ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

St. ŁANOWY

PORÓWNANIE METOD ITERACYJNYCH ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RZECZYWISTYCH

Streszczenie. W artykule rozważa się zagadnienie porównania metod iteracyjnych rozwiązywania równań

$$x = \Phi_1(x), \quad x = \Phi_2(x)$$

mających wspólny pierwiastek w danym przedziale.

W pracy tej dowodzi się dwu twierdzeń T1 i T2, które znajdują zastosowanie przy porównaniu różnych metod iteracyjnych o tym samym rzędzie zbieżności dla równania

$$f(x) = 0.$$

Twierdzenia te zostały zastosowane do porównania metod iteracyjnych Königa i Schrődera rzędu 3 (twierdzenie T3).

W [1] i [2] podaje się inne wersje twierdzenia T1 (przy innych założeniach), których jednak nie można wykorzystać do rozważanego zagadnienia.

Oznaczmy przez I przedział (a,b), a przez $\bar{I}$ przedział $\langle a,b\rangle$.

Twierdzenie T1. Jeżeli

(a_1) funkcja $\phi(x)$ jest ciągła w przedziale $\bar{I}$;

(b_1) równanie

$$x = \phi(x) \tag{1}$$

posiada pierwiastek $\xi \in \bar{I}$;

(c_1) funkcja $\phi(x)$ jest ściśle monotoniczna w każdym z przedziałów $I_1 = (a, \xi)$, $I_2 = (\xi, b)$;

$$(d_1)\ |\phi(x) - \xi| < |x - \xi| \ \text{dla} \ x \in I_1 \cup I_2,$$

gdy funkcja $\phi(x)$ jest malejąca w przedziale I albo

$$|\phi(x) - \xi| < |x - \xi|$$

w tych przedziałach I_1, I_2, w których funkcja $\phi(x)$ jest rosnąca;

(e_1) dla ustalonego $x_0 \in \bar{I}$ i $x_0 \neq \xi$ zachodzi warunek $\Phi(x_0) \in \bar{I}$, to spełnione są następujące warunki:

liczba ξ jest jedynym pierwiastkiem równania (1) w przedziale $\bar{I}$;

ciąg

$$x_1 = \Phi(x_0), \ \ldots, \ x_{n+1} = \Phi(x_n), \ \ldots \tag{2}$$

jest zbieżny do liczby ξ monotonicznie lub oscylująco tzn.

$$|x_{n+1} - \xi| < |x_n - \xi| \quad \text{i} \quad (x_{n+1} - \xi)(x_n - \xi) > 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots$$

lub

$$|x_{n+1} - \xi| < |x_n - \xi| \quad \text{i} \quad (x_{n+1} - \xi)(x_n - \xi) < 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots .$$

Uwaga 1. Założenie (e_1) jest zbędne, gdy x_0 leży w tym z przedziałów $\langle a, \xi)$, $(\xi, b\rangle$, w którym funkcja jest rosnąca, w tym przypadku ciąg

$$x_0, \ x_1 = \Phi(x_0), \ \ldots, \ x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \ldots \tag{3}$$

jest zbieżny monotonicznie.

Uwaga 2. Nierówność $|\Phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ w założeniu (d_1) można zastąpić nierównością silniejszą $|\Phi'(x)| < 1$.

Dowód. Z założeń (c_1) i (d_1) wynika, że liczba ξ jest jedynym pierwiastkiem równania (1) w przedziale $\bar{I}$.

Nadto wynika, że mogą zajść cztery następujące przypadki, które podajemy w tabeli

	A	B	C	D
$a \leqslant x < \xi$	$\Phi(x)$ rosnąca	$\Phi(x)$ malejąca	$\Phi(x)$ rosnąca	$\Phi(x)$ malejąca
$\xi < x \leqslant b$	$\Phi(x)$ rosnąca	$\Phi(x)$ malejąca	$\Phi(x)$ malejąca	$\Phi(x)$ rosnąca

W przypadku A) wykażemy, że ciąg (3) (a więc i (2)) jest monotonicznie zbieżny do pierwiastka ξ równania (1).

Z monotoniczności funkcji $\Phi(x)$ na podstawie (d_1) mamy

$$x < \Phi(x) < \xi \qquad \text{dla} \qquad a \leqslant x < \xi,$$

$$\xi < \Phi(x) < x \qquad \text{dla} \qquad \xi < x \leqslant b.$$

Stąd wynika, że jeżeli $x_i \in T$, to $x_{i+1} \in T$ oraz

$$x_i < x_{i+1} < \xi \quad \text{dla} \quad x_i < \xi$$

$$\xi < x_{i+1} < x_i \quad \text{dla} \quad \xi < x_i.$$

Mamy więc

$$x_o < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < \xi \quad \text{dla} \quad x_o < \xi ,$$

$$x_o > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots > \xi \quad \text{dla} \quad x_o > \xi ;$$

co w tym przypadku dowodzi twierdzenia.

W przypadku B) wykażemy, że ciąg (3) jest oscylacyjnie zbieżny do pierwiastka ξ równania (1).

Definiujemy nową funkcję iteracyjną

$$x = \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\phi(x)). \tag{4}$$

Wykażemy, że funkcja $\hat{\phi}(x)$ spełnia założenia (a_1) - (d_1) twierdzenia dowodzonego w przypadku A), jeżeli zamiast przedziału T przyjmiemy przedział $T^* \subset T$ o końcach x_o i $x_1 = \phi(x_o)$ ($x_1 \in T$ na mocy (e_1)).

Ponieważ funkcja $\phi(x)$ jest malejąca dla $x \in T$ i $\xi = \phi(\xi)$, więc

$$\begin{aligned} \phi(x_o) &= x_1 > \xi \quad \text{dla} \quad x_o < \xi , \\ \phi(x_o) &= x_1 < \xi \quad \text{dla} \quad x_o > \xi ; \end{aligned} \tag{5}$$

zatem $\xi \in T^*$.

Mamy też

$$\hat{\phi}(\xi) = \phi(\phi(\xi)) = \phi(\xi) = \xi .$$

Z (d_1) wynika, że

$$|\phi(x_1) - \xi| < |x_1 - \xi| = |\phi(x_o) - \xi| < |x_o - \xi| .$$

Stąd, na podstawie (e_1)

$$\phi(x_1) \geq x_o \quad \text{dla} \quad x_o < \xi ,$$

$$\phi(x_1) \leq x_o \quad \text{dla} \quad x_o > \xi .$$

Z ostatnich nierówności i monotoniczności funkcji $\phi(x)$ mamy

$$x_0 \leqslant \phi(x_1) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(x_0) = x_1 \quad \text{dla} \quad x \in T^*, \text{ gdy } \quad x_0 < \xi ,$$

$$x_1 = \phi(x_0) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(x_1) \leqslant x_0 \quad \text{dla} \quad x \in T^*, \text{ gdy } \quad x_0 > \xi .$$

Wobec tego $\hat{\Phi}(x) \in T^*$ dla $x \in T^*$.

Z (d_1) wynika

$$|\hat{\Phi}(x) - \xi| = |\Phi(\Phi(x)) - \xi| < |\Phi(x) - \xi| < |x - \xi|$$

dla $x \in T^*$ i $x \neq \xi$.

Funkcja $\hat{\Phi}(x)$ spełnia więc założenia (b_1) i (d_1); założenia (a_1) i (c_1) są oczywiste.

Ponieważ funkcja $\hat{\Phi}(x)$ jest rosnąca, można więc do równania (4) w przedziale T^* zastosować poprzednio wykazany przypadek A). Przyjmując za początkowe przybliżenie kolejno końce przedziału T^* otrzymujemy dwa ciągi przybliżeń (przy oznaczeniach (2) i (3))

$$\begin{matrix} x_0, & x_2, & x_4, & \dots \\ x_1, & x_3, & x_5, & \dots \end{matrix} \tag{6}$$

zbieżne monotonicznie do liczby ξ. Jeżeli $x_0 < \xi$, to pierwszy z ciągów (6) jest rosnący, a drugi malejący; dla $x_0 > \xi$ pierwszy z ciągów (6) jest malejący, a drugi rosnący. Oczywiście $x_i \in T^* \subset T$ dla $i=0,1,2, \dots$; można więc podstawić $x = x_i$ w założeniu (d_1), skąd otrzymujemy

$$|x_{i+1} - \xi| < |x_i - \xi| .$$

Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku ciąg (3) jest zbieżny oscylująco do pierwiastka ξ równania (1).

Rozpatrzmy przypadki C) i D).

W przypadkach: C), gdy $x_0 < \xi$ i D), gdy $x_0 > \xi$ początkowe przybliżenie znajduje się po tej stronie pierwiastka ξ, po której funkcja iteracyjna $\phi(x)$ jest rosnąca, co przy pozostałych założeniach twierdzenia powoduje, że ciąg (3) jest wtedy monotonicznie zbieżny do liczby ξ (dowód przebiega analogicznie jak w przypadku A)).

W przypadkach: C), gdy $x_0 > \xi$ i D), gdy $x_0 < \xi$ przybliżenie x_1 znajduje się po tej stronie pierwiastka ξ, po której funkcja $\Phi(x)$ jest rosnąca, co powoduje, że ciąg (2) jest zbieżny monotonicznie do liczby ξ .

Twierdzenie T2. Jeżeli

(a_2) funkcje $\Phi_1(x)$ i $\Phi_2(x)$ są ciągłe w przedziale $\bar{I}$;

(b_2) równania

$$x = \Phi_1(x), \tag{7}$$

$$x = \Phi_2(x) \tag{8}$$

posiadają pierwiastek $\xi \in \bar{I}$;

(c_2) funkcja $\Phi_1(x)$ spełnia założenia (c_1) - (e_1) twierdzenia T1;

(d_2) $|\Phi_1(x) - \xi| < |\Phi_2(x) - \xi|$ i $[\Phi_1(x) - \xi] \cdot [\Phi_2(x) - \xi] > 0$

dla $x \in I_1 \cup I_2$,

to są spełnione warunki:

ciąg

$$x_1 = \Phi_1(x_o), \quad x_2 = \Phi_1(x_1), \ \ldots, \quad x_{k+1} = \Phi_1(x_k), \ \ldots \tag{9}$$

jest zbieżny monotonicznie lub oscylująco do jedynego pierwiastka ξ równania (7) w przedziale $\bar{I}$;

dla tych kolejnych wyrazów ciągu

$$\bar{x}_1 = \Phi_2(x_o), \ \bar{x}_2 = \Phi_2(\bar{x}_1), \ \ldots, \quad \bar{x}_{k+1} = \Phi_2(\bar{x}_k), \ \ldots, \tag{10}$$

które mają sens (przybliżenie $\bar{x}_{i+1}$ jest określone, gdy $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i \in \bar{I}$) zachodzi nierówność

$$|x_n - \xi| < |\bar{x}_n - \xi|. \tag{11}$$

Dowód. Pierwsza część tezy wynika z twierdzenia T1; pozostaje do wykazania nierówność (11).

Rozpatrzmy przypadek, gdy ciąg (9) jest monotoniczny. Załóżmy, że $x_1 < \xi$; wówczas ciąg (9) jest rosnący oraz $x_i \in \langle a, \xi)$ dla $i = 1,2,\ldots$. Nadto z (d_2) wynika, że wyrazy ciągu (10) należą do przedziału $\langle a, \xi)$.

Na podstawie (d_2) otrzymujemy

$$\Phi_2(x) < \Phi_1(x) < \xi \quad \text{dla} \quad a \leqslant x < \xi. \tag{12}$$

Jeżeli $a \leqslant x < y < \xi$, to z (12) i monotoniczności funkcji $\Phi_1(x)$ mamy

$$\Phi_2(x) < \Phi_1(x), \quad \Phi_1(x) < \Phi_1(y) < \xi .$$

Stąd $$\Phi_2(x) < \Phi_1(y) < \xi \quad \text{dla} \quad a \leqslant x < y < \xi \, . \tag{13}$$

Wykażemy indukcyjnie, że

$$\bar{x}_n < x_n < \xi \tag{14}$$

dla tych kolejnych liczb naturalnych, dla których $\bar{x}_n$ ma sens.

Dla $x = x_0$ z (12) wynika prawdziwość nierówności (14) dla n=1.

Załóżmy, że nierówność (14) jest prawdziwa, wtedy na podstawie (13) mamy

$$\bar{x}_{n+1} = \Phi_2(\bar{x}_n) < \Phi_1(x_n) = x_{n+1} < \xi \, .$$

Przejście indukcyjne zostało więc wykazane.

Z nierówności (14) wynika nierówność (11).

Jeżeli $x_1 > \xi$, to dowód nierówności (11) jest analogiczny.

Rozpatrzmy przypadek, gdy ciąg (9) jest oscylacyjny.

Z (d_2) wynikają nierówności

$$\xi < \Phi_1(x) < \Phi_2(x) \quad \text{dla} \quad a \leqslant x < \xi \, ,$$

$$\Phi_2(x) < \Phi_1(x) < \xi \quad \text{dla} \quad \xi < x \leqslant b.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku można wykazać, że

$$\xi < \Phi_1(y) < \Phi_2(x) \quad \text{dla} \quad a \leqslant x < y < \xi \, ,$$

$$\Phi_2(x) < \Phi_1(y) < \xi \quad \text{dla} \quad \xi < y < x \leqslant b.$$

Korzystając z ostatnich nierówności można wykazać w podobny sposób co poprzednio nierówność (11).

Uwaga 3. Założenie (d_2) w twierdzeniu T2 możemy zastąpić założeniem silniejszym

$$|\Phi_1'(x)| < |\Phi_2'(x)| \ \text{i} \ \Phi_1'(x) \cdot \Phi_2'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in I_1 \cup I_2. \tag{15}$$

Z twierdzenia Cauchy'ego i pierwszej z nierówności (15) mamy bowiem

$$\left|\frac{\Phi_1(x) - \xi}{\Phi_2(x) - \xi}\right| = \left|\frac{\Phi_1(x) - \Phi_1(\xi)}{\Phi_2(x) - \Phi_2(\xi)}\right| = \left|\frac{\Phi_1'(\mu)}{\Phi_2'(\mu)}\right| < 1,$$

a więc $|\Phi_1(x) - \xi| < |\Phi_2(x) - \xi|$.

Stosując twierdzenie Lagrange'a i drugą z nierówności (15) łatwo otrzymujemy drugą część założenia (d_2).

Zastosujemy obecnie twierdzenie T2 do porównania metod iteracyjnych Königa i Schrödera 3 rzędu.

Metody te dla równania

$$f(x) = 0 \tag{16}$$

określają odpowiednio funkcje iteracyjne

$$\varphi(x) = x - \frac{2ff'}{2f'^2 - ff''}, \quad \psi(x) = x - \frac{f(2f'^2 + ff'')}{2f'^3}. \tag{17}$$

Obliczając pochodne tych funkcji mamy

$$\varphi'(x) = \frac{f^2(3f''^2 - 2f'f''')}{(2f'^2 - ff'')^2}, \quad \psi'(x) = \frac{f^2(3f''^2 - f'f''')}{2f'^4} \tag{18}$$

(przy funkcji $f(x)$ i jej pochodnych we wzorach (17) i (18) opuszczono argument x).

Twierdzenie T3. Załóżmy, że

(a_3) funkcja $f(x)$ jest klasy $C^{(3)}$ w przedziale $I = \langle a, b \rangle$;

(b_3) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

(c_3) $f' \cdot [2f'^2 - ff''] \cdot [2f'^2 + ff''] \neq 0$ dla $x \in I$.

Jeżeli

(d_3) $$3f''^2 - 2f'f''' > 0 \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

to kolejne przybliżenia pierwiastka ξ równania (16) otrzymane metodą Königa są lepsze niż odpowiednie przybliżenia otrzymane metodą Schrödera (przy wspólnym przybliżeniu początkowym $x_0 \in I$).

Jeżeli

$$3f''^2 - f'f''' < 0 \quad \text{dla} \quad x \in I, \ \psi(x_0) \in I;$$

(e_3) $$|\psi'(x)| = \left[\frac{f^2(3f''^2 - f'f''')}{2f'^4}\right] < 1 \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

to kolejne przybliżenia pierwiastka ξ równania (16) otrzymane metodą Schrödera są lepsze niż odpowiednie przybliżenia otrzymane metodą Königa (przy wspólnym przybliżeniu początkowym x_0).

Dowód. Rozpatrzmy różnicę funkcji iteracyjnych (17)

$$\psi(x) - \varphi(x) = \frac{f^3 \cdot f''^2}{2f'^3(2f'^2 - ff'')}.$$

Z założenia (c_3) wynika, że $2f'^2 - ff''$ jest stałego znaku w przedziale $\bar{I}$, a ponieważ

$$2[f'(\xi)]^2 - f(\xi) \cdot f''(\xi) = 2[f'(\xi)]^2 > 0$$

więc

$$2f'^2 - ff'' > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \bar{I}.$$

Stąd wnioskujemy

$$\operatorname{sgn}[\psi(x) - \varphi(x)] = \operatorname{sgn}[f(x) \cdot f'(x)].$$

Z (b_3) wynika

$$\operatorname{sgn}[f(x)\, f'(x)] = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad a \leqslant x < \xi \\ 1 & \text{dla} \quad \xi < x \leqslant b, \end{cases}$$

gdyż $f'(x)$ jest stałego znaku w przedziale $\bar{I}$.

Ostatecznie mamy więc

$$\begin{aligned} \psi(x) &< \varphi(x) \quad \text{dla} \quad a \leqslant x < \xi, \\ \psi(x) &> \varphi(x) \quad \text{dla} \quad \xi < x \leqslant b. \end{aligned} \tag{19}$$

Wykażemy obecnie pierwszą część twierdzenia.

Sprawdzimy czy zachodzą założenia twierdzenia T2, gdy przyjmiemy

$$\Phi_1(x) = \varphi(x), \quad \Phi_2(x) = \psi(x) \tag{20}$$

Założenia (a_2), (b_2) i (c_2) wynikają łatwo z (a_3), (b_3) i (c_3). Łatwo zauważyć, że jeżeli

$$3f''^2 - 2f'f''' > 0, \quad \text{to} \quad 3f''^2 - f'f''' > 0,$$

zatem funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są rosnące (na podstawie (18)). Stąd na podstawie (19) wynika założenie (d_2).

Funkcje (20) spełniają założenia twierdzenia T2, a więc zachodzi dla nich teza twierdzenia T2, co dowodzi pierwszej części twierdzenia T3.

Dowód drugiej części twierdzenia przebiega podobnie. Wystarczy wykazać, że zachodzą założenia twierdzenia T2 w przypadku, gdy przyjmiemy

$$\Phi_1(x) = \psi(x), \quad \Phi_2(x) = \varphi(x).$$

Sprawdzimy, że zachodzi założenie (d_2), gdyż pozostałe założenia można łatwo wykazać.

Jeżeli $3f'^2 - f'f'' < 0$, to $3f'^2 - 2f'f'' < 0$, a więc z (a_3) i (18) mamy, że funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są malejące. Stąd na podstawie (19) wnioskujemy o prawdziwości założenia (d_2). Druga część twierdzenia została więc wykazana.

Rozpatrzmy jeszcze przykład ilustrujący twierdzenie T3.

Przykład. Dla równania

$$f(x) = x^3 - 2 = 0$$

w przedziale $\langle 0;2 \rangle$ zachodzi pierwszy przypadek twierdzenia T3 (metoda Königa jest lepsza, przybliżenia uzyskane tą metodą oznaczamy x_1, x_2). Przyjmujemy $x_0 = 2$ i obliczamy dwa kolejne przybliżenia

$x_1 = 1,333$ $\qquad$ $x_1 - \xi = 0,073...$

$\bar{x}_1 = 1,375$ $\qquad$ $\bar{x}_1 - \xi = 0,115...$

$x_2 = 1,26007$ $\qquad$ $x_2 - \xi = 0,00014...$

$\bar{x}_2 = 1,26362$ $\qquad$ $\bar{x}_2 - \xi = 0,00369...$

$(\xi = \sqrt[3]{2} = 1,2599210...)$.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1972 r.

Literatura

1. Householder A.S.: Principles of numerical analysis, New York, Toronto - London, 1953.
2. Collatz L.: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Berlin - Gottingen - Heidelberg, 1964.

СРАВНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Резюме

В статье рассматривается вопрос сравнения итерационных методов решения уравнений

$$x = \Phi_1(x), \quad x = \Phi_2(x) \tag{1}$$

имеющих общий корень в данном промежутке.

В этой работе доказываются две теоремы T1 и T2, которые находят применение при сравнении разных итерационных методов с тем же порядком сходимости для уравнения

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

Эти теоремы были применены для сравнения итерационных методов Кенига и Шредера 3-его порядка (теорема T3), которые даны соответственно формулами:

$$\varphi(x) = x - \frac{2\,ff'}{2\,f'^2 - ff''}, \quad \psi(x) = x - \frac{f(2f'^2 + ff'')}{2\,f'^3}.$$

Пусть I обозначает промежуток (a,b), а $\bar{I}$ - промежуток $\langle a,b \rangle$.

Теорема T1. Если

(a_1) функция $\Phi(x)$ непрерывна в промежутке $\bar{I}$;

(b_1) уравнение

$$x = \Phi(x) \tag{3}$$

имеет корень $\xi \in \bar{I}$;

(c_1) функция $\Phi(x)$ точно монотонна в каждом из промежутков $I_1 = (a,\xi)$ $I_2 = (\xi, b)$;

(d_1) $|\Phi(x) - \xi| < |\Phi x - \xi|$ для $x \in I_1 \cup I_2$, когда функция $\Phi(x)$ убывающая в промежутке I или

$|\Phi(x - \xi| < |x - \xi|$ в тех промежутках I_1, I_2 в которых функция $\Phi(x)$ возрастающая;

(e_1) для определенного $x_c \in \bar{I}$ и $x_c \neq \xi$ возникает условие $\Phi(x_c) \in \bar{I}$, то выполнены следующие условия: число ξ является единственным корнем уравнения (3) в промежутке $\bar{I}$; последовательность

$$x_1 = \Phi(x_2), \ldots, \quad x_{n+1} = \Phi(x_n), \ldots$$

сходящая к числу ξ монотонно или колебательно.

Теорема Т2. Если

(a_2) функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ являются непрерывными в промежутке $\bar{I}$;

(b_2) уравнения (1) имеют корень $\xi \in \bar{I}$;

(c_2) функция $\Phi_1(x)$ выполняет условия теоремы (c_1) – (e_1) теоремы Т1;

(d_2) $|\Phi_1(x) - \xi| < \Phi_2(x) - \xi|$ и $[\Phi_1(x) - \xi] \cdot [\Phi_2(x) - \xi] > 0$ для $x \in I_1 \cup I_2$

то выполнены условия:

последовательность

$$\bar{x}_1 = \Phi_1(x_o), \quad x_2 = \Phi_1(x_1), \ldots, \quad x_{k+1} = \Phi_1(x_k), \ldots$$

монотонно или колебательно сходящая к единственному корную ξ первого из уравнений (1) в промежутке I;

для этих очередных членов последовательности

$$\bar{x}_1 = \Phi_2(x_o), \quad \bar{x}_2 = \Phi_2(\bar{x}_1), \ldots, \quad \bar{x}_{k+1} = \Phi_2(x_k), \ldots,$$

которые имеют смысл (приближение $\bar{x}_{i+1}$ определено, когда $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$ I)

возникает неравенство

$$|x_n - \xi| < |\bar{x}_n - \xi|.$$

Теорема Т3. Предложим, что

(a_3) функция $f(x)$ класса $C^{(3)}$ в промежутке $\bar{I}$;

(b_3) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

(c_3) $f' \, [2\, f'^{\,2} - ff''] \, [2\, f'^{\,2} + ff' \neq 0$ для $x \in \bar{I}$.

Если

(d_3) $3\, f''^{\,2} - 2\, f' f''' > 0$ для $x \in \bar{I}$,

то очередные приближения корня ξ уравнения (2) полученные методом Кенига лучше соответствующих приближений полученных методом Шредера.

$$3\, f''^{\,2} - f' f'' < 0 \qquad x \in \bar{I}, \quad \psi(x_o) \in \bar{I};$$

$$|\psi'(x_o)| = \left| \frac{f^2(3\, f''^{\,2} - f' f''')}{2\, f'^{\,4}} \right| < 1 \qquad x \in \bar{I},$$

то очередные приближения корня ξ уравнения (2) полученные методом Шредера лучше соответствующих приближений полученных методом Кенига (при общем начальном приближении x_c).

Подан пример иллюстрирующий теорему Т3.

THE COMPARISON OF ITERATIVE METHODS OF SOLVING OF REAL EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper it is considered the problem of comparison of iterative methods of solving of equations

$$x = \Phi_1(x), \quad x = \Phi_2(x) \tag{1}$$

which have a common root in a given interval.

The paper contains proofs of two theorems T1 and T2, which are applied in the comparison of different iterative methods with the same convergence's order for an equation

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

These theorems are applied to a comparison of iterative methods of Konig and Schroder with 3^{rd} order (the theorem T3), which are given respectively by formulas:

$$\varphi(x) = x - \frac{2ff'}{2(f')^2 - ff''}, \qquad \psi(x) = x - \frac{f(2f'^2 + ff'')}{2f'^3}.$$

Let I denotes an interval (a,b), and $\bar{I}$ - an interval $\langle a,b \rangle$.

Theorem T1. If

(a_1) a function $\Phi(x)$ is continuous in an interval $\bar{I}$;

(b_1) and equation

$$x = \Phi(x) \tag{3}$$

has a root $\xi \in \bar{I}$;

(c_1) a function $\Phi(x)$ is strictly monotone in each of intervals $I_1 = (a,\xi)$ $I_2 = (\xi,b)$;

(d_1) $|\Phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ for $x \in I_1 \cup I_2$, when a function $\Phi(x)$ is decreasing in an interval I or $|\Phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ in these intervals I_1, I_2, in which a function $\Phi(x)$ is increasing;

(e_1) for fixed $x_0 \in \bar{I}$ and $x_0 \neq \xi$ the condition $\Phi(x_0) \in \bar{I}$ holds then the following conditions are fulfilled a number ξ is an unique root of the ewuation (3) in an interval $\bar{I}$; the sequence

$$x_1 = \Phi(x_2), \; \ldots, \; x_{n+1} = \Phi(x_n), \; \ldots$$

is convergent to a number ξ (the convergence is monotonic or oscillating)

Theorem T2. If

(a_2) functions $\Phi_1(x)$ and $\Phi_2(x)$ are continuous in an interval I;

(b_2) equations 1 have a root $\xi \in I$;

(c_2) a function $\Phi_1(x)$ fulfills assumptions (a_1) - (e_1) of the theorem T1

(d_2) $|\Phi_1(x) - \xi| < |\Phi_2(x) - \xi|$ and $[\Phi_1(x) - \xi][\Phi_2(x) - \xi] > 0$ for $x \in I_1 \cup I_2$

then the following conditions holds:

the sequence

$$x_1 = \Phi_1(x_o), \quad x_2 = \Phi_1(x_1), \ \ldots, \quad x_{k+1} = \Phi_1(x_k), \ \ldots$$

is convergent to an unique root ξ of the first equation of (1) in an interval I (the convergence is monotonic or oscillating) for the successive terms of the sequence

$$\overline{x}_1 = \Phi_2(x_o), \quad \overline{x}_2 = \Phi_2(\overline{x}_1), \ \ldots, \quad \overline{x}_{k+1} = \Phi_2(\overline{x}_k), \ \ldots$$

which have sense (an approximation $\overline{x}_{i+1}$ is determined, when ($\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_i \in I$)

the inequality

$$|x_n - \xi| < |\overline{x}_n - \xi| \quad \text{holds.}$$

Theorem T3. Suppose that

(a_3) $f(x)$ belongs to the $C^{(3)}$ class function in an interval I;

(b_3) $f(a) \ f(b) < 0$;

(c_3) $f' \left[2f'^2 - ff''\right]\left[2f'^2 + ff''\right] \neq 0$ for $x \in I$.

If

(d_3) $3f'^2 - 2f'f'' > 0$ for $x \in I$,

then successive approximations of a root ξ of an equation (2) obtaijed by the method of Schroder are better than correspondent approximations obtained by the method of Konig (with the common initial approximation x_o).

The example is given as an illustration of the theorem T3.