnętrznego, stykają się z nim w punktach *1* i *2*, których perspektywą 1_s i 2_s są punkty przecięcia się tych stycznych z prostą a_s. Weźmy pod uwagę równoleżnik r_1, którego rzutem poziomym, w wyżej założonem rozumieniu, jest odcinek $\overline{I, I_1} = r_1'$, to punkt W_1, w którym styczna do południka wewnętrznego w punkcie I przecina prostą a^0, jest rzutem poziomym wierzchołka stożka, stycznego do powierzchni obrotowej wzdłuż tego równoleżnika. Prostopadła, wykreślona w punkcie I do prostej $I - W_1$, przecina a^0 w punkcie W_1^n; punkt W_1^n

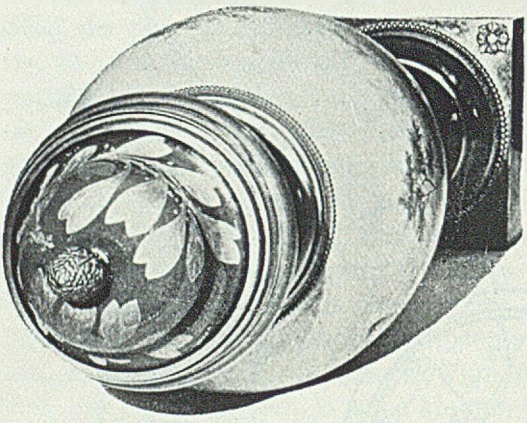
jest rzutem poziomym wierzchołka stożka normalnego, przy pomocy którego znajdziemy punkty zarysu powierzchni, leżące na równoleżniku r_1. Połączmy punkty O^0 i W_1 prostą w_1, a z punktu W_1^n wykreślmy do niej



Rys. 294.

prostopadłą n_1, która przetnie r_1' w punkcie M_1. Punkt ten oznaczyliśmy równocześnie liczbami *3'* i *4'*. W istocie bowiem, w punkcie tym schodzą się z punktem M_1 rzuty poziome leżących na równoleżniku r_1 punktów *3* i *4* zarysu istotnego powierzchni obrotowej; punkt M_1 jest środkiem cięciwy $\overline{3,4}$ i leży na tle, jako na poziomej płaszczyźnie rzutów.

Uważajmy tło za rzutnię pionową a prostą a_s za oś rzutów i znajdźmy rzut pionowy punktów M_1, *3* i *4*. Punkt M_1'' leżeć będzie na osi a_s, dla wyznaczenia zaś punktów *3''* i *4''* obrócimy równoleżnik r_1 około jego średnicy I, I_1 na płaszczyznę poziomą rzutów, otrzymując koło $r_1^\times$. Odcinek $M_1 4^\times$, prostopadły do r_1', wyraża kład odcinka $M_1 4$, prostopadłego do rzutni poziomej, na tę rzutnię. Odmierzywszy $M_1'' 3'' = M_1'' 4'' = M_1 4^\times$, otrzymamy rzut pionowy punktów *3* i *4*. Celem wyznaczenia ich perspektywy rzucimy punkt M_1 z punktu O^0, a więc przy pomocy podziałek u_0 i u_1, na a_s; w otrzymanym tam punkcie M_1^s wykreślimy prostopadłą do a_s i na nią rzucimy z punktu głównego punkty *3''* i *4''*. Otrzymane punkty 3_s i 4_s są punktami zarysu pozornego danej powierzchni obrotowej.



Rys. 295.

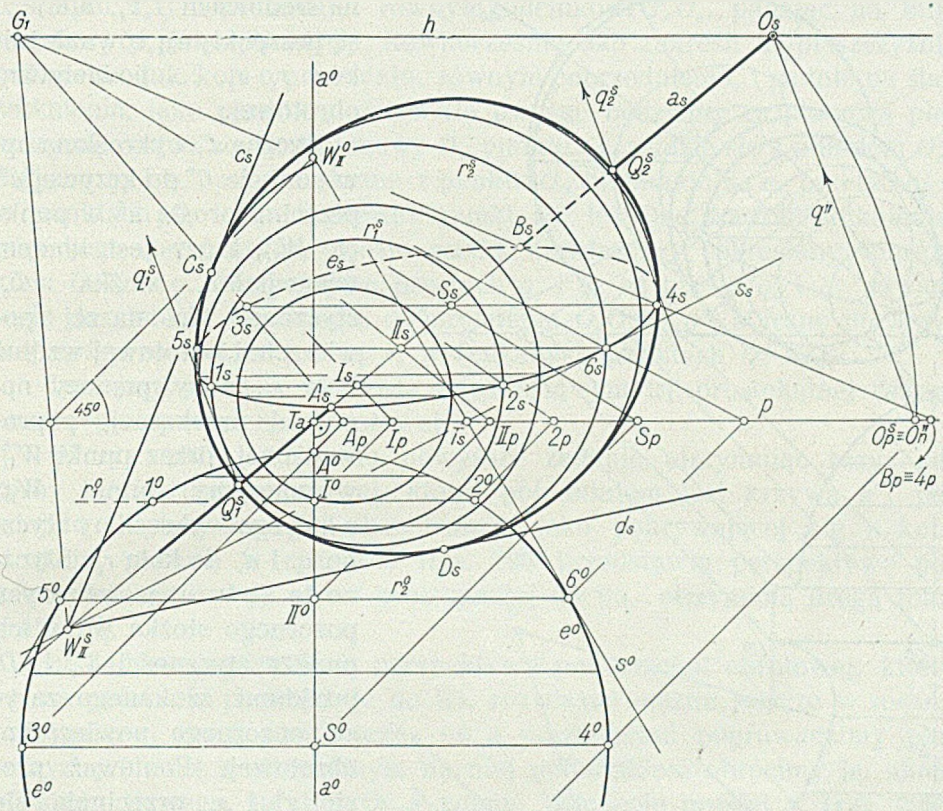
Przy pomocy następnych równoleżników znajdziemy dalsze punkty linji l_1', stanowiącej rzut poziomy linji styczności stożka, opisanego na wewnętrznej stronie powierzchni obrotowej, a następnie perspektywę tych punktów, których miejscem geometrycznem będzie krzywa l_1^s.

W analogiczny sposób wyznaczymy rzut poziomy l_2' linji styczności stożka, opisanego na zewnętrznej stronie powierzchni obrotowej, i jej perspektywę l_2^s. Konstrukcję punktów *5*, *6* i *7*, *8* tych linij podaliśmy na rysunku.

Pozostają do wykreślenia perspektywy kół r_3, r_4 i r_5, których płaszczyzny są r ó w n o l e g ł e do tła. Rzuty poziome tych kół są odcinkami r_3', r_4' i r_5', prostopadłemi do prostej a^0. Punkty S_1^s i S_2^s, które otrzymamy na prostej a_s, jako rzut punktów S_1 i S_2 z punktu O^0, są środkami kół r_3^s, r_4^s i r_5^s. Promienie tych kół otrzymamy, rzuciwszy punkty *A*, *B* i *C* z punktu O^0 na prostą a_s. Promień koła r_3^s równy jest odcinkowi $S_1^s A_s$, promień koła r_4^s równy odcinkowi $S_1^s B_s$, a wreszcie promień koła r_5^s równy odcinkowi $S_2^s C_s$.

b) Inny sposób otrzymania zarysu pozornego powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła opiera się na następującem rozumowaniu: płaszczyzny równoleżnikowe są równoległe do tła, a więc perspektywy równoleżników będą kołami. Opiszmy wzdłuż tych równoleżników stożki Φ_1, Φ_2, ..., styczne do powierzchni obrotowej. Wierzchołki W_1,

W_2, ... tych stożków leżeć będą na osi a powierzchni obrotowej. Jeżeli wykreślimy perspektywy r_1^s, r_2^s, ... równoleżników r_1, r_2, ... i perspektywy W_1^s, W_2^s, ... wierzchołków W_1, W_2, ... stożków Φ_1, Φ_2, ... — to styczne a_s, b_s; c_s, d_s; ..., wykreślone z punktów W_1^s, W_2^s, ... do kół r_1^s, r_2^s, ... tworzą wraz z temi kołami zarysy pozorne stożków Φ_1, Φ_2, ...



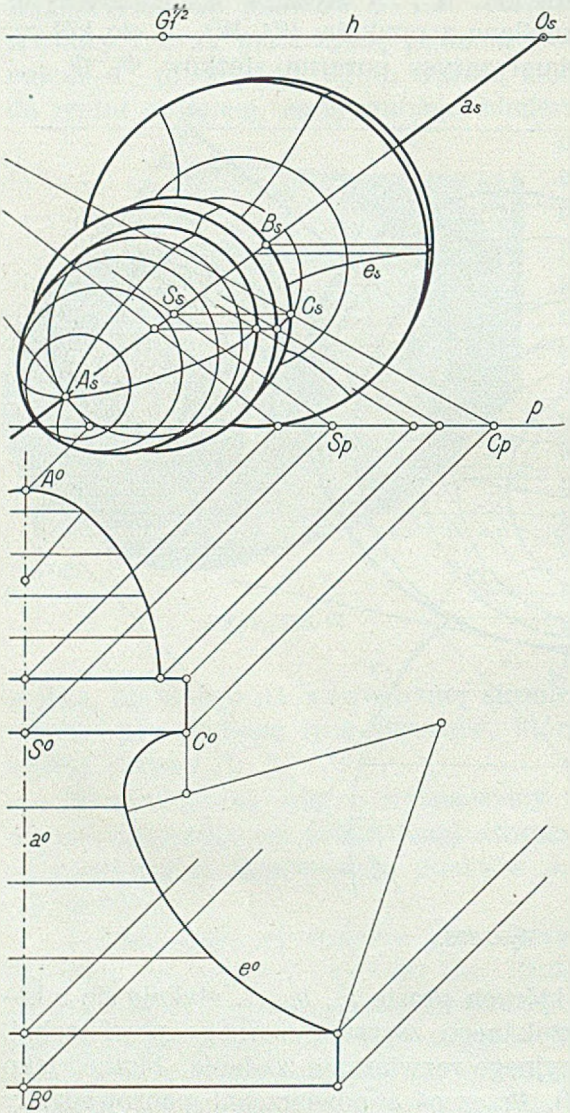
Rys. 296.

Punkty A_s, B_s; C_s, D_s; ..., w których proste a_s, b_s, ... stykają się z kołami r_1^s, r_2^s, ... są punktami szukanego zarysu pozornego powierzchni.

Przystąpmy do konstrukcyjnego rozwiązania zadania, biorąc, jako jego przedmiot, kulę (rys. 296). Przez oś a powierzchni poprowadzimy płaszczyznę poziomą i wykonamy jej kład na tło, wraz z przyjętym na niej południkiem e (w naszym przykładzie kołem). Oś a zajmie położenie prostej a^0, prostopadłej w punkcie T_a, t. j. jej śladzie tłowym, do linji podstawy p; kład południka e będzie kołem e^0.

Zkolei wykreślimy perspektywę e_s południka e, a to za pośrednictwem prostych, równoległych do linji podstawy a przecinających krzywą e^0 w punktach 1^0, 2^0; 3^0, 4^0; ... Perspektywy tych prostych po-

zostaną równoległe do linji podstawy, a miejscem geometrycznem leżących na nich punktów 1_s, 2_s, 3_s, 4_s, ... będzie krzywa e_s (w naszym przykładzie elipsa). Koła r_1^s, r_2^s, ..., zakreślone z punktów I_s, II_s, ... jako środków, na średnicach $\overline{1_s 2_s}$, $\overline{5_s 6_s}$, ... są perspektywą równoleżników r_1, r_2, ... powierzchni obrotowej.



Rys. 297.

Styczna s^0, wykreślona np. w punkcie 6^0 do krzywej e^0, przecina prostą a^0 w punkcie W_{II}^0, który jest kładem wierzchołka stożka Φ_2, stycznego do naszej powierzchni obrotowej wzdłuż koła r_2. Przy pomocy np. prostej przekątnej, poprowadzonej przez punkt W_{II}^0, wyznaczymy punkt W_{II}^s, z którego wykreślimy styczne c_s i d_s do koła r_2^s. Styczne te są tworzącemi zarysu pozornego stożka Φ_2, a ich punkty styczności C_s i D_s punktami szukanego zarysu pozornego powierzchni obrotowej. Ponieważ proste s^0 i s_s przecinają się w punkcie T_s na linji podstawy p, więc, łącząc punkt T_s z punktem 6_s prostą s_s, otrzymamy na prostej a_s punkt W_{II}^s wprost, bez pośrednictwa punktu W_{II}^0.

Powtarzając powyższą konstrukcję dowolną ilość razy, otrzymamy odpowiednią ilość punktów szukanego zarysu pozornego powierzchni obrotowej.

Na uwagę zasługują punkty tego zarysu, leżące na prostej a_s. Aby wyznaczyć je, wyobraźmy sobie, że przez oko i oś a poprowadziliśmy płaszczyznę φ, która przetnie powierzchnię wzdłuż południka e_1. Styczne,

poprowadzone z oka do tego południka, przetną oś a w punktach Q_1 i Q_2, a prostą a_s w szukanych punktach Q_1^s i Q_2^s. Obróćmy płaszczyznę φ, wraz z promieniem głównym, okiem i południkiem e_1, około osi a powierzchni tak, aby zajęła położenie poziome, t. j. zeszła się z płaszczyzną południka e. Podczas tego obrotu punkt główny zakreśli łuk koła o środku T_a i o promieniu, równym odcinkowi $\overline{T_a O_s}$, padając na linję podstawy p, jako punkt O_p^s. Równocześnie oko zakreśli na płaszczyźnie zniknienia łuk koła o promieniu, równym poprzedniemu, i padnie na ślad zniknienia, jako punkt O_n. Jeżeli tło uważać będziemy za pionową płaszczyznę rzutów, to rzut pionowy O_n'' punktu O_n zejdzie się z punktem O_p^s. Styczne q_1 i q_2, poprowadzone z punktu O_n do południka e, przetną oś a w punktach Q_1 i Q_2. Ponieważ punkt O_n leży na śladzie zniknienia, więc jego perspektywą będzie punkt niewłaściwy, określony kierunkiem $OO_n = q$. Perspektywą prostych q_1 i q_2 są proste q_1^s i q_2^s, równoległe do siebie i równoległe do promienia $O_s O_n'' = q''$, styczne do krzywej e_s i przecinające prostą a_s w szukanych punktach Q_1^s i Q_2^s.

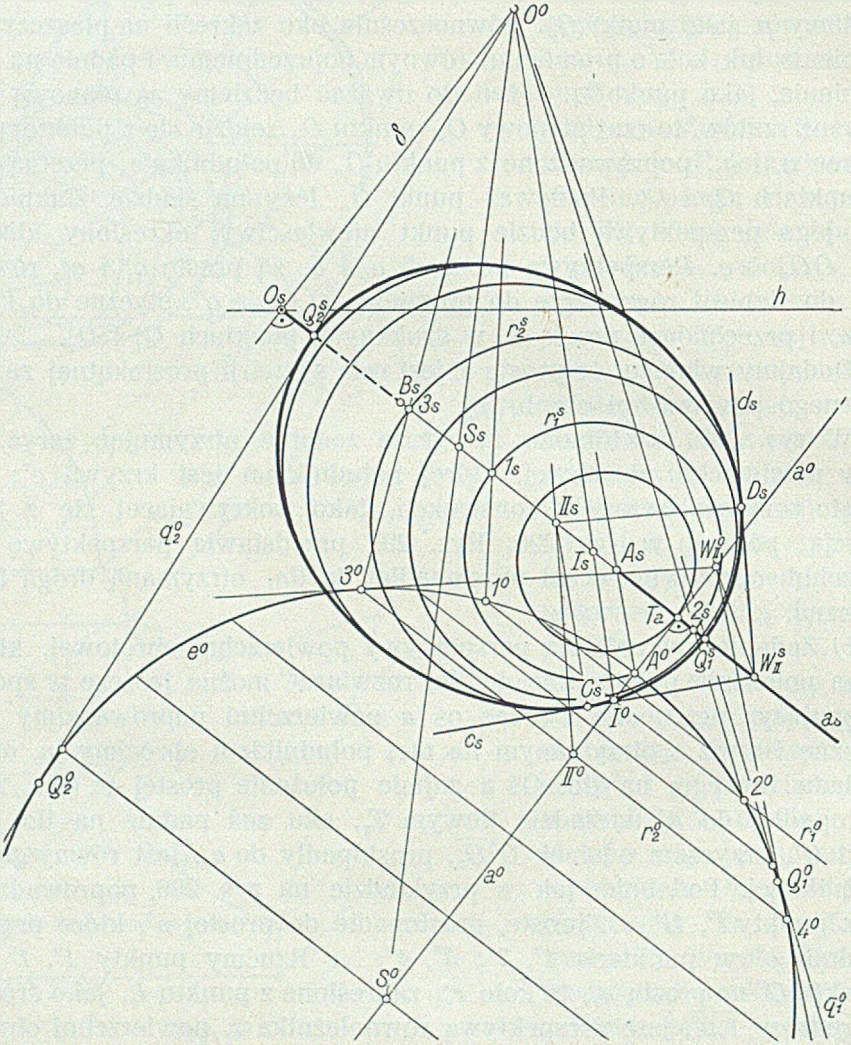
Dodajmy wkońcu, że prosta a_s jest osią symetrji prostokątnej zarysu pozornego powierzchni obrotowej.

W rys. 297 powtórzono powyższe zadanie, otrzymując zarys pozorny powierzchni obrotowej, której południkiem jest krzywa e^0; pominięto przytem szczegóły konstrukcji, jako pokrywającej się z konstrukcją, podaną w rys. 296. Rys. 295 przedstawia perspektywę powierzchni obrotowej, o osi prostopadłej do tła, otrzymaną drogą fotograficzną.

c) Zadanie wykreślenia perspektywy powierzchni obrotowej, której oś ma położenie prostopadłe do tła, rozwiązać można jeszcze w sposób następujący: przez oko i przez oś a powierzchni poprowadzimy płaszczyznę i wraz z otrzymanym na niej południkiem obrócimy ją, około jej śladu tłowego, na tło. Oś a zajmie położenie prostej a^0 (rys. 298), prostopadłej do a_s w śladzie tłowym T_a, oko zaś padnie na tło, jako punkt O^0, przyczem odcinek $\overline{O^0 O_s}$, prostopadły do a_s, jest równy głębokości tłowej. Podobnie, jak w przykładzie na rys. 296, poprowadzimy przez punkty I^0, II^0, ... proste, prostopadłe do prostej a^0, które przetną południk e^0 w punktach 1^0, 2^0; 3^0, 4^0; ... Rzućmy punkty I^0, 1^0 i 2^0 z punktu O^0 na prostą a_s, to koło r_1^s, zakreślone z punktu I_s, jako środka, na średnicy $\overline{1_s 2_s}$, jest perspektywą równoleżnika r_1 powierzchni obrotowej. W ten sposób otrzymamy dowolną ilość równoleżników powierzchni, poczem wyznaczymy perspektywy wierzchołków stożków, opisanych na powierzchni obrotowej wzdłuż tych równoleżników. Tak np. styczne w punktach 3^0 i 4^0 do południka e^0 przecinają się w punkcie W_{II}^0 na prostej a^0. Punkt W_{II}^0 rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s, otrzymując tam punkt W_{II}^s, z którego następnie kreślimy styczne c_s i d_s do koła r_2^s. Punkty

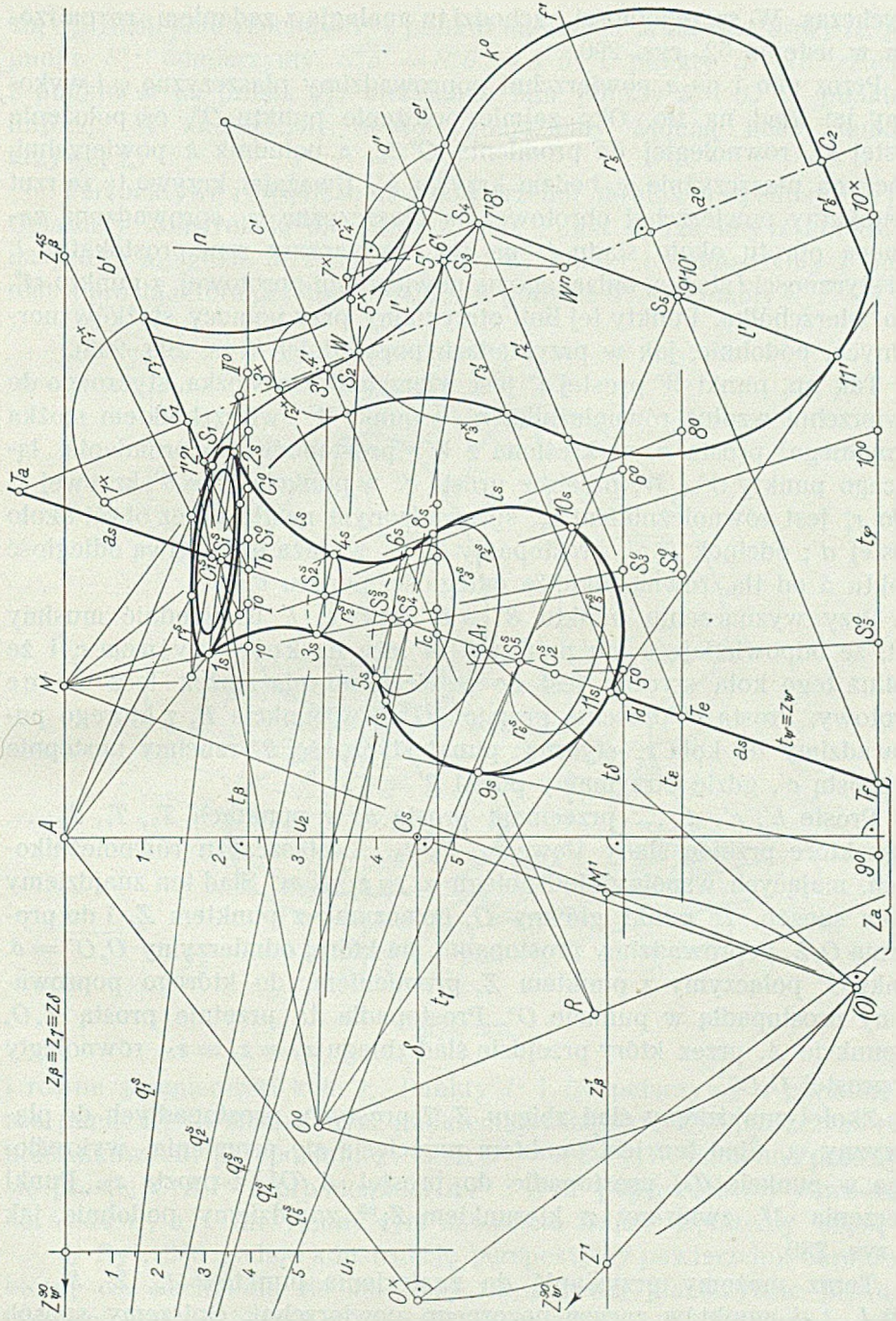
styczności C_s i D_s są punktami zarysu pozornego powierzchni obrotowej — w naszym przypadku kuli.

Punkty Q_1^s i Q_2^s linji zarysu, leżące na prostej a_s, otrzymamy, jako punkty przecięcia się prostej a_s ze stycznemi q_1^0 i q_2^0, wykreślonemi z punktu O^0 do krzywej e^0.



Rys. 298.

54. Perspektywa powierzchni obrotowej, której oś ma dowolne położenie w przestrzeni. *a)* Znamy perspektywę a_s osi i jej ślady T_a i Z_a (rys. 299); znamy położenie punktu głównego O_s, głębo-



Rys. 299.

kość tłową δ i południk powierzchni. W istocie swej rozwiązanie zadania nie wymaga żadnych nowych koncepcyj poza temi, które poznaliśmy

dotychczas. W szczególności zachodzi tu analogja z zadaniem, rozpatrzonem w ustępie 52, rys. 290.

Przez oko i oś a powierzchni poprowadzimy płaszczyznę ψ i wykonamy jej kład na tło. Oko zajmie położenie punktu O^0, oś położenie prostej a^0, równoległej do promienia $O^0 Z_a$, a południk k powierzchni, leżący na płaszczyźnie ψ, będzie krzywą k^0. Uważając krzywą tę za rzut prostokątny powierzchni obrotowej na płaszczyznę ψ, sprowadzoną zapomocą obrotu około śladu t_ψ na tło, wyznaczmy rzut prostokątny l' linji styczności l stożka, opisanego na powierzchni obrotowej, z punktu O^0, jako wierzchołka. Punkty tej linji otrzymamy przy pomocy stożków normalnych, podobnie, jak w przykładach poprzednich (rys. 290, 293).

Tak np. punkt W prostej a^0 jest wierzchołkiem stożka, stycznego do powierzchni wzdłuż równoleżnika r_3, a punkt W'' wierzchołkiem stożka normalnego; prosta n, wykreślona z W'' prostopadle do promienia, łączącego punkty O^0 i W, przetnie prostą d' w punkcie $5' \equiv 6'$ krzywej l'. Koło $r_3^\times$ jest równoleżnikiem r_3, sprowadzonym na tło przez obrót około prostej d'; odcinek $\overline{5^\times 5'}$, prostopadły do r_3', wyraża prawdziwą odległość punktu 5 od tła, równą takiejże odległości punktu 6.

Przy wyznaczeniu punktu $3' \equiv 4'$ krzywej l' uwzględnić musimy fakt, że odpowiadające mu punkty 3 i 4 leżą na kole szyjnem r_2 i że wzdłuż tego koła styczny jest do powierzchni nie stożek lecz walec obrotowy. Prosta c' przecina promień $O^0 Z_a$ w punkcie R, z którego poprowadzimy do koła $r_2^\times$ styczną; punkt styczności $3^\times$ rzucimy następnie na prostą c', gdzie otrzymamy punkt $3' \equiv 4'$.

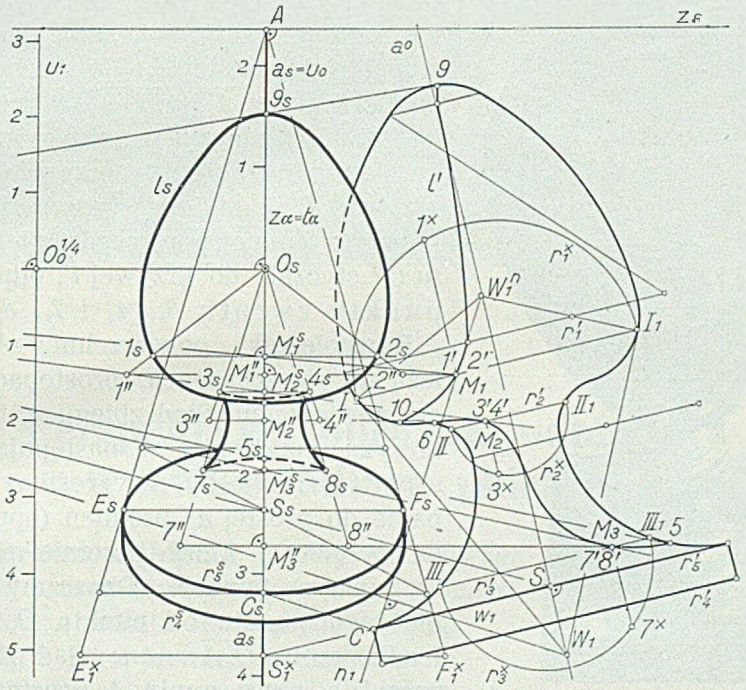
Proste b', c', d' ... przecinają prostą a_s w punktach T_b, T_c, T_d, ... przez które przejdą ślady tłowe t_β, t_γ, t_δ ... płaszczyzn równoleżnikowych, mających wspólny ślad zbiegu $z_\beta \equiv z_\gamma \equiv z_\delta$. Ślad ten znajdziemy w ten sposób, że punkt główny O_s połączymy z punktem Z_a i do promienia $O_s Z_a$ poprowadzimy prostopadłą, na której odmierzymy $\overline{O_s O^\times} = \delta$. Punkt $O^\times$ połączymy z punktem Z_a promieniem, do którego poprowadzimy prostopadłą w punkcie $O^\times$. Prostopadła ta przetnie prostą $Z_a O_s$ w punkcie A, przez który przejdzie ślad zbiegu $z_\beta \equiv z_\gamma \equiv z_\delta$, równoległy do prostej $O_s O^\times$.

Zkolei znajdziemy ślad zbiegu Z_ψ^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny ψ. Ślad ten jest punktem przecięcia się promienia, wykreślonego w punkcie (O) prostopadle do prostej $A_1(O)$, z prostą z_β. Punkt mierzenia M, związany z kierunkiem Z_ψ^{90}, znajdziemy podobnie, jak na rys. 289.

Teraz możemy przystąpić do znalezienia punktów 1_s, 2_s, 3_s, ... linji l_s, t. j. punktów zarysu pozornego powierzchni. Opiszemy sposób otrzymania punktów 5_s i 6_s. Punkt $S_3 \equiv 5' \equiv 6'$ rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s i otrzymany tam punkt S_3^s połączymy z punktem Z_ψ^{90} pro-

stą q_3^s. Następnie rzucimy S_3^s z punktu mierzenia M na ślad tłowy t_δ, jako punkt S_3^0; odmierzymy $\overline{S_3^0 5^0} = \overline{S_3^0 6^0} = \overline{5'5'}$ i punkty 5^0 i 6^0 rzucimy z punktu M na prostą q_3^s; otrzymane tam punkty 5_s i 6_s są punktami linji l_s. W analogiczny sposób znajdziemy żądaną ilość punktów krzywej l_s.

Perspektywą równoleżników powierzchni obrotowej są elipsy $r_1^s, r_2^s, \ldots$ Opiszemy konstrukcję pierwszej z nich. Punkt C_1 rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s, gdzie otrzymamy punkt C_1^s. Punkt ten połączymy z punktem A prostą, która przetnie prostą t_β w punkcie C_1^0. Odcinamy $\overline{C_1^0 I^0} = \overline{C_1^0 II^0}$



Rys. 300.

i równe promieniowi koła r_1. Punkty I^0 i II^0 połączymy z punktem A, zaś punkt C_1^s ze znalezionym punktem przekątnym Z_β^{45} płaszczyzn równoleżnikowych; przypomnijmy, że $\overline{AO^\times} = \overline{AZ_\beta^{45}}$. W punktach przecięcia się prostej $C_1^s Z_\beta^{45}$ z promieniami AI^0 i AII^0 poprowadzimy równoległe do śladu t_β, a w otrzymany tym sposobem trapez wpiszemy elipsę r_1^s.

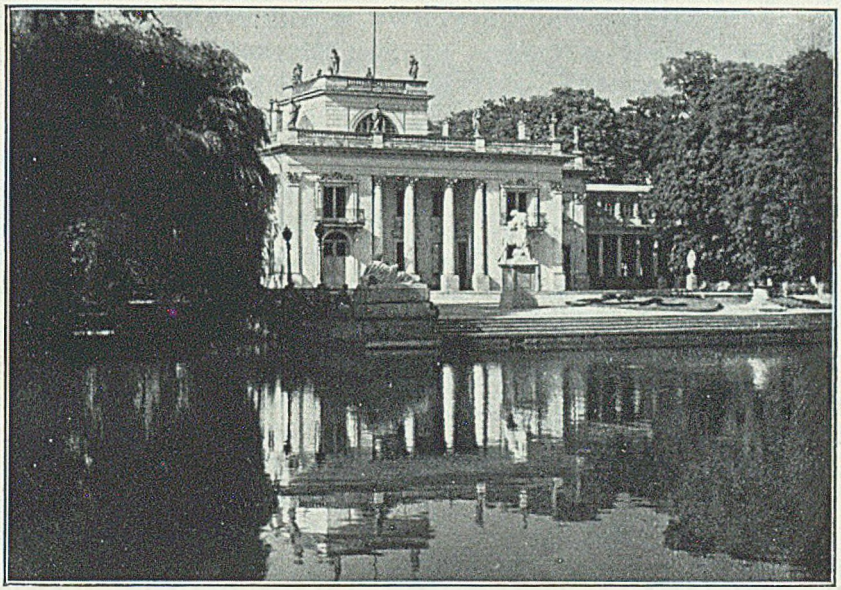
b) Rys. 300 podaje konstrukcję perspektywy powierzchni obrotowej, której oś, nachylona do tła, leży na głównej płaszczyźnie pionu α. Położenie tej osi określone jest jej perspektywą a_s i jej kładem a^0 na tło, uzyskanym przez wykonanie kładu płaszczyzny α. Operujemy czwartą częścią głębokości tłowej. Kreślimy rzut prostokątny powierzchni

na tło, pokrywający się z kładem na tło południka, znajdującego się na płaszczyźnie a. Przy pomocy stożków normalnych znajdziemy linję l', t. j. rzut prostokątny linji styczności stożka, opisanego na powierzchni obrotowej, z punktu O^0. Krzywą l_s, t. j. zarys pozorny powierzchni obrotowej, otrzymamy podobnie, jak w przykładach na rys. 290, 293, 299. Więc np. punkt $M_1 \equiv 1' \equiv 2'$ rzucimy z punktu O^0 na prostą a_s; przez otrzymany punkt M_1^s i przez punkt M_1 prowadzimy proste, prostopadłe do prostej a_s. Na drugiej z nich odmierzymy $M_1''1'' = M_1''2'' = 1^x1'$ i punkty $1''$ i $2''$ rzucimy z punktu głównego O_s na pierwszą. Punkty 1_s i 2_s są punktami krzywej l_s. Punktom styczności $3' \equiv 4'$ i $7' \equiv 8'$ promieni, poprowadzonych z punktu O^0 stycznie do krzywej l', odpowiedzą punkty zwrotu 3_s, 4_s i 7_s, 8_s linji l_s.

Rys. 301.

Równoleżniki powierzchni obrotowej leżą na płaszczyznach, prostopadłych do osi powierzchni. Ślad zbiegu z_t tych płaszczyzn znajdziemy w następujący sposób: z punktu $O_0^{1/4}$ wykreślimy prostopadle do prostej a^0 promień (opuszczony na rysunku), który przetnie prostą a_s w pewnym punkcie. Oznaczmy oddalenie tego punktu od punktu O_s literą n i odmierzmy $\overline{O_s A} = 4n$; ślad zbiegu z_t przejdzie przez punkt A, prostopadle do prostej a_s. Konstrukcję trapezu, w który wpisana jest następnie elipsa r_5^s, jako perspektywa równoleżnika r_5, odtworzy czytelnik bezpośrednio z rysunku.

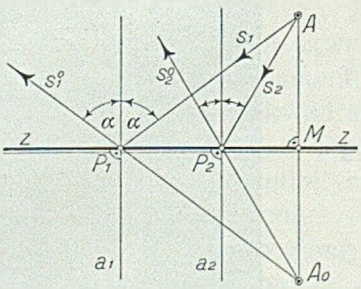
Praktyczną ilustracją zagadnienia, rozpatrzonego w rys. 300, jest fotogram, przedstawiony na rys. 301.



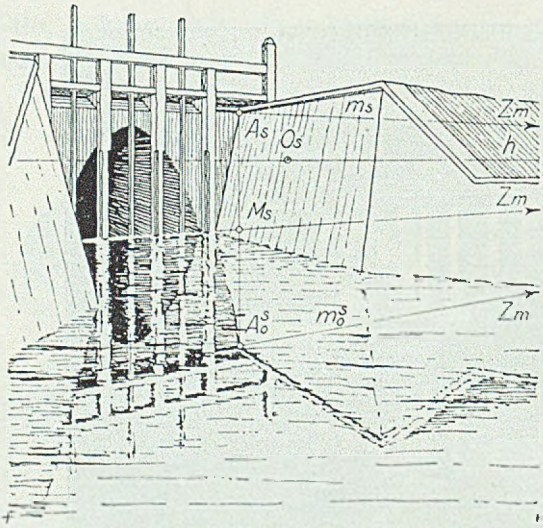
Rozdział V.

Perspektywa obrazów odbitych w zwierciadłach płaskich.

55. Prawo odbicia. Weźmy pod uwagę zwierciadło płaskie z i punkt A, leżący zewnątrz (rys. 303). Promień światła s_1, przechodzący przez punkt A, odbija się w punkcie P_1 od zwierciadła i jako promień s_1^0 dochodzi do naszego oka. Prosta a_1, prostopadła w punkcie P_1 do płaszczyzny zwierciadła, czyli t. zw. prostopadła padania, tworzy, jak wiadomo, z promieniem padającym s_1 i odbitym s_1^0 równe kąty α. Jeżeli kąt, jaki promień s_1 tworzy z prostą a_1, nazwiemy kątem padania, a kąt, zawarty między promieniem odbitym s_1^0 a prostopadłą padania, kątem odbicia, to podstawowe prawo odbicia wyrazi się zdaniem: kąt padania równy jest kątowi odbicia. Promień padający, prostopadła padania i promień odbity leżą na jednej płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny zwierciadła.



Rys. 303.

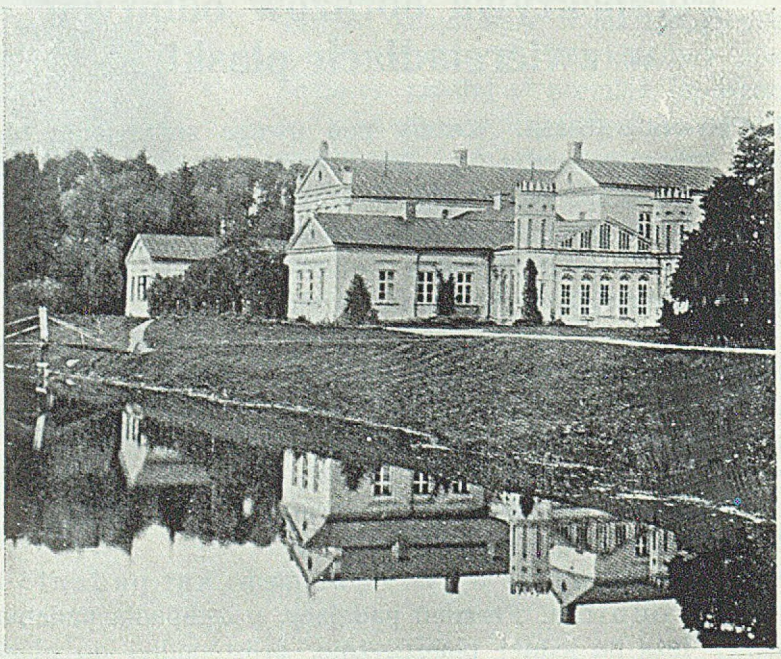


Rys. 304.

Prawo odbicia stosuje się do każdego promienia, przechodzącego przez punkt A, a więc i do promienia s_2. Przedłużone promienie odbite s_1^0 i s_2^0 przetną się w punkcie A_0, który stanowi pozorny obraz punktu A. Promień, łączący punkt A i jego obraz A_0, t. zw. promień główny, jest prostopadły do płaszczyzny zwierciadła. Odległość obrazu pozornego A_0 od zwierciadła równa jest odległości punktu A od zwierciadła, czyli: $\overline{A_0 M} = \overline{MA}$.

Rys. 304 podaje — nie wymagającą dalszych wyjaśnień — konstrukcję obrazu pozornego punktu A, odbitego w zwierciedle poziomem.

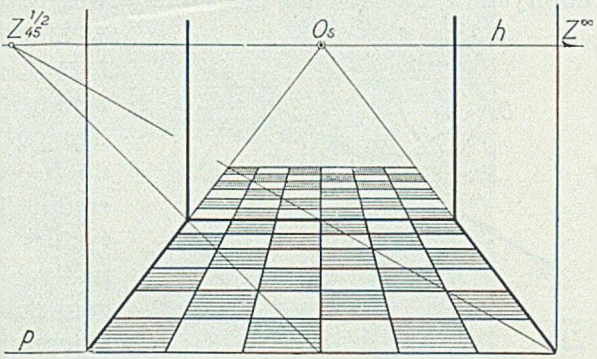
Fotogramy rys. 305 i 320 są praktycznemi przykładami powyższego elementarnego zagadnienia.



Rys. 305. Poniemuń, Litwa.

56. Przykłady odbić w zwierciadłach pionowych.

1. *Wyznaczyć odbicie się parkietu podłogi w ścianie czołowej wnętrza pokoju, która jest zwierciadłem* (rys. 306). Posłużymy się częściowym punktem oddalenia $Z_{45}^{1/2}$ i przy jego pomocy wykreślimy perspektywę posadzki, złożonej z kwadratów. Odbity obraz w zwierciedle, przystający do ornamentu posadzki, przedstawi się w perspektywie, jako jej przedłużenie, oddalone bardziej od oka.



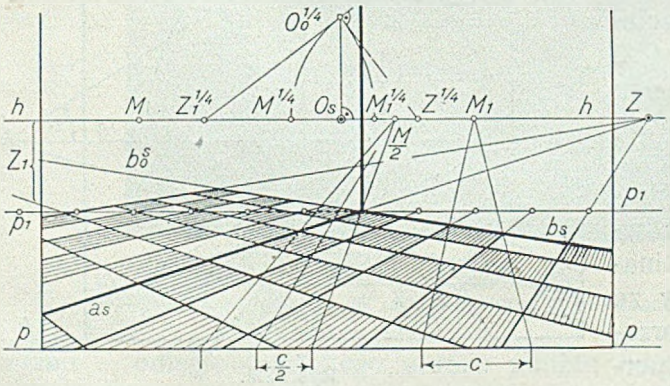
Rys. 306.

2. *Wykreślić perspektywę odbicia się ornamentu podłogi w lewej ścianie lustrzanej wnętrza* (rys. 307). Rozwiązanie zadania sprowadza się do wykreślenia przedłużonego ku śladowi zbiegu Z_1 ornamentu podłogi.

3. *Wykonać zadanie poprzednie, gdy boki kwadratów, stanowiących ornament, są równoległe względnie prostopadłe do tła* (rys. 308 i 309).

Dla szybszego zorjentowania się weźmy pod uwagę rzut poziomy całego układu (rys. 308).

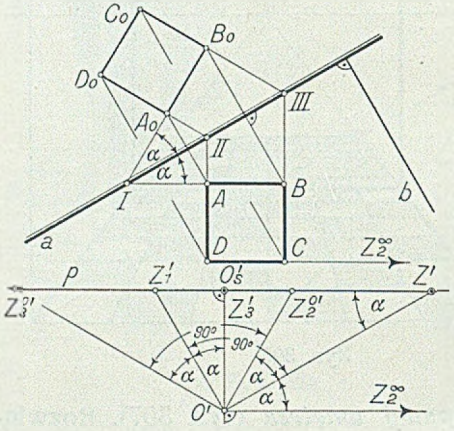
Prosta p jest śladem tła na płaszczyźnie poziomej, proste a i b śladami ścian bocznych wnętrza, punkt O' rzutem poziomym oka, punkt O'_s rzutem poziomym punktu głównego. Jeżeli A, B, C, D jest jednym kwadratem ornamentu podłogi, to kwadrat $A_0 B_0 C_0 D_0$ jest jego obrazem, odbitym w zwierciedle a. Promień poziomy, wyprowadzony z oka równolegle do a, przebija tło w punkcie Z, który jest śladem zbiegu poziomych promieni, równoległych do zwierciadła. Punkt Z_1, w którym promień, równoległy do prostej b, przebije tło, jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do kierunku a. Ślad zbiegu Z_2, prostych



Rys. 307.

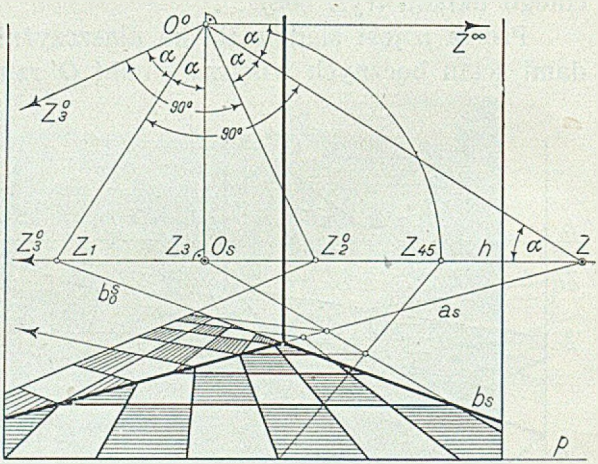
równoległych do prostej p, jest punktem niewłaściwym horyzontu. Śladem zbiegu Z_3 promieni prostopadłych do prostej p jest punkt główny O_s.

Promień, poprowadzony z oka równolegle do $A_0 - B_0$, wyraża kierunek odbitych w zwierciedle prostych, równoległych do prostej p. Punkt Z_2^0, w którym promień ten przetnie horyzont, jest śladem zbiegu tego kierunku, a punkt $Z_2^{0\prime}$ — tego śladu rzutem poziomym. Promień prostopadły do $O - Z_2^0$, czyli równoległy do kierunku $B_0 C_0$, t. j. do kierunku odbitych w zwierciedle prostych, prostopadłych do prostej p, przetnie horyzont w punkcie Z_3^0, który jest śladem zbiegu wszystkich prostych o kierunku prostej $B_0 C_0$. Tak więc punkty Z_2^0 i Z_3^0 są śladami zbiegu odbitych w zwierciedle kierunków: pierwszy kierunku równoległego a drugi prostopadłego do linji podstawy p.



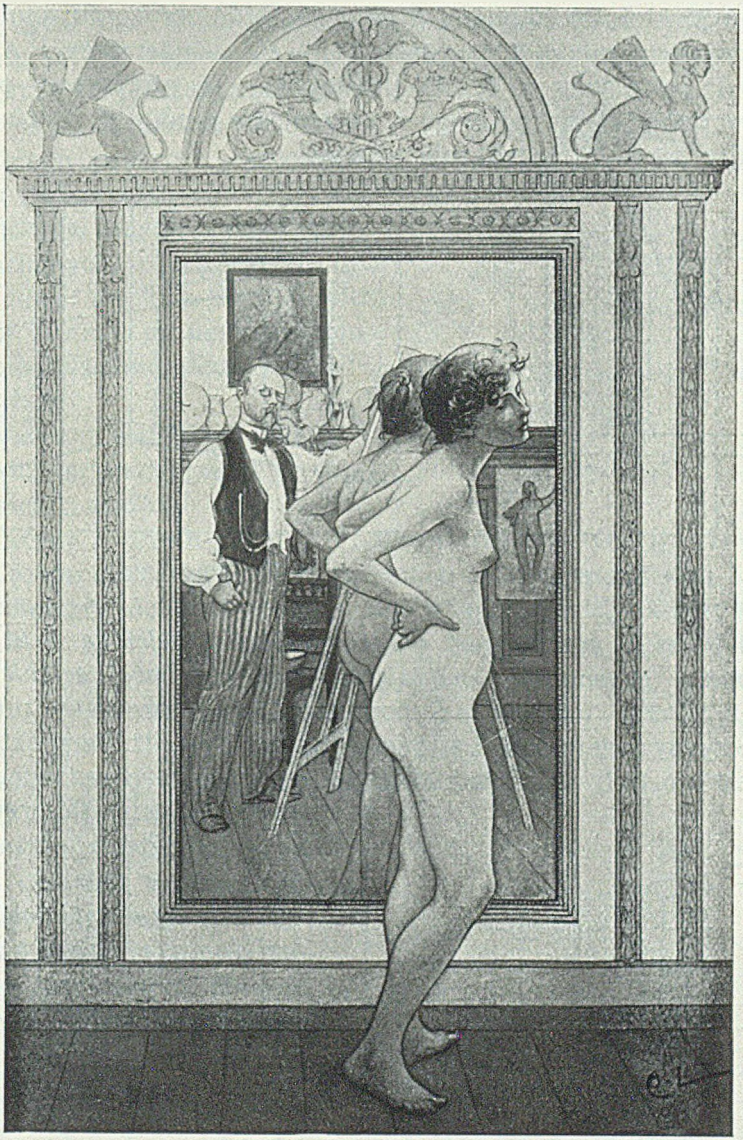
Rys. 308.

Perspektywiczne rozwiązanie naszego zadania podaje rys. 309. Wychodząc z danego punktu głównego O_s i śladu zbiegu Z, przy znanem oddaleniu tłowem, znajdziemy ślad zbiegu Z_1 prostych, prostopadłych do pierwszego kierunku, poczem, odmierzywszy kąty $ZO^0Z_2^0 = \alpha$ i $Z_1O_0Z_3^0 = \alpha$, równe kątowi nachylenia do tła prostych, równoległych do kierunku OZ, otrzymamy ślady zbiegu Z_2^0 i Z_3^0, które stanowią o rozwiązaniu zadania. Punkty, w których perspektywy prostych, równoległych do tła, przecinają prostą a_s, łączymy ze śladem Z_2^0, a punkty przecięcia się obrazów perspektywicznych prostych, prostopadłych do tła, z prostą a_s — ze śladem Z_3^0 — otrzymując perspektywy odbić tych prostych w zwierciedle.



Rys. 309.

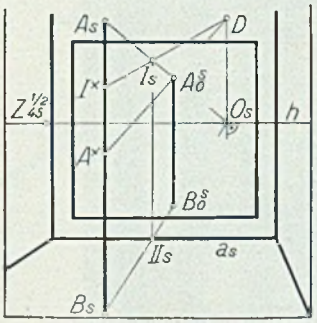
4. *Wyznaczyć perspektywę pionowego odcinka $\overline{AB}$, odbitego w zwierciedle, umieszczonem na ścianie czołowej* (rys. 310). Ponieważ — jak wia-



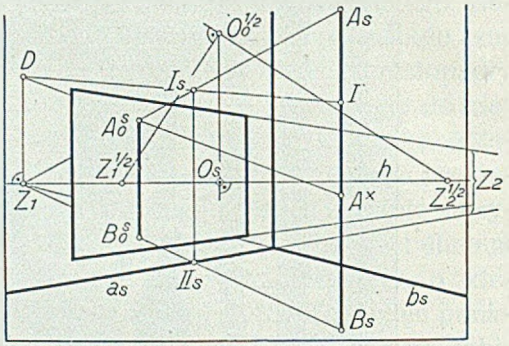
Rys. 310.
Karol Larsson. W zwierciedle. Klisza F. Bruckmanna, Monachjum.

domo — odległość odbitego obrazu punktu od zwierciadła równa jest odległości punktu od tegoż zwierciadła, więc obraz odcinka $\overline{AB}$ będzie odcinkiem pionowym, leżącym na płaszczyźnie φ, przechodzącej przez ten odcinek prostopadle do tła, a oddalonym od płaszczyzny zwierciadła o odległość, równą oddaleniu odcinka $\overline{AB}$ od płaszczyzny zwierciadła. Płaszczyzna φ przetnie płaszczyznę zwierciadła w prostej $I_s - II_s$; z przy-

jętego na prostej, prostopadłej w punkcie O_s do horyzontu, punktu dzielenia D rzucimy punkt I_s na prostą $A_s - B_s$, odmierzymy $I^s A^s = I^x A_s$ i punkt A^x połączymy z D. Na prostej $A_s - O_s$ otrzymamy punkt A_0^s, który jest perspektywą odbitego w zwierciedle punktu A. Odcinek $A_0^s B_0^s$, równoległy do $A_s B_s$, rozwiązuje zadanie.

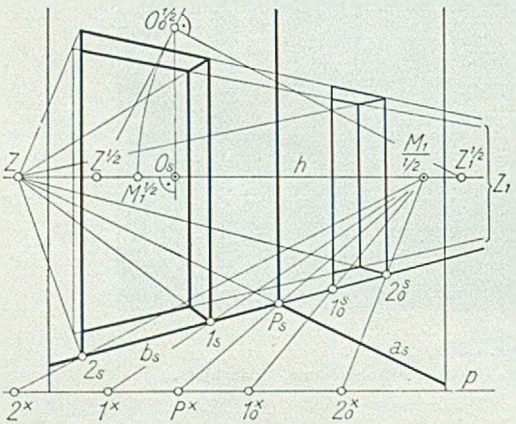


Rys. 311.



Rys. 312.

5. *Wykreślić perspektywę obrazu pionowego odcinka $\overline{AB}$, odbitego w pionowem zwierciedle, znajdującem się na lewej ścianie wnętrza* (rys. 312). Przez odcinek $\overline{AB}$ poprowadzimy płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny zwierciadła, i wyznaczymy ich krawędź. Perspektywą krawędzi jest prosta $I_s - II_s$. Podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, użyjemy punktu dzielenia D i przy jego pomocy znajdziemy odcinek $A_0^s B_0^s$, rozwiązujący zadanie.

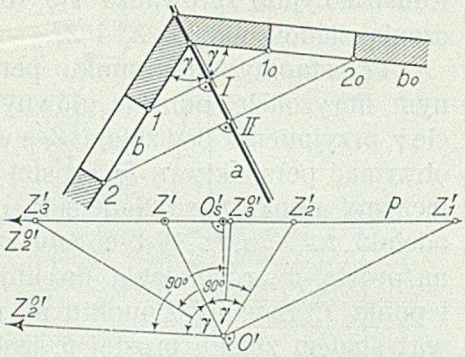


Rys. 313.

6. *W lewej ścianie wnętrza znajduje się otwór; ściana prawa, prostopadła do pierwszej, jest zwierciadłem; wyznaczyć obraz odbity tego otworu* (rys. 313). Przy pomocy punktu mierzenia $\frac{M_1}{1/2}$ odmierzymy na krawędzi b — od punktu P począwszy — odcinki, równe odcinkom $\overline{P1}$ i $\overline{P2}$, otrzymując perspektywy 1_0^s i 2_0^s obrazów odbitych w zwierciedle punktów *1* i *2*. Dalsza konstrukcja nie wymaga szczególnych wyjaśnień; tłumaczy ją dostatecznie rysunek.

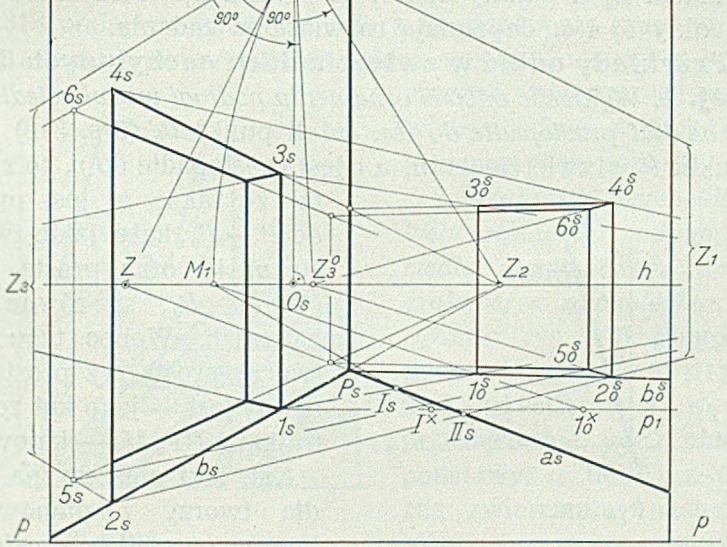
7. *Wykreślić odbicie się otworu lewej ściany wnętrza w jego ścianie prawej, przy założeniu, że obie tworzą kąt mniejszy od prostego i równy*

kątowi γ (rys. 314 i 315). Sytuację w rzucie poziomym podaje rys. 314, gdzie punkt Z' jest rzutem poziomym śladu zbiegu prostych poziomych, równoległych do płaszczyzny zwierciadła a, punkt Z_1' rzutem poziomym śladu zbiegu prostych, prostopadłych do zwierciadła, punkt Z_2' rzutem poziomym śladu zbiegu prostych poziomych, równoległych do lewej ściany wnętrza, a wreszcie punkt Z_3' rzutem poziomym śladu zbiegu prostych, do ściany tej prostopadłych.



Rys. 314.

Ponieważ kąt padania równy jest kątowi odbicia, przeto prosta b^0, będąca odbiciem krawędzi b w zwierciedle, tworzy z prostą a kąt γ. Ponieważ promień OZ jest równoległy do a, więc promień, wykreślony z oka, a zawierający z nim kąt γ, będzie równoległy do b^0 i przebije tło w punkcie Z_2^0, którego rzutem



Rys. 315.

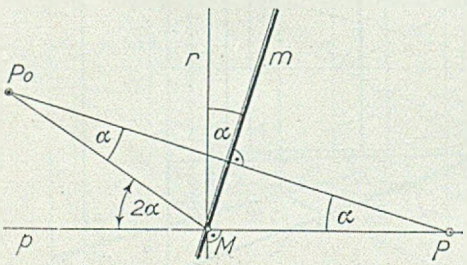
poziomym jest punkt $Z_2^{0'}$, leżący poza obszarem rysunku. Punkt Z_2^0 jest śladem zbiegu prostych poziomych, równoległych do prostej b^0. Prostopadła, wykreślona w punkcie O do promienia OZ_2^0, wyznaczy na hory-

zoncie ślad zbiegu Z_3^0 prostych poziomych, prostopadłych do prostej b^0. Rzut poziomy tego punktu oznaczony jest na rys. 314 znakiem $Z_3^{0'}$. Konstrukcyjnie sprowadza się rozwiązanie naszego zadania do wyznaczenia śladów zbiegu Z_2^0 i Z_3^0.

Przystąpmy do rysunku perspektywicznego (rys. 315). Przy danym horyzoncie, punkcie głównym O_s, oddaleniu tłowem $O_s — O^0$ i kącie γ, przyjmiemy ślad zbiegu Z, a wyznaczymy ślady Z_1, Z_2, Z_3, Z_2^0 i Z_3^0. Aby otrzymać perspektywę b_0^s prostej b_0, będącej odbiciem krawędzi b, połączymy punkt 1_s ze śladem Z_1 i odmierzymy perspektywicznie równe odcinki $1_s I_s = I_s 1_0^s$. W tym celu rzucimy punkt I_s z punktu mierzenia M_1 na prostą p_1, równoległą do linji podstawy p, odniesiemy $\overline{1_s I^\times} = \overline{I^\times 1_0^\times}$ i punkt $1_0^\times$ rzucimy z punktu M_1 na promień $1_s Z_1$, jako punkt 1_0^s. Ponieważ śladem zbiegu prostej b_0 jest punkt Z_2^0 (leżący w naszym przykładzie poza obszarem rysunkowym), więc łącząc go z punktem 1_0^s, otrzymamy prostą b_0^s. Możemy nie korzystać z punktu Z_2^0, gdyż prosta b_0^s przechodzi przez punkt P_s. Prosta $2_s — Z_1$ przetnie b_0^s w punkcie 2_0^s; sposób otrzymania punktów 3_0^s i 4_0^s odtworzymy wprost z rysunku.

Punktowi Z_3, jako śladowi zbiegu promieni, prostopadłych do lewej ściany wnętrza, odpowiada punkt Z_3^0, jako ślad zbiegu promieni, prostopadłych do odbitego w zwierciedle obrazu tej ściany. Łączymy punkty 2_0^s i 4_0^s ze śladem Z_3^0 a punkty 5_s i 6_s ze śladem Z_1. Otrzymane tym sposobem punkty 5_0^s i 6_0^s dopełniają rozwiązania zadania.

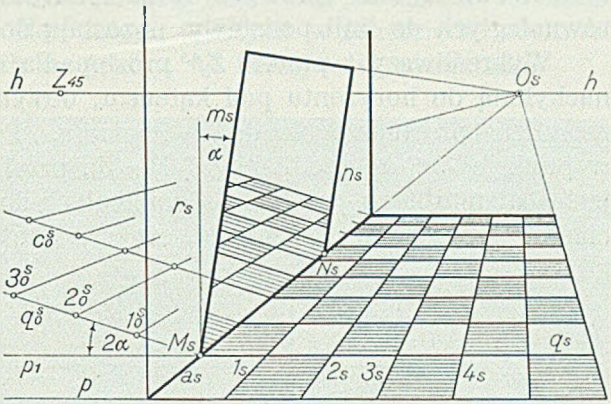
57. Przykłady odbić w zwierciadłach nachylonych do ściany pionowej. 1. *Wykreślić odbicie ornamentu podłogi w zwierciedle, którego płaszczyzna jest prostopadła do tła.* Jeżeli punkt P_0 (rys. 316) jest odbiciem punktu P w zwierciedle m, a r jest prostopadłe do p, to z uwagi na to, że także m jest prostopadłe do $P — P_0$, kąty, jakie tworzą proste m i r oraz prosta p z prostą $P — P_0$, są równe i równe kątowi α. Wobec tego kąt, jaki tworzy prosta p z prostą $M — P_0$, równy jest — jako kąt zewnętrzny trójkąta PP_0M — kątowi 2α.



Rys. 316.

Kąt, jaki płaszczyzna zwierciadła tworzy z pionową ścianą boczną (rys. 317), prostopadłą do tła, przedstawia się w prawdziwej wielkości, mianowicie równy jest kątowi α, jaki prosta r_s, poprowadzona w punkcie M_s prostopadle do horyzontu, zawiera z prostą m_s, stanowiącą perspektywę krawędzi zwierciadła. Krawędź ta jest równoległa do tła i leży wraz z prostą r na płaszczyźnie również do tła równoległej.

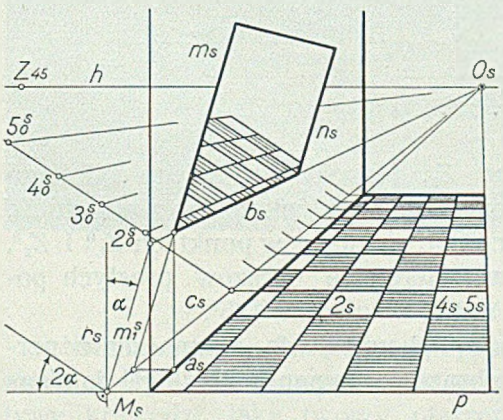
Wykreśliwszy z punktu M_s prostą q_0^s pod kątem 2α do linji podstawy p, względnie do prostej p_1, równoległej do poprzedniej, otrzymamy kierunek odbitych w zwierciedle obrazów wszystkich prostych, równoległych do linji podstawy p, względnie do horyzontu h. Odmierzywszy $M_s - 1_s = M_s - 1_0^s = 1_0^s - 2_0^s = 2_0^s - 3_0^s = \ldots$. i połączywszy punkty 1_0^s, 2_0^s, 3_0^s, ... z punktem głównym, dopełnimy rozwiązania zadania, gdyż obrazy odbite prostych, prostopadłych do tła, będą w tym wypadku również do tła prostopadłe, a ich perspektywy zbiegną się w punkcie głównym.



Rys. 317.

Jasnem jest, że gdyby kąt α wynosił 45°, to obrazy prostych, równoległych do linji podstawy, byłyby pionowe.

Rys. 318 podaje to samo zadanie z tą różnicą, że krawędź przecięcia się płaszczyzny zwierciadła ze ścianą wnętrza, na której jest umieszczone, nie schodzi się z krawędzią a, jaką ściana ta tworzy z płaszczyzną podłogi.

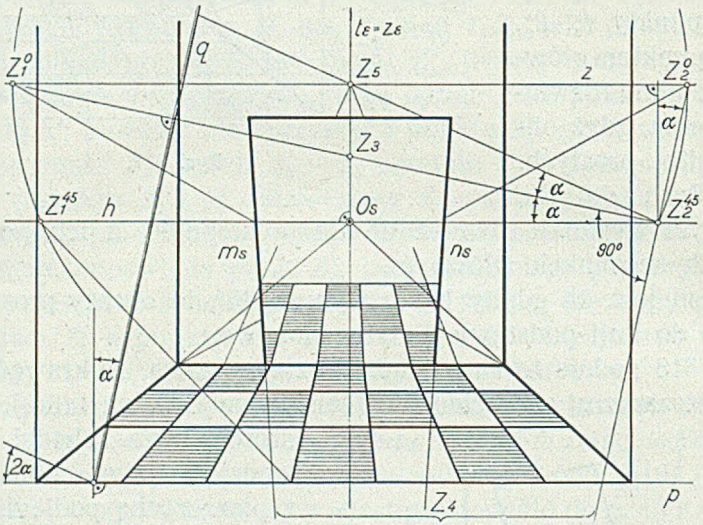


Rys. 318.

2. *Wykreślić perspektywę odbicia ornamentu podłogi w zwierciedle, nachylonem do ściany czołowej a równoległem do horyzontu* (rys. 319). Poprowadźmy przez oko główną płaszczyznę pionu ε i wyznaczmy przecięcie się jej z płaszczyzną podstawy, z tłem i z płaszczyzną zwierciadła; następnie położmy ją, wraz z otrzymanemi na niej punktami i prostemi, przez obrót około jej śladu tłowego t_ε, na tło. Kład oka zejdzie się z punktem oddalenia Z_2^{45}. Jeżeli zwierciadło zawiera z płaszczyzną pionową kąt α, to odchylenie od poziomu odbitych w zwierciedle promieni, prostopadłych do tła, wyniesie 2α (ust. 57, pkt. 1, rys. 316).

Punkt Z_5, w którym promień, leżący na głównej płaszczyźnie pionu, odchylony od poziomu o kąt 2α, przebija tło, jest śladem zbiegu odbitych w zwierciedle prostych, prostopadłych do tła. Odbicia prostych, równoległych do linji podstawy, pozostają do niej równoległe.

Wykreśliwszy z punktu Z_2^{45} prostopadłą do prostej q, a więc prostą, nachyloną do horyzontu pod kątem α, otrzymamy na z_t ślad zbiegu Z_3 promieni prostopadłych do zwierciadła. Prostopadła, poprowadzona w punkcie Z_2^{45} do promienia $Z_2^{45} - Z_3$, przetnie z_t w punkcie Z_4, który jest śladem zbiegu prostych, równoległych do krawędzi bocznych zwierciadła; przez punkt Z_4 przejdą więc także proste m_s i n_s. Prosta po-



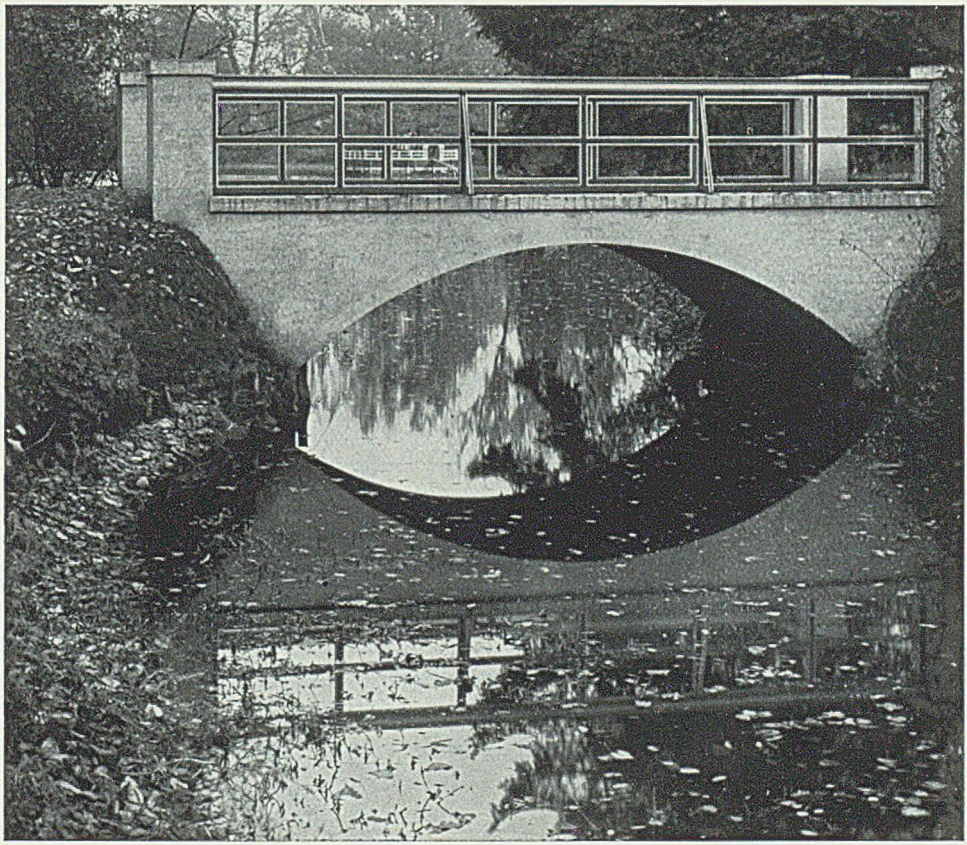
Rys. 319.

zioma z, poprowadzona przez ślad Z_5, jest śladem zbiegu odbitego w zwierciedle obrazu płaszczyzny poziomej. Koło, zakreślone z punktu Z_5, jako środka, promieniem $\overline{Z_5 Z_2^{45}}$, przetnie prostą z w punktach Z_1^0 i Z_2^0, które są śladami zbiegu odbitych w zwierciedle obrazów prostych poziomych, nachylonych do tła pod $\sphericalangle 45^0$, względnie 135^0.

Znajomość punktu Z_5 i np. śladu Z_1^0 umożliwia wyznaczenie perspektywy odbitego w zwierciedle obrazu ornamentu podłogi, jak nas o tem poucza rysunek 319.

3. *Na ścianie bocznej danego wnętrza wisi zwierciadło, nachylone do niej pod kątem α. Wykreślić perspektywę odbitej w zwierciedle szachownicy parkietu posadzki* (rys. 321). Podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, poprowadzimy przez oko płaszczyznę pionową ε, prostopadłą do płaszczyzny zwierciadła, poczem obrócimy ją około jej śladu tłowego t_ε, przechodzącego przez ślad zbiegu Z_1, na tło. Oko zejdzie się po tym

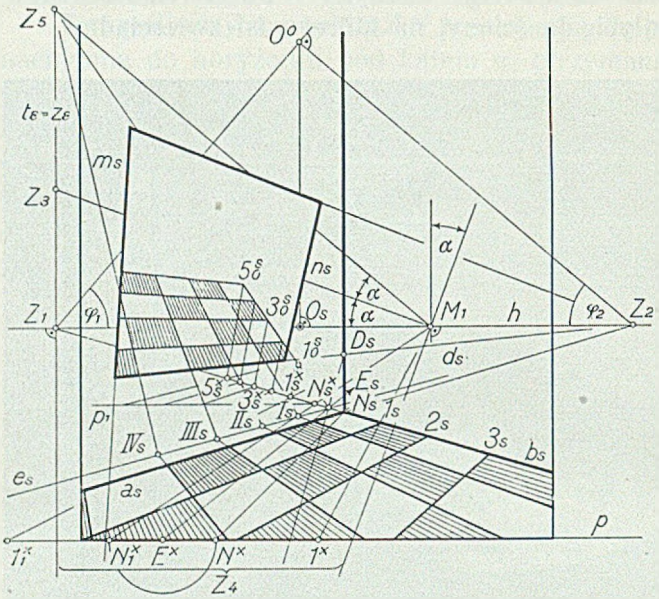
obrocie z punktem mierzenia M_1. W ten sam, co w rys. 319, sposób znajdziemy ślad zbiegu Z_3 promieni prostopadłych do zwierciadła i ślad zbiegu Z_4 prostych, równoległych do jego krawędzi bocznych. Wreszcie znajdziemy punkt Z_5, jako ślad zbiegu odbitych w zwierciedle obrazów linij prostych, prostopadłych do ściany, na której wisi zwierciadło.



Rys. 320. Klisza F. Bruckmanna, Monachjum

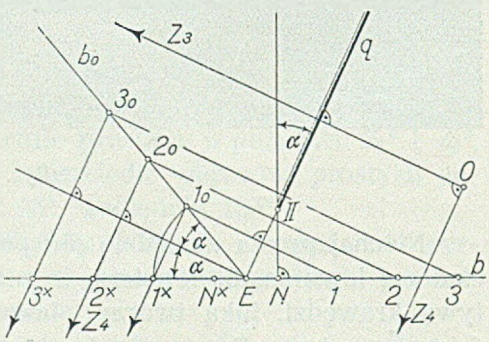
Niechaj prosta d_s będzie perspektywą krawędzi płaszczyzny zwierciadła z lewą ścianą wnętrza, to prosta $D_s - E_s - Z_4$ stanowi perspektywę krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna zwierciadła z drugą, prawą, ścianą wnętrza. Prosta e_s, łącząca ślad zbiegu Z_2 z punktem E_s, jest perspektywą prostej przecięcia się płaszczyzny zwierciadła z płaszczyzną podstawy (podłogi). Prosta, łącząca punkt E_s ze śladem zbiegu Z_5, jest perspektywą odbitej w zwierciedle krawędzi b; proste, łączące punkty I_s, II_s, III_s, ... ze śladem Z_5, są perspektywami odbitych w zwierciedle prostych, równoległych do krawędzi b.

Celem wyznaczenia perspektywy odbitych w zwierciedle prostych, równoległych do krawędzi a, a więc prostopadłych do krawędzi b, rozpatrzmy rys. 322. Prosta b_0 jest odbiciem w zwierciedle q prostej b, a punkty $1_0, 2_0, 3_0, \ldots$ obrazami punktów $1, 2, 3, \ldots$ tej prostej; proste, poprowadzone z punktów $1_0, 2_0, 3_0, \ldots$ równolegle do krawędzi zwierciadła, a więc równolegle do promienia OZ_4, przetną prostą b w punktach $1^\times, 2^\times, 3^\times, \ldots$ przyczem $E-1^\times = E-1$, $1^\times - 2^\times = 1-2$ i t. d. Szereg punktów $N^\times, 1^\times, 2^\times, \ldots$ uważać można za odbicie szeregu $N, 1, 2, \ldots$ w zwierciedle pionowem, przechodzącem przez krawędź e, jaką tworzy nasze ukośnie położone zwierciadło z płaszczyzną podstawy. Szeregi punktów $1_0, 2_0, 3_0, \ldots$ i $1^\times, 2^\times, 3^\times, \ldots$ uważać tedy można za obrazy wzajemnie odbite w zwierciedle, przechodzącem przez krawędź e a nachylonem do płaszczyzny poziomej pod kątem α. Na rys. 322 zwierciadło to uzmysławia dwusieczna kąta $3^\times E\, 3_0$.



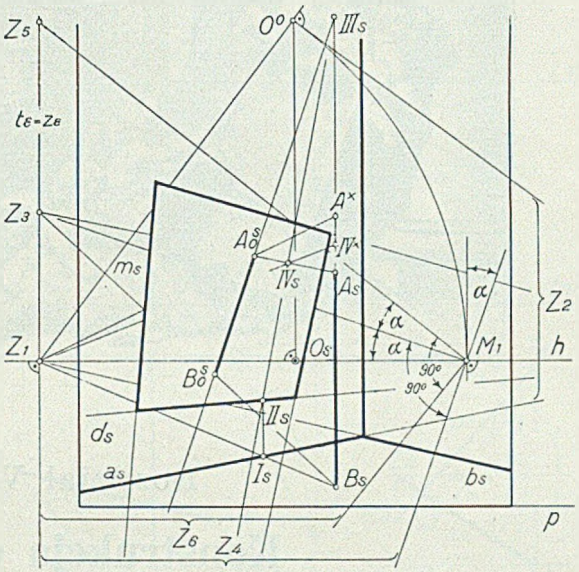
Rys. 321.

Aby więc otrzymać perspektywy odbitych w zwierciedle prostych, równoległych do krawędzi a (rys. 321), wyznaczymy na prostej b_s punkty $N_s^\times, 1_s^\times, 2_s^\times, \ldots$ przy uwzględnieniu, że $E-N = E-N^\times, N-1 = 1-2 = 2-3 = \ldots = N^\times - 1^\times = 1^\times - 2^\times = 2^\times - 3^\times = \ldots$ Otrzymane na prostej b_s punkty $N_s^\times, 1_s^\times, 2_s^\times, \ldots$ rzucimy z punktu Z_4 na prostą $E_s - Z_5$, a punkty $2_0^s, 3_0^s, 4_0^s, 5_0^s$ połączymy ze śladem zbiegu Z_2, dopełniając tym sposobem rozwiązania zadania.



Rys. 322.

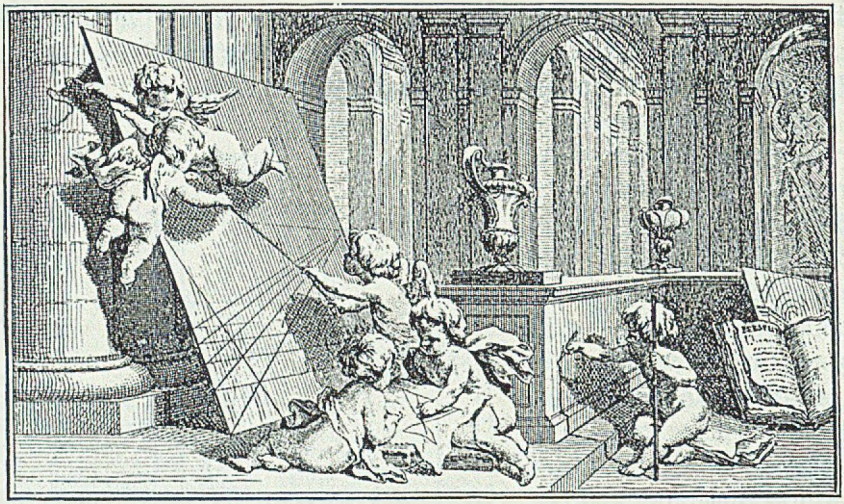
4. *Wykreślić obraz pionowego odcinka $\overline{AB}$, odbity w zwierciedle, nachylonem do lewej ściany wnętrza pod kątem* α (rys. 323). Analogicznie do zadania poprzedniego znajdziemy ślady zbiegu Z_3, Z_4 i Z_5, poczem wykreślimy perspektywę krawędzi płaszczyzny zwierciadła z płaszczyzną ε, poprowadzoną przez odcinek $\overline{AB}$ prostopadle do zwierciadła. Płaszczyzna ε przecina płaszczyznę podstawy wzdłuż krawędzi, której perspektywą jest prosta $B_s - Z_1$, płaszczyznę pionową wnętrza wzdłuż prostej, której obraz perspektywiczny określony jest punktami I_s i II_s, a płaszczyznę zwierciadła wzdłuż krawędzi, której perspektywa przechodzi przez punkt II_s i ślad zbiegu Z_4.



Rys. 323.

Prosta $Z_1 - II_s$ przecina prostą $A_s - B_s$ w punkcie III_s, a promień $Z_3 - A_s$ w punkcie IV_s; punkt IV_s jest perspektywą punktu przebicia się promienia, wyprowadzonego z punktu A prostopadle do płaszczyzny zwierciadła, z tą płaszczyzną. Oddalenie punktu odbitego A_0 od punktu IV równe jest oddaleniu punktu A od punktu IV. Przyjmując ślad zbiegu Z_1 za punkt dzielenia, rzucimy punkt IV_s na prostą $III_s - A_s$, odmierzymy $IV^\times - A^\times = IV^\times - A_s$ i punkt $A^\times$ połączymy z Z_1. Punkt A_0^s przecięcia się promieni $Z_3 - A_s$ i $Z_1 - A^\times$ jest perspektywą odbitego w zwierciedle punktu A, prosta zaś $III_s - A_0^s$ perspektywą odbitej w zwierciedle pionowej prostej $III - B$. Punkt B_s, połączony ze śladem zbiegu Z_3, wyznacza na promieniu $III_s - A_0^s$ punkt B_0^s.

Punkt Z_5 jest śladem zbiegu odbitych w zwierciedle obrazów linij prostych, prostopadłych do lewej ściany wnętrza, czyli równoległych do krawędzi b; punkt Z_6, w którym prosta, poprowadzona w punkcie M_1 prostopadle do promienia $Z_5 - M_1$, przetnie ślad zbiegu z_ε, jest śladem zbiegu wszystkich prostych, stanowiących odbite obrazy prostych pionowych, t. j. prostopadłych do poprzedniego kierunku. Prosta $III_s - A_0^s - B_0^s$ przejdzie więc przez ślad zbiegu Z_6, leżący w naszym przypadku poza obrębem rysunku.



Rozdział VI.

Konstrukcja cieni.

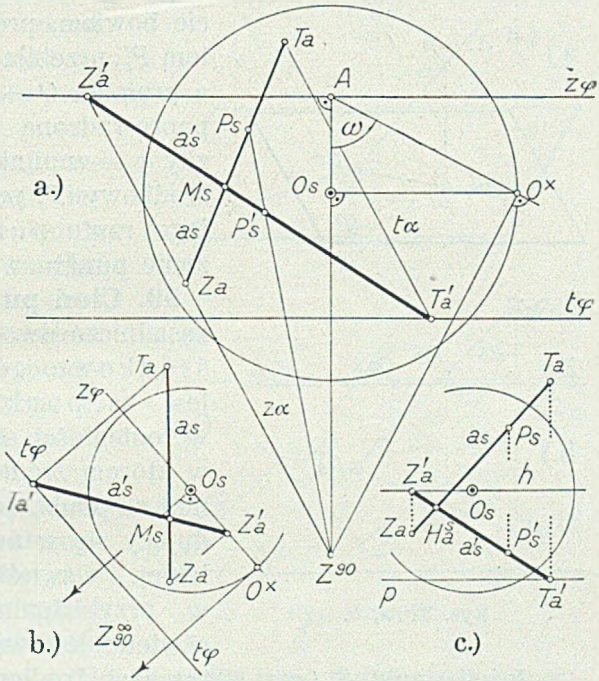
58. Związek między perspektywą prostej a perspektywą jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę. Wiadomo, że rzutem prostokątnym prostej a na płaszczyznę φ jest prosta, podług której płaszczyzna, przechodząca przez prostą a, prostopadła do płaszczyzny φ, tę płaszczyznę przecina.

Płaszczyzny zbiegu płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny φ przejdą przez promień, prostopadły do płaszczyzny zbiegu płaszczyzny φ (a przechodzący przez oko), wobec czego ślady zbiegu tych płaszczyzn przejdą przez punkt Z^{90}, jako ślad tego prostopadłego promienia na tle.

Aby więc wykreślić perspektywę rzutu prostokątnego prostej a, wyznaczonej śladami T_a i Z_a (rys. 325a), na płaszczyznę φ, której ślady t_φ i z_φ są dane, znajdziemy przedewszystkiem ślad zbiegu Z^{90} prostych, prostopadłych do tej płaszczyzny. Prosta z_α, łącząca ślad Z^{90} ze śladem zbiegu Z_a prostej a, jest śladem zbiegu płaszczyzny α, przechodzącej przez tę prostą, prostopadle do płaszczyzny φ; ślad tłowy t_α płaszczyzny α przejdzie oczywiście przez ślad tłowy T_a prostej a, równolegle do z_α. Krawędź płaszczyzn φ i α jest rzutem prostokątnym prostej a na płaszczyznę φ. Obrazem perspektywicznym tej krawędzi jest prosta a'_s, łącząca punkty Z_a' i T_a'.

Rysunek z dzieła: M. Edme-Sebastian Jeaurat, Traité de Perspective, Paris 1750.

Ślad zbiegu Z_a' rzutu prostokątnego a' prostej a na daną płaszczyznę φ leży więc zawsze na śladzie zbiegu tej płaszczyzny, a to jako punkt przecięcia się tego śladu z prostą, łączącą ślad zbiegu Z_a danej prostej ze śladem zbiegu Z^{90} płaszczyzny φ. Wynika stąd, że jeżeli płaszczyzna φ jest prostopadła do tła (rys. 325 *b*), to prosta, łącząca ślad zbiegu Z_a prostej a ze śladem zbiegu Z_a' jej rzutu prostokątnego a' na płaszczyznę φ, jest prostopadłą do śladów tej płaszczyzny. W szczególności, jeśli płaszczyzna φ jest płaszczyzną poziomą (rys. 325 *c*), to ślad zbiegu Z_a prostej a i ślad zbiegu Z_a' jej prostokątnego rzutu na tę płaszczyznę leżą na prostej, prostopadłej do horyzontu, względnie linji podstawy.



Rys. 325 *a*, *b*, *c*.

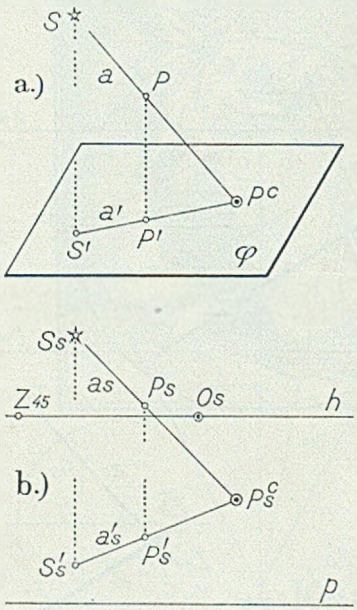
Ślad tłowy T_a' rzutu prostokątnego a' prostej a na płaszczyznę φ, leży zawsze na śladzie tłowym tej płaszczyzny, a to jako punkt przecięcia się tego śladu z prostą, przechodzącą przez ślad tłowy T_a prostej a, równolegle do promienia, łączącego jej ślad zbiegu ze śladem Z^{90} płaszczyzny φ. Gdy płaszczyzna φ jest poziomą, to prosta $T_a - T_a'$, równoległa do $Z_a - Z_a'$, jest prostopadłą do horyzontu.

Z powyższego wynika też bezpośrednio, że przy danym śladzie tłowym i śladzie zbiegu prostej wyznaczona jest równocześnie perspektywa jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę.

Punkt M_a (rys. 325 *a* i 325 *b*) przecięcia się prostych a_a i a_a' jest — jak to bezpośrednio widzimy — perspektywą punktu przebicia się prostej a z płaszczyzną φ. W rys. 325 *c* prosta a przebija płaszczyznę podstawy w punkcie H_a, który nosi zazwyczaj miano jej śladu poziomego.

Punkt P_a, przyjęty na prostej a_a (rys. 325 *a*), jest perspektywą punktu P prostej a; punkt P_a', w którym promień $P_a Z_{90}$ przecina prostą a_a', jest perspektywą rzutu prostokątnego P' punktu P na płaszczy-

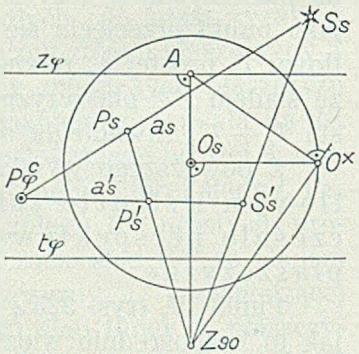
znę φ, nachyloną do tła pod kątem ω. Rzut środkowy P_s punktu P i rzut środkowy P'_s jego rzutu prostokątnego na daną płaszczyznę φ wyznaczają położenie tego punktu w przestrzeni. W istocie bowiem, promień, łączący oko O z punktem P'_s, przebija płaszczyznę φ w punkcie P', a promień $O - P_s$ przecina prostopadłą — poprowadzoną w punkcie P' do płaszczyzny φ — w punkcie P. Oczywiście, także rzut środkowy P_s punktu P i rzut środkowy P'_s jego rzutu poziomego wyznaczają położenie punktu w przestrzeni (rys. 325 *c*).



Rys. 326 *a*, *b*.

59. Cień punktu. Rozróżniać będziemy zasadniczo dwojakiego rodzaju oświetlenie: środkowe, gdzie źródło światła uważane jest za punkt właściwy, więc leżący w odległości skończonej, i równoległe, w którem źródło światła uważane jest również za punkt, jednak niewłaściwy, t. j. znajdujący się w odległości nieograniczenie dalekiej. Oświetlenie środkowe odpowiada w przybliżeniu oświetleniu sztucznemu; oświetlenie równoległe — słonecznemu.

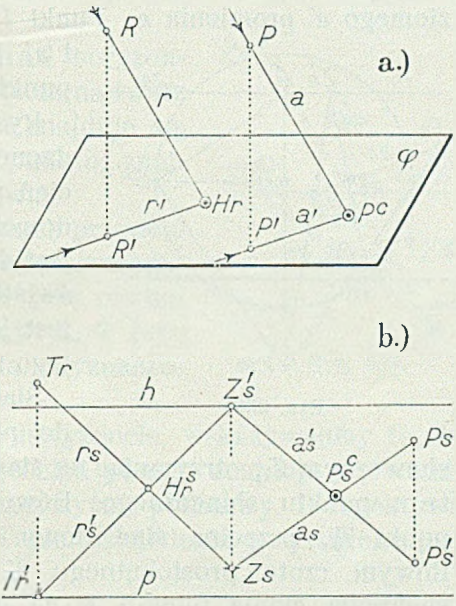
Jeżeli punkt S (rys. 326 *a*) jest źródłem światła a punkt S' jego rzutem prostokątnym na daną płaszczyznę φ, to cień P^c punktu P na tę płaszczyznę, którego rzutem prostokątnym na nią jest punkt P', otrzymamy, jako przecięcie się promienia a światła z rzutem poziomym a' tego promienia. W ten sposób otrzymany punkt P^c jest śladem promienia a, przechodzącego przez punkt P, z płaszczyzną φ.



Rys. 327.

Aby zadanie rozwiązać, w perspektywie musi być wyznaczone położenie punktu S, jako źródła światła, i punktu P, jako tego, który cień rzuca. Oba wyznaczymy ich perspektywami S_s i P_s (rys. 327) i perspektywami S'_s i P'_s ich rzutów prostokątnych na płaszczyznę φ. Prosta a_s, łącząca punkty S_s i P_s, jest perspektywą promienia a, rzucającego cień punktu P na płaszczyznę φ, a prosta a'_s, łącząca punkty S'_s i P'_s, perspektywą rzutu poziomego tego promienia. Punkt P^c_φ przecięcia się promieni a_s i a'_s jest obrazem perspektywicznym cienia P^c

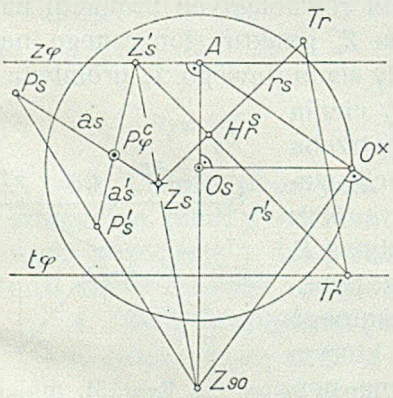
punktu P, na płaszczyznę φ. Perspektywę P_s^c cienia punktu P na poziomą płaszczyznę podstawy podaje rys. 326 *b*. Zwróćmy uwagę, że położenie punktu P_s^c nie jest zależne ani od położenia punktu głównego, ani od oddalenia tłowego, ani też od położenia i wysokości horyzontu.



Rys. 328 *a*, *b*.

Wyznaczenie cienia punktu przy oświetleniu równoległem uwarunkowane jest oczywiście znajomością kierunku światła. Jeżeli kierunek ten dany jest promieniem r (rys. 328 *a*), którego śladem na płaszczyźnie φ jest punkt H_r, to prosta r', łącząca punkt H_r z rzutem prostokątnym R', dowolnego punktu R promienia r na płaszczyznę φ, jest rzutem prostokątnym kierunku światła na tę płaszczyznę.

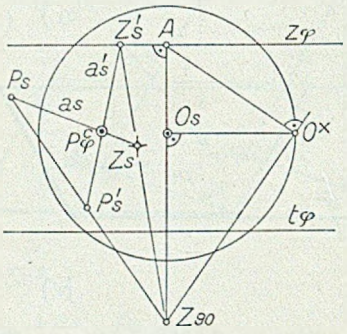
Promień a, poprowadzony przez punkt P, równolegle do kierunku r, przetnie się ze swoim rzutem prostokątnym a' (równoległym do r') w punkcie P^c, który jest cieniem punktu P, na płaszczyznę φ. Rozwiązanie tego zadania w perspektywie, z założeniem, że płaszczyzną φ, t. j. tą, na którą cień pada, jest płaszczyzna podstawy, podaje rys. 328 *b*. Kierunek r światła wyznaczony jest swoim śladem tłowym T_r i śladem zbiegu, który stale oznaczać będziemy literą Z_s. Położenie punktu P, o którego cień chodzi, wyznacza jego perspektywa P_s i perspektywa P_s' jego rzutu poziomego.



Rys. 329.

Z ustępu poprzedniego wiemy, że rzut prostokątny Z_s' punktu Z_s na horyzont jest śladem zbiegu, a prostokątny rzut T_r' śladu T_r na linję podstawy, śladem tłowym rzutu poziomego promienia r. Tak więc prosta r_s' jest perspektywą rzutu poziomego prostej r, punkt Z_s śladem zbiegu wszystkich promieni światła, równoległych do kierunku r, a punkt Z_s' śladem zbiegu rzutów poziomych tych promieni. Punkt Z_s nazywać będziemy stale *punktem słonecznym*, a punkt Z_s' rzutem tego punktu.

Prosta a_s, łącząca punkt słoneczny Z_s z punktem P_s, jest perspektywą promienia a, przechodzącego przez punkt P, prosta zaś a'_s, łącząca rzut Z'_s punktu słonecznego z punktem P'_s, jest perspektywą rzutu poziomego a' promienia a. Punkt P^c_s, w którym przecinają się proste a_s i a'_s, jest obrazem perspektywicznym cienia punktu P na płaszczyznę podstawy.

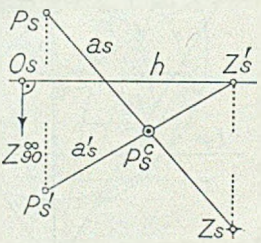


Rys. 330.

Rys. 329 podaje uogólnienie przeprowadzonego w rys. 328 *b* zadania, a mianowicie cień punktu P na płaszczyznę φ, nachyloną dowolnie do tła. Podobnie, jak tam, dany jest ślad tłowy T_r i ślad zbiegu Z_s kierunku światła, a położenie punktu P oznaczone jest jego perspektywą P_s i perspektywą P'_s jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę φ.

Ślad zbiegu Z_{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny φ, połączymy z punktem słonecznym Z_s, otrzymując na śladzie zbiegu z_φ punkt Z'_s, nazwany r z u t e m punktu słonecznego. Równoległa do $Z'_s - Z_{90}$, wykreślona przez punkt T_r, przecina ślad tłowy t_φ w punkcie T'_r, który jest śladem tłowym rzutu prostokątnego r'_s, prostej r na płaszczyznę φ. Perspektywą cienia punktu P na płaszczyznę φ jest punkt P^c_φ przecięcia się prostej a_s, przechodzącej przez punkty Z_s i P_s, z prostą a'_s, łączącą punkty P'_s i Z'_s.

Ponieważ k i e r u n e k prostej wyznaczony jest w perspektywie jej śladem zbiegu, więc kierunek równoległych promieni światła wyznaczony jest punktem słonecznym Z_s; kierunek rzutu równoległych promieni na daną płaszczyznę wyznaczony jest rzutem Z'_s punktu słonecznego na ślad zbiegu tej płaszczyzny. Znajomość tedy śladu tłowego T_r promienia światła r jest dla wyznaczenia perspektywy cienia punktu zbędną, a, co za tem idzie, odpada potrzeba kreślenia prostych r_s i r'_s. Istotną konstrukcję cienia punktu P na płaszczyznę φ podaje rys. 330: dany punkt słoneczny Z_s łączymy z perspektywą P_s punktu P, a rzut Z'_s punktu słonecznego z punktem P'_s, t. j. z perspektywą rzutu prostokątnego punktu P na płaszczyznę φ. Punkt P^c_φ, w którym przecinają się proste a_s i a'_s, jest szukaną perspektywą cienia punktu P na płaszczyznę φ.

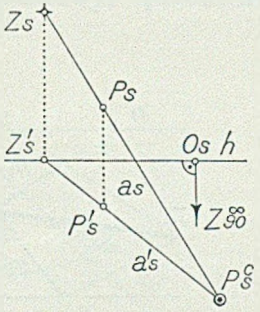


Rys. 331.

Co się tyczy położenia punktu słonecznego, to w odniesieniu do horyzontu zajmować on może trojakie położenie: może znajdować się p o d horyzontem, n a d horyzontem i wreszcie może być punktem niewłaściwym, oznaczonym kierunkiem.

Jeżeli — jak w rys. 331 — punkt słoneczny leży pod horyzontem, to źródło światła znajduje się przed tłem, czyli za widzem obserwującym obraz, w następstwie czego cień oddala się od tła, a więc i od obserwatora.

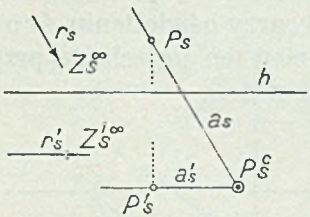
Jeżeli punkt słoneczny Z_s leży nad horyzontem (rys. 332), to dowodzi, że światło pada na twarz obserwatora, że zatem źródło światła znajduje się przed rysownikiem. Wtedy też cień punktu, znajdującego się za tłem, pada ku widzowi.



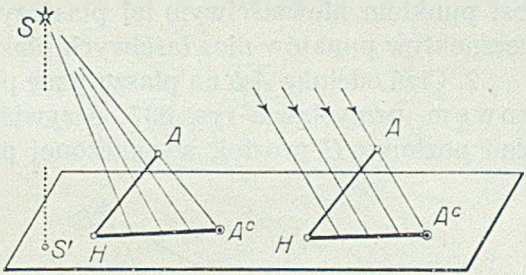
Rys. 332.

Jeżeli wreszcie założymy, że kierunek promieni światła jest równoległy do tła, to wówczas perspektywa rzutu poziomego tego kierunku jest równoległa do horyzontu, punkt słoneczny Z_s i jego rzut Z'_s są punktami niewłaściwemi tła, wyznaczonemi kierunkami r_s i $r'_s // h$ (rys. 333).

Gdyby punkt słoneczny leżał na horyzoncie, wskazywałoby to, że kierunek światła jest poziomy, że więc cień punktu znajduje się w odległości nieograniczenie dalekiej na płaszczyźnie podstawy. Perspektywa tego cienia leżałaby na horyzoncie. Takie oświetlenie pozbawione jest praktycznego znaczenia.



Rys. 333.



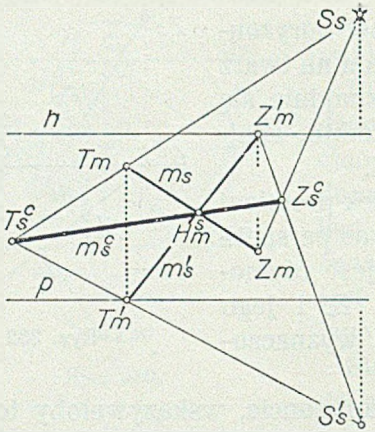
Rys. 334.

60. Cienie prostych. Promienie światła, przechodzące przez poszczególne punkty odcinka (rys. 334), tworzą płaszczyznę, której krawędź przecięcia z daną płaszczyzną jest cieniem odcinka na nią. Odnosi się to zarówno do oświetlenia środkowego, jak i równoległego.

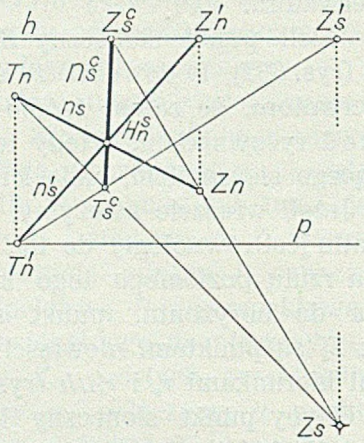
A. Cienie prostych na płaszczyznę podstawy.

1. Jeżeli prosta m (rys. 335), wyznaczona śladem tłowym T_m i śladem zbiegu Z_m, oświetlona jest środkowo, to, celem wyznaczenia jej cienia na płaszczyznę podstawy, znajdziemy najpierw perspektywę m'_s jej rzutu poziomego, a następnie cienie rzucone T^c_s i Z^c_s jej śladów. Prosta m^c_s, łącząca oba otrzymane punkty, jest perspektywą cienia prostej m na płaszczyznę podstawy i przechodzi przez punkt H^s_m, t. j. przez perspektywę śladu poziomego tej prostej.

Konstrukcję cienia prostej n, wyznaczonej śladami, oświetlonej jednak równolegle, podaje rys. 336. Wynika z niej, że perspektywa cienia punktu niewłaściwego prostej, t. j. punkt Z_s^c, leży na horyzoncie. W istocie



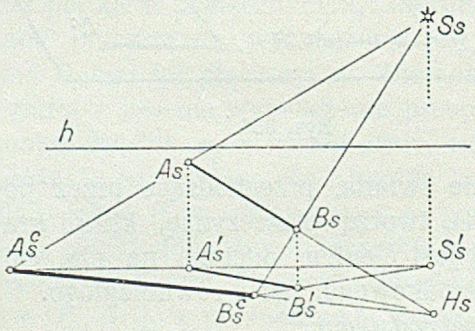
Rys. 335.



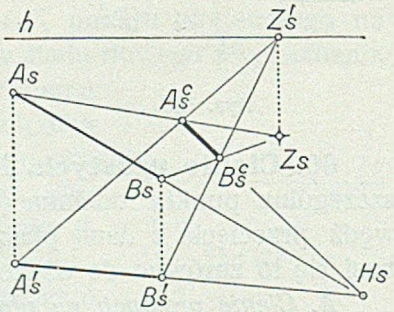
Rys. 336.

bowiem, cień punktu niewłaściwego prostej n na płaszczyznę podstawy jest punktem niewłaściwym tej płaszczyzny, a miejscem geometrycznem perspektyw punktów niewłaściwych płaszczyzny podstawy jest horyzont.

2. Cień odcinka $\overline{AB}$ na płaszczyznę podstawy, przy oświetleniu środkowem, uzmysławia rys. 337; oczywiście, że cień ten przechodzi przez ślad poziomy H prostej, wyznaczonej punktami A i B.



Rys. 337.



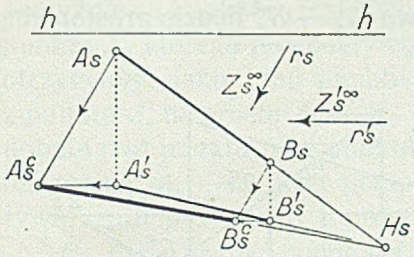
Rys. 338.

Konstrukcję cienia tego samego odcinka, przy oświetleniu równoległem, widzimy na rys. 338, a przy oświetleniu równoległem i równoległem do tła na rys. 339.

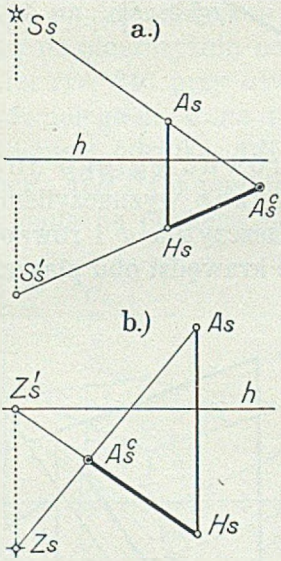
3. Konstrukcję cienia odcinka pionowego, przebijającego płaszczyznę podstawy w punkcie H, podają rys. 340a, b — pierwszy

przy oświetleniu środkowem, drugi przy oświetleniu równoległem. Punkt H uważać tu należy za rzut poziomy punktu A.

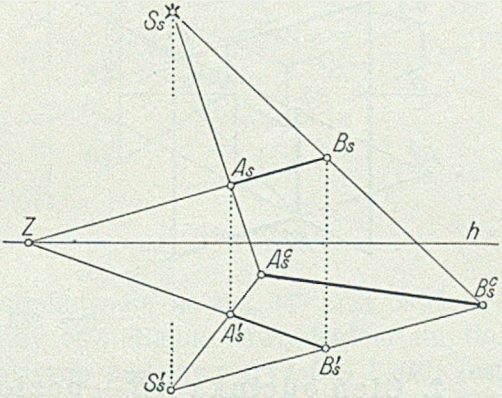
4. Cienie odcinka, równoległego do płaszczyzny podstawy, przedstawiają rys. 341 i 342.



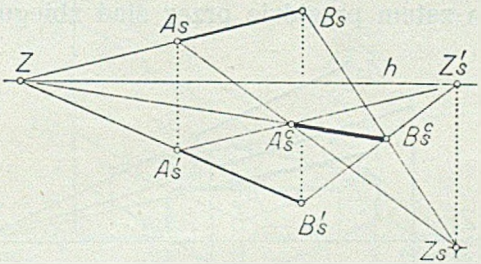
Rys. 339.



Rys. 340 *a*, *b*.



Rys. 341.



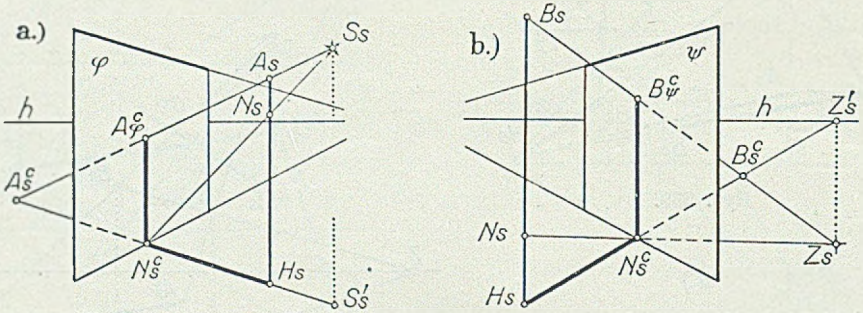
Rys. 342.

B. Cienie prostych na płaszczyzny pionowe.

1. Cień odcinka pionowego $\overline{AH}$ na płaszczyznę pionową φ, przy oświetleniu środkowem, podaje rys. 343 *a*; cień odcinka pionowego $\overline{BH}$ na pionową płaszczyznę ψ, przy oświetleniu równoległem, widzimy na rys. 343 *b*.

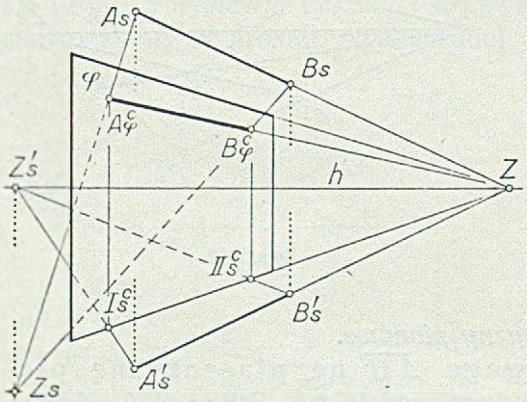
Płaszczyzna podstawy, płaszczyzna φ (rys. 343 *a*) i płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek $\overline{AH}$, przecinają się w punkcie, którego perspektywą jest punkt N_s^c, a który jest równocześnie cieniem punktu N tego odcinka na płaszczyznę podstawy. Perspektywą punktu N jest punkt N_s przecięcia się promienia $N_s^c S_s$ z prostą $A_s H_s$.

Odcinek $\overline{AH}$ jest równoległy do płaszczyzny φ, więc cień jego na tę płaszczyznę jest do niego równoległy, a ponieważ płaszczyzna φ i odcinek $\overline{AH}$ są pionowe, więc i cień jego na płaszczyźnie φ będzie odcinkiem pionowym, którego perspektywa $A^c_\varphi - N^c_s$ będzie prostopadłą do horyzontu.

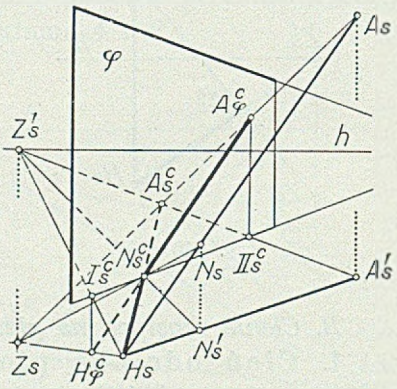


Rys. 343 *a*, *b*.

2. Cień odcinka $\overline{AB}$ — poziomego i równoległego do pionowej płaszczyzny φ — na tę płaszczyznę wyznaczyliśmy na rys. 344. Oczywiście, że cień ten, leżący na płaszczyźnie φ i równoległy do płaszczyzny podstawy, będzie równoległy do krawędzi obu płaszczyzn, a zatem przejdzie przez ślad zbiegu Z.



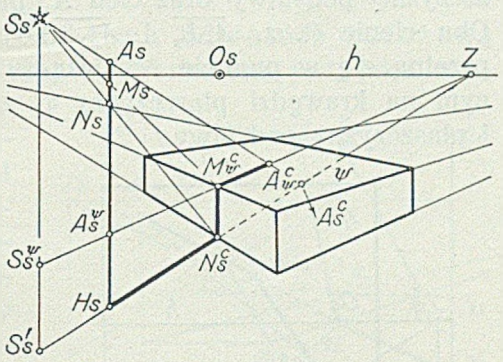
Rys. 344.



Rys. 345.

3. Cień dowolnie w przestrzeni leżącego odcinka $\overline{AH}$ na płaszczyznę pionową φ wykreśliliśmy na rys. 345. Odcinek, ograniczony punktem H_s i punktem A^c_s, t. j. cieniem punktu A na płaszczyznę podstawy, jest cieniem odcinka $\overline{AH}$ na tę płaszczyznę. Wyznaczmy cienie A^c_φ i H^c_φ punktów A i H na płaszczyznę φ. Punkt N^c_s, w którym

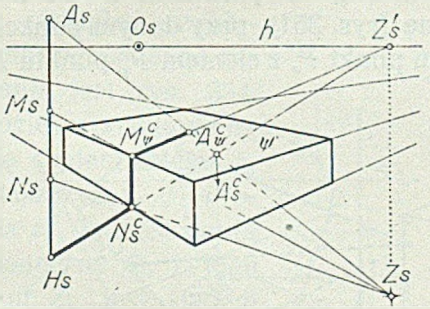
przecinają się proste $A_s^c - H_s$, $A_\varphi^c - H_\varphi^c$ i ślad poziomy płaszczyzny φ, jest punktem załamania się cienia, leżącego częściowo na płaszczyźnie podstawy a częściowo na płaszczyźnie φ. Punkt ten jest cieniem punktu N, którego perspektywę N_s otrzymamy, jako rzut punktu N_s^c z punktu Z_s na prostą $A_s - H_s$. Podobnie rzut punktu N_s^c z punktu Z_s' na prostą $A_s' - H_s$ jest perspektywą rzutu poziomego punktu N.



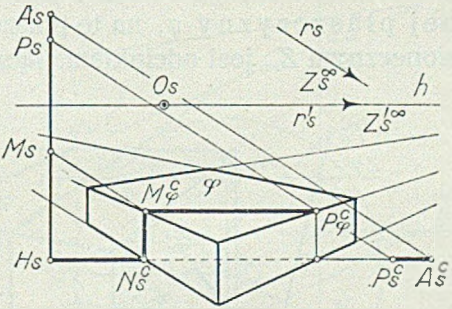
Rys. 346.

C. Cień prostej pionowej na płaszczyznę poziomą. Jako przykłady, wykreśliliśmy cień odcinka $\overline{AH}$ na graniastosłup prosty, stojący na płaszczyźnie podstawy, a to na rys. 346 przy oświetleniu środkowem, na rys. 347 przy oświetleniu równoległem, a na rys. 348 przy oświetleniu równoległem do tła.

Cieniem odcinka $\overline{AH}$ na płaszczyznę podstawy (rys. 346 i 347) jest odcinek $\overline{A_s^c H_s}$. Od punktu N_s^c do M_ψ^c cień leży na ścianie bocznej, poczem pada na poziomą płaszczyznę ψ. Ponieważ ta ostatnia jest równo-



Rys. 347.



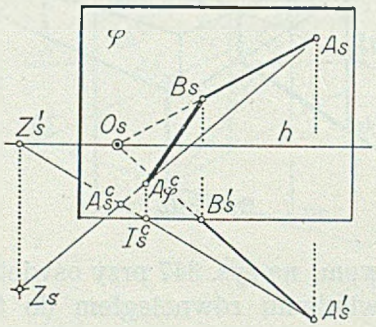
Rys. 348.

legła do płaszczyzny podstawy, więc cienie odcinka na te obie płaszczyzny są do siebie równoległe. Perspektywy ich posiadają zatem wspólny ślad zbiegu, którym, przy oświetleniu równoległem (rys. 347), jest rzut punktu słonecznego.

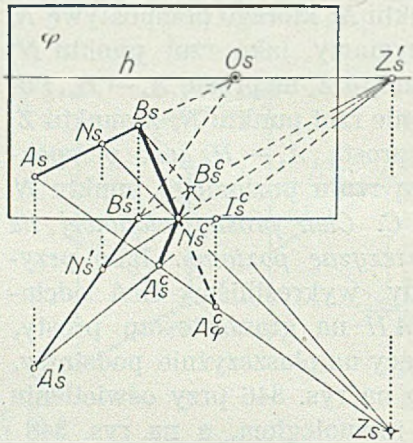
D. Cień prostej, prostopadłej do płaszczyzny czołowej.

1. Odcinek $\overline{AB}$ rzuca cień tylko na płaszczyznę czołową (rys. 349). Jeżeli $\overline{A_s B_s}$ jest perspektywą odcinka, prostopadłego do tła, a odcinek $\overline{A_s' B_s'}$ perspektywą jego rzutu poziomego, to perspektywą cienia odcinka $\overline{AB}$ na czołową płaszczyznę φ jest odcinek $\overline{A_\varphi^c B_s}$, gdyż punkt B_s — według założenia — leży na płaszczyźnie φ.

2. Odcinek $\overline{AB}$ rzuca cień częściowo i na płaszczyznę podstawy (rys. 350). Znajdziemy cienie A_s^c i B_s^c punktów A i B na płaszczyznę podstawy oraz cień A_φ^c punktu A na płaszczyznę czołową φ. Oba cienie (t. z. $\overline{A_s^c B_s^c}$ i $\overline{A_\varphi^c B_s}$) przetną się w punkcie N_s^c, leżącym na krawędzi płaszczyzny φ i płaszczyzny podstawy.



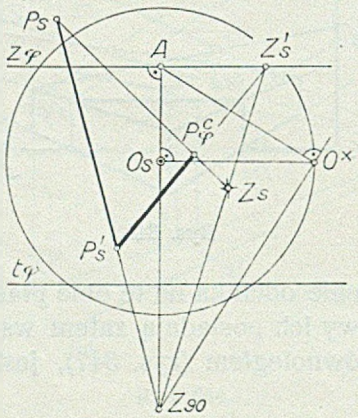
Rys. 349.



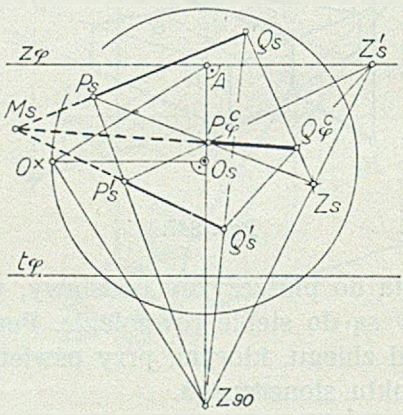
Rys. 350.

E. Cień prostej na płaszczyznę dowolną.

1. Cień odcinka $\overline{PP'}$, prostopadłego w punkcie P' do danej płaszczyzny φ, na tę płaszczyznę (rys. 351), przy danym punkcie słonecznym Z_s, jest odcinkiem, łączącym punkt P_s' z cieniem P_φ^c punktu P.



Rys. 351.

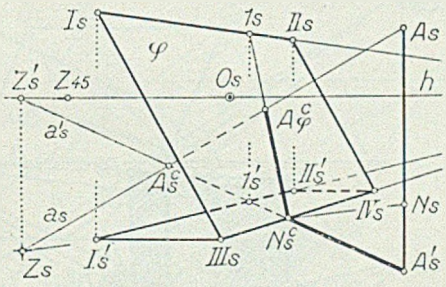


Rys. 352.

2. Cień dowolnie położonego odcinka na dowolną płaszczyznę φ (rys. 352). Położenie odcinka $\overline{PQ}$ wyznaczone jest jego perspektywą $\overline{P_s Q_s}$ i perspektywą $\overline{P_s' Q_s'}$ jego rzutu prostokątnego na —

wyznaczoną śladami — płaszczyznę φ. Punkt M_s przecięcia się obu perspektyw jest obrazem punktu przebicia się prostej PQ z płaszczyzną φ; przez punkt ten przejdzie cień $P^c_\varphi Q^c_\varphi$.

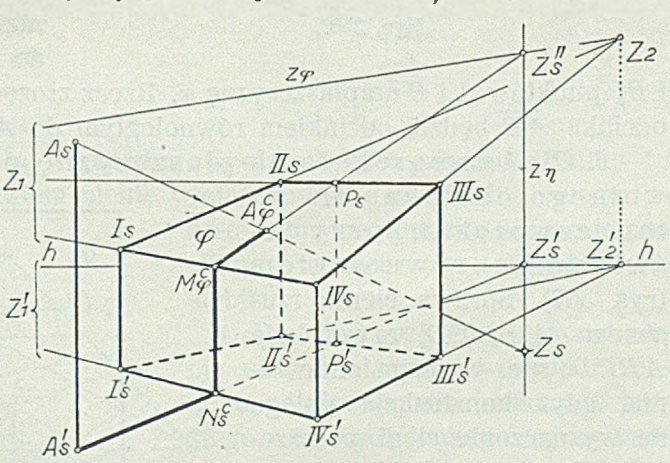
3. Cień odcinka pionowego $\overline{AA'}$ na dowolnie położoną płaszczyznę φ (rys. 353). Płaszczyzna φ wyznaczona jest, jako równoległobok, którego perspektywa $I_s II_s III_s IV_s$ i perspektywa rzutu poziomego są dane. Cieniem punktu A na płaszczyznę φ jest punkt przebicia się promienia światła a, przechodzącego przez ten punkt, z tą płaszczyzną. Promień ten wyznaczony jest swą perspektywą a_s i perspektywą a'_s swego rzutu poziomego. Płaszczyzna pionowa ϱ, poprowadzona przez promień a, przetnie wielościan, ograniczony danym równoległobokiem i jego rzutem poziomym, w trójkącie $1 — 1' — N$.



Rys. 353.

Punkt A^c_φ przecięcia się krawędzi $1_s N^c_s$ z promieniem a_s jest cieniem punktu A na płaszczyznę φ, a linja łamana $A^c_\varphi — N^c_s — A'_s$ cieniem odcinka $\overline{AA'}$.

Drugim przykładem tego samego zadania jest rys. 354, gdzie posługujemy się śladem zbiegu z_φ płaszczyzny φ. Prosta z_η, łącząca punkt słoneczny Z_s i jego rzut Z'_s, jest śladem zbiegu płaszczyzny światła η, przechodzącej przez prostą pionową $A—A'$ i przecinającej graniastosłup w czworokącie, którego perspektywą jest czworokąt $M^c_\varphi P_s P'_s N^c_s$. Punkt Z''_s jest śladem zbiegu krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna φ z płaszczyzną η.

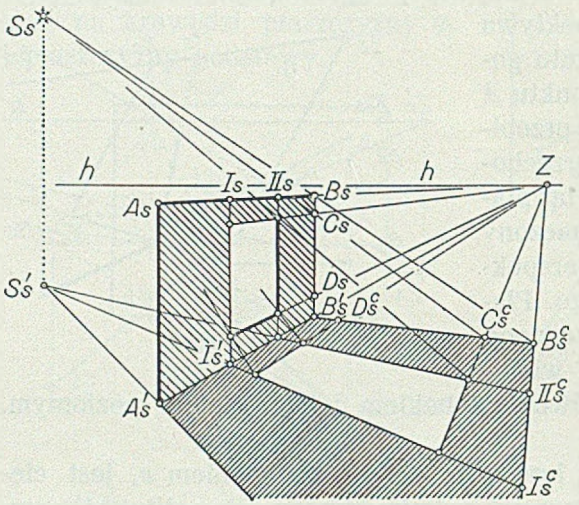


Rys. 354.

61. Cienie wielokątów. Płaszczyzny światła, przechodzące przez boki wielokąta, utworzą — przy oświetleniu środkowem — ostrosłup, a przy równoległem graniastosłup, którego przekrój płaszczyzną jest cieniem wielokąta na nią. Zadanie wyznaczenia cienia wielokąta na pła-

szczyznę sprowadza się z reguły do wyznaczenia cienia poszczególnych jego wierzchołków, względnie boków.

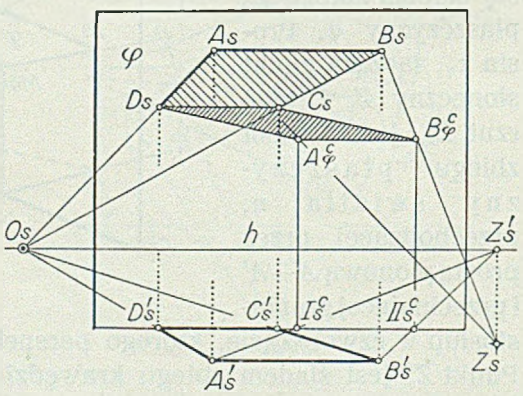
1. Przykład cienia prostokąta na płaszczyznę podstawy, przy oświetleniu środkowem, podaje rys. 355, przedstawiający pionową ścianę z otworem. Konstrukcja nie wymaga bliższych wyjaśnień. Widoczna strona ściany odwrócona jest od światła, czyli znajduje się w cieniu własnym.



Rys. 355.

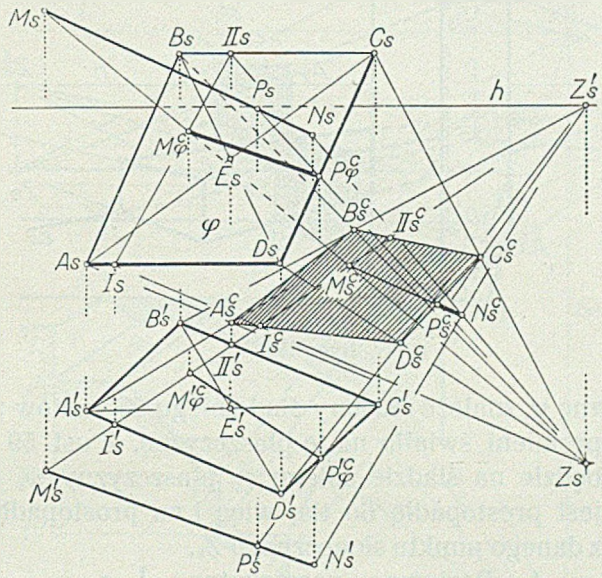
2. Cień poziomego prostokąta, którego bok leży na czołowej płaszczyźnie φ (rys. 356). Perspektywa $A_s B_s C_s D_s$ prostokąta i perspektywa $A'_s B'_s C'_s D'_s$ jego rzutu poziomego, podobnie, jak i punkt słoneczny Z_s, są dane. Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia cieni A^c_φ i B^c_φ punktów A i B na płaszczyznę φ. Rzecz zrozumiała, że cień $A^c_\varphi - B^c_\varphi$ odcinka $\overline{AB}$ będzie odcinkiem równoległym do $A_s - B_s$.

3. Cień czworokąta na płaszczyznę podstawy i cień dowolnego odcinka $\overline{MN}$ na ten czworokąt, przy oświetleniu równoległem (rys. 357). Sprawa cienia rzuconego $A^c_s B^c_s C^c_s D^c_s$ czworokąta $ABCD$ nie wymaga omawiania, gdyż konstrukcja polega na wyznaczeniu cieni poszczególnych wierzchołków na płaszczyznę podstawy. Co się tyczy cienia odcinka $\overline{MN}$, rzuconego na płaszczyznę φ czworokąta, to znajdziemy go w sposób następujący: najpierw wykreślimy cień rzucony $\overline{M^c_s N^c_s}$ tego odcinka na płaszczyznę podstawy. O ile cień ten leży w obrębie cienia rzuconego czworokąta, to odpowiadająca mu część odcinka rzuci cień na czworokąt. Część odcinka, której cie-



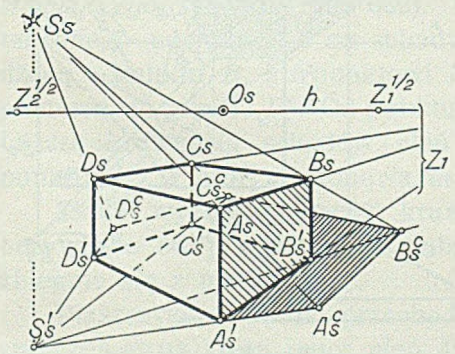
Rys. 356.

niem rzuconym jest odcinek $\overline{P_s^c N_s^c}$, rzuca cień poza obszar czworokąta. Odcinek $\overline{I_s^c II_s^c}$ jest cieniem odcinka $\overline{I\ II}$, leżącego na płaszczyźnie φ, którego perspektywę $\overline{I_s II_s}$ otrzymamy, rzucając punkty I_s^c i II_s^c z punktu słonecznego Z_s na odcinek $\overline{A_s D_s}$, względnie $\overline{B_s C_s}$. Punkt M_φ^c, w którym przecina się promień $Z_s - M_s^c$ z odcinkiem $\overline{I_s II_s}$, jest perspektywą cienia punktu M na płaszczyznę φ. Perspektywa $\overline{I_s' II_s'}$ rzutu poziomego odcinka $\overline{I\ II}$ leży oczywiście na promieniu $M_s' - Z_s'$, który jest perspektywą śladu poziomego pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez punkt M, a przecinającej płaszczyznę φ wzdłuż prostej $I - II$. Promień $Z_s - P_s^c$ przetnie bok $C_s D_s$ w punkcie P_φ^c, który wraz z punktem M_φ^c wyznacza perspektywę cienia odcinka $\overline{MP}$ na płaszczyznę φ.



Rys. 357.

62. Cienie utworów przestrzennych, ograniczonych płaszczyznami. Mamy tu na myśli przedewszystkiem cienie wielościanów, a więc ich cienie własne i rzucone, a następnie wzajemne cienie rzucone tych utworów na siebie.

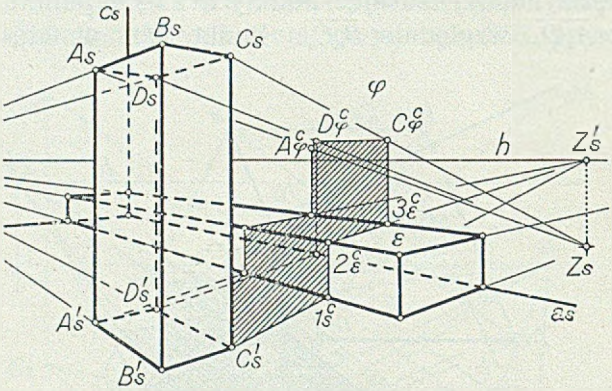


Rys. 358.

1. Rys. 358 przedstawia konstrukcję cienia własnego i cienia rzuconego na płaszczyznę podstawy, prostego, czworościennego graniastosłupa, oświetlonego z punktu S. Ściany boczne $AA'BB'$, $BB'CC'$ i $CC'DD'$ są w cieniu własnym, a że — jak wiadomo — cień granicy cienia własnego stanowi granicę cienia rzuconego, więc wielokąt $A_s' A_s^c B_s^c C_s^c D_s^c D_s'$ ogranicza cień rzucony graniastosłupa.

2. W rys. 359 czworościenny graniastosłup prosty rzuca cień — przy oświetleniu równoległem — na graniastosłup, leżący ścianą boczną na

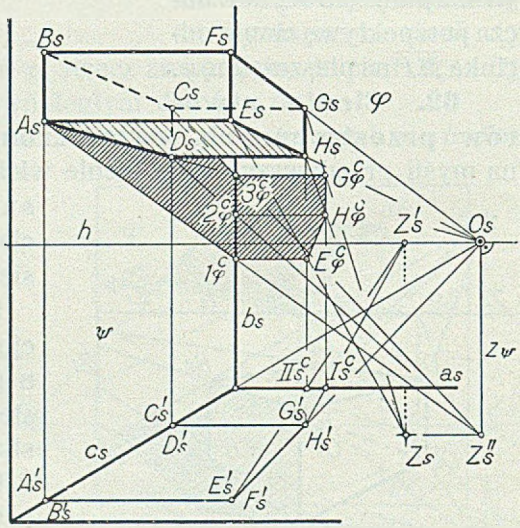
płaszczyźnie podstawy — a częściowo także i na pionową ścianę φ, do której ten graniastosłup przylega. Rysunek tłumaczy się dostatecznie i nie wymaga omówienia.



Rys. 359.

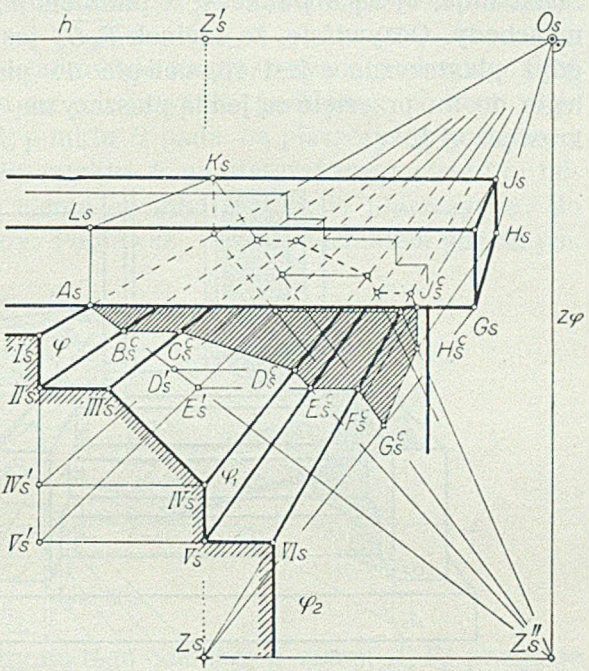
3. Wystająca z pionowej płaszczyzny bocznej ψ, prostopadłej do tła, belka w kształcie prostego, czworościennego graniastosłupa (rys. 360), rzuca cień, który częściowo pada także i na czołową płaszczyznę φ. Wykreślmy perspektywę rzutu poziomego graniastosłupa; chcąc wyznaczyć cień jego na płaszczyznę ψ, znaleźć musimy ślad zbiegu Z_s'' rzutów prostokątnych równoległych promieni światła na tę płaszczyznę. Z ust. 59 wiemy, że punkt ten leżeć będzie na śladzie zbiegu z_ψ płaszczyzny ψ, a ponieważ płaszczyzna ta jest prostopadłą do tła, więc i na prostopadłej do śladu z_ψ, wykreślonej z danego punktu słonecznego Z_s.

4. Pozioma, prostokątna belka, równoległa do tła, rzuca cień na gzyms (rys. 361), biegnący w kierunku prostopadłym do tła. Znając położenie punktu słonecznego Z_s, znajdziemy ślad zbiegu Z_s'' rzutów promieni światła na płaszczyznę pionową, prostopadłą do tła. Prosta $A_s Z_s''$ jest cieniem krawędzi AG na płaszczyznę φ. W punkcie B_s^c cień ten załamie się i pójdzie równolegle do horyzontu, aż do punktu C_s^c. Dalsza jego część padnie na ukośną ścianę gzymsu. Aby znaleźć punkt D_s^c, rzucimy krawędź gzymsu, biegnącą od punktu IV prostopadle do tła, na płaszczyznę φ. Perspektywą tego rzutu jest prosta $IV_s' O_s$, która przetnie prostą $A_s Z_s''$, leżącą również na płaszczyźnie φ, w punkcie D_s'. Pozioma, przeprowadzona przez punkt D_s', przetnie prostą $IV_s O_s$ w szukanym punkcie D_s^c, który łączymy z Z_s'',



Rys. 360.

otrzymując na prostej $V_s O_s$ punkt E_s^c. Odcinki $A_s - B_s^c$ i $D_s^c - E_s^c$ są perspektywicznie równoległe, gdyż płaszczyzna φ_1 jest równoległą do φ. Kreślimy poziomą $E_s^c F_s^c$, poczem na płaszczyźnie φ_2 otrzymamy punkt G_s^c. Cień $G^c H^c$ krawędzi GH jest do niej równoległy, więc perspektywa jego przejdzie przez punkt główny O_s. Ponieważ krawędź HJ belki jest równoległa do tła, więc jej cień $H^c J^c$ będzie do niej równoległy. Wykreślimy więc z punktu H_s^c równoległą do $H_s J_s$ i wyznaczymy jej punkt przecięcia się J_s^c z promieniem $J_s Z_s$. Pozioma krawędź belki, przechodząca przez punkt J, rzuca cień, zakryty belką; konstrukcję tego cienia, analogiczną do przeprowadzonej wyżej, odtworzy czytelnik z łatwością z rysunku.



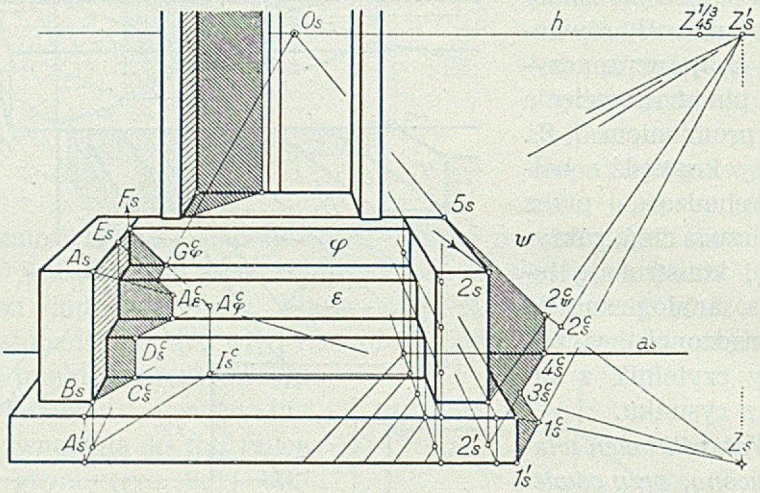
Rys. 361.

5. *Wykreślić cień własny i rzucony, przy oświetleniu równoległem, zespołu geometrycznego, przedstawiającego schody* (rys. 362). Rozpoczniemy od wykreślenia cienia rzuconego odcinka AB na schody. Cień ten jest linją łamaną, wychodzącą z punktu B_s ku punktowi Z_s' do punktu C_s^c, skąd przebiega jako pionowa do punktu D_s^c. Od punktu przecięcia się promienia $D_s^c Z_s'$ z najbliższą krawędzią schodów cień będzie znowu linją pionową, aż do punktu A_t^c, w którym pionowa ta przetnie się z promieniem $A_s Z_s$.

Zkolei wyznaczymy cień krawędzi AF na schody. Cień ten wyjdzie oczywiście od punktu A_t^c, a załamawszy się na dwóch krawędziach, zbiegnie się z punktem F_s.

Płaszczyzna światła, przechodząca przez krawędź AF, czołowa płaszczyzna ε, na którą rzuca cień A_t^c punkt A i płaszczyzna ABF, przetną się wzajemnie w trzech prostych, które przejdą przez punkt E. Prostemi temi są: prosta AF, prosta EA_ε^c i prosta pionowa, przechodząca przez punkt E, a będąca krawędzią płaszczyzny ABF i płaszczyzny ε. Ta ostatnia prosta i krawędź AF wyznaczają punkt E, którego perspektywą jest punkt E_s. Prosta, łącząca punkt E_s z punktem A_t^c, jest per-

spektywą krawędzi płaszczyzny świetlnej, przechodzącej przez prostą AF, z płaszczyzną ε, a więc perspektywą cienia tej prostej na płaszczyznę ε. Punkt, w którym prosta $E_s A_\varepsilon^c$ przetnie obraz najbliższej krawędzi, łączymy z punktem głównym, a punkt G_φ^c z punktem F_s. Łamana linja, łącząca punkt A_ε^c z punktem F_s, jest cieniem odcinka $\overline{AF}$ na schody. Oczywiście, że odcinek $\overline{F_s G_\varphi^c}$ jest równoległy do prostej $E_s A_\varepsilon^c$, gdyż płaszczyzna ε jest równoległa do płaszczyzny φ, a obie równoległe do tła przecięte są jedną płaszczyzną światła, poprowadzoną przez krawędź AF.



Rys. 362.

Linję $F_s G_\varphi^c A_\varepsilon^c$ wyznaczyliśmy równocześnie i w inny sposób, a mianowicie znaleźliśmy cień A_φ^c punktu A na płaszczyznę czołową φ, połączyliśmy go z punktem F_s, a otrzymany tym sposobem punkt G_φ^c z punktem głównym O_s.

Cień rzucony płyty dolnej i płyty bocznej na płaszczyznę podstawy i ścianę czołową ψ wyznaczyliśmy w sposób, znany czytelnikowi z poprzednich zadań.

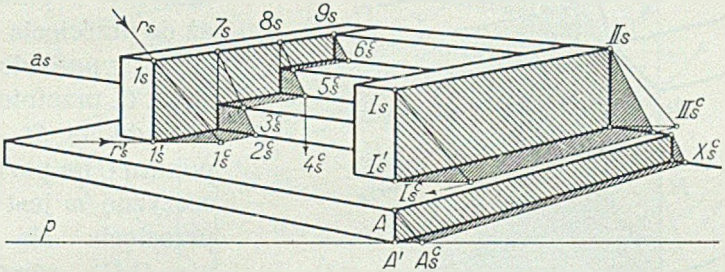
6. Rys. 363 przedstawia poprzedni zespół, jednak w położeniu bocznem, przekopjowany z rys. 362. Oświetlenie przyjęliśmy równoległe i równoległe do tła.

Krawędź pionowa $1, 1'$ rzuca cień na poziomą płaszczyznę płyty; obrazem tego cienia jest odcinek $\overline{1'_s 1_s^c}$. Cień poziomej krawędzi $1, 9$ będzie linją łamaną, której części, leżące na płaszczyznach poziomych, są równoległe do tej krawędzi. Perspektywy ich posiadają więc wspólny ślad zbiegu. Części tej linji łamanej, leżące na ścianach pionowych stopni, otrzymamy podobnie, jak linję $E_s A_\varepsilon^c$ w rys. 362.

Nie chcąc korzystać ze śladu zbiegu prostej $I_s II_s$, wyznaczyliśmy cień II_s^c punktu II na górną, poziomą płaszczyznę płyty, podobnie, jak cień I_s^c punktu I. Odcinek $\overline{I_s^c II_s^c}$ jest cieniem odcinka $\overline{III}$ na płytę.

7. Zespół, przedstawiony na rys. 364, oświetlony jest, podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, promieniami równoległemi, a równocześnie i równoległemi do tła.

Cień krawędzi AA' pada całkowicie na płaszczyznę podstawy. Cień krawędzi AB leży częściowo na płaszczyźnie podstawy, poczem załamuje się dwukrotnie, a cień B_σ^c punktu B pada na płaszczyznę poziomą σ. Najpierw wyznaczymy cień B_s^c punktu B na płaszczyznę podstawy; odcinek $\overline{A_s^c B_s^c}$ jest perspektywą cienia odcinka $\overline{AB}$ na tę płaszczyznę; do punktu 1_s^c cień ten jest istotny. Ponieważ $\overline{AB}$ jest odcinkiem poziomym,



Rys. 363.

więc jego cień jest równoległy do tego odcinka, a zatem $A_s^c B_s^c$ przejdzie przez ślad zbiegu Z_1 prostej AB.

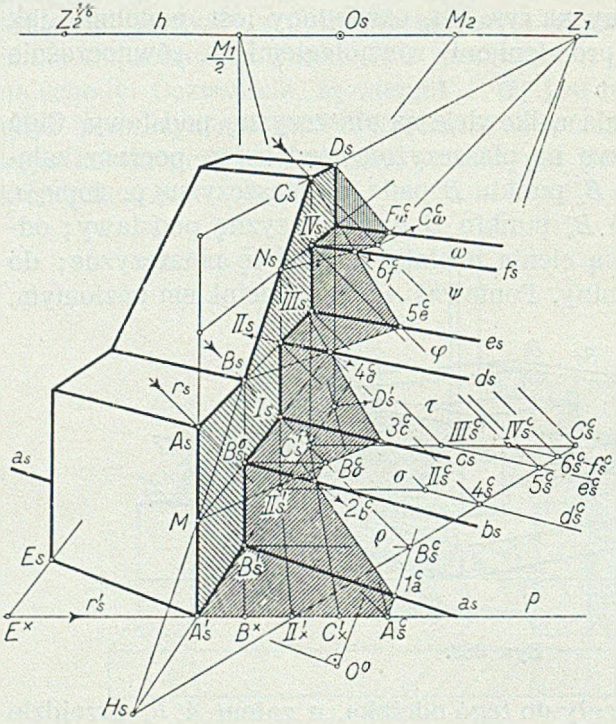
Płaszczyzna $AA'B$ przecina płaszczyznę ϱ wzdłuż krawędzi BB', a że przez krawędź AB przechodzi płaszczyzna światła, więc przez punkt B przejść musi także i krawędź tej płaszczyzny światła z płaszczyzną ϱ, bowiem trzy płaszczyzny przecinają się zawsze w jednym punkcie. Prosta $B_s 1_s^c$ jest perspektywą owej krawędzi płaszczyzny światła z płaszczyzną ϱ, a odcinek $\overline{1_s^c 2_b^c}$ cieniem części odcinka $\overline{AB}$, który pada na czołową ścianę ϱ pierwszego stopnia.

Promień $2_b^c Z_1$ przecina promień $B_s B_s^c$ w punkcie B_σ^c, który jest cieniem punktu B na poziomą płaszczyznę σ. Oczywiście, że prosta, poprowadzona przez punkt B_s^σ, równolegle do r_s', przejdzie przez punkt B_σ^c.

Teraz wyznaczymy cień rzucony krawędzi BC, a to dwoma, niezależnemi od siebie, sposobami: bezpośrednio i przy pomocy cienia rzuconego tej krawędzi na płaszczyznę podstawy.

Pozioma płaszczyzna σ przecina pionową płaszczyznę $A'ABC$ wzdłuż prostej poziomej, której perspektywy dwóch punktów, a mianowicie punkty I_s i B_s^σ, są znane. Płaszczyzna światła δ, przechodząca przez krawędź BC, której śladem poziomym jest punkt H, przetnie tę prostą

poziomą w punkcie M, który przypadkowo leży także na prostej AA'. Faktycznie punkt M jest punktem przecięcia się prostej $C_s H_s$ z prostą $I_s B_s^c$. Prosta MB_s^c jest perspektywą krawędzi płaszczyzny światła δ z płaszczyzną σ, czyli perspektywą cienia krawędzi BC na płaszczyznę σ. Łączymy punkt N_s z punktem 3_c^c prostej c_s, otrzymując na prostej d_s punkt 4_d^c. Punkt ten połączymy z punktem B_s, aż do przecięcia się z prostą e_s w punkcie 5_e^c. Prosta $5_e^c C_s$ przetnie prostą f_s w punkcie 6_f^c. Cień C_ω^c punktu C na poziomą płaszczyznę ω jest punktem przecięcia się promienia $C_s C_\omega^c$, równoległego do r_s, z promieniem poziomym, przechodzącym przez punkt IV_s.



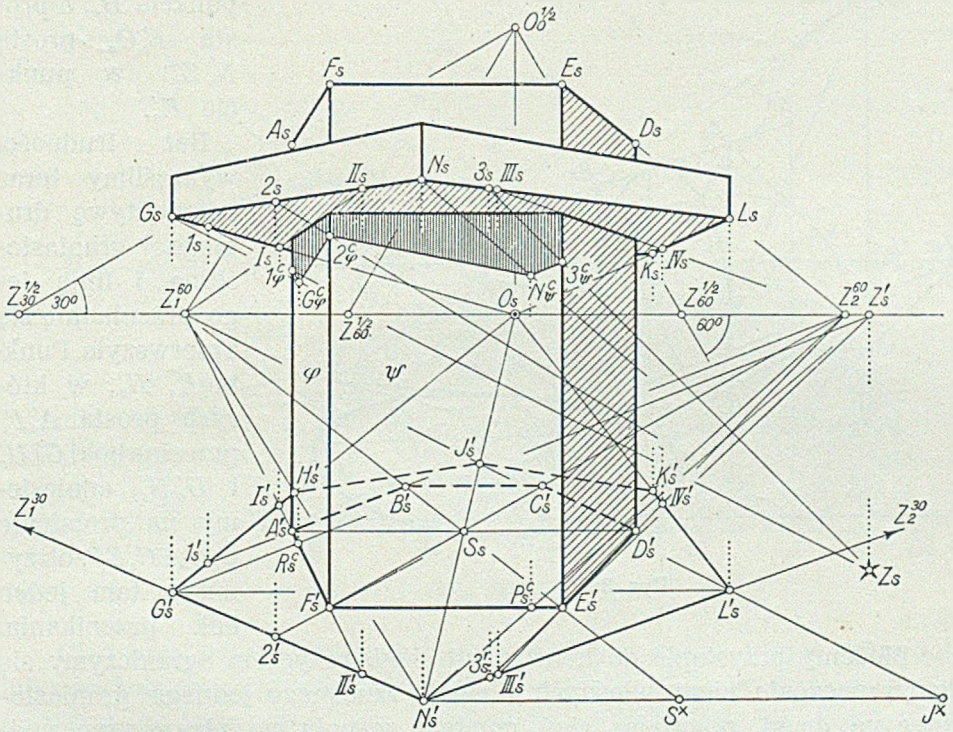
Rys. 364.

Odcinek $\overline{CD}$ rzuci cień częściowo na płaszczyznę poziomą ω a częściowo na płaszczyznę pionową. Pierwsza część cienia jest odcinkiem $\overline{C_\omega^c F_\omega^c}$ na prostej, łączącej punkt C_ω^c ze śladem zbiegu Z_1. Odcinek $\overline{F_\omega^c D_s}$ dopełnia rozwiązania zadania.

Posługując się cieniem rzuconym $H_s - B_s^c - C_s^c$ krawędzi $H - B - C$ na płaszczyznę podstawy, znajdziemy cień odcinka $\overline{BC}$, rzucony na schody, w sposób następujący: przez punkty II_s^c, III_s^c i IV_s^c, stanowiące perspektywy cieni rzuconych punktów II, III i IV na płaszczyznę podstawy, poprowadzimy proste d_s^c, e_s^c i f_s^c, zbiegające się w śladzie Z_2, a będące perspektywami cieni krawędzi d, e i f na płaszczyznę podstawy. Punkty 4_s^c, 5_s^c i 6_s^c, rzucone w kierunku r_s na odnośne proste, są punktami 4_d^c, 5_e^c i 6_f^c, w których cień krawędzi BC, rzucony na schody, załamuje się.

8. *Wykreślić cienie zespołu dwóch, sześciościennych, prostych graniastosłupów* (rys. 365). Kilka słów wyjaśnień wymaga najpierw konstrukcja perspektywy samego zespołu. Wychodząc z punktu głównego O_s i połowy oddalenia tłowego, oznaczymy punkt $O_0^{1/2}$, jako kład

zredukowanego oka, poczem znajdziemy częściowe ślady zbiegu $Z_{60}^{1/2}$ dla prostych, nachylonych do tła pod $\sphericalangle$ 60°. Otrzymawszy następnie właściwe ślady zbiegu Z_1^{60} i Z_2^{60}, połączymy je, jak też i punkt główny O_s, z przyjętym punktem S_s, t. j. z perspektywą środka umiarowego sześciokąta, stanowiącego podstawę graniastosłupa. Na prostej, wykreślonej przez punkt S_s równolegle do horyzontu, obierzemy punkt A_s' i połączymy go ze śladami Z_1^{60} i Z_2^{60}, otrzymując na promieniu $S_s Z_1^{60}$ punkt B_s' a na promieniu $S_s Z_2^{60}$ punkt F_s'. Przez punkty B_s' i F_s' kre-

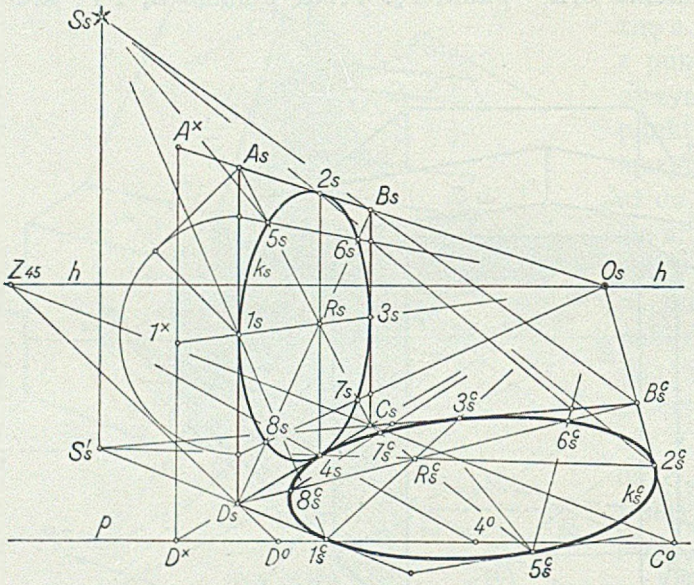


Rys. 365.

ślimy równoległe do horyzontu i otrzymujemy na promieniu $F_s' Z_2^{60}$ punkt C_s', zaś na prostej $S_s Z_1^{60}$ punkt E_s'. Punkt C_s' łączymy ze śladem Z_1^{60} a punkt E_s' z Z_2^{60}; obie proste przetną się na promieniu $A_s' S_s$ w punkcie D_s'. Prawdziwa długość boku podstawy nie jest nam znana; otrzymać ją można przy pomocy punktu mierzenia. Wykreśliwszy perspektywę podstawy, dopełnimy z łatwością obrazu graniastosłupa, stanowiącego trzon zespołu.

Drugi graniastosłup ma być również prosty, o podstawie umiarowego sześciokąta, lecz skręcony wobec pierwszego o 30°. Najpierw narysujemy perspektywę jego rzutu poziomego. Punkt S_s jest perspektywą

wspólnego środka obu sześciokątów. Na promieniu $O_s S_s$ przyjmiemy dowolnie punkt N'_s i połączymy go ze śladami zbiegu Z_1^{30} i Z_2^{30}. Uważając punkt Z_1^{60} za punkt dzielenia, znajdziemy perspektywę J'_s przeciwległego punktowi N wierzchołka J, a także i punkt L'_s, gdy punkt S_s rzucimy z punktu Z_1^{60} na poziomą, poprowadzoną przez punkt N'_s, odmierzymy $S^x J^x = N'_s S^x$ i punkt J^x połączymy z Z_1^{60}. Pozioma, wykreślona z punktu L'_s, przetnie prostą $N'_s Z_1^{30}$ w punkcie G'_s. Promień $G'_s O_s$ przetnie promień $N'_s Z_1^{60}$ w punkcie H'_s, a prosta $L'_s O_s$ prostą $N'_s Z_2^{60}$ w punkcie K'_s.



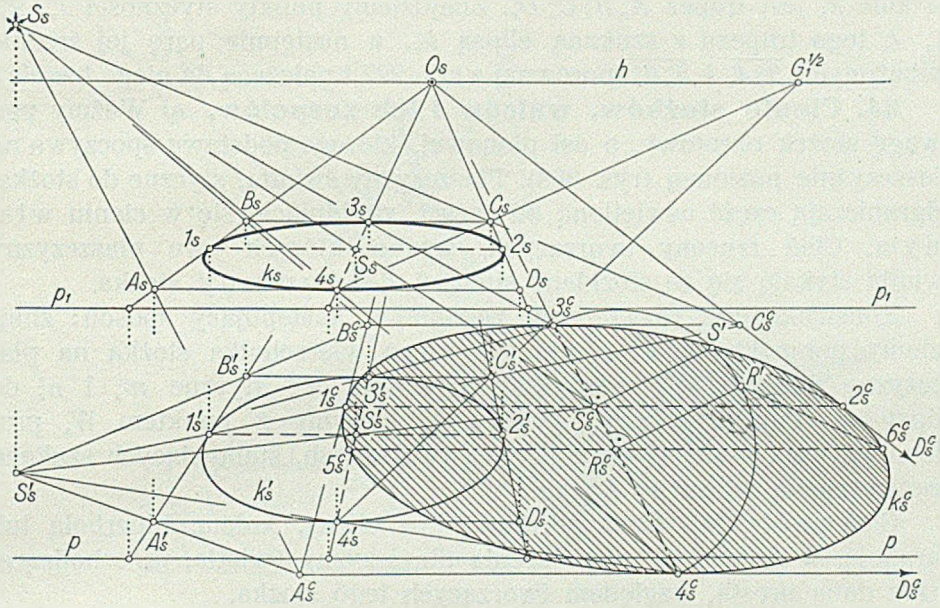
Rys. 366.

Bez trudności wykreślimy teraz perspektywę drugiego graniastosłupa i linję jego przenikania się z pierwszym. Punkty I'_s, II'_s, w których prosta $A'_s F'_s$ przecina boki $G'_s H'_s$ i $G'_s N'_s$, odniesiemy na promienie $G_s O_s$ i $G_s Z_1^{30}$, otrzymując tam jeden bok przenikania.

Możemy przystąpić do konstrukcji cieni, przyczem ograniczymy się do wyznaczenia cieni własnych i cienia rzuconego jednego graniastosłupa na drugi, pomijając cień rzucony zespołu na płaszczyznę podstawy.

Punkt G rzuca cień na ścianę φ; otrzymamy go w znany sposób, łącząc punkt G'_s z rzutem Z'_s punktu słonecznego i kreśląc w punkcie R^c_s prostą pionową, która przetnie promień $G_s Z_s$ w punkcie G^c_φ. Część krawędzi $\overline{GH}$ rzuca cień na ścianę φ, załamując się na krawędzi AA' w punkcie, którego perspektywę oznaczyliśmy przez 1^c_φ. Aby punkt ten otrzymać, rzucimy punkt A'_s z Z'_s na $\overline{G'_s H'_s}$ i otrzymany tam punkt $1'_s$ odniesiemy na prostą $G_s O_s$, jako punkt 1_s. Promień $1_s Z_s$ przetnie prostą $A'_s A_s$ w szukanym punkcie 1^c_φ. W zupełnie ten sam sposób znajdziemy punkt 2^c_φ, w którym załamuje się cień prostej GN. Podobnie ma się sprawa z cieniem N^c_ψ punktu N, rzuconym na ścianę ψ, i cieniem 3^c_ψ punktu 3 na krawędź EE'.

63. O cieniach koła. Cień koła przy oświetleniu równoległem jest elipsą albo kołem. W istocie bowiem promienie, przechodzące przez punkty koła, są tworzącemi walca eliptycznego, względnie walca obrotowego, który płaszczyzna przeciąć może wzdłuż elipsy lub koła. Ponieważ perspektywą elipsy, względnie koła, jest elipsa, koło, hiperbola lub parabola, więc obraz perspektywiczny cienia koła może być każdą z tych krzywych stożkowych.



Rys. 367.

Cień koła przy oświetleniu środkowem jest kołem, elipsą, hiperbolą lub parabolą w zależności od położenia stożka światła względem płaszczyzny, na którą cień pada. Perspektywą cienia koła przy oświetleniu środkowem może być każda stożkowa, zależnie od położenia stożkowej, stanowiącej cień tego koła, względem płaszczyzny zniknienia. Dla czytelnika, który zapoznał się z rozważaniami w rozdziale III, sprawa ta jest zrozumiałą sama przez się. Także i pod względem konstrukcyjnym rzecz nie nastręcza trudności, jak nas o tem przekonują dwa podane niżej przykłady.

Rys. 366 przedstawia konstrukcję cienia koła k przy oświetleniu środkowem. Pionowa płaszczyzna koła, stycznego do płaszczyzny podstawy, jest prostopadłą do tła. Położenie źródła światła określone jest punktami S_s i S_s'. Elipsę k_s^c, rozwiązującą zadanie, wyznaczyliśmy ośmioma punktami 1_s^c, 2_s^c, ... 8_s^c, które są cieniami punktów *1*, *2*, ... *8* koła k i odpowiadają punktom 1_s, 2_s, ... 8_s elipsy k_s. Trapezowi $A_sB_sC_sD_s$,

opisanemu na elipsie k_s i stycznemu do niej w punktach 1_s, 2_s, 3_s i 4_s, odpowie na płaszczyźnie podstawy, jako cień, czworokąt, styczny do elipsy k_s^c w punktach 1_s^c, 2_s^c, 3_s^c i 4_s^c.

Rys. 367 podaje konstrukcję cienia koła k, którego płaszczyzna ma położenie poziome. Elipsa k_s jest perspektywą tego koła, a elipsa k_s' perspektywą jego rzutu na płaszczyznę podstawy. Przyjęliśmy oświetlenie środkowe z punktu S. Perspektywą cienia kwadratu $A\,B\,C\,D$, opisanego na kole k, jest trapez $A_s^c B_s^c C_s^c D_s^c$. Znajdziemy punkty styczności 1_s^c, 2_s^c, 3_s^c, 4_s^c tego trapezu z szukaną elipsą k_s^c, a następnie parę jej średnic sprzężonych $\overline{3_s^c 4_s^c}$ i $\overline{5_s^c 6_s^c}$ (porównaj z rys. 227 i należącą do niego treścią).

64. Cienie stożków, walców i ich zespołów. *a)* Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, o osi pionowej, którego podstawa spoczywa na płaszczyźnie poziomej (rys. 368). Płaszczyzny światła, styczne do stożka, odgraniczają część oświetloną od części, znajdującej się w cieniu własnym. Cień rzucony tworzących, wzdłuż których owe płaszczyzny światła stykają się ze stożkiem, stanowi cień rzucony stożka.

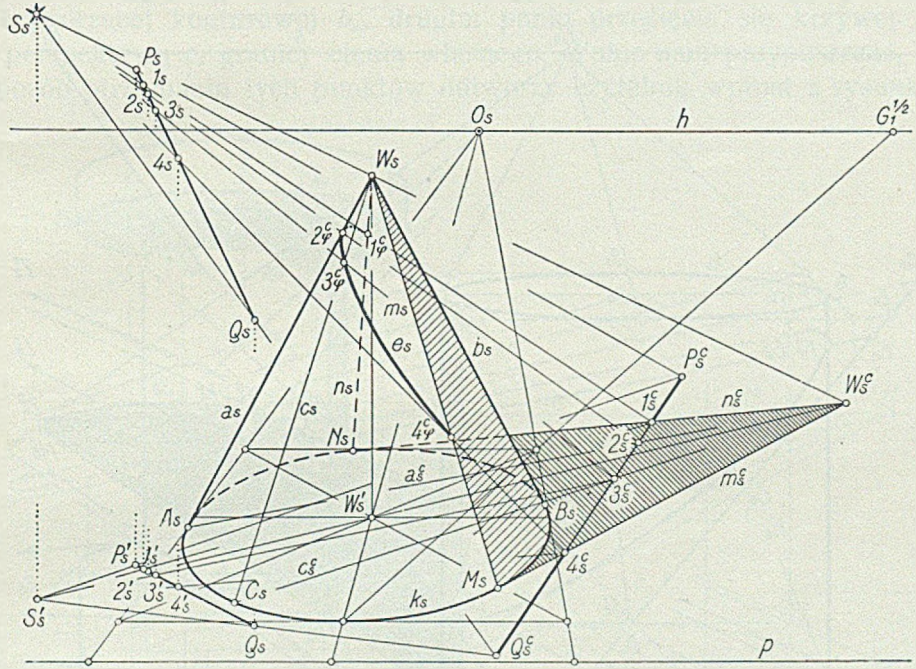
Konstrukcyjnie rozwiążemy zadanie w następujący sposób: znajdziemy perspektywę W_s^c cienia rzuconego wierzchołka stożka na płaszczyznę podstawy i wykreślimy z punktu W_s^c styczne m_s^c i n_s^c do elipsy k_s. Punkty styczności M_s i N_s łączymy z punktem W_s prostemi m_s i n_s, które są perspektywą tworzących, stanowiących szukaną granicę cienia własnego stożka.

Cień prostej na stożek obrotowy jest elipsą, kołem, hiperbolą lub parabolą, w zależności od położenia płaszczyzny światła, przechodzącej przez daną prostą, względem tworzących tego stożka.

Aby znaleźć cień odcinka $\overline{PQ}$ na stożek (rys. 368), wykreślimy najpierw perspektywę $\overline{P_s^c Q_s^c}$ cienia rzuconego tego odcinka na płaszczyznę podstawy. Część odcinka $\overline{P_s^c Q_s^c}$, a mianowicie odcinek $\overline{1_s^c 4_s^c}$, leżący w granicach cienia rzuconego stożka, wskazuje na tę część odcinka $\overline{PQ}$, której cień padnie na stożek. Promienie, łączące punkty 1_s^c i 4_s^c z punktem S_s, przetną proste n_s i m_s w punktach 1_φ^c i 4_φ^c, a odcinek $\overline{P_s Q_s}$ w punktach 1_s i 4_s; punkty $1_s'$ i $4_s'$ są perspektywą rzutu poziomego punktów 1 i 4 odcinka $\overline{PQ}$. Punkty 1_φ^c i 4_φ^c są punktami elipsy e_s, stanowiącej cień odcinka $\overline{PQ}$ na stożek; dalsze punkty tej elipsy znajdziemy tak, jak to wskażemy dla punktu 3_φ^c. Połączmy przyjęty na odcinku $\overline{1_s^c 4_s^c}$ punkt 3_s^c z punktem S_s promieniem i oznaczmy punkt przecięcia się tego promienia z prostą $P_s Q_s$ symbolem 3_s. Prosta $W_s^c 3_s^c \equiv c_s^c$, przecinająca elipsę k_s w punkcie C_s, jest perspektywą cienia tworzącej c stożka; perspektywą tej tworzącej jest prosta $c_s \equiv C_s W_s$. Punkt 3_φ^c przecięcia się prostej c_s z promieniem $3_s^c S_s$ jest cieniem punktu 3 odcinka $\overline{PQ}$ na dany stożek obrotowy. Na rys. 368 wskazano konstrukcję punktu 2_φ^c elipsy e_s, leżącego na tworzącej a_s konturu pozornego. Pro-

sta a_s^c, łącząca punkt styczności A_s prostej a_s z punktem W_s^c, przecina prostą $P_s^c Q_s^c$ w punkcie 2_s^c; promień $2_s^c S_s$ przetnie prostą a_s w punkcie 2_φ^c.

b) Przykładem konstrukcji cienia własnego i rzuconego obrotowego walca, o osi pionowej, stojącego na płaszczyźnie podstawy, a nadto cienia prostej na ten walec (przy oświetleniu słonecznem), jest rys. 369.

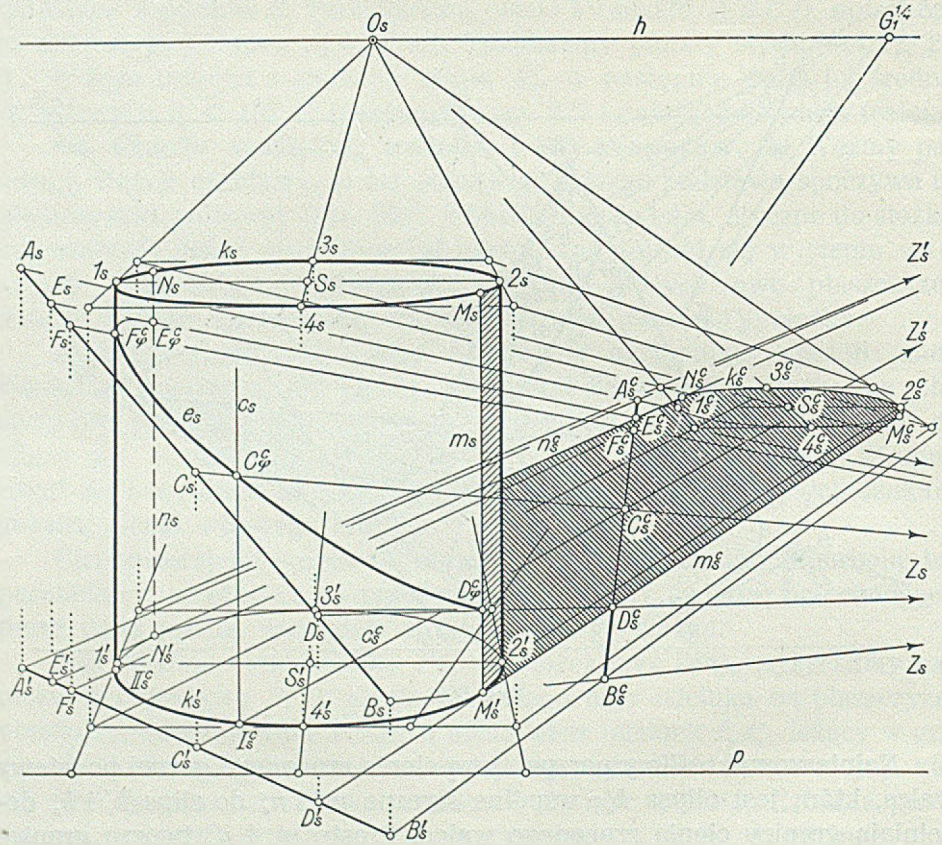


Rys. 368.

Najpierw wykreślimy perspektywę cienia rzuconego górnej podstawy walca, którą jest elipsa k_s^c; wspólne styczne m_s^c i n_s^c do elips k_s' i k_s^c dopełniają granicy cienia rzuconego walca. Proste m_s i n_s tworzą granicę cienia własnego walca.

Teraz znajdziemy perspektywę $\overline{A_s^c B_s^c}$ cienia rzuconego na płaszczyznę podstawy odcinka $\overline{AB}$. Część tego odcinka, a mianowicie odcinek $\overline{DE}$, rzuci cień na walec. W szczególności cień punktu D padnie na tworzącą m a cień punktu E na tworzącą n walca. Punkt D_s^c rzucimy z punktu słonecznego Z_s na prostą m_s — jako punkt D_φ^c — a punkt E_s^c z tego samego punktu Z_s na prostą n_s, jako punkt E_φ^c. Cień odcinka $\overline{DE}$ na walec jest elipsą e, podług tej bowiem krzywej płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek $\overline{AB}$, przecina walec. Poszczególne punkty perspektywy elipsy e, którą będzie elipsa e_s, znajdziemy — podobnie, jak w zadaniu poprzedniem. Wyżej omówiliśmy konstrukcję punktów D_φ^c

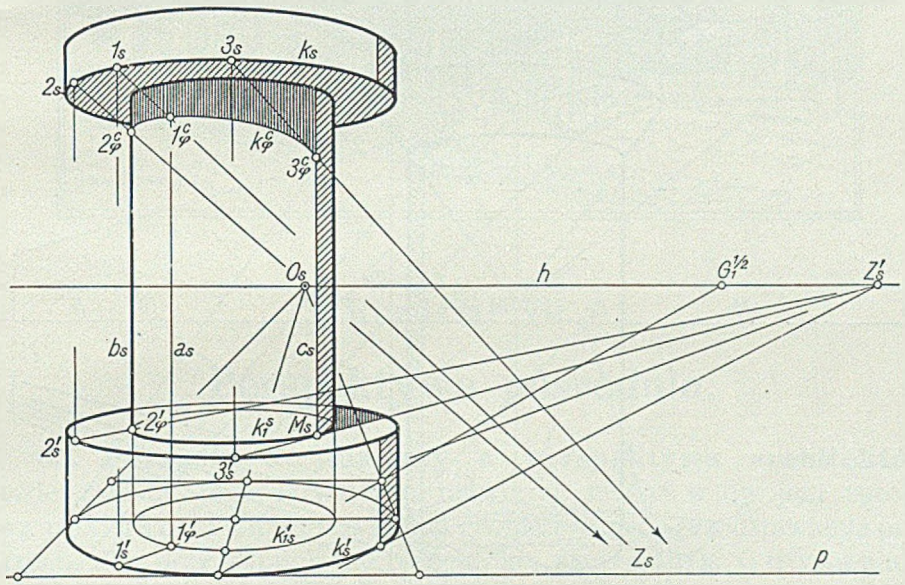
i E_φ^c elipsy e_s. Aby znaleźć jej punkt dowolny, np. C_φ^c, łączymy dowolny punkt C_s^c odcinka $D_s^c E_s^c$ z punktami Z_s i Z_s' prostemi. Prosta $Z_s' C_s^c \equiv c_s^c$ przetnie elipsę k_s' w punkcie I_s^c, przez który przechodzi prosta c_s, perspektywa tworzącej walca, której cieniem rzuconym na płaszczyznę podstawy jest właśnie prosta c^c. Punkt C_φ^c przecięcia się promienia $Z_s C_s^c$ z prostą c_s jest owym dalszym punktem szukanej krzywej e_s.



Rys. 369.

c) Rys. 370 jest przykładem cieni zespołu walców obrotowych, o wspólnej osi pionowej, przy oświetleniu równoległem. Punkt słoneczny Z_s leży poza obrębem rysunku. Konstrukcja granic cienia własnego walców nie wymaga objaśnień, podobnie, jak cień rzucony środkowego trzona na walec, stanowiący podstawę zespołu. Walec górny, albo ściślej, jego dolne koło k, rzuca cień na walec środkowy. Cieniem tym jest krzywa przenikania się dwóch walców, t. j. walca promieni, przechodzących przez koło k, i walca, stanowiącego środkową część zespołu. Na rysunku zaznaczyliśmy konstrukcję kilku punktów perspektywy k_φ^c

tej krzywej. I tak: perspektywą cienia punktu *1*, koła *k*, jest punkt 1^c_φ. Otrzymamy go w ten sposób, że punkt $1'_s$ połączymy z punktem Z'_s promieniem, który przetnie elipsę k'_{1s} w punkcie $1'_\varphi$; następnie wykreślimy perspektywę a_s tworzącej walca, która przetnie promień $1_s Z_s$ w szukanym punkcie 1^c_φ krzywej k^c_φ. Dwa punkty tej krzywej zasługują na szczególną uwagę, a mianowicie punkty 2^c_φ i 3^c_φ. Pierwszym jest punkt, leżący na tworzącej konturowej b_s, drugim punkt przecięcia się krzywej k^c_φ z perspektywą c_s granicy cienia własnego. Wolno nam przypuszczać, że sposób otrzymania tych punktów odtworzy czytelnik wprost z rysunku.

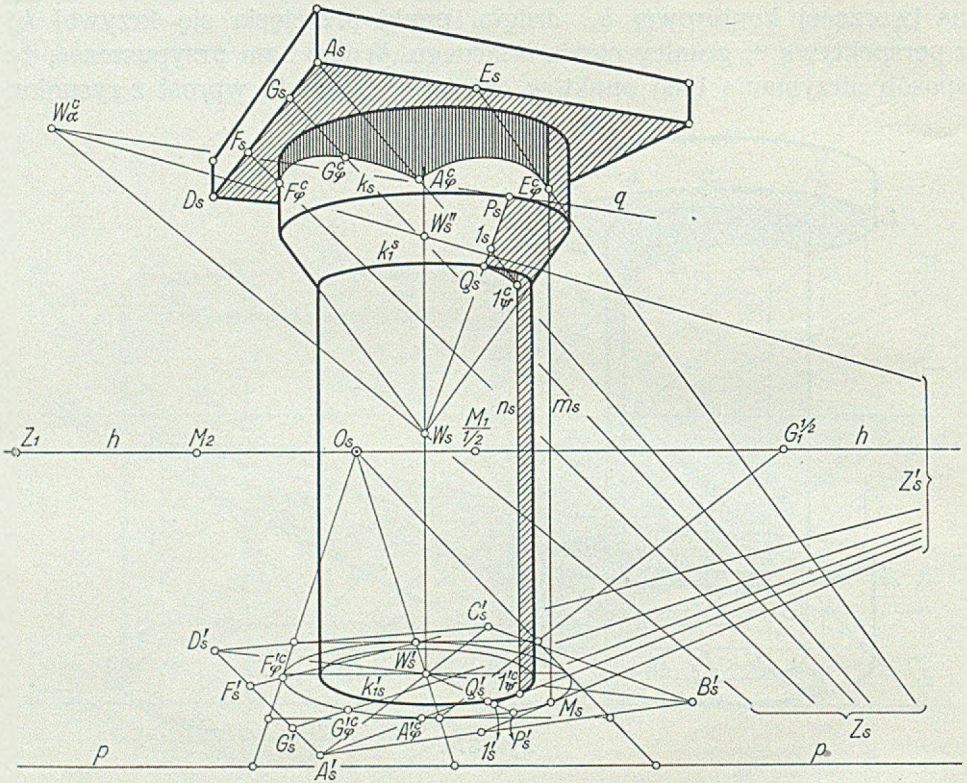


Rys. 370.

d) Rys. 371 przedstawia zespół dwóch obrotowych walców, obrotowego stożka i graniastosłupa, oświetlonych równolegle.

Konstrukcja granicy cienia własnego walców nie wymaga wyjaśnień, omówimy natomiast sprawę cienia własnego stożka. Punkt W_s jest perspektywą wierzchołka stożka, punkt W''_s perspektywą rzutu tego wierzchołka na płaszczyznę α, t. j. na płaszczyznę koła *k*, stanowiącego linję przenikania się walca i stożka. Punkt W^c_α przecięcia się promienia $W_s Z_s$ z promieniem $W''_s Z'_s$ jest cieniem rzuconym wierzchołka stożka *W* na płaszczyznę α. Wykreślmy z punktu W^c_α styczną *q* do elipsy k_s, to prosta, łącząca punkt styczności P_s z punktem W_s, jest perspektywą granicy cienia własnego stożka. W naszem zagadnieniu wchodzi w grę odcinek $\overline{P_s Q_s}$ perspektywy tej granicy. Część odcinka $\overline{PQ}$ rzuci cień na walec dolny. Cieniem tym będzie linja przecięcia się płaszczyzny, stycznej do

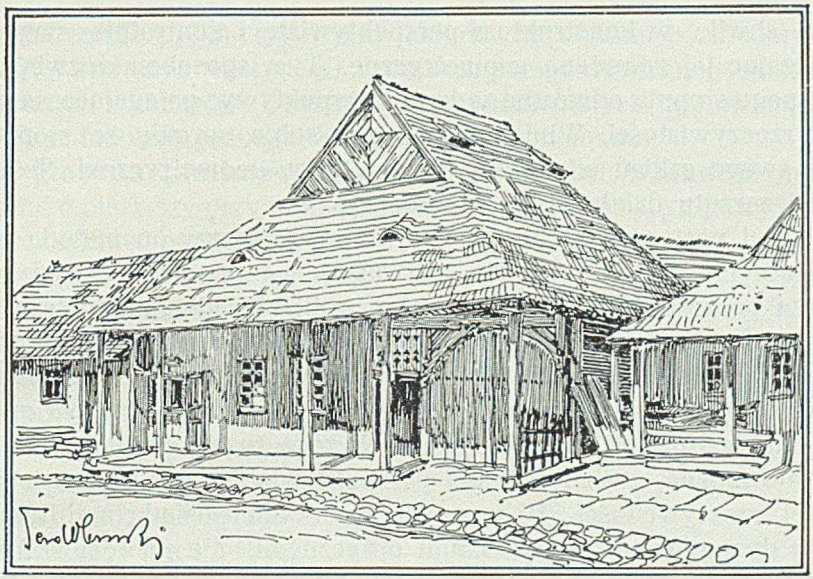
stożka wzdłuż tworzącej PW, z tym walcem, a więc elipsa. Na rysunku wyznaczyliśmy punkt 1^c_ψ przecięcia się perspektywy tej elipsy z prostą n_s, stanowiącą perspektywę granicy cienia własnego walca. Odcinek $\overline{W'_s P'_s}$ jest perspektywą rzutu poziomego tworzącej WP; styczna do elipsy k'_{1s}, poprowadzona z punktu Z'_s, przecina odcinek $\overline{W'_s P'_s}$ w punk-



Rys. 371.

cie $1'_s$. Odnieśmy ten punkt prostopadle do linji horyzontu na prostą $P_s Q_s$ i połączmy otrzymany tam punkt 1_s z punktem słonecznym Z_s promieniem, to promień ten przetnie prostą n_s w punkcie 1^c_ψ.

Płaszczyzny światła, przechodzące przez dolne krawędzie płyty, leżącej na słupie, przetną walec górny wzdłuż elips, które stanowić będą granicę cienia rzuconego tej płyty na słup. Czytelnik odtworzy przebieg konstrukcji potrzebnej ilości punktów tych elips bez trudu, wprost z rysunku.



Rozdział VII.

Perspektywa pośrednia.

65. Perspektywa malarzy a perspektywa architektów. Każde zadanie perspektywiczne rozwiązać można w dwojaki sposób: bez pośrednictwa innych metod geometrycznego przedstawienia przestrzeni, albo przy ich pomocy, więc drogą pośrednią. O użyciu pierwszego sposobu, t. j. bezpośredniego, względnie sposobu drugiego, decyduje celowość danego zagadnienia perspektywicznego; pierwszym posługują się z reguły malarze, drugim architekci. Perspektywa malarzy nosi także nazwę wolnej; architekci posługują się perspektywą pośrednią.

Malarz ma przed sobą płaszczyznę rysunkową, na której przedstawić ma szereg przedmiotów o znanych mu kształtach i wielkościach. Przystępuje, powiedzmy, do narysowania wnętrza. Kreśli tedy perspektywę krawędzi, schodzących się w punktach zbiegu; szkicuje otwory w ścianach, zachowując proporcje między ich wymiarami a wysokością ubikacji, którą zapełnia meblami. Wszystko to robi w szkicu, pozwalającym na zmiany, przesunięcia, podnoszenia, obniżania, prostowania walących się ewentualnie ścian wnętrza, czy mebli, dostosowywania wymiarów i proporcyj. Nareszcie wnętrze „stoi“. Teraz artysta przedzierzga

Rysunek prof. Tadeusza Obmińskiego.

się na chwilę w konstruktora-perspektywistę i kontroluje swą pracę, sprawdzając jej znamiona geometryczne. Tym sposobem rozwiązuje on do pewnego stopnia odwrotne zadanie perspektywy, polegające na odtwarzaniu rzeczywistości. Winien on zdawać sobie sprawę ze stopnia odchyleń swego szkicu od ścisłej perspektywy geometrycznej, jeśli chce uniknąć zarzutu działania nieświadomego.

Inaczej postępuje architekt. Projekt swój tworzy on metodą rzutów prostokątnych. Najpierw tedy „rozwiązuje“ rzut poziomy, gdzie rozmieszcza poszczególne ubikacje, potem robi „fasadę“, a dopiero po jej wykonaniu przystępuje do narysowania perspektywy. Punktem wyjścia dla niej są gotowe plany budowli, wykonane według zasad geometrycznych rzutów prostokątnych w rozmaitych „widokach“ zgóry, zprzodu, zboku lub w różnych „przekrojach“. Niczego tu ani zmienić, ani przesunąć nie można, jeśli rysowana perspektywa ma być obrazem koncypowanej rzeczywistości. W pewnych granicach posiada architekt swobodę w dysponowaniu znamionami optycznemi, ale na tem kończy się jego wpływ na charakter obrazu perspektywicznego. Niekiedy i ta swoboda ścieśniona jest do granic warunków, w których obserwowaną być może, lub być ma, projektowana budowla. Warunki te domagają się, by obserwatorowi perspektywy projektu architektonicznego daną była możność oceny wrażeń, jakie odbierze później, obserwując rzeczywistość ze ściśle określonego stanowiska. Gdyby wrażenia te nie odpowiadały oczekiwanym, istnieje jeszcze zawsze możność zmiany rozmiarów, proporcyj i architektury projektowanej budowli. Sprawdzian ten jest jednym z celów perspektywy architektów.

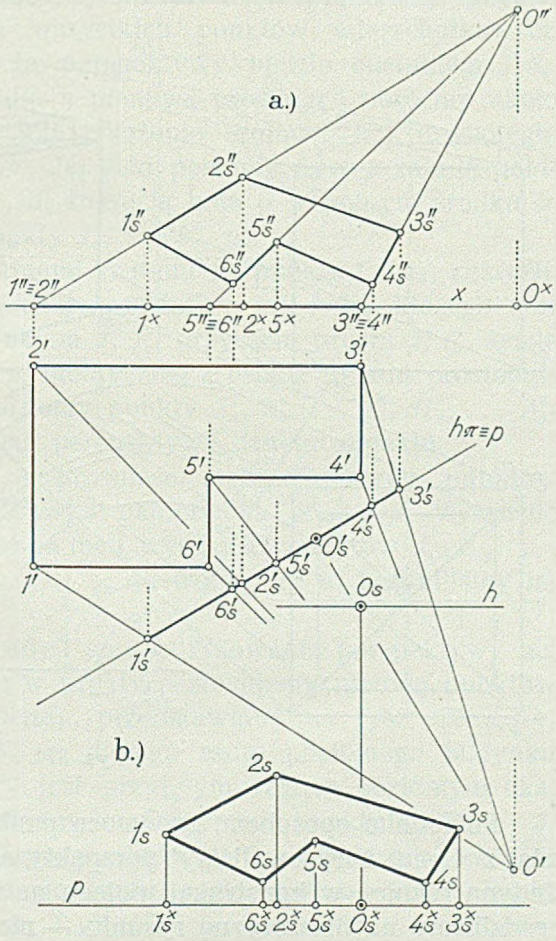
Niestety, celowość ta nie zawsze istnieje w świadomości twórców projektów architektonicznych. Często, może za często, perspektywa projektu narysowana jest przy zupełnem zapoznaniu warunków rzeczywistych, robiona dla „wzięcia“ laików, albo jeszcze częściej i nielaików, na sentyment obrazkowy. Gdyby warunki konkursów architektonicznych wymagały przedkładania perspektyw dla ściśle określonych znamion optycznych i gdyby jury konkursowe istnienie tych znamion w projektach faktycznie sprawdzało — uniknęlibyśmy wielu niespodzianek i rozczarowań po zdjęciu rusztowań z budowanych objektów.

Byłoby błędem nie odróżniać perspektywy architekta od perspektywy malarza. Architekt nie jest malarzem architektury, a malarz architektury nie musi być architektem. Cele obu są różne. Dzieło malarza jest celem samym w sobie, perspektywa architekta tylko ś r o d k i e m do celu, jakim jest uformowany z drzewa lub kamienia trójwymiarowy objekt.

Można stworzyć doskonałe dzieło architektoniczne bez posiadania jego perspektywy, ale nikt nie namaluje dobrego obrazu architektury bez znajomości zasad perspektywy.

Rozpatrzenie pytań, czy i pod jakiemi warunkami posiadamy możność odtwarzania (restytucji) z rysunku perspektywicznego, względnie z fotogramu, wymiarów i kształtów przedstawionych niemi objektów, będzie przedmiotem jednego z rozdziałów II-go tomu.

66. Metoda punktów przebicia promieni widzenia z tłem. *a)* Jako pierwszy przykład, pozwalający zapoznać się z powyższą metodą, wykreślimy perspektywę sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Rys. 373*a* przedstawia zadanie i jego rozwiązanie w dwóch rzutach prostokątnych, a mianowicie w rzucie poziomym i pionowym. Prosta $h_\pi \equiv p$ wyznacza położenie pionowej płaszczyzny tła i jest jej śladem poziomym. Położenie oka określone jest jego rzutem poziomym O' i rzutem pionowym O''. Prostopadła do prostej $h_\pi \equiv p$, wykreślona z punktu O', przecina ją w punkcie O'_s, który jest rzutem poziomym punktu głównego.

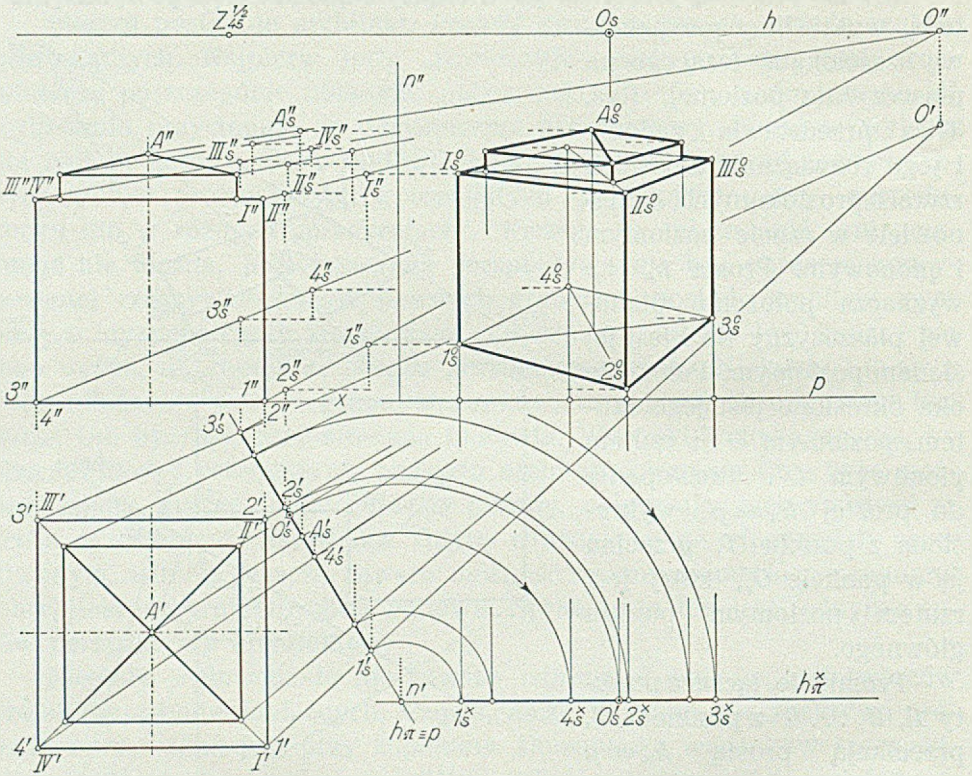


Rys. 373 *a*, *b*.

Promienie, łączące punkty $1'$, $2'$, ... $6'$ z punktem O', przecinają prostą $h_\pi \equiv p$ w punktach $1'_s$, ... $6'_s$; odcinek $\overline{1'_s\,3'_s}$ jest rzutem poziomym perspektywy danego sześciokąta. Rzutem pionowym tej perspektywy jest sześciokąt $1''_s$, $2''_s$, ... $6''_s$, który otrzymamy, odnosząc punkty $1'_s$, $2'_s$, ... $6'_s$ na promienie, łączące punkty $1''$, $2''$, ... $6''$ z punktem O''. Jeżeli płaszczyznę tła π położymy na płaszczyznę rysunku, to otrzymamy perspektywę przyjętego na płaszczyźnie podstawy sześciokąta. Kład ten uskuteczniliśmy w sposób następujący: szereg punktów $1'_s$, $6'_s$, ... $3'_s$, prostej $h_\pi \equiv p$, przenieśliśmy na prostą p (rys. 373*b*), jako punkty 1^x_s, 6^x_s, ... 3^x_s; w punktach tych wykreśliliśmy do tej prostej prostopadłe i odmierzyliśmy na

nich wysokości punktów przebicia się promieni widzenia z tłem. Wysokości te są równe oddaleniom punktów $1''_s, 2''_s, \ldots 6''_s$ od osi x na rys. 373 *a*. Tak tedy $\overline{1^x_s 1_s} = \overline{1^x 1''_s}$, $\overline{2^x_s 2_s} = \overline{2^x 2''_s}$, i t. d.

Wysokość horyzontu równa jest wysokości oka, t. j. odcinkowi $\overline{O'' O^x} = \overline{O^x_s O_s}$; głębokość tłowa wyraża się odcinkiem $\overline{O' O'_s}$.



Rys. 374.

Pośrednim sposobem, zapomocą punktów przebicia promieni widzenia z tłem, narysowaliśmy perspektywę wnętrza na rys. 180 *a* — *d*. Jedyna różnica w konstrukcji polega na tem, że płaszczyznę tła sprowadziliśmy na płaszczyznę rysunku — nie, jak w rys. 373, zapomocą jej przeniesienia — ale przez obrócenie jej około śladu pionowego v_π.

b) Następnym przykładem omawianej metody pośredniej perspektywy będzie zadanie wykreślenia perspektywy utworu przestrzennego, którego dwa rzuty prostokątne są dane (rys. 374). Utwór ten składa się z sześcianu, na którym spoczywa płyta, zakończona prostym, czworościennym ostrosłupem. Podobnie, jak w zadaniu przedstawionem na rys. 373 *a, b*, prosta $h_\pi \equiv p$ oznacza ślad poziomy pionowej płaszczyzny

tła, punkty O' i O'' rzuty prostokątne oka, a punkt O'_s rzut poziomy punktu głównego.

Połączmy punkt $1'$ z punktem O' i $1''$ z O''. Punkt $1'_s$ przecięcia się promienia $1'O'$ z prostą $h_\pi \equiv p$ jest rzutem poziomym perspektywy punktu 1, znajdującego się na płaszczyźnie poziomej. Prostopadły do osi x rzut $1''_s$ punktu $1'_s$ na promień $1''O''$ jest rzutem pionowym perspektywy punktu 1. Powtarzając tę konstrukcję, znajdziemy pokolei rzuty prostokątne perspektyw wszystkich punktów wierzchołkowych danego utworu. Rzut poziomy tej perspektywy będzie odcinkiem $\overline{1'_s 3'_s}$.

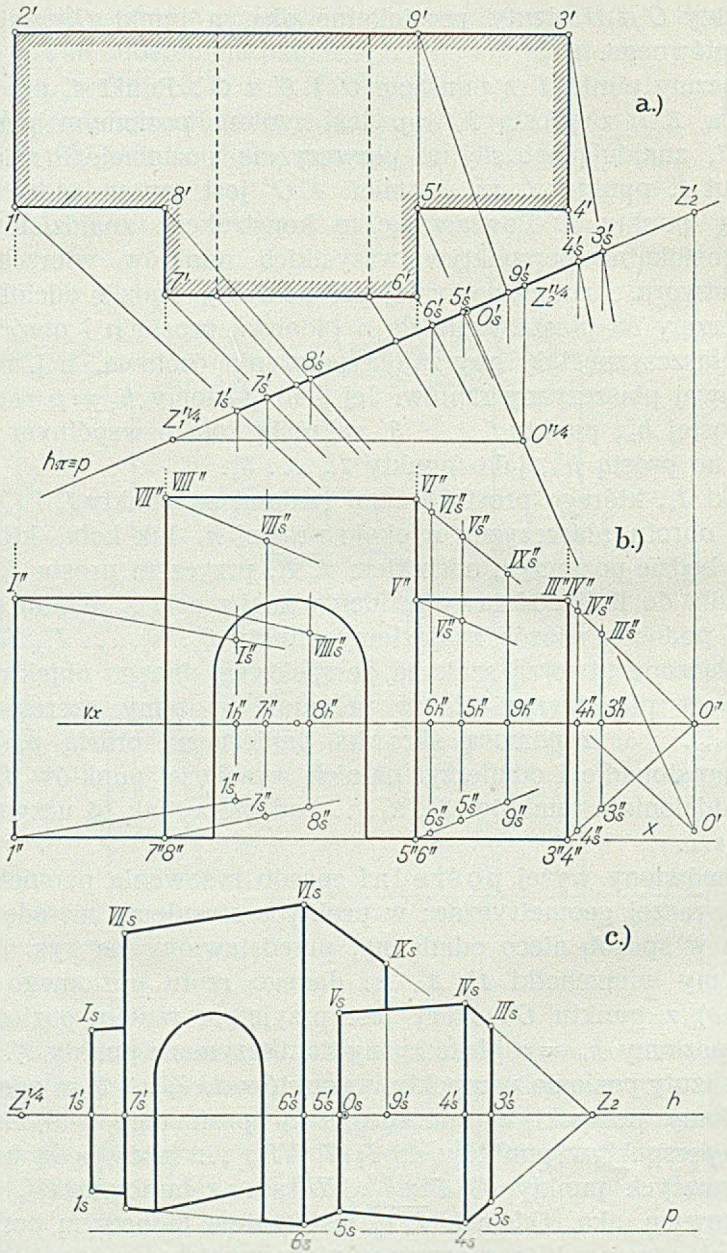
Obierzmy na płaszczyźnie tła π pionową prostą n i obróćmy około niej tę płaszczyznę tak, aby zajęła położenie czołowe, t. j. równoległe do pionowej płaszczyzny rzutów. Jej ślad poziomy $h_\pi \equiv p$ zajmie położenie prostej $h^\times_\pi$; punkty $1'_s$, ... $3'_s$ zakreślą koła o wspólnym środku n' i padną na prostą $h^\times_\pi$, jako punkty $1^\times_s$, ... $3^\times_s$.

Punkt 1_s, którego prostokątnemi rzutami są punkty $1'_s$ i $1''_s$, zakreśli, podczas obrotu płaszczyzny π około prostej n, łuk koła, którego rzut pionowy będzie poziomym odcinkiem $\overline{1''_s 1^0_s}$, przyczem prosta $1^\times_s 1^0_s$ będzie prostopadła do linji podstawy p, identycznej z osią x układu prostokątnego. W podobny sposób znajdziemy punkty 2^0_s, 3^0_s, ... I^0_s, II^0_s, ... A^0_s, które połączone utworzą szukaną perspektywę danego objektu.

Zamiast płaszczyzny tła π przenieść możemy szereg punktów $1'_s$, ... A'_s, ... $3'_s$ zapomocą skrawka papieru na prostą p, wykreślić w nich prostopadłe i odmierzyć na nich wysokości punktów 1_s, 2_s, ..., równe oddaleniom punktów $1''_s$, $2''_s$, ... od osi x, jak to uczyniliśmy na rys. 373 *a, b*.

c) Omówiony wyżej p o ś r e d n i sposób rysowania perspektywy ma znaczenie raczej geometryczne; w praktyce stosujemy metodę punktów przebicia w sposób nieco odmienny, przedstawiony na rys. 375 *a* — *c*.

Rzućmy wierzchołki $1'$, $2'$, ... danego rzutu poziomego budynku (rys. 375*a*) z punktu O', który jest przyjętym rzutem poziomym oka, na ślad poziomy $h_\pi \equiv p$ płaszczyzny tła. Otrzymane punkty $1'_s$, $7'_s$, ... $3'_s$ stanowią rzuty poziome perspektyw punktów 1, 7, ... 3, a odcinek $\overline{1'_s 3'_s}$ rzut poziomy perspektywy danego rzutu poziomego budynku. Rzuty pionowe perspektyw punktów 1, I; 7, VII; ... leżeć będą na promieniach, łączących punkty $1''$, I''; $7''$, VII''; ... z punktem O'', t. j. rzutem pionowym oka. Odcinek $\overline{1''_s I''_s}$ jest rzutem pionowym perspektywy odcinka pionowego, którego rzutem pionowym jest odcinek $\overline{1'' I''}$; odcinek $\overline{7''_s VII''_s}$ jest rzutem pionowym perspektywy pionowego odcinka, wyrażającego się w rzucie pionowym odcinkiem $\overline{7'' VII''}$ i t. d. Wyznaczywszy rzuty pionowe perspektyw krawędzi pionowych, przystąpimy do narysowania perspektywy budynku. W tym celu przeniesiemy szereg punktów $1'_s$, $7'_s$, ... $3'_s$, Z'_2 prostej $h_\pi \equiv p$ z rys. 375*a* na horyzont h

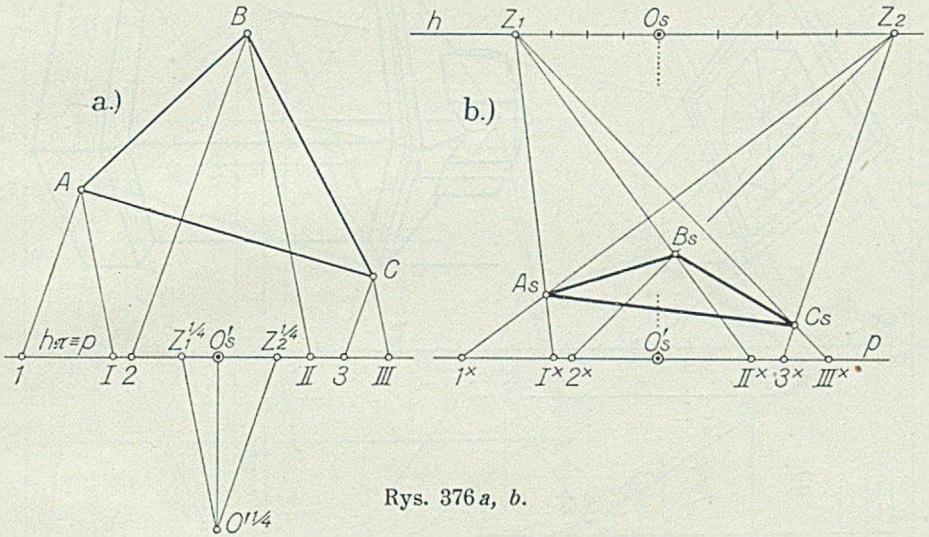


Rys. 375 *a*, *b*, *c*.

(rys. 375*c*) i wykreślimy w nich prostopadłe do tego horyzontu. Następnie odmierzymy $\overline{1'_s 1_s} = \overline{1''_h 1''_s}$, $\overline{1'_s I_s} = \overline{1''_h I''_s}$ i t. d. Użycie śladu zbiegu Z_2 ułatwi konstrukcję.

67. Metoda dwóch śladów zbiegu. *a)* Podstawą tej metody jest założenie, że każdy punkt uważać można za przecięcie się dwóch linij prostych.

Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej trójkąt ABC (rys. 376*a*), prostą $h_\pi \equiv p$, jako ślad poziomy pionowej płaszczyzny tła, i punkt $O'^{1/4}$, jako rzut poziomy oka, zbliżonego do tła o $^3/_4$ głębokości tłowej. Wykreślmy z punktu $O'^{1/4}$ dwie proste, w dwóch, dowolnych kierunkach i oznaczmy punkty przecięcia się ich z prostą $h_\pi \equiv p$ przez $Z_1^{1/4}$ i $Z_2^{1/4}$. Następnie poprowadźmy z każdego wierzchołka danego trójkąta promienie równoległe do kierunków $O'^{1/4}Z_1^{1/4}$ i $O'^{1/4}Z_2^{1/4}$, które przetną prostą $h_\pi \equiv p$ w szeregu punktów *1*, *I*, *2*, *II*, *3*, *III*. Punkty $Z_1^{1/4}$ i $Z_2^{1/4}$ są

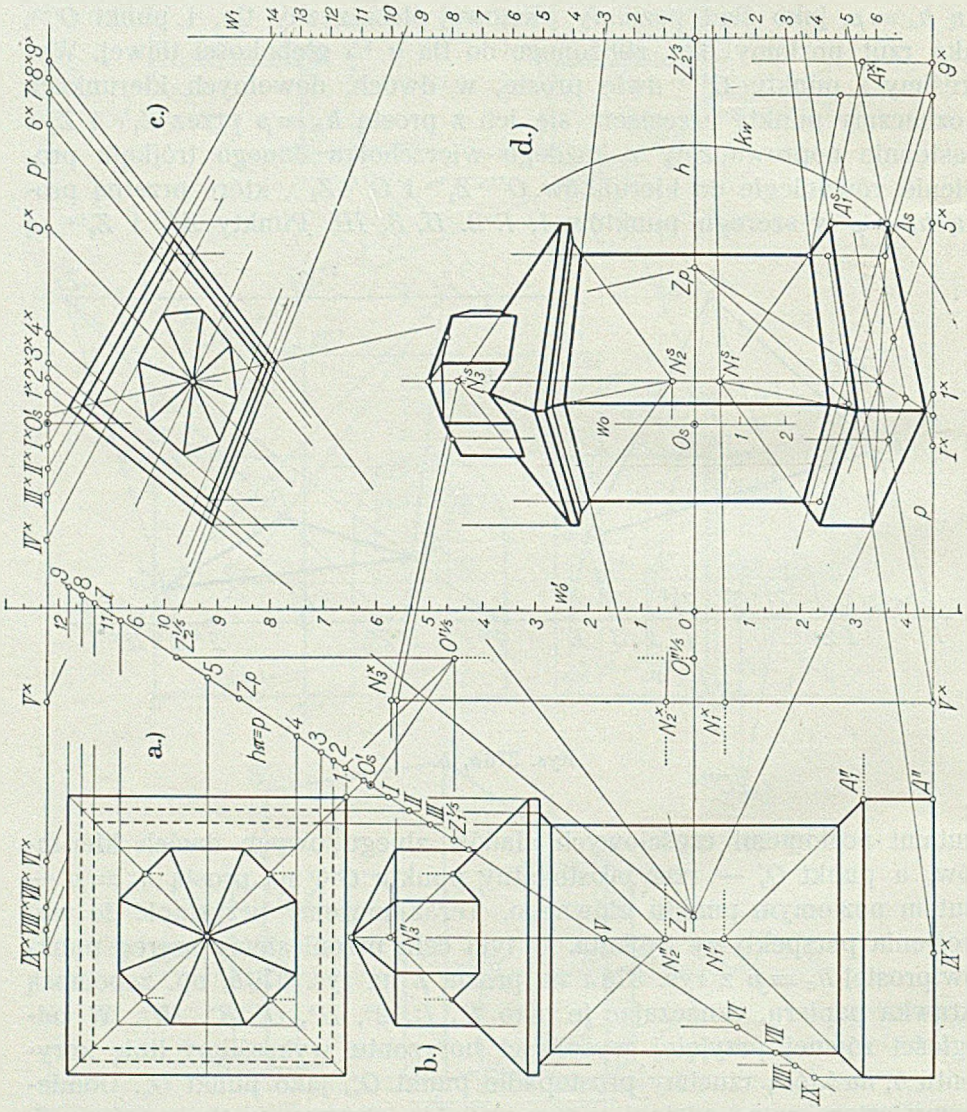


Rys. 376*a*, *b*.

rzutami poziomemi częściowych śladów zbiegu owych dwóch kierunków, a punkt O'_s — rzut prostokątny punktu $O'^{1/4}$ na prostą $h_\pi \equiv p$ — rzutem poziomym punktu głównego. Teraz możemy przystąpić do wykreślenia perspektywy trójkąta. W tym celu przeniesiemy szereg punktów prostej $h_\pi \equiv p$ z rys. 376*a* na prostą p na rys. 376*b*, np. zapomocą skrawka papieru, oznaczając je jako $1^\times$, $I^\times$, $2^\times$, $II^\times$, O'_s, $3^\times$, $III^\times$. W odległości równej przyjętej wysokości horyzontu wykreślimy linję horyzontu h, na którą rzucimy prostopadle punkt O'_s, jako punkt O_s. Odmierzymy czterokrotne odcinki $\overline{O'_s Z_1^{1/4}}$ i $\overline{O'_s Z_2^{1/4}}$, otrzymując ślady zbiegu Z_1 i Z_2. Pierwszy z nich łączymy z punktami $I^\times$, $II^\times$ i $III^\times$, drugi z punktami $1^\times$, $2^\times$ i $3^\times$. Punkty A_s, B_s i C_s są perspektywami wierzchołków danego trójkąta.

b) Przykład praktyczny zastosowania metody dwóch śladów zbiegu podaje rys. 377 *a* — *d*.

Położenie tła względem przedmiotu określa linja $h_\pi \equiv p$ (rys. 377 *a*); punkt $O'^{1/5}$ jest rzutem poziomym oka, zbliżonego do tła na odległość, równą piątej części głębokości tłowej. W rysowanym przedmiocie wy-



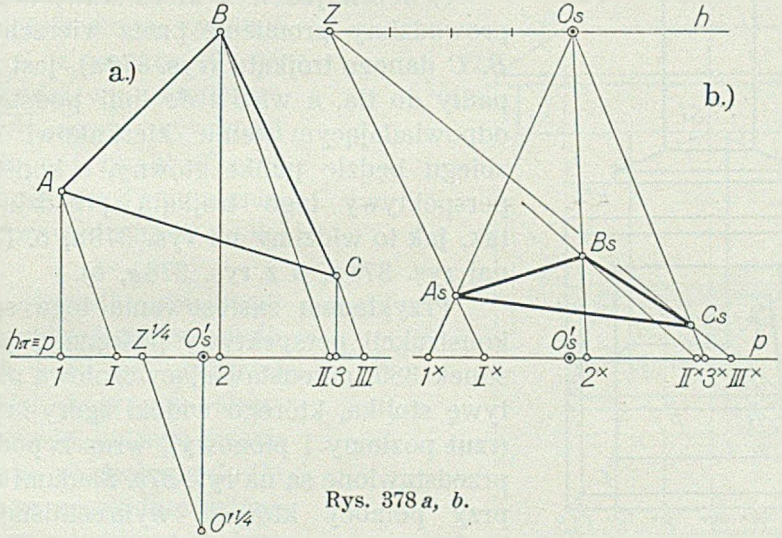
Rys. 377 *a*, *b*, *c*, *d*.

stępują dwa kierunki do siebie prostopadłe; punkty $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$ są rzutami poziomemi ich częściowych śladów zbiegu. Punkty przecięcia się *1*, *2*, ... *I*, *II*, ... przedłużonych boków kwadratów z prostą $h_\pi \equiv p$ są rzutami poziomemi śladów tłowych odnośnych prostych. Rys. 377 *b* przedstawia rzut pionowy rysowanego przedmiotu.

Aby nadać rysunkowi konieczną przejrzystość, narysowaliśmy najpierw (rys. 377*c*) perspektywę rzutu poziomego i to na podniesionej ponad płaszczyznę horyzontu płaszczyźnie poziomej. Taką perspektywę nazywać będziemy *rzutem sufitowym*.

Otrzymany już na prostej $h_\pi \equiv p$ szereg punktów (rys. 377*a*) przeniesiemy na prostą p', jako punkty $IX^\times$, $VIII^\times$, ... $9^\times$, a punkt O_s' rzucimy prostopadle na przyjęty horyzont h, jako punkt główny O_s.

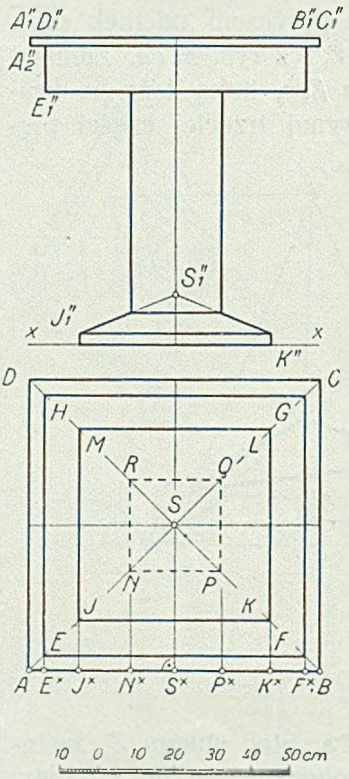
Ślad zbiegu Z_1 leży w obrębie rysunku, przyczem odcinek $\overline{O_s Z_1}$ równy jest pięciokrotnej długości odcinka $\overline{O_s' Z_1^{1/5}}$ z rys. 377*a*. Zamiast częściowego śladu zbiegu $Z_2^{1/5}$ użyjemy punktu $Z_2^{1/5}$, który leży po prawej stronie punktu głównego w odległości, równej trzeciej części pię-



Rys. 378 *a*, *b*.

ciokrotnej długości odcinka $\overline{O_s' Z_2^{1/5}}$ na rys. 377*a*. Ślad zbiegu Z_2 zastąpiony więc być może podziałką zbiegu. Dla podziałki w_0 przyjmiemy, jako jednostkę, 6 *mm*, wobec czego jednostką podziałki w_1 będą 4 *mm* (patrz ust. 23). Aby nie zmniejszać przejrzystości rysunku, przesunęliśmy podziałkę w_0, równolegle do jej położenia, na lewo, tak, aby jej jednostką była nieułamkowa ilość milimetrów, np. 7. Oczywiście, że równoimienne punkty podziału wszystkich trzech podziałek, więc w_0, w_1 i nowej podziałki w_0', będą leżały zawsze na jednym promieniu. Łącząc punkty $1^\times$, $2^\times$, ... $9^\times$ prostej p' ze śladem Z_1, a punkty $I^\times$, $II^\times$, ... $IX^\times$ — przy pomocy podziałek zbiegu — z punktem Z_2, otrzymamy perspektywę rzutu poziomego słupa. Teraz przystąpimy do narysowania jego perspektywy. W tym celu rzucimy punkty $1^\times$, $I^\times$, $9^\times$, $IX^\times$ i $V^\times$ prostej p' prostopadle na przyjętą linję podstawy p i rzuty te połączymy ze śladami zbiegu Z_1 i Z_2. Otrzymamy czworokąt, stanowiący perspektywę

kwadratu podstawy słupa. W punktach wierzchołkowych tego czworokąta poprowadzimy prostopadłe do horyzontu i taką samą prostopadłą w punkcie 9^x linji podstawy p. Odmierzymy $\overline{9^x A_1^x}$, równe wysokości punktu A_1, i punkt A_1^x połączymy ze śladem Z_1. Otrzymamy punkt A_1^s, który połączymy ze śladem zbiegu Z_2. Analogicznie postępować będziemy dalej, korzystając z perspektywy rzutu poziomego słupa. Konstrukcja nie zawiera nowych myśli, nie nastręczy czytelnikowi żadnych trudności przy odtwarzaniu jej z rysunku. Koło widzenia obrazu przechodzi przez punkt A_s; kąt widzenia wynosi około 31°.



Rys. 379.

c) Jeżeli jeden z kierunków, w którym prowadzimy promienie przez wierzchołki A, B, C danego trójkąta (rys. 376*a*), jest prostopadły do tła, a więc i do linji podstawy, to odpowiadającym temu kierunkowi śladem zbiegu będzie punkt główny, a konstrukcja perspektywy tego trójkąta przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 378*a*, *b*. (Porównaj rys. 376*a*, *b* z rys. 378*a*, *b*).

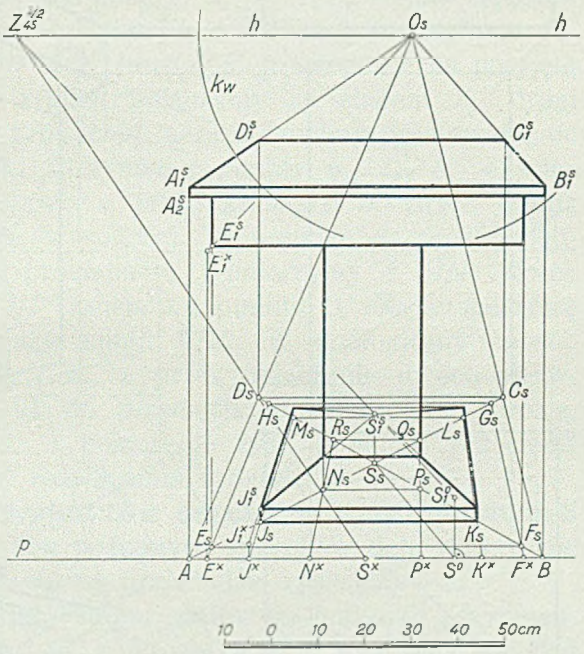
Przykładem zastosowania tego sposobu konstrukcji perspektywy pośredniej jest rysunek 380, przedstawiający czołową perspektywę stolika, którego widoki zgóry i zprzodu (rzut poziomy i pionowy), wraz z podziałką, przedstawione są na rys. 379. Śladami zbiegu, przy pomocy których wykreśliliśmy perspektywę, są: punkt połowy oddalenia $Z_{45}^{1/2}$ i punkt główny O_s.

Przyjmijmy głębokość tłową, równą 170 *cm* w podziałce rysunku, a wysokość horyzontu 112·5 *cm*. Niechaj płyta stołu opiera się o tło, czyli niechaj najmniejsze oddalenie przedmiotowe, mierzone w rzucie poziomym, równe będzie oddaleniu tłowemu.

Rozpoczniemy od wykreślenia perspektywy rzutu poziomego stolika. Bok $\overline{AB}$ kwadratu $ABCD$ (rys. 379) odetniemy na linji podstawy (rys. 380) i jego środek S^x połączymy z punktem $Z_{45}^{1/2}$ połowy głębokości. Punkt D_s, w którym prosta $S^x Z_{45}^{1/2}$ przetnie prostą AO_s, jest perspektywą trzeciego wierzchołka kwadratu. Równoległa do p, wykreślona przez punkt D_s, przecina promień BO_s w punkcie C_s. Odcinki $\overline{AC_s}$ i $\overline{BD_s}$ są perspektywą przekątnych kwadratu, a ich punkt przecięcia się S_s perspektywą jego środka.

Przenieśmy szereg punktów E^x, J^x, N^x, P^x, K^x, F^x z rys. 379 na prostą p w rys. 380 i połączmy je z punktem głównym. Na prostych AC_s i BD_s otrzymamy punkty E_s, F_s, G_s, H_s i J_s, K_s, L_s, M_s, a także punkty N_s, P_s, Q_s i R_s, które są perspektywą wierzchołków kwadratów, składających się na rzut poziomy stolika.

Zkolei wykreślimy perspektywę graniastosłupa, stanowiącego płytę podstawową, zakończoną u góry ściętym ostrosłupem. Wysokość graniastosłupa odmierzymy na tle, jako odcinek $\overline{J^x J_1^x}$ i rzucimy następnie z punktu O_s na prostopadłą, wykreśloną w punkcie J_s do p. Celem wyznaczenia perspektywy S_1^s wierzchołka ostrosłupa, rzucimy punkt S_s z punktu $Z_{45}^{1/2}$ na linję podstawy, odmierzymy $\overline{S^0 S_1^0}$, równe wysokości ostrosłupa i punkt S_1^0 rzucimy z punktu $Z_{45}^{1/2}$ na pionową, poprowadzoną w punkcie S_s.



Rys. 380.

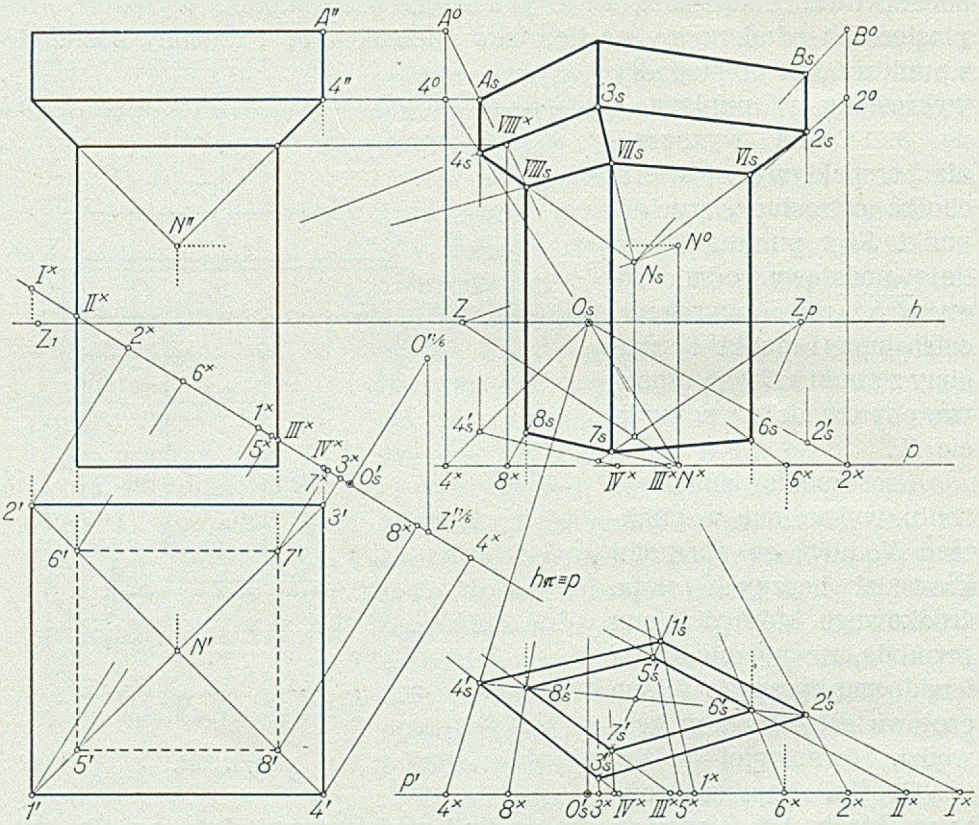
Prostopadłe do horyzontu, wykreślone w punktach N_s i P_s, są obrazami krawędzi bocznych słupa środkowego, którego ściana przednia, równoległa do tła i widoczna, przetnie ścianę czołową ostrosłupa w krawędzi, równoległej do tła.

Proste, poprowadzone w punktach A i B prostopadle do linji podstawowej, leżą na tle; odcinki ich przedstawią się więc w prawdziwej długości. Odmierzywszy $\overline{A A_1^s}$, równe wysokości stołu, i $\overline{A_1^s A_2^s}$, równe grubości płyty, wykreślimy przez A_1^s i A_2^s równoległe do h, otrzymując czołową ścianę płyty stolika, leżącą na tle. Punkty A_1^s i B_1^s łączymy z punktem głównym, a punkty C_1^s i D_1^s przecięcia się tych prostych z prostopadłemi, wykreślonemi do horyzontu w punktach C_s i D_s, dopełniają perspektywy kwadratu płyty stołu.

Pozostaje jeszcze wykreślenie krawędzi ramy (pudła), podtrzymującej płytę górną stołu, którą znajdziemy, wychodząc znowu z rzutu poziomego, rys. 379. Na prostopadłej, wykreślonej w punkcie E^x do p, odmierzymy wysokość punktu E_1; punkt E_1^x połączymy z punktem

głównym, otrzymując na prostopadłej, poprowadzonej w punkcie E_s do horyzontu, punkt E_1^s. Dopełnienie rysunku nie wymaga dalszych wyjaśnień.

Przykład pośredniej perspektywy bocznej, wykonanej zastosowaniem metody dwóch śladów zbiegu, z których jednym jest punkt główny, stanowi rys. 381.



Rys. 381.

Punkty $1'$, $2'$, ... $6'$, danego rzutu poziomego słupa rzucimy prostopadle na przyjęty ślad poziomy $h_\pi \equiv p$ płaszczyzny tła, otrzymując tam szereg punktów $1^\times$, $2^\times$, ... $6^\times$. Punkt $Z_1'^{1/6}$ jest rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu jednego z dwóch głównych kierunków, do siebie prostopadłych. Do konstrukcji użyjemy śladu zbiegu Z_1, który leży na przyjętym horyzoncie h, w oddaleniu od przyjętego punktu głównego O_s, równem sześciokrotnemu odcinkowi $\overline{O_s' Z_1'^{1/6}}$.

Najpierw narysowaliśmy perspektywę rzutu poziomego słupa i to na płaszczyźnie, leżącej pod płaszczyzną podstawy. Perspektywa taka

nosi nazwę *rzutu piwnicznego*. Przenieśmy otrzymany na prostej $h_\pi \equiv p$ szereg punktów $2^\times$, $6^\times$, ... O'_s, ... $4^\times$ wraz z punktami $I^\times$, $II^\times$, $III^\times$ i $IV^\times$, w których boki kwadratów, stanowiących rzut poziomy słupa, przecinają prostą $h_\pi \equiv p$, na obniżoną linję podstawy p'. Rzućmy następnie punkt O'_s prostopadle na przyjęty horyzont i znajdźmy ślad zbiegu Z_1, odmierzając na lewo od otrzymanego punktu głównego O_s odcinek $\overline{O_s Z_1}$, równy sześciokrotnej długości odcinka $\overline{O'_s Z'_1}^{1/6}$. Punkty $I^\times$, $II^\times$, $III^\times$ i $IV^\times$ połączymy ze śladem Z_1, a wszystkie pozostałe z punktem głównym. Wykreślone promienie przetną się w punktach $1'_s$, $2'_s$, $3'_s$, ... $8'_s$, wyznaczających rzut piwniczny. Prosta $3'_s 1'_s$ przetnie horyzont w śladzie przekątnym Z_p.

Teraz rzucimy punkty $III^\times$ i $6^\times$ prostej p' prostopadle na przyjętą linję podstawy p. Pierwszy z nich połączymy ze śladem Z_1, drugi z punktem głównym O_s i na promienie łączące rzucimy prostopadle do horyzontu punkty $6'_s$, $7'_s$ i $8'_s$. Otrzymamy punkty 6_s, 7_s, 8_s, a więc i perspektywę krawędzi podstawy, a także krawędzi bocznych trzona słupa. Chodzi o perspektywę wysokości. W punkcie $8^\times$ prostej podstawy p wykreślimy do niej prostopadłą, odmierzymy $\overline{8^\times VIII^\times}$ równe wysokości trzona i punkt $VIII^\times$ rzucimy z punktu O_s na perspektywę lewej krawędzi konturowej, jako punkt VIII_s. W analogiczny sposób znajdziemy punkty 4_s, A_s, 2_s i B_s, a przez połączenie dwóch pierwszych ze śladem zbiegu Z_1, aż do przecięcia się z pionową prostą, przechodzącą przez punkt $3'_s$, i połączenie tych punktów przecięcia z punktami 2_s i B_s dopełnimy rozwiązania zadania.

68. Połączenie metody punktów przebicia z metodą dwóch śladów zbiegu. Połączenie obu poznanych sposobów daje praktyczne korzyści, o czem przekonamy się na przykładzie rys. 382*a*—*c*.

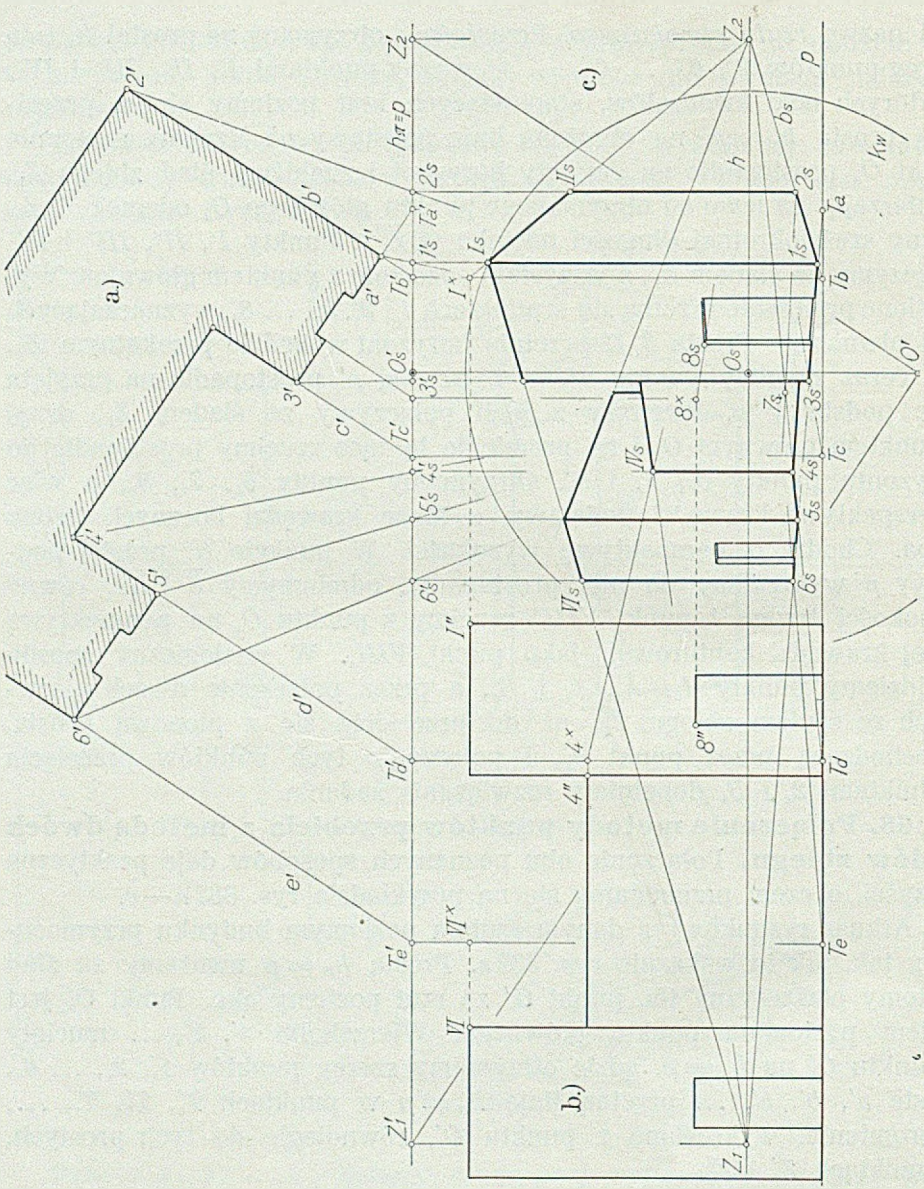
Arkusz rysunkowy z danym rzutem poziomym budynku przymocujemy tak, jak to wskazuje rys. 382*a*. Prostą $h_\pi \equiv p$ uważamy za ślad poziomy płaszczyzny tła, punkt O' za rzut poziomy oka. Punkt O'_s jest rzutem poziomym punktu głównego. Wierzchołki $1'$, $2'$, ... rzucimy z punktu O' na $h_\pi \equiv p$, gdzie otrzymamy szereg punktów $1'_s$, $2'_s$, ... $6'_s$. Proste a', b', c', ... przetną linję $h_\pi \equiv p$ w punktach T'_a, T'_b, T'_c, ..., a promienie, wykreślone z punktu O', równolegle do tych prostych, w punktach Z'_1 i Z'_2.

Rys. 382*b* jest rzutem pionowym budynku.

Punkty T'_a, T'_b, ... T'_c rzucimy prostopadle na linję podstawy p, a punkty Z'_1 i Z'_2 na przyjęty horyzont h. Ślady tłowe T_a, T_b, ... T_c połączymy z odpowiedniemi śladami zbiegu, a w punktach $1'_s$, $2'_s$, ... $6'_s$ wykreślimy prostopadłe do p, otrzymując na nich punkty 1_s, 2_s, ... 6_s.

Wyznaczenia punktów I_s, II_s, ... dokonaliśmy w omawiany kilkakrotnie sposób i pozostawiamy czytelnikowi odtworzenie go z rysunku.

Kąt widzenia obrazu wynosi 58°.

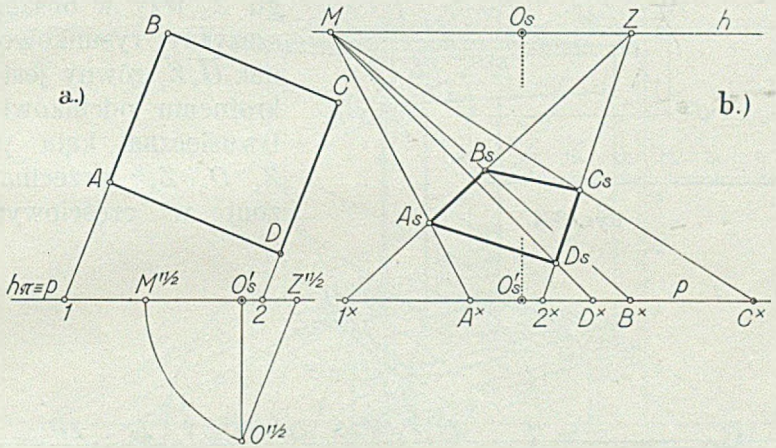


Rys. 382 *a*, *b*, *c*.

69. Metoda śladów zbiegu i punktów mierzenia. *a)* Na płaszczyźnie poziomej leży prostokąt $ABCD$ (rys. 383*a*). Pionowa płaszczyzna tła przecina płaszczyznę poziomą wzdłuż prostej $h_{\pi} = p$. Punkt $O''_{|2}$ jest poziomym rzutem oka, zbliżonego do tła o połowę swego oddalenia. Punkt O'_s jest rzutem poziomym punktu głównego a punkt $Z''_{1|2}$ rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu kierunku, równoległego do jednego boku prostokąta. Łuk koła, za-

kreślony z punktu $Z'^{1/2}$, jako środka, promieniem $Z'^{1/2}O'^{1/2}$, przetnie prostą h_π w punkcie $M'^{1/2}$.

Przyjąwszy linję podstawy p (rys. 383 *b*), przenieśmy na nią z rysunku 383 *a* punkty *1*, O_s' i *2*, jako punkty $1^\times$, O_s' i $2^\times$. Rzut prostokątny O_s punktu O_s' na obrany horyzont będzie punktem głównym. Znajdziemy punkt Z, odmierzając od punktu O_s dwukrotnie odcinek $\overline{O_s'Z'^{1/2}}$. Podobnie otrzymamy punkt mierzenia M, odpowiadający punktowi Z, odnosząc $\overline{O_sM}$, równe dwukrotnej długości odcinka $\overline{O_s'M'^{1/2}}$. Punkty $1^\times$ i $2^\times$ połączymy ze śladem zbiegu Z, poczem odmierzymy $\overline{1^\times A^\times} = \overline{1A}$ i $\overline{1^\times B^\times} = \overline{1B}$, a otrzymane na linji podstawy p punkty $A^\times$ i $B^\times$ połączymy z punktem mierzenia M. Na promieniu $1^\times Z$



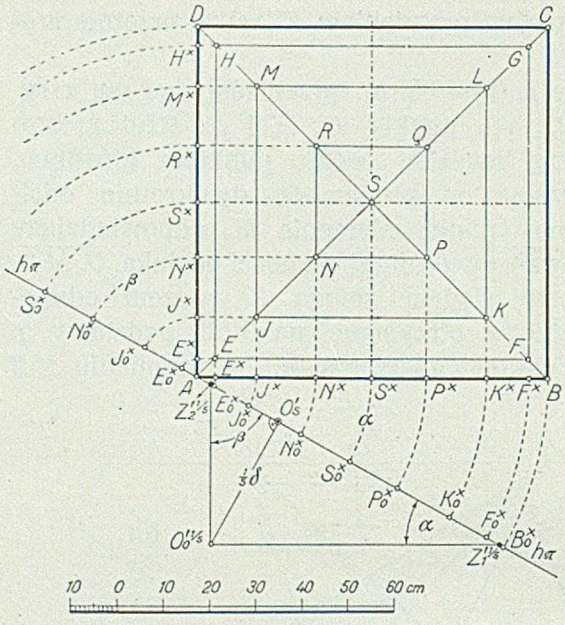
Rys. 383 *a*, *b*.

otrzymamy punkty A_s i B_s. W analogiczny sposób otrzymamy punkty C_s i D_s na prostej $2^\times Z$, odmierzając $\overline{2^\times C^\times} = \overline{2C}$ i $\overline{2^\times D^\times} = \overline{2D}$ i łącząc punkty $C^\times$ i $D^\times$ z punktem M.

Użycie częściowego punktu mierzenia zmieniłoby konstrukcję tylko o tyle, że na linję podstawy p przenieślibyśmy nie odcinki $\overline{1A}$, $\overline{1B}$, $\overline{2C}$ i $\overline{2D}$ lecz ich części.

b) Praktyczny przykład zastosowania metody śladów zbiegu i punktów mierzenia przedstawia zadanie narysowania bocznej perspektywy stolika, rozwiązane na rys. 385.

Prostokątne rzuty tego stolika podał nam rys. 379. Niechaj płaszczyzna tła przejdzie przez pionową krawędź A_1A_2 górnej płyty stolika w sposób uzmysłowiony na rys. 384, który przedstawia sytuację stolika, płaszczyznę tła i płaszczyznę horyzontu w rzucie poziomym (w widoku zgóry). Rysunek ten określa także położenie oka względem tła i czę-

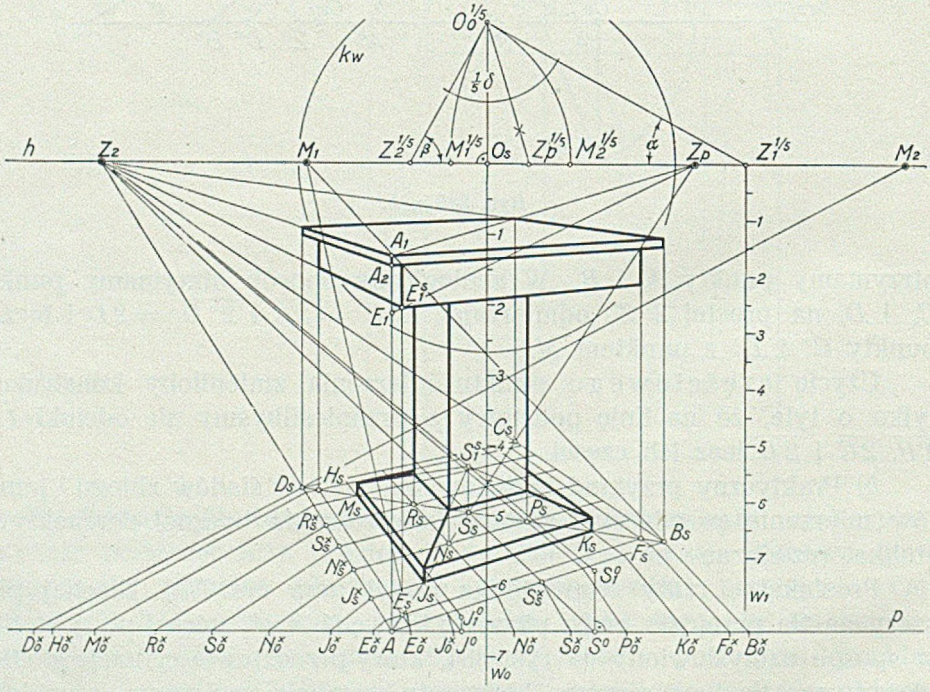


Rys. 384.

ściowych śladów zbiegu $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$ dwóch kierunków wzajemnie prostopadłych, ale równoległych do poziomych krawędzi stolika.

Przyjmiemy horyzont h (rys. 385), na nim punkt główny O_s i wykreślimy trójkąt $O_0^{1/5} Z_1^{1/5} Z_2^{1/5}$, przystający do trójkąta $O'^{1/5} Z_1'^{1/5} Z_2'^{1/5}$ na rys. 384.

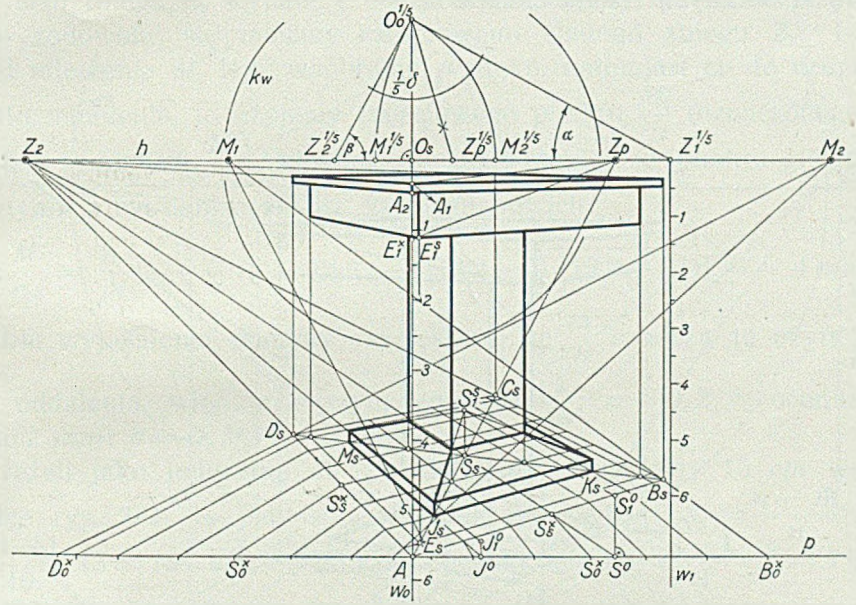
Przyjmiemy, że ślad zbiegu Z_2 leży w obszarze płaszczyzny rysunkowej. Odcinek $O_s Z_2$ równy jest pięciokrotnemu odcinkowi $O_s Z_2^{1/5}$. Dwusieczna kąta prostego $Z_1^{1/5} O_0^{1/5} Z_2^{1/5}$ przecina horyzont w częściowym śla-



Rys. 385.

dzie $Z_p^{1/5}$ przekątnych, których istotnym śladem zbiegu (punktem przekątnym) jest punkt Z_p, przyczem $\overline{O_s Z_p} = 5 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/5}}$. Łuki kół, zakreślone z punktów $Z_1^{1/5}$ i $Z_2^{1/5}$, jako środków, przetną horyzont w punktach $M_1^{1/5}$ i $M_2^{1/5}$, które pozwolą wyznaczyć punkty mierzenia M_1 i M_2; pierwszy odnosi się do prostych, zbiegających się w śladzie Z_1, a drugi do promieni, których śladem zbiegu jest punkt Z_2.

Niedostępny ślad zbiegu Z_1 zastąpimy podziałką zbiegu w_1, przyjmując, jako jednostkę dla podziałki w_0, 15 *cm* w podziałce rysunku



Rys. 386.

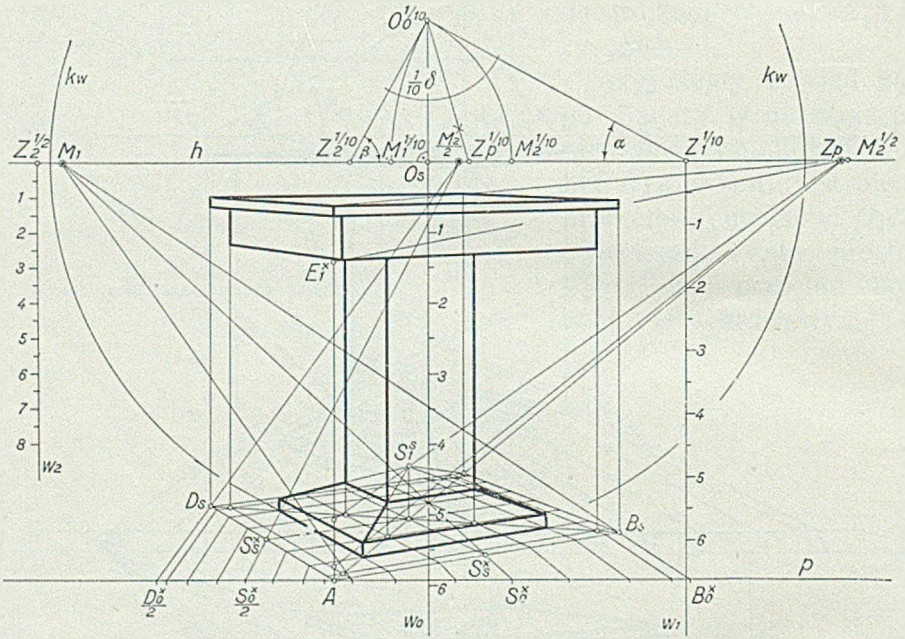
(patrz rys. 384), co wynosi 9·3 *mm*. Jednostka podziałki w_1 wypadnie z równania (2), ust. 23, str. 65, 12 *cm* w podziałce rysunku, czyli około 7·5 *mm*.

Od punktu przecięcia się prostej w_0 z prostą p odmierzmy na tej ostatniej, od ręki prawej ku lewej, odcinek $\overline{O_s' A}$ z rys. 384 i połączmy otrzymany punkt A ze śladami Z_1 i Z_2. Następnie przeniesiemy na linję podstawy p szereg punktów $E_0^\times$, $J_0^\times$, $N_0^\times$ ... $B_0^\times$, leżący na prawo punktu A linji h_π i przystający do niego szereg $E_0^\times$, $J_0^\times$, ... $D_0^\times$ po lewej stronie tego punktu. Otrzymane punkty rzucimy z punktów mierzenia M_1 i M_2 na proste AZ_1 i AZ_2, a otrzymane tam szeregi A, ... B_π i A ... D_π połączymy ze śladami zbiegu Z_1 i Z_2. Tym sposobem dojdziemy do perspektywy rzutu poziomego stolika.

Zkolei wykreślimy w punktach J_π, K_π i M_π prostopadłe do hory-

zontu, a na pierwszej z nich odmierzymy perspektywicznie skrócony odcinek, równy wysokości płyty dolnej. W tym celu przedłużymy prostą $Z_2 J_s$ do linji podstawowej p, wykreślimy $\overline{J^0 J_1^0} \perp p$ i równe wysokości płyty i punkt J_1^0 połączymy ze śladem Z_2. Dalsze krawędzie płyty wykreślimy bez trudności. Perspektywę S_1^s wierzchołka S_1 znajdziemy, odmierzając na pionowej, przechodzącej przez punkt S_s, perspektywicznie skrócony odcinek $\overline{S^0 S_1^0}$.

W punktach N_s, P_s i R_s wykreślimy pionowe, które są obrazami krawędzi bocznych trzona stolika.



Rys. 387.

Na prostopadłej do p, wykreślonej w punkcie A, odmierzymy odcinek $\overline{A A_1}$, równy wysokości stolika, i $\overline{A_1 A_2}$, równy grubości płyty. Krawędź $A_1 A_2$ leży, zgodnie z założeniem, na tle. Punkty A_1 i A_2 połączymy ze śladami Z_1 i Z_2, a pierwszy nadto ze śladem Z_p, i otrzymamy perspektywę płyty. Pozostają wreszcie do wyznaczenia obrazy krawędzi ramy górnej. Odmierzymy jej wysokość na tle od punktu A_2, jako odcinek $A_2 E_1$ na prostej $A_1 A$, połączymy punkt E_1 ze śladem Z_p, aż do przecięcia się w punkcie E_1^s, z pionową, wykreśloną w punkcie E_s. Punkt E_1^s łączymy ze śladami Z_1 i Z_2, znajdując następnie, bez trudu, pionowe krawędzie konturowe ramy.

Rys. 386 przedstawia perspektywę tego samego przedmiotu, z tą tylko różnicą, że zmniejszyliśmy wysokość horyzontu, a nadto

przesunęliśmy stolik bardziej na prawo tak, że krawędź $A_1 A_2$ płyty górnej, leżąc, jak poprzednio, na tle, znajduje się na głównej płaszczyźnie pionu; $A_1 A_2$ na rys. 386 schodzi się zatem z prostą w_0. Inne warunki pozostały bez zmiany, a konstrukcję przeprowadzono w sposób identyczny z poprzednio opisanym.

Zachowując położenie przedmiotu względem głównej płaszczyzny pionu, jak w rys. 385, p o d w o i l i ś m y oddalenie i otrzymaliśmy perspektywę stolika, przedstawioną na rys. 387. Wskutek wzrostu oddalenia i ślad zbiegu Z_2 wypadł z obszaru płaszczyzny rysunkowej, wobec czego zadowolić się musimy częściowemi śladami zbiegu $Z_1^{1/10}$ i $Z_2^{1/2}$. Punkt mierzenia M_1 leży w obrębie rysunku, natomiast co do drugiego punktu mierzenia, to użyjemy częściowego punktu $\frac{M_2}{1/2}$ (oznaczonego na rys. 387 symbolem $\frac{M_2}{2}$), którego położenie względem punktu głównego obliczymy z równania (4), ust. 28, a mianowicie:

$$O_s \frac{M}{r/s} = \frac{n}{m} [a - \frac{r}{s} (a + b)] = \frac{10}{1} [10{\cdot}2 - \frac{1}{2} (10{\cdot}2 + 11)] = -4 \; mm.$$

Dla wyjaśnienia dodamy raz jeszcze, że $\frac{m}{n}$ oznacza tu użyty ułamek oddalenia, więc w naszym wypadku $\frac{1}{10}$; $a = O_s Z_2^{1/10}$, oceniliśmy na $10{\cdot}2$ *mm*; $b = O_s M_2^{1/10} = 11$ *mm*.

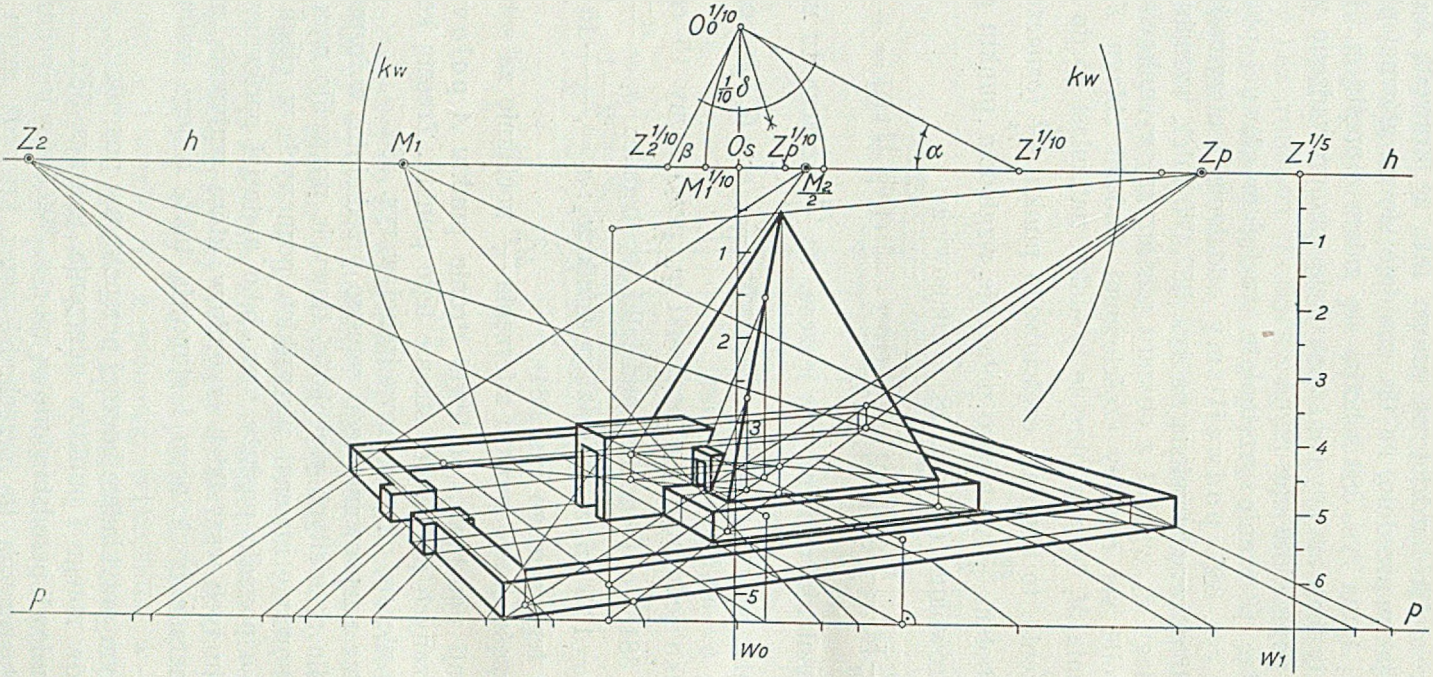
Jeżeli jako jednostkę dla podziałki w_0 przyjmiemy 15 *cm* w podziałce rys. 384, to jednostką podziałki w_1 będzie: $a_1 = \frac{n-m}{n} a = \frac{10-1}{10} \cdot 15 = 13{\cdot}5$ *cm*, a jednostką podziałki w_2: $a_2 = \frac{2-1}{2} \cdot 15 = 7{\cdot}5$ *cm* (w podziałce tego samego rys. 384).

Użycie częściowego punktu mierzenia $\frac{M_2}{2}$ pociągnie za sobą odmierzanie na linji podstawy, po lewej stronie punktu A p o ł o w y odcinków, odmierzanych po prawej stronie tego punktu. Zresztą konstrukcja nie różni się niczem od przeprowadzonej w rys. 386.

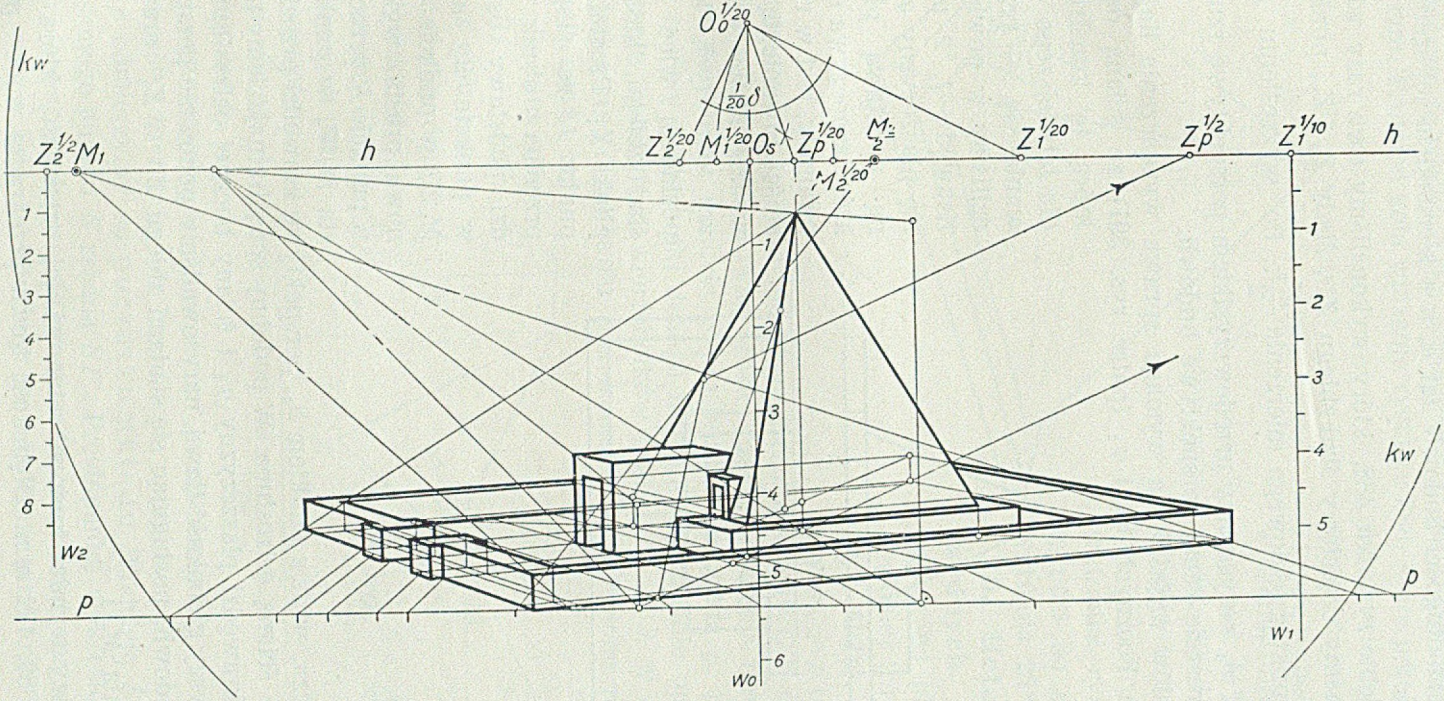
Tylokrotne narysowanie tego samego przedmiotu, w rozmaitych położeniach i dla rozmaitych głębokości tłowych, pozwoliło nam na praktyczne zastosowanie nieomal wszystkich poznanych w ciągu wykładu konstrukcyj, a ponadto posłuży nam, jako materjał porównawczy przy rozpatrywaniu tych wszystkich czynników, które wpływają na charakter obrazu perspektywicznego i stanowią także o jego walorach estetycznych.

c) Dalszym przykładem bocznej perspektywy pośredniej, wykonanej metodą śladów zbiegu i punktów mierzenia, jest rys. 388.

Plany budowli przedstawione są na rys. 390, który informuje nas ponadto, że płaszczyzna tła przechodzi przez krawędź muru i zawiera


$O_o^{1/10}$
kw
kw
$\frac{1}{10}\delta$
Z_2
h
M_1
$Z_2^{1/10}$
β
Os
$Z_p^{1/10}$
α
$Z_1^{1/10}$
Zp
$Z_1^{1/5}$
h
$M_1^{1/10}$
M_2
1
2
3
4
5
6
P
P
Wo
W_1

Rys. 388.

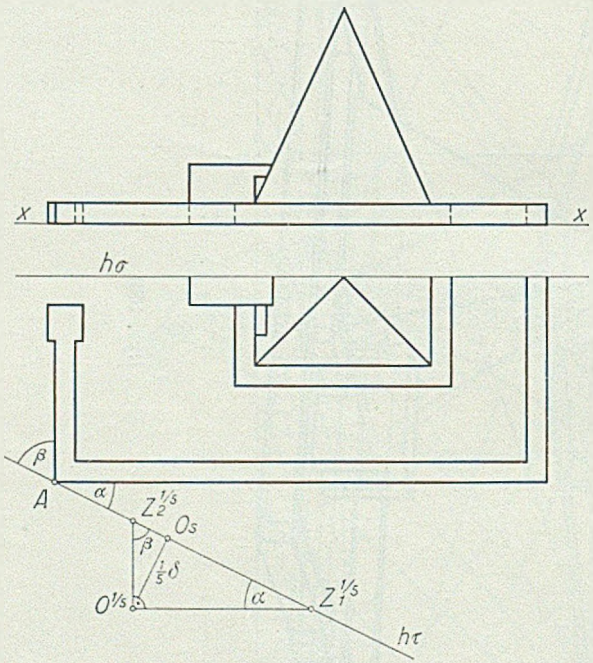

$O_0^{1/20}$
$\frac{1}{20}\delta$
$Z_2^{1/2}M_1$
h
$Z_2^{1/20}$
$M_1^{1/20}$
O_S
$Z_P^{1/20}$
$\frac{M_1}{2}$
$M_2^{1/20}$
$Z_1^{1/20}$
$Z_P^{1/2}$
$Z_1^{1/10}$
h
kw
W_2
p
W_0
kw
p
W_1

Rys. 389.

z kierunkiem długości budowli kąt α, a z kierunkiem jej szerokości kąt $(90^0 - \alpha) = \beta$.

W obrębie rysunku 388, który wykonaliśmy dwa razy większy od rys. 390, mamy częściowy ślad zbiegu $Z_1^{1/5}$, ślady Z_2 i Z_p, punkt mierzenia M_1 i punkt częściowego mierzenia $\frac{M_2}{2}$. Po wykreśleniu podziałek zbiegu w_0 i w_1 narysujemy przedewszystkiem perspektywę rzutu poziomego, a wreszcie samą perspektywę budowli.

Kilka słów wyjaśnienia wymaga sprawa wyznaczenia linji przenikania ścian bocznych φ_1 i φ_2 (patrz rys. 391) ze ścianą ostrosłupa, którą to konstrukcję — dla łatwiejszego zorjentowania się — przeprowadziliśmy w powiększeniu. Krawędź *1, 2* przecięcia się płaszczyzny φ_1 z górną podstawą płyty, na której spoczywa ostrosłup piramidy, jest w rzeczywistości równoległą do krawędzi *MN*. Perspektywy obu tych krawędzi posiadają więc wspólny ślad zbiegu, którym jest punkt Z_1. Prosta, łącząca punkt 1_s ze śladem Z_1, przecina obraz krawędzi podstawy ostrosłupa w punkcie 2_s, a prostą $M_s Z_p$ w punkcie I_s. Pionowa prosta, wykreślona w punkcie I_s, przecina prostą $M_s W_s$ w punkcie II_s, który wyznacza, wraz z punktem 2_s, perspektywę krawędzi przecięcia się ściany φ_1 ze ścianą ostrosłupa. W podobny sposób znajdziemy perspektywę $4_s IV_s$ krawędzi płaszczyzny φ_2 i ściany bocznej ostrosłupa.

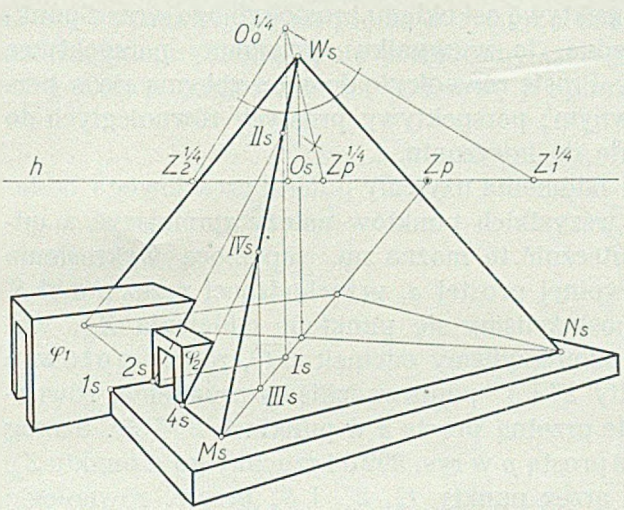


Rys. 390.

Podwoiwszy głębokość tłową, narysowaliśmy ponownie perspektywę tej samej budowli, posługując się śladami zbiegu $Z_1^{1/10}$ i $Z_2^{1/2}$ oraz punktami mierzenia M_1 i $\frac{M_2}{2}$.

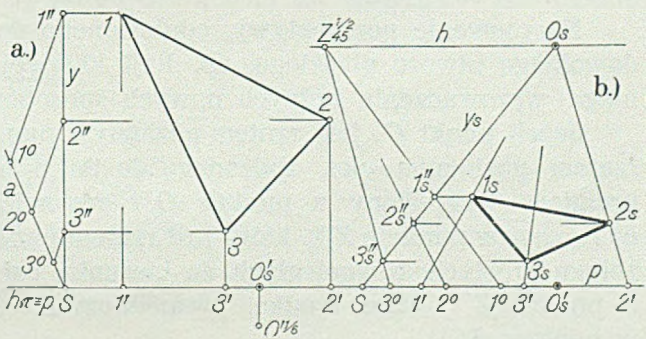
Największy wymiar budowli stanowi jej szerokość, która wynosi na rysunku 389, 122 *mm*. Głębokość tłowa przekracza w obu perspek-

tywach znacznie tę wielkość, bo wynosi w rys. 388 — 180 *mm*, a w rys. 389 — 360 *mm*. Promień koła widzenia rysunku 388, które przejdzie przez dolny wierzchołek prawego naroża, wynosi 74 *mm*, wobec czego kąt widzenia obrazu wynosi ponad 44°. Koła k_w w rys. 388 i 389 odpowiadają kątowi widzenia 30°. Promień koła widzenia rysunku 389 wynosi 80 *mm*, a kąt widzenia 25°.



Rys. 391.

70. Metoda spółrzędnych. *a)* Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej trójkąt *1, 2, 3* (rys. 392*a*), ślad poziomy $h_\pi \equiv p$ płaszczyzny tła, rzut poziomy O'_s punktu głównego i rzut poziomy $O''^{1/6}$ oka, zbliżonego do tła na odległość, równą szóstej części oddalenia tłowego. Wykreślmy w dowolnym punkcie S prostej $h_\pi \equiv p$ prostą y, prostopadłą do niej, i rzućmy wierzchołki danego trójkąta prostopadle na proste h_π i y. Położenie każdego z wierzchołków trójkąta *1, 2, 3*, w odniesieniu do prostokątnego układu osi $h_\pi \equiv p$ i y, określone jest dwiema spółrzędnemi. Są niemi, np. dla punktu *1*, odcinki $\overline{S1'}$ i $\overline{S1''}$. Pierwszy z nich nazywa się odciętą, drugi rzędną punktu *1*.



Rys. 392 *a, b*.

Gdy znamy długości spółrzędnych punktu, to jego położenie — w odniesieniu do danego układu osi $h_\pi \equiv p$ i y — wyznaczymy w ten sposób, że na osi $h_\pi \equiv p$ odmierzymy od początku układu S odciętą $\overline{S1'}$, na osi y od tego samego punktu S rzędną $\overline{S1''}$. Prostopadła, wykreślona w punkcie *1'* do pierwszej osi, przetnie prostopadłą, poprowadzoną w punkcie *1''* do osi y, w punkcie *1*. Widzimy, że każdemu punktowi płaszczyzny

odpowiadają — w odniesieniu do danego układu prostokątnego — dwie spółrzędne.

Jeżeli wykreślimy perspektywę osi układu prostokątnego wraz z punktami określającemi spółrzędne, to w wyniku otrzymamy perspektywę $1_s 2_s 3_s$ trójkąta (rys. 392 *b*). Proste równoległe do osi *y* zbiegną się w perspektywie w punkcie głównym; perspektywy prostych równoległych do osi $h_\pi \equiv p$ będą równoległe do horyzontu.

Jeżeli zamiast punktu oddalenia użyjemy punktu częściowego oddalenia, to wówczas rzędne wszystkich punktów należy zmniejszyć w odpowiednim stosunku. Uskutecznić to można np. zapomocą wykreślenia szeregu podobnego na dowolnej prostej *a*, przechodzącej przez punkt *S*. W naszym przykładzie posłużyliśmy się punktem oddalenia $Z^{1/2}_{45}$, wobec czego na prostej *a* odmierzyliśmy odcinek $\overline{S1^0}$, równy połowie rzędnej $\overline{S1''}$, a przez punkty $2''$ i $3''$ poprowadziliśmy promienie, równoległe do $1''1^0$. Promienie te przetną prostą *a* w punktach 2^0 i 3^0. Szereg $S, 3^0, 2^0, 1^0$ przeniesiemy na prostą *p* w rys. 392 *b* i rzucimy go z punktu $Z^{1/2}_{45}$ na prostą y_s. Wykreślone przez punkty $1''_s$, $2''_s$, i $3''_s$ proste, równoległe do linji podstawy *p*, przetną perspektywicznie równoległe promienie $O_s 1'$, $O_s 2'$ i $O_s 3'$ w punktach 1_s, 2_s i 3_s.

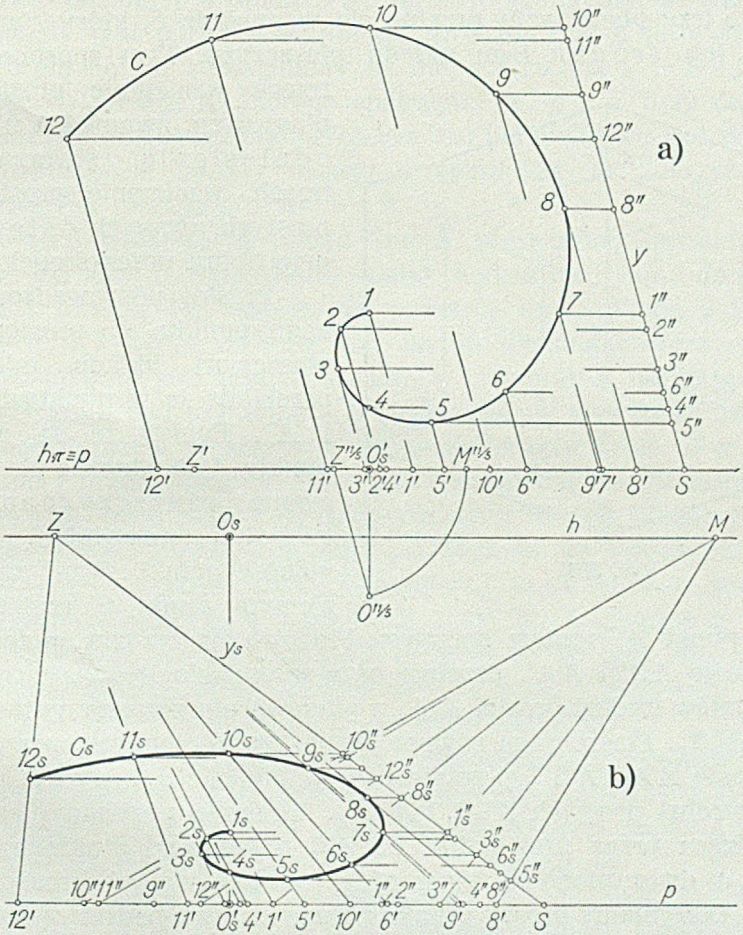
b) Jeżeli oś *y* układu odniesienia nie jest prostopadłą do osi $h_\pi \equiv p$ (rys. 393 *a*), to wówczas układ odniesienia jest ukośnokątny. Położenie punktu, np. punktu *1* na rys. 393 *a*, w odniesieniu do tego układu, oznaczone jest — podobnie, jak w układzie prostokątnym — zapomocą dwóch spółrzędnych: rzędnej $\overline{S1''}$ i odciętej $\overline{S1'}$. Punkty $1'$ i $1''$ na osiach $h_\pi \equiv p$ i *y* powstały przez przecięcie się tych osi z promieniami, wykreślonemi równolegle do nich przez punkt *1*.

Narysowanie perspektywy, odniesionego do ukośnokątnego układu, dowolnego utworu płaskiego, np. linji krzywej *C* (rys. 393 *a*), nie wymaga wprowadzenia żadnych nowych sposobów konstrukcyjnych.

Jeżeli punkt O'_s jest rzutem poziomym punktu głównego, punkt $O'^{4/5}$ rzutem poziomym oka, zbliżonego do tła o $^4/_5$ głębokości tłowej, to promień, wykreślony z punktu $O'^{4/5}$ równolegle do osi *y*, przetnie oś $h_\pi \equiv p$ w punkcie $Z'^{4/5}$, który jest rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu prostych, równoległych do kierunku osi *y*. Łuk koła, zakreślony z punktu $Z'^{4/5}$, jako środka, promieniem $\overline{Z'^{4/5} O'^{4/5}}$, przetnie oś $h_\pi \equiv p$ w punkcie $M'^{4/5}$.

Przyjmijmy podstawę *p*, horyzont *h* (rys. 393 *b*), a na nim punkt główny O_s. Pięciokrotny odcinek $\overline{Z'^{4/5} O'_s}$, przeniesiony z rys. 393 *a* na horyzont, od punktu głównego na lewo, wyznacza tam ślad zbiegu *Z* promieni, równoległych do osi *y* układu odniesienia, a odcinek $\overline{O'_s M'^{4/5}}$, odniesiony pięciokrotnie na horyzoncie od punktu O_s na prawo, określa położenie punktu mierzenia *M* dla tego samego kierunku.

Oznaczmy prostokątny rzut punktu O_s na podstawę p symbolem O'_s, poczem przenieśmy szereg punktów S, $8'$, ... $6'$, O'_s, ... $12'$ z prostej $h_\pi \equiv p$ rysunku 393 *a* na prostą p rysunku 393 *b* i połączmy te punkty ze śladem zbiegu Z. Następnie przenieśmy szereg punktów S, $5''$, $4''$ ... $10''$ osi y układu odniesienia na podstawę p i punkty tego szeregu połączmy



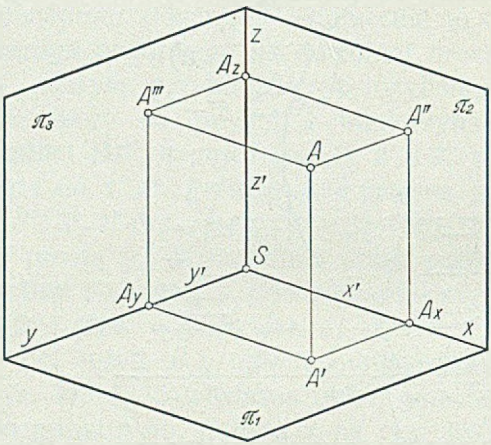
Rys. 393 *a*, *b*.

z punktem mierzenia M. Na prostej y_s otrzymamy szereg punktów: $5''_s$, $6''_s$, ... $10''_s$, przez które wykreślimy równoległe do p.

Tym sposobem przenieśliśmy dany ukośnokątny układ odniesienia z rzutu poziomego do rzutu perspektywicznego. Odpowiadające sobie promienie przetną się w punktach 1_s, 2_s, ... 12_s, linji C_s, będącej perspektywą krzywej C.

71. Perspektywa aksonometryczna[1]).

a) Położenie punktu w przestrzeni określić można, odnosząc go do układu trzech, wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przecinających się parami wzdłuż trzech osi: x, y i z. Pozioma płaszczyzna π_1 (rys. 394) przecina płaszczyznę pionową π_2 układu wzdłuż osi x, a płaszczyznę boczną π_3 wzdłuż osi y. Płaszczyzny π_2 i π_3 utworzą prostą z, zaś wszystkie trzy płaszczyzny przetną się w punkcie S, który stanowi początek lub środek tego układu płaszczyzn. Tym sposobem układ trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, zwany też układem odniesienia, stwarza układ trzech wzajemnie prostopadłych prostych, zwanych osiami, które przechodzą przez środek S.



Rys. 394.

Proste, poprowadzone z danego punktu A, prostopadle do płaszczyzn układu odniesienia, przebijają je w punktach A', A'' i A'''. Punkty te są rzutami punktu A na odnośne płaszczyzny, zwane płaszczyznami rzutów lub rzutniami. W szczególności punkt A' jest rzutem poziomym, punkt A'' rzutem pionowym, a punkt A''' rzutem bocznym. Pionowa płaszczyzna, przechodząca przez proste AA' i AA'', przetnie oś x w punkcie A_x, płaszczyznę poziomą rzutów wzdłuż prostej $A'A_x$ a pionową płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej $A''A_x$. Płaszczyzna równoległa do rzutni pionowej, przechodząca przez proste AA' i AA''', przetnie oś y w punkcie A_y, a dwie pozostałe rzutnie wzdłuż prostych $A'A_y$ i $A'''A_y$. Wreszcie pozioma płaszczyzna, przechodząca przez proste AA'' i AA''', przetnie oś z układu w punkcie A_z, a dwie pionowe płaszczyzny rzutów wzdłuż prostych $A''A_z$ i $A'''A_z$. Otrzymamy prosty graniastosłup, którego podstawą jest prostokąt $SA_xA'A_y$, a którego trzy krawędzie schodzą się w punkcie S.

Odcinek $\overline{AA'''}$ wyraża odległość punktu A od rzutni bocznej π_3, czyli jego „szerokość“; odcinek $\overline{AA''}$ jest „głębokością“ punktu, t. j. jego odległością od rzutni pionowej π_2, a odcinek $\overline{AA'}$, równy oddaleniu punktu A od rzutni poziomej π_1, stanowi jego „wysokość“. Widzimy z rysunku 394, że krawędzie $\overline{SA_x}$, $\overline{SA_y}$ i $\overline{SA_z}$ wspomnianego wyżej graniastosłupa, schodzące się z osiami układu odniesienia, równe są odpowiednim

[1]) Patrz autora: „O pewnem zastosowaniu metody aksonometrji do perspektywy środkowej“. Czasopismo Techniczne. Lwów, 1909.

krawędziom tegoż graniastosłupa, przecinającym się w punkcie A. Odcinki $\overline{SA_x}$, $\overline{SA_y}$ i $\overline{SA_z}$ nazywamy prostokątnemi **spółrzędnemi** danego punktu A i oznaczamy je literami odnośnych osi. Znajomość spółrzędnych punktu pozwala na wyznaczenie, w sposób jednoznaczny, jego położenia w przestrzeni. Istotnie bowiem, odciąwszy na osi x spółrzędną $\overline{SA_x} = x'$, a następnie na prostopadłej, wykreślonej na płaszczyźnie poziomej w punkcie A_x do osi x, spółrzędną $y' = \overline{SA_y} = \overline{A_x A'}$, otrzymamy rzut poziomy A' punktu A. W punkcie A' prowadzimy prostą równoległą do osi z i odcinamy na niej spółrzędną $z' = \overline{SA_z} = \overline{A'A}$, dochodząc do punktu A, którego spółrzędne x', y' i z' były dane.

b) Perspektywa aksonometryczna jest perspektywą pośrednią, w której poszczególne punkty obrazu otrzymujemy za pośrednictwem ich spółrzędnych prostokątnych.

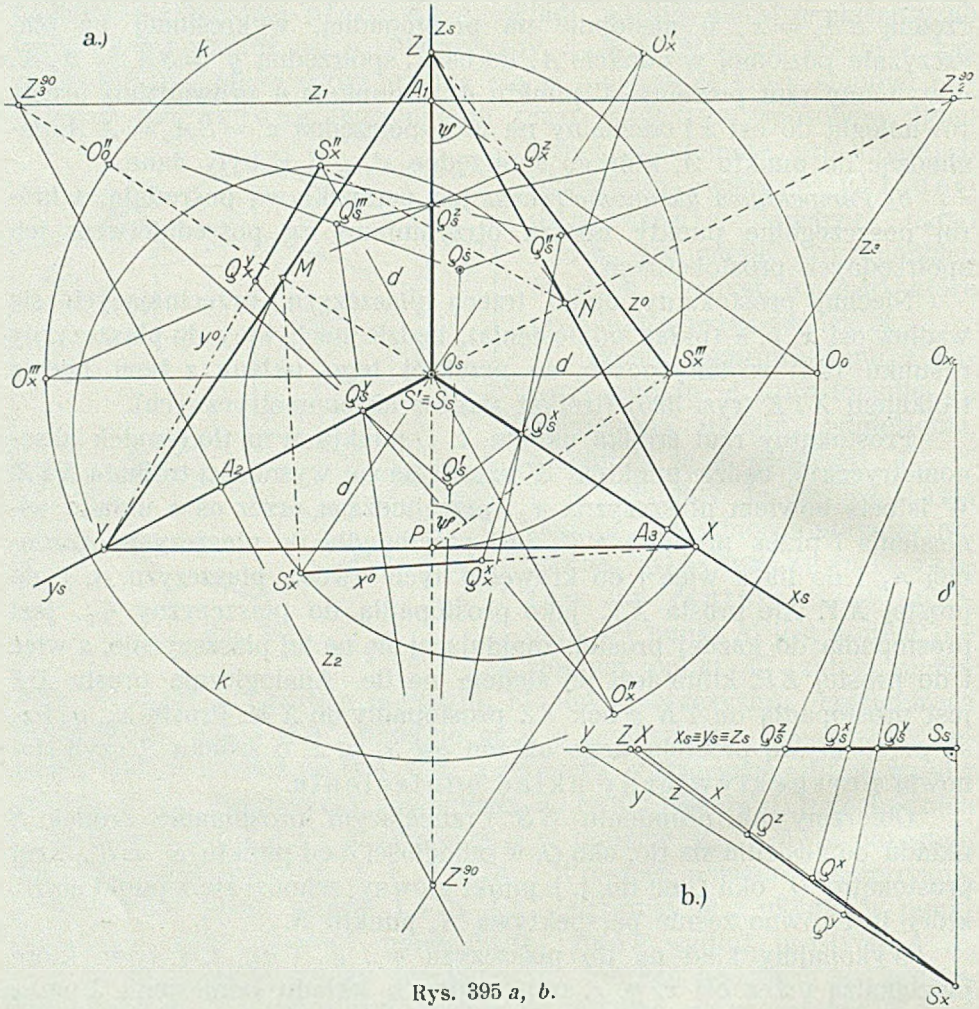
Niechaj prostokątny układ trzech płaszczyzn, przecinających się wzdłuż osi x, y, z (układ odniesienia), będzie nachylony do płaszczyzny rysunku (tła) w ten sposób, że przekrój tego układu z tłem będzie trójkątem XYZ (rys. 395) (trójkąt śladów aksonometrycznych).

Prostokątny rzut środka układu, t. j. punktu S, na tło (środek aksonometryczny), będzie punktem S' przecięcia się wysokości trójkąta XYZ. W istocie bowiem płaszczyzna φ_3, przechodząca przez oś z układu odniesienia i przez promień SS', jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej π_1 i do tła a więc i do krawędzi tych dwóch płaszczyzn, t. j. do prostej XY. Ale prosta XY, jako prostopadła do płaszczyzny φ_3, jest prostopadłą do każdej prostej, znajdującej się na tej płaszczyźnie, a więc i do prostej ZP, która jest jej śladem na tle. Analogicznie prosta XZ jest prostopadła do YN a bok YZ prostopadły do XM. Proste x_s, y_s i z_s są perspektywą prostokątnego układu osi x, y, z, o środku S, czyli stanowią **perspektywiczny układ odniesienia**.

Obierzmy na promieniu SS', rzucającym prostopadle środek S układu odniesienia na tło, oko O, w odległości δ od punktu $S_s \equiv S'$. Rzut prostokątny O_s oka O na tło, t. j. punkt główny, schodzi się z punktem S', który jest równocześnie perspektywą S_s punktu S.

Wykonajmy kład na tło płaszczyzn φ_1, φ_2 i φ_3, t. j. tych, które przechodzą przez osi x, y, z, prostokątnego układu odniesienia i przez promień główny OS_sS. Na płaszczyźnie φ_1 znajduje się prostokątny trójkąt XSM i oko, leżące na promieniu, wyprowadzonym z punktu S prostopadle do przeciwprostokątnej XM tego trójkąta. Osią obrotu dla tego kładu jest prosta XM. Zakreślmy na odcinku $\overline{XM}$, jako na średnicy, półkole i wykreślmy w punkcie S_s prostopadłą do tego odcinka, to punkt S_x' przecięcia się tej prostopadłej z półkolem będzie wierzchołkiem prostokątnego trójkąta $XS_x'M$, stanowiącego kład trójkąta XSM na tło. Przedłużenie odcinka O_sS_x' przetnie koło głębokości, zakreślone z punktu

O_s, jako środka, w punkcie O'_x, który jest okiem, sprowadzonem na tło przez wykonanie kładu płaszczyzny φ_1. W podobny sposób dokonamy kładów płaszczyzn φ_2 i φ_3. Prostopadła, wykreślona w punkcie S_s do odcinka $\overline{YN}$, przetnie koło, zakreślone na tym odcinku, jako na średnicy, w punkcie S''_x, a koło głębokości w punkcie O''_x. Prostopadła, wykreślona w punkcie S_s do odcinka $\overline{ZP}$, przetnie koło, zakreślone na nim, jako na średnicy, w punkcie S'''_x, a koło głębokości w punkcie O'''_x. Odcinki $\overline{S_s S'_x} = \overline{S_s S''_x} = \overline{S_s S'''_x} = d$ są sobie równe i równe odległości początku układu odniesienia od tła.



Rys. 395 *a*, *b*.

Niechaj odcinek $\overline{S'_x Q^x_x}$, odmierzony na prostej x^0, będzie spółrzędną prostokątną x' przyjętego w przestrzeni punktu Q, to odcinek $\overline{S_s Q^x_s}$, bę-

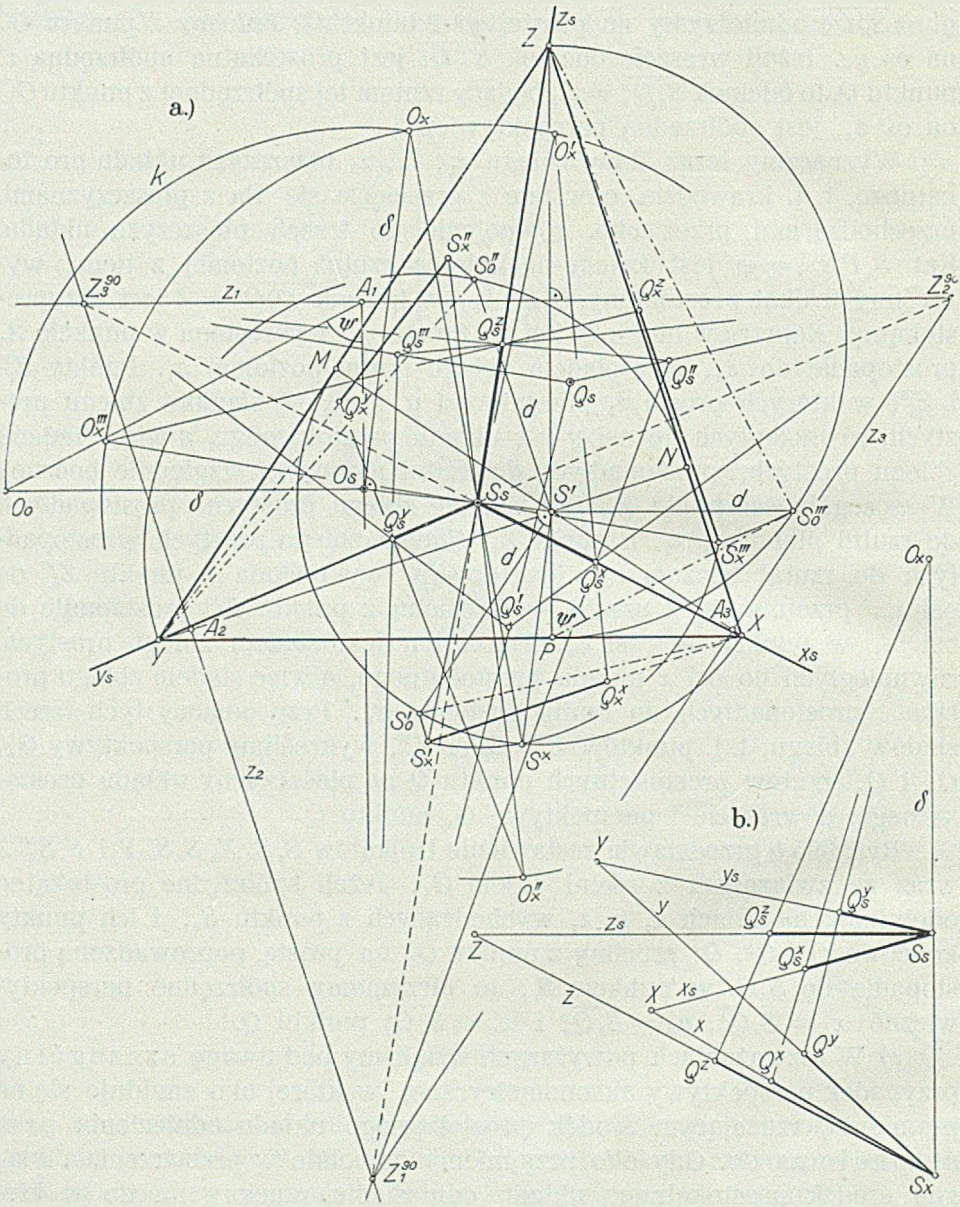
dący rzutem pierwszego na oś x_s z punktu $O'_\times$, jest perspektywą tej spółrzędnej, czyli spółrzędną perspektywiczną x'_s. Podobnie otrzymamy spółrzędną perspektywiczną $y'_s = \overline{S_s Q^y_s}$, jeśli spółrzędną prostokątną $y' = \overline{S''_\times Q^y_\times}$ odmierzymy na prostej y^0 i punkt $Q^y_\times$ rzucimy z punktu $O''_\times$ na oś y_s. Jeżeli wreszcie odcinek $\overline{S'''_\times Q^z_\times}$ jest prostokątną spółrzędną z' punktu Q, to odcinek $\overline{S_s Q^z_s} = z'_s$, będący rzutem tej spółrzędnej z punktu $O'''_\times$ na oś z_s, jest spółrzędną perspektywiczną.

Wyznaczmy teraz ślady zbiegu z_1, z_2, z_3 płaszczyzn układu prostokątnego, t. j. krawędzie, powstałe z przecięcia się tła z płaszczyznami, przechodzącemi przez oko, równolegle do trzech płaszczyzn układu. Kąt $S_s P S'''_\times = \psi$ jest kątem nachylenia rzutni poziomej z tłem; wykreślmy trójkąt prostokątny $O_s O^0 A_1$, w którym $\overline{O_s O^0} = \delta$ jest przyprostokątną. Naprzeciw niej leży kąt ψ. Prosta z_1, wykreślona w punkcie A_1 prostopadle do z_s, jest śladem zbiegu rzutni poziomej π_1. Punkty Z_2^{90} i Z_3^{90}, w których prosta z_1 przetnie osi y_s i x_s, są śladami zbiegu prostych, równoległych do osi y i x układu prostokątnego, a więc śladami zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni pionowej, względnie bocznej. W szczególności punkt Z_2^{90} jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni pionowej π_2, a punkt Z_3^{90} śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni bocznej π_3. Prostopadła, wykreślona z punktu Z_2^{90} do osi x_s, przetnie się z prostą, wykreśloną z punktu Z_3^{90} prostopadle do osi y_s, w punkcie Z_1^{90} osi z_s. Punkt ten jest śladem zbiegu prostych, równoległych do osi z układu prostokątnego, a więc śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni poziomej π_1. Przy pomocy tych trzech śladów zbiegu, t. j. punktów Z_1^{90}, Z_2^{90} i Z_3^{90}, wykreślimy perspektywy Q'_s, Q''_s i Q'''_s rzutów prostokątnych punktu Q na płaszczyzny układu prostokątnego, a wreszcie i perspektywę Q_s punktu Q.

Rys. 395 *b* przedstawia zestawienie trójkątów $S_s S'_\times X$, $S_s S''_\times Y$ i $S_s S'''_\times Z$ wraz ze związanem z niemi okiem $O_\times$. Jeżeli spółrzędne prostokątne odetniemy na osiach x, y, z, wychodzących z punktu $S_\times$, i ich punkty końcowe Q^x, Q^y, Q^z rzucimy z punktu $O_\times$ na prostą, poprowadzoną prostopadle do $S_\times O_\times$ w punkcie S_s, to otrzymamy spółrzędne perspektywiczne $x'_s = \overline{S_s Q^x_s}$, $y'_s = \overline{S_s Q^y_s}$ i $z'_s = \overline{S_s Q^z_s}$ punktu Q.

c) W rozważaniach powyższych wzięliśmy pod uwagę szczególny przypadek perspektywy aksonometrycznej, w której oko znajduje się na promieniu, rzucającym środek prostokątnego układu odniesienia prostopadle na tło. Gdy oko przyjmiemy dowolnie w przestrzeni, a więc gdy środek prostokątnego układu odniesienia rzucimy na tło w kierunku dowolnym, to wówczas otrzymamy ogólny przykład perspektywy aksonometrycznej. Punkt główny O_s (rys. 396 *a*) nie zejdzie się w tym przypadku z rzutem środkowym S_s początku układu odniesienia.

Przyjęty na płaszczyźnie rysunku trójkąt XYZ jest trójkątem śladów płaszczyzn prostokątnego układu odniesienia, a dowolny punkt S, —



Rys. 396 *a*, *b*.

rzutem środkowym początku S tego układu. Punkt S' przecięcia się wysokości trójkąta XYZ jest rzutem prostokątnym środka układu od-

niesienia na tło, a punkt O_s, przyjęty dowolnie na prostej $S'S_s$, rzutem prostokątnym oka na tło, t. j. punktem głównym.

Zakreślmy na odcinku $\overline{ZP}$, jako na średnicy, koło, a w punkcie S' poprowadźmy do niej prostopadłą, to odcinek $\overline{S'S_0'''} = d$ równy jest oddaleniu początku układu odniesienia od tła. Poprowadźmy w punkcie końcowym S' odcinka $\overline{S_sS'}$ prostopadłą do niego, odmierzmy na niej odcinek $\overline{S'S^x} = \overline{S'S_0'''} = d$ i otrzymany punkt S^x połączmy z punktem S_s prostą. Prosta ta przetnie prostopadłą, wykreśloną w punkcie O_s do prostej O_sS_sS', w punkcie O_x. Otrzymane dwa podobne trójkąty $S_sS'S^x$ i $S_sO_sO_x$, o wspólnym wierzchołku S_s, stanowią kład na tło płaszczyzny, prostopadłej do tła a przechodzącej przez oko O i początek S prostokątnego układu odniesienia. Odcinek $\overline{O_sO_x} = \delta$ równy jest głębokości tłowej. Jeżeli głębokość ta jest dana zgóry, to wówczas nie możemy przyjąć — jak to uczyniliśmy w naszym przykładzie — punktu O_s dowolnie na promieniu $S'S_s$; położenie jego będzie wynikiem konstrukcji. W odległości, równej danej głębokości tłowej, poprowadzimy mianowicie równoległą do prostej $S'S_s$, a punkt O_x przecięcia się tej równoległej z promieniem S^xS_s rzucimy prostopadle na prostą $S'S_s$. Rzut ten będzie punktem O_s, t. j. prostokątnym rzutem oka na tło, czyli punktem głównym. Konstrukcja ta poucza nas, że gdy przyjęte są punkty S_s i O_s, to tem samem określona jest głębokość tłowa; gdy natomiast dany jest punkt S_s i głębokość tłowa δ, to położenie punktu głównego O_s jest wyznaczone.

Przystąpmy teraz do wykreślenia perspektywy przyjętego w przestrzeni punktu Q, którego spółrzędne prostokątne x', y', z' są dane. Aby wyznaczyć perspektywę spółrzędnej x', czyli spółrzędną perspektywiczną x_s', położmy trójkąt SS_sX, wraz z okiem, znajdującem się na przedłużeniu boku SS_s, na tło. Bok $\overline{SS_s}$ tego trójkąta jest równy odcinkowi $\overline{S_sS^x} = d$; drugi bok, równy odcinkowi S_sX, leży na tle, a trzeci bok $\overline{SX}$ znajdziemy, obracając prostokątny trójkąt XMS, około jego przeciwprostokątnej $\overline{XM}$, na tło. W tym celu zakreślimy na średnicy $\overline{XM}$ koło i w punkcie S' poprowadzimy do niej prostopadłą, która przetnie to koło w punkcie S_0'. Odcinek $\overline{S_0'X}$ jest prawdziwą długością boku $\overline{SX}$. Łuk koła, zakreślony z punktu X promieniem $\overline{XS_0'}$, przetnie łuk koła, zakreślony z punktu S_s promieniem $\overline{S_sS^x}$, w punkcie S_x', który jest szukanym wierzchołkiem trójkąta S_sXS_x'. Na przedłużonym boku $\overline{S_x'S_s}$ tego trójkąta, w odległości równej odcinkowi $\overline{S_sO_x}$, leżeć będzie punkt O_x', t. j. oko, sprowadzone na tło obrotem płaszczyzny, przechodzącej przez oś x prostokątnego układu odniesienia i przez oko O. Odmierzmy $\overline{S_x'Q_x^x} = x'$ i połączmy punkt Q_x^x z punktem O_x'. Na osi x_s otrzymamy punkt Q_s^x, przyczem odcinek $\overline{S_sQ_s^x}$ jest spółrzędną perspektywiczną x_s', t. j. perspektywą spółrzędnej prostokątnej x'.

W analogiczny sposób znajdziemy trójkąt YS_sS_x'' wraz z punktem O_x'', leżącym na przedłużeniu boku $\overline{S_x''S_s}$ a wreszcie i trójkąt ZS_sS_x''' wraz ze związanym z jego bokiem $\overline{S_x'''S_s}$ punktem O_x'''. Rzut prostokątnej spółrzędnej $y' = \overline{S_x''Q_x''}$ z punktu O_x'' na oś y_s jest spółrzędną perspektywiczną $y_s' = \overline{S_sQ_s''}$, a rzut spółrzędnej $z' = \overline{S_x'''Q_x^z}$ na oś z_s z punktu O_x''' — perspektywiczną spółrzędną $z_s' = \overline{S_sQ_s^z}$.

Z rysunku widzimy, że:

$$\overline{O_xS_x'} = \overline{O_x''S_x''} = \overline{O_x'''S_x'''} \text{ a także } \overline{S_sS_x'} = \overline{S_sS_x''} = \overline{S_sS_x'''}.$$

Pozwala to na zestawienie trójkątów S_sXS_x', S_sYS_x'' i S_sZS_x''' w sposób, uwidoczniony na rys. 396*b*, gdzie $\overline{O_xS_x} = \overline{O_x'S_x'}$ a $\overline{S_sS_x} = \overline{S_sS_x'}$. Rysunek ten stanowi podziałkę skróceń perspektywy aksonometrycznej w najogólniejszym przypadku. Jeżeli na osiach x, y, z odmierzymy prostokątne spółrzędne $x' = \overline{S_xQ^x}$, $y' = \overline{S_xQ''}$, $z' = \overline{S_xQ^z}$ i rzucimy je na osi x_s, y_s, z_s, to rzuty te, a mianowicie $x_s' = \overline{S_sQ_s^x}$, $y_s' = \overline{S_sQ_s''}$ i $Z_s' = \overline{S_sQ_s^z}$ są spółrzędnemi perspektywicznemi punktu Q.

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie śladów zbiegu Z_1^{90}, Z_2^{90} i Z_3^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzn π_1, π_2 i π_3 układu odniesienia. Ślady te będą punktami przecięcia się osi x_s, y_s i z_s ze śladami zbiegu tych płaszczyzn.

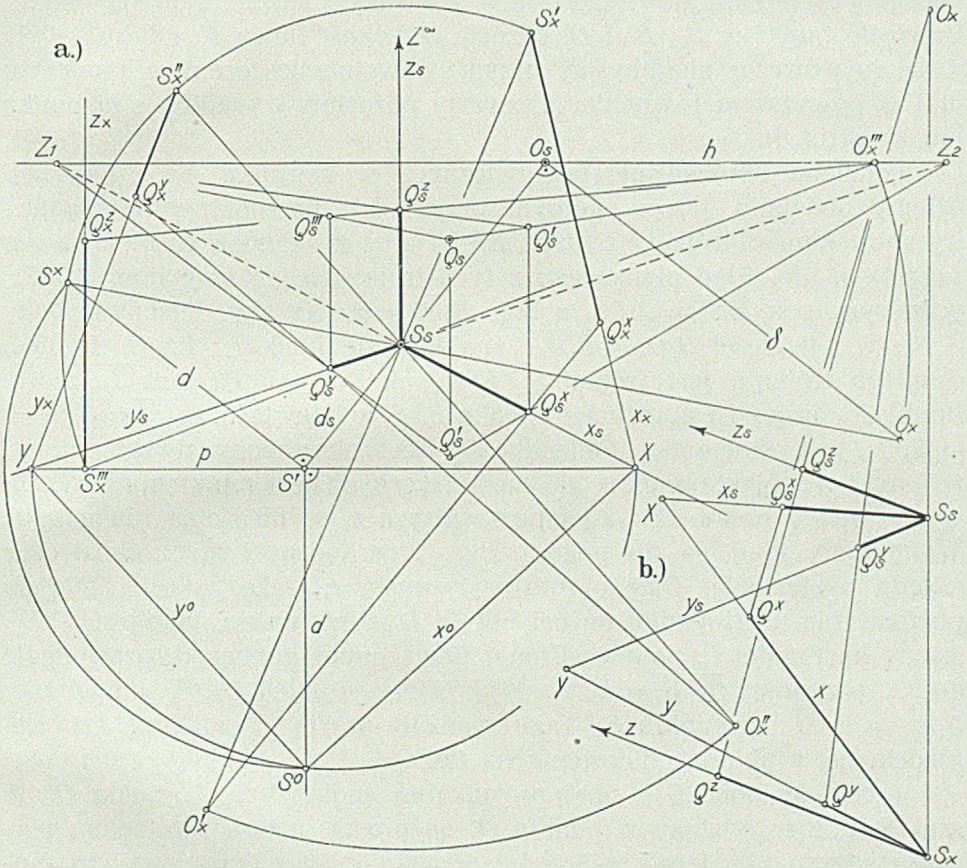
Ślad zbiegu z_1 płaszczyzny poziomej jest krawędzią płaszczyzny, przechodzącej przez oko równolegle do rzutni poziomej, z tłem. Otrzymamy go podobnie, jak w rys. 396*a*, a mianowicie: wykreślimy trójkąt prostokątny $O_sA_1O_0$, którego bok $\overline{O_sA_1}$ jest równoległy do ZP, bok $\overline{O_sO_0} = \overline{O_sO_x} = \delta$, a przeciwległy temu bokowi kąt — równy kątowi ψ, jaki rzutnia pozioma zawiera z tłem, t. j. kątowi $S'PS_0'''$. Ślad z_1 przejdzie przez punkt A_1 prostopadle do ZP i wyznaczy na osiach y_s i x_s ślady Z_2^{90} i Z_3^{90}. Prostopadła, wykreślona z punktu Z_2^{90} do XM, przetnie prostopadłą, poprowadzoną do YN z punktu Z_3^{90}, w punkcie Z_1^{90}. Dopełnienie rysunku dla otrzymania perspektyw Q_s', Q_s'' i Q_s''', a także i perspektywy Q_s, nie nastręczy żadnych trudności.

d) Jeżeli tło jest prostopadłe do płaszczyzny poziomej układu odniesienia, czyli jeśli perspektywa jest stosowana, to przemiana spółrzędnych prostokątnych punktu na spółrzędne perspektywiczne odbywa się analogicznie, jak w ogólnym przykładzie perspektywy aksonometrycznej.

Wierzchołek Z trójkąta XYZ śladów aksonometrycznych jest w tym przypadku punktem niewłaściwym, leżącym w kierunku prostopadłym do boku XY tego trójkąta, a prostokątny rzut początku S układu odniesienia leży na boku XY, jako dowolnie przyjęty punkt S'. (Rys. 397*a*).

Uważajmy dowolny punkt S_s za perspektywę punktu S, a przyjęty na promieniu $S'S_s$ punkt O_s — za punkt główny. Zakreślmy na odcinku $\overline{XY}$, jako na średnicy, półkole i w punkcie S' wykreślmy prostopadłą do XY,

która przetnie półkole w punkcie S^0. Połączmy ten punkt prostemi x^0 i y^0 z punktami X i Y. Prostokątny trójkąt XYS^0 jest kładem na tło trójkąta, którego bokami są osi x i y układu odniesienia i krawędź XY rzutni poziomej z tłem. Odcinek $\overline{S^0S'} = d$ wyraża oddalenie początku układu odniesienia od tła. Perspektywą tego oddalenia jest odcinek $\overline{S_s S'} = d_s$.



Rys. 397 *a*, *b*.

Wykonajmy kład na tło płaszczyzny ε, przechodzącej przez promień główny i początek S prostokątnego układu odniesienia. Płaszczyzna ta jest prostopadłą do tła i przecina go wzdłuż prostej, przechodzącej przez punkty S', S_s i O_s. Kład tej płaszczyzny sprowadzi na tło początek S układu odniesienia, promień główny i oko. Wykreślmy w punkcie S' odcinka d_s prostopadłą do niego, odmierzmy $\overline{S'S^\times} = d$ i połączmy punkt $S^\times$ z punktem S_s. Trójkąt $S_s S' S^\times$ jest kładem trójkąta SS_sS', leżącego na płaszczyźnie ε. Prostopadła, wykreślona w punkcie O_s do prostej $S'S_sO_s$, przetnie prostą $S^\times S_s$ w punkcie $O_\times$, który jest kładem

oka na tło. Przyprostokątna $\overline{O_s O_\times}$ trójkąta $S_s O_s O_\times$ jest głębokością tłową δ. Z podobieństwa trójkątów $S_s S' S^\times$ i $S_s O_s O_\times$ wynika, że $\delta = \frac{d \cdot \overline{O_s S_s}}{d_s}$, t. zn. że głębokość tłowa, która, jak widzieliśmy, nie była przyjęta zgóry, ale wynikła z konstrukcji, zależy w prostym stosunku od oddalenia początku układu odniesienia od tła i od odległości perspektywy S_s tego początku od punktu głównego — a w odwrotnym stosunku od odcinka d_s. Przyjęcie punktów S_s, S' i O_s określa głębokość tłową δ; gdyby δ było dane, to wówczas moglibyśmy przyjąć dowolnie jeszcze dwa inne czynniki w powyższem równaniu, a czwarty pozostały wypadłby z rachunku lub konstrukcji.

Podziałki skróceń perspektywicznych w kierunku osi x i y znajdziemy podobnie, jak w ogólnym przykładzie perspektywy aksonometrycznej, kładąc trójkąty SS_sX i SS_sY wraz z okiem O (z niemi związanem) na tło. Kład pierwszego z tych trójkątów jest trójkątem $S_sXS'_\times$, w którym bok $\overline{XS'_\times} = \overline{XS^0}$, a bok $\overline{S_sS'_\times} = d$. Na przedłużonym boku $S'_\times S_s$, w odległości $\overline{S_sO'_\times} = \overline{S_sO_\times}$, znajduje się kład $O'_\times$ oka O. Kładem drugiego trójkąta jest trójkąt $S_sYS''_\times$; bok $\overline{YS''_\times} = YS^0$, bok $\overline{S_sS''_\times} = d$. Punkt $O''_\times$, leżący na przedłużeniu boku $S''_\times S_s$ w odległości $\overline{S_sO''_\times} = \overline{S_sO'_\times} = \overline{S_sO_\times}$, jest kładem oka. Podziałkę dla osi z otrzymamy, uwzględniając, że punkt Z trójkąta śladów aksonometrycznych jest punktem niewłaściwym, wobec czego oś z i jej perspektywa z_s są do siebie równoległe. Wykonajmy kład na tło płaszczyzny, przechodzącej przez oko i oś z układu odniesienia. Osią obrotu jest prosta z_s. Oko zakreśli koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i padnie na tło, jako punkt $O'''_\times$, leżący na prostej h, poprowadzonej przez punkt główny O_s prostopadle do z_s, przyczem $\overline{O'''_\times S_s} = \overline{O_\times S_s}$. Wykreślmy promień $O'''_\times S_s$, odmierzmy $\overline{S_sS'''_\times} = \overline{S_sS^\times}$ i z punktu $S'''_\times$ poprowadźmy prostą $z_\times \| z_s$. Prosta $z_\times$ jest kładem osi z układu odniesienia na tło.

Jeżeli odcinek $\overline{S'_\times Q^x_\times}$ jest prostokątną spółrzędną x' punktu Q, to rzut $\overline{S_sQ^x_s}$ tego odcinka z punktu $O'_\times$ na prostą x_s jest spółrzędną perspektywiczną x'_s. Jeżeli spółrzędną y' punktu Q odmierzymy na prostej $y_\times$, jako odcinek $\overline{S''_\times Q^y_\times}$, i rzucimy punkt $Q^y_\times$ z punktu $O''_\times$ na oś y_s, to odcinek $\overline{S_sQ^y_s}$ będzie spółrzędną perspektywiczną y'_s. Spółrzędną $z' = \overline{S'''_\times Q^z_\times}$, odmierzoną na prostej $z_\times$, rzucimy z punktu $O'''_\times$ na oś z_s, otrzymując spółrzędną perspektywiczną $z'_s = \overline{S_sQ^z_s}$.

Rys. 397 *b* przedstawia — podobnie, jak rys. 395 *b* i 396 *b* — zestawienie trójkątów $S_sS'_\times X$, $S_sS''_\times Y$ oraz prostych $z_s \| z_\times$ wraz ze związanem z niemi okiem $O_\times$. Stanowi on zatem podziałkę skróceń dla omówionego wyżej, szczególnego przypadku perspektywy aksonometrycznej.

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

Biblioteka w Stalinogrodzie
Państw. Instytut Robót Pęcz.
3523
Państw. Wyż. Szkoły Podag.

STUDIUM NAUCZYCIELSKIE
w GLIWICACH
Sp 24100