Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 17 Nr kol. 318

Cerowski Zenon

Katedra Fizyki B

# PRĘDKOŚĆ ROZCHODZENIA SIĘ I WSPÓŁCZYNNIK POCHŁANIANIA POPRZECZNYCH FAL SPRĘŻYSTYCH W OŚRODKU DWUFAZOWYM

Streszczenie. W pracy tej wyliczono prędkość rozchodzenia się i współczynnik pochłaniania fal poprzecznych,płaskich tłumionych, rozchodzących się w ośrodkach dwufazowych w oparciu o równania fal sprężystych wyprowadzonych w [1] oraz rozpatrzono sens fizykalny rozwiązań i porównano je z wynikami otrzymanymi przez innych autorów.

Dla obliczenia prędkości rozchodzenia się i współczynników pochłaniania poprzecznych fal sprężystych w ośrodku dwufazowym wykorzystano równania (16) wyprowadzone w [1] a więc następujący układ:

$$d_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = (1-n)(\mu - i\mu')\Delta\psi_1 + K \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 - \psi_2) \tag{1}$$

$$d_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = K \frac{\partial}{\partial t}(\psi_2 - \psi_1)$$

gdzie:

$d_1 = \rho_1(1-n)$, $d_2 = \rho_2 n$, $\rho_1$, $\rho_2$ - odpowiednio gęstość ciała stałego i cieczy,

$\mu$, $\mu'$ - stałe Lamego,

$$K = \frac{n^2 \rho_2 g}{k_\phi}$$

$k_\phi$ - współczynnik filtracji,

$g$ - przyspieszenie ziemskie

Przyjęto, że rozchodzące się fale są płaskie, tłumione.

$$\psi_1 = B_1 e^{i(\omega t + sy)}$$

$$\psi_2 = B_2 e^{i(\omega t + sy)} \tag{2}$$

gdzie:

$B_1$, $B_2$ - amplitudy fal w szkielecie i cieczy,

$\omega$ - kołowa częstotliwość drgań

$t$ - czas,

$y$ - wychylenie,

s - zespolona liczba falowa równa $\frac{\omega}{c} + qi$,
q - współczynnik pochłaniania,
c - prędkość rozchodzenia się fali

Podstawiając wyrażenia (2) w równania (1) otrzymano:

$$- d_1 B_1\omega^2 e^{i(\omega t + sy)} = - (1-n)(\mu - i\mu')B_1 s^2 e^{i(\omega t + sy)} +$$

$$+ iK\omega(B_1 - B_2)e^{i(\omega t + sy)}$$

$$- d_2 B_2\omega^2 e^{i(\omega t + sy)} = i K\omega(B_2 - B_1)e^{i(\omega t + sy)}$$

Po uproszczeniu przez $e^{i(\omega t + sy)}$

$$\begin{aligned} - d_1 B_1\omega^2 &= - (1-n)(\mu - i\mu') B_1 s^2 + i K\omega(B_1 - B_2) \\ - d_2 B_2\omega^2 &= i K\omega(B_2 - B_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Z kolei z drugiego równania (3) wyznaczono $B_2$ i podstawiono do pierwszego

$$B_2 = \frac{i K}{d_2\omega + i K} B_1$$

$$- d_1 B_1\omega^2 = - (1-n)(\mu - i\mu')B_1 s^2 + i K\omega B_1 - iK\omega \frac{i K}{d_2 + i K} B_1$$

Po uproszczeniu przez $B_1$ przyjmuje ono postać:

$$- d_1\omega^2 (d_2\omega + i K) = - (1-n)(\mu - i\mu')(d_2\omega + i K)s^2 +$$

$$= i K\omega(d_2\omega + i K) + K^2\omega$$

$$(1-n)(\mu - i\mu')(d_2\omega + i K)s^2 - i K\omega^2(d_1 + d_2) - d_1 d_2\omega^3 = 0 \tag{4}$$

$$s^2 = \frac{i K\omega^2(d1 + d_2) + d_1 d_2\omega^3}{(1-n)(\mu - i\mu')(d_2\omega + iK)} \tag{5}$$

Wyrażenie (5) rozpatrzono dla $K > \omega$ i $K < \omega$ to jest częstotliwości niskich i wysokich.

Dla $K > \omega$

$$s^2 = \frac{iK\omega^2(d_1 + d_2) + d_1 d_2\omega^3}{(1-n)(\mu - i\mu')iK\left(1 - \frac{id_2\omega}{K}\right)} = \frac{\omega^2[K(d_1+d_2) - i\, d_1 d_2\omega]}{K(1-n)(\mu - i\mu')}\left(1 + \frac{i\omega}{K}d_2\right) =$$

$$= \frac{\omega^2\left[(d_1 + d_2) - \frac{i\omega}{K} d_1 d_2 + \frac{i\omega}{K}(d_1+d_2)d_2 + i\frac{\omega^2}{K^2} d_2^2\, d_1\right]}{(1 - n)(\mu - i\mu')}$$

Ponieważ $\frac{\omega}{K} < 1$ więc można zaniedbać $\frac{\omega^2}{K^2}$

$$s^2 = \frac{\omega^2(d_1 + d_2 + \frac{i\omega}{K} d_2^2)}{(1-n)(\mu - i\mu')} = \frac{\omega^2(d_1 + d_2 + \frac{i\omega}{K} d_2^2)(1 + \frac{i\mu'}{\mu})}{(1-n)\mu} =$$

$$= \frac{\omega^2\left[(d_1 + d_2) + \frac{i\omega}{2K} d_2^2 + \frac{i\omega}{2K} d_2^2 + \frac{i\mu'}{\mu}(d_1 + d_2) - \frac{\omega}{K}\frac{\mu'}{\mu} d_2^2\right]}{(1-n)} =$$

$$= \frac{\omega^2\left[(d_1 + d_2) + \frac{i\mu'}{\mu}(d_1 + d_2) + \frac{i\omega}{K} d_2^2\right]}{(1 - n)\mu} \doteq$$

$$= \frac{\omega^2(d_1 + d_2)}{(1-n)\mu}\left(1 + i\frac{\mu}{\mu'} + i\frac{\omega}{K}\frac{d_2^2}{d_1 + d_2}\right) \qquad (6)$$

Stąd:

$$s = \frac{\omega}{c_1} + iq_1 = \omega\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{(1-n)\mu}}\left(1 + \frac{i\mu'}{2\mu} + \frac{i}{2}\frac{\omega}{K}\frac{d_2^2}{d_1 + d_2}\right)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{(1-n)\mu}{d_1 + d_2}} = \sqrt{\frac{(1-n)\mu}{(1-n)\rho_1 + n\rho_2}} \qquad (7)$$

$$q_1 = \frac{1}{2c_1}\left(\frac{\mu'}{\mu}\omega + \frac{\omega^2}{K}\frac{d_2^2}{d_1+d_2}\right) = \frac{1}{2c_1}\left[\frac{\mu'}{\mu}\omega + \frac{n^2\rho_2^2}{(1-n)\rho_1 + n\rho_2}\frac{\omega^2}{K}\right] \qquad (8)$$

Dla $K < \omega$

$$s^2 = \frac{\omega^2\left[iK(d_1+d_2) + \omega d_1 d_2\right]}{(1-n)(\mu - i\mu')d_2(1 + \frac{iK}{d_2\omega})} = \frac{\omega^2\left[iK(d_1 + d_2) + \omega d_1 d_2\right]}{d_2(1-n)(\mu - i\mu')} \cdot \left(1 - \frac{iK}{d_2\omega}\right) =$$

$$= \frac{\omega}{d_2(1-n)(\mu - i\mu')}\left[iK(d_1 + d_2) + \omega d_1\, d_2 + \frac{K^2}{\omega}\frac{d_1+d_2}{d_2} - iKd_1\right] =$$

$$= \frac{\omega^2}{(1-n)(\mu - i\mu')}\left(\frac{iK}{\omega} + d_1 + \frac{K^2}{\omega^2}\frac{d_1+d_2}{d_2^2}\right) \doteq \frac{\omega^2(i\frac{K}{\omega} + d_1)}{(1-n)(\mu - i\mu')} =$$

$$= \frac{\omega^2 (\frac{iK}{\omega} + d_1)(1 + \frac{i\mu'}{\mu})}{(1-n)\mu} = \frac{\omega^2 (\frac{iK}{\omega} + d_1 - \frac{K}{\omega}\frac{\mu'}{\mu} + \frac{i\mu'}{\mu}d_1)}{(1-n)\mu} =$$

$$= \frac{\omega^2 (d_1 + \frac{i\mu'}{\mu} d_1 + \frac{iK}{\omega})}{(1-n)\mu} = \frac{\omega^2 d_1}{(1-n)\mu} \left[1 + i(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{K}{d_1\omega})\right] . \tag{9}$$

Skąd:

$$s = \frac{\omega}{c_2} + iq_2 = \omega\sqrt{\frac{d_1}{(1-n)\mu}} \left[1 + \frac{i}{2} (\frac{\mu'}{\mu} + \frac{K}{d_1\omega})\right]$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{(1-n)\mu}{d_1}} = \sqrt{\frac{(1-n)\mu}{(1-n)\rho_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_1}} \tag{10}$$

$$q_2 = \frac{1}{2c_2} (\frac{\mu'}{\mu}\omega + \frac{K}{d_1}) = \frac{1}{2c_2} \left[\frac{\mu'}{\mu}\omega + \frac{K}{(1-n)\rho_1}\right] \tag{11}$$

Dyskusja tych rozwiązań pokazuje, że w obu przypadkach nie ma dyspersji prędkości (wynika to z zaniedbania małych wyrazów $\frac{\omega^2}{K^2}$ i $\frac{\omega}{K}\frac{\mu'}{\mu}$ w pierwszym wypadku oraz $\frac{K^2}{\omega^2}$ i $\frac{K}{\omega}\frac{\mu'}{\mu}$ w drugim wypadku) oraz, że nie ma sensu rozpatrywać tych wyrażeń dla $n = 1$, tzn. dla samej cieczy. Jest to najzupełniej zgodne z rzeczywistością, gdyż w cieczy nie rozchodzą się fale poprzeczne. Dla $K > \omega$ prędkość rozchodzenia się zależy od porowatości i jest największa, gdy $n = 0$, tj. gdy występuje tylko ciało stałe. Faza ciekła wpływa na zmniejszenie prędkości fal poprzecznych. Współczynnik pochłaniania jest sumą dwu składników, z których jeden jest funkcją liniową częstotliwości i jest odpowiedzialny za straty powstające w szkielecie, a drugi funkcją kwadratową częstotliwości i wskazuje straty występujące na skutek tarcia między ciałem stałym i cieczą. Współczynnik ostatniego składnika zależy od porowatości. Dla $n = 0$ jest równy zero następnie rośnie do wartości jeden dla $n = 1$, ale w tym wypadku prędkość rozchodzenia się jest równa zero, więc fala się nie rozchodzi. W wypadku $K < \omega$ prędkość rozchodzenia się jest stała i równa się prędkości rozchodzenia się w szkielecie. Współczynnik pochłaniania składa się z dwu części. Jedna jest funkcją liniową częstotliwości i odpowiada za pochłanianie w ciele stałym, druga jest niezależna od częstotliwości. Widzimy, że analogicznie jak dla fal podłużnych [2] dla wysokich częstotliwości prędkość rozchodzenia się jest niezależna od porowatości oraz składnik pochłaniania wynikający ze strat powstających wskutek tarcia między ciałami składowymi nie zależy od częstotliwości. Takie same wyrażenia na prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych dla zakresu częstotliwości niskich i wysokich w dwufazowych ośrodkach gruntowych otrzymuje W.N. Nikołajewskij [3] i [4]. Natomiast dla pochłaniania W.N. Nikołajewskij podaje współczynnik, który jest funkcją kwadratową częstotliwości, a dla częstotliwości wysokich współczynnik niezależny od częstotliwości, a więc brak u niego w obu przypadkach składników będących liniową funkcją częstotliwości. Przegląd wyrażeń na prędkości rozchodzenia się i współczynniki pochłaniania podłużnych [2] i poprzecznych fal sprężystych otrzymanych w tych pracach wskazuje, że są ogólniejsze od dotychczas spotykanych. Wiele rozwiązań innych autorów są szczególnymi przypadkami wyrażeń podanych.

## LITERATURA


[1] Z.Cerowski - Równania fal sprężystych w ośrodku dwufazowym.Postępy Fizyki, t.XX, z.2, str.193-199, 1969.

[2] Z. Cerowski - Prędkość rozchodzenia się i współczynnik pochłaniania podłużnych fal sprężystych w ośrodku dwufazowym

[3] W.N. Nikołajewskij - K dinamikie nasyščennych żidkostiu poristych sred, Inż. Ż. II, nr 3, 1962, str. 54-67.

[4] W.N. Nikołajewskij - O rozprostrannienii prodolnych wołn w nasyščennych żidkostiu uprugich poristych sred, Inż. Ż. III, nr 2, 1963, str. 251-261.



## Summary

Velocity and absorption coefficient of the shear elestic waves in a two phase medium.

In the paper velocity and absorption coefficient were calculated for the case of shear elastic waves moving in a two phase medium with some damping effect. These calculations are based on the elastic waves equation derived in [1]. Finally, the results are discussed from the physical point of view and compared with those obtained by other authors.


## СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ


## Резюме

В работе вычислено скорость распространения и коэффициент поглощения поперечных, плоских, дампфированных волн в двухфазной среде пользуясь уравнением упругих волн выведеным в работе [1]. Рассмотрено физический смысл полученных решений и проведено их сравнение с результатами других авторов