ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

R. BARTŁOMIEJCZYK

WARUNKI ZBIEŻNOŚCI DLA METODY KÖNIGA PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RZECZYWISTYCH

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest podanie warunków zbieżności metody iteracyjnej J. Königa (patrz [1]) do pierwiastka ξ równania

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

przy założeniu, że funkcja rzeczywista $f(x)$ jest klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale $I = \langle a; b \rangle$ oraz $f'(\xi) = 0$.

Metodę tę określa funkcja iteracyjna

$$\varphi_n(x) = x - \frac{f(x)u_{n-1}(x)}{u_n(x)}, \tag{2}$$

gdzie $u_o(x) = 1$,

$$u_k(x) = \begin{vmatrix} a_1(x) & a_o(x) & \dots & 0 \\ a_2(x) & a_1(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}(x) & a_{k-2}(x) & \dots & a_o(x) \\ a_k(x) & a_{k-1}(x) & \dots & a_1(x) \end{vmatrix} \tag{3}$$

dla $k = 1,2,\dots$; $a_o(x) = f(x)$, $a_i(x) = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)$ dla $i = 1,2,\dots$ (n - ustalona liczba naturalna).

I. Aby podać warunki zbieżności w metodzie Königa obliczymy pochodną funkcji (2). W tym celu wykażemy dwa lematy.

Lemat 1. Niech

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

będzie dowolnym wyznacznikiem k-tego stopnia, którego elementy są liczbami zespolonymi. Jeżeli $B^{(i)}$ ($i = 1, \dots, k$) oznacza wyznacznik, który został utworzony z wyznacznika B przez zastąpienie elementów i-tego wiersza elementami

$$0;\ d_1 b_{i,1};\ d_2 b_{i,2};\ \dots;\ d_{k-1}\ b_{i,k-1},$$

gdzie $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ są dowolnymi liczbami zespolonymi, to

$$B^{(1)} + B^{(2)} + \dots + B^{(k)} = 0.$$

Dowód indukcyjny. Dla k = 1,2 łatwo sprawdzamy prawdziwość lematu. Niech $B_{jk}^{(i)}$ oznacza dopełnienie j-tego elementu k-tej kolumny w wyznaczniku $B^{(i)}$. Rozwijając wyznacznik $B^{(i)}$ według k-tej kolumny otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} B^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} b_{jk}\ B_{jk}^{(i)} + d_{k-1}\ b_{i,k-1}\ B_{ik}^{(i)}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \Big(b_{jk} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} B_{jk}^{(i)}\Big) + d_{k-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,k-1}\ B_{ik}^{(i)}.$$

Zakładając prawdziwość lematu dla liczby k-1 otrzymujemy, że

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} B_{jk}^{(i)} = 0$$

dla j = 1,2, ..., k. A więc

$$\sum_{i=1}^{k} B^{(i)} = d_{k-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,k-1}\ B_{ik}^{(i)} =$$

$$= d_{k-1} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,k-1} & b_{1,k-1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,k-1} & b_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{k,k-1} & b_{k,k-1} \end{vmatrix} = 0$$

co dowodzi prawdziwości lematu.

Lemat 2. Dla k = 1,2,... zachodzą wzory

$$u_k'(x) = (k+1)\cdot\begin{vmatrix} a_1(x) & a_0(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_2(x) & a_1(x) & a_0(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}(x) & a_{k-2}(x) & a_{k-3}(x) & \dots & a_0(x) \\ a_{k+1}(x) & a_k(x) & a_{k-1}(x) & \dots & a_2(x) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$u_{k+1}(x) = f'(x)u_k(x) - \frac{1}{k+1} f(x)u_k'(x), \tag{5}$$

$$u_k^2(x) - u_{k-1}(x)u_{k+1}(x) = [f(x)]^k\, W_{k+1}(x), \quad \text{gdzie} \tag{6}$$

$$W_{k+1}(x) = \begin{vmatrix} a_2(x) & a_1(x) & a_0(x) & \dots & 0 \\ a_3(x) & a_2(x) & a_1(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k(x) & a_{k-1}(x) & a_{k-2}(x) & \dots & a_1(x) \\ a_{k+1}(x) & a_k(x) & a_{k-1}(x) & \dots & a_2(x) \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$ku_{k-1}(x)u_k'(x)-(k+1)u_{k-1}'(x)u_k(x) = k(k+1)[f(x)]^{k-1}\, W_{k+1}(x), \tag{8}$$

$$\varphi_k'(x) = \frac{(k+1)[f(x)]^k \cdot W_{k+1}(x)}{u_k^2(x)}. \tag{9}$$

Dowód. Aby wykazać (4) różniczkujemy $u_k(x)$ (wzór (3)) według wierszy, wiedząc, że $a_i'(x) = (i+1)a_{i+1}(x)$ dla $i = 0,1,2,\dots$ Odejmując w k-1 wyznacznikach od i-tego wiersza otrzymanego z różniczkowania i+1 wiersz pomnożony przez i+1 i stosując lemat 1 otrzymujemy

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1.a_1 & 2.a_0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1.a_2 & 2.a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} - \dots$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1.a_{k-1} & 2.a_{k-2} & \dots & (k-1)a_1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_o \\ (k+1)a_{k+1} & ka_k & (k-1)a_{k-1} & \dots & 2a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_o \\ 0 & 1.a_k & 2a_{k-1} & \dots & (k-1)a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_o \\ (k+1)a_{k+1} & ka_k & (k-1)a_{k-1} & \dots & 2a_2 \end{vmatrix},$$

gdzie $a_i = a_i(x)$. Stąd po dodaniu wyznaczników otrzymujemy (4).

Wzór (5) otrzymujemy rozwijając wyznacznik $u_k(x)$ według $k+1$ kolumny i stosując (4).

Wzór (6) jest szczególnym przypadkiem wzoru Aitkena (por. [1] str. 140 wzór (8) dla $v = 1$).

Lewa strona (8) po zastosowaniu (5) jest równa

$$\frac{k(k+1)u_{k-1}(x)}{f(x)}\left[f'(x)u_k(x) - u_{k+1}(x)\right] + \frac{k(k+1)u_k(x)}{f(x)}\left[f'(x)u_{k-1}(x) - u_k(x)\right] =$$

$$\frac{k(k+1)\left[u_k^2(x) - u_{k-1}(x)u_{k+1}(x)\right]}{f(x)},$$

a stąd na podstawie (6) otrzymujemy prawą stronę (8).

Obliczając pochodną funkcji (2) otrzymujemy

$$\varphi_k'(x) = \frac{u_k(x)\left[u_k(x) - f'(x)u_{k-1}(x)\right] - f(x)u_{k-1}'(x)u_k(x)+f(x)u_{k-1}(x)u_k'(x)}{u_k^2(x)},$$

stąd po zastosowaniu (5)

$$\varphi_k'(x) = \frac{f(x)\left[ku_{k-1}(x)u_k'(x) - (k+1)u_{k-1}'(x)u_k(x)\right]}{ku_k^2(x)}$$

Z ostatniej równości na podstawie (8) otrzymujemy (9); a stąd $\varphi_n'(\xi) = \dots \varphi_n^{(n)}(\xi) = 0$, więc rząd zbieżności funkcji iteracyjnej (2) jest równy co najmniej $n+1$.

II. Zauważmy, że jeżeli $u_{n-1}(x)$ i $u_n(x)$ są stałego znaku w przedziale $\bar{I}$, to równanie (1) i równanie

$$x = \varphi_n(x) \tag{10}$$

są równoważne w przedziale $\bar{I}$.

Do równania (10) zastosujemy wykazane w [2].

Twierdzenie T1. Jeżeli

(a_1) funkcja $\phi(x)$ jest ciągła w przedziale $\bar{I} = \langle a; b\rangle$,

(b_1) równanie

$$x = \phi(x) \tag{11}$$

posiada pierwiastek $\xi \in I = (a; b)$,

(c_1) funkcja $\phi(x)$ jest ściśle monotoniczna w każdym z przedziałów $I_1 = (a; \xi)$, $I_2 = (\xi; b)$,

(d_1) $|\phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ dla $x \in I_1 \cup I_2$, gdy funkcja $\phi(x)$ jest malejąca w przedziale I, albo $|\phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ w tych przedziałach I_1, I_2, w których funkcja $\phi(x)$ jest rosnąca,

(e_1) dla ustalonego $x_0 \in \bar{I}$ i $x_0 \neq \xi$ zachodzi warunek $\phi(x_0) \in \bar{I}$,

to są spełnione warunki:

liczba ξ jest jedynym pierwiastkiem równania (11) w przedziale $\bar{I}$,

ciąg $x_1 = \phi(x_0)$, $x_2 = \phi(x_1)$, ..., $x_{k+1} = \phi(x_k)$, ...

jest zbieżny do liczby ξ monotonicznie lub oscylująco tzn.

$$|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi| \text{ i } (x_{k+1} - \xi)(x_k - \xi) > 0 \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots \text{ albo}$$

$$|x_{k+1} - \xi| < |x_k - \xi| \text{ i } (x_{k+1} - \xi)(x_k - \xi) < 0 \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots$$

Uwaga 1. Założenie (e_1) jest zbędne, gdy x_0 leży w tym z przedziałów $\langle a; \xi)$, $(\xi; b\rangle$, w którym funkcja $\phi(x)$ jest rosnąca. W tym przypadku ciąg

$$x_0,\ x_1 = \phi(x_0),\ \ldots,\ x_{k+1} = \phi(x_k),\ \ldots$$

jest zbieżny monotonicznie.

Uwaga 2. Nierówność $|\phi(x) - \xi| < |x - \xi|$ w założeniu (d_1) można zastąpić nierównością silniejszą $|\phi'(x)| < 1$.

Stosując do równania (9) twierdzenie T1 otrzymujemy następujące

Twierdzenie T2. Jeżeli

(a_2) funkcja $f(x)$ jest klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale $\bar{I} = \langle a; b\rangle$,

(b_2) $f(a)f(b) < 0$,

(c_2) $u_{n-1}(x)u_n(x)W_{n+1}(x) \neq 0$ dla $x \in \bar{I}$/n jest ustaloną liczbą naturalną/,

$$(d_2) \quad |\varphi_n'(x)| = \left| \frac{(n+1)[f(x)]^n W_{n+1}(x)}{u_n^2(x)} \right| < 1 \quad \text{dla} \quad x \in \overline{I}, \text{ gdy}$$

liczba n jest parzysta i $W_{n+1}(x) < 0$,

(e_2) dla ustalonego $x_o \in \overline{I}$ i $x_o \neq \xi$ mamy $\varphi_n(x_o) \in \overline{I}$,

to są spełnione warunki:

ciąg

$$x_1 = \varphi_n(x_o), \quad x_2 = \varphi_n(x_1), \ldots, x_{k+1} = \varphi_n(x_k), \ldots \tag{12}$$

jest zbieżny monotonicznie lub oscylująco do jedynego w przedziale $\overline{I}$ pierwiastka ξ równania (1),

ciąg (12) jest oscylujący, gdy n jest liczbą parzystą i $W_{n+1}(x) < 0$, w pozostałych przypadkach jest monotoniczny,

gdy $[f(x_o)]^n \cdot W_{n+1}(x_o) > 0$, to założenie (e_2) jest zbędne i ciąg

$$x_o, \quad x_1 = \varphi_n(x_o), \ldots, x_{k+1} = \varphi_n(x_k), \ldots$$

jest zbieżny monotonicznie.

Dowód. Wystarczy wykazać, że z założeń (a_2) - (c_2) twierdzenia T2 wynikają założenia twierdzenia T1 dla równania (10).

Z (a_2) i (c_2) na podstawie (3) wynika (a_1). Natomiast z (b_2) wynika, że równanie (1) posiada przynajmniej jeden pierwiastek $\xi \in \overline{I}$. Liczba ξ jest także pierwiastkiem równania (10), a więc zachodzi (b_1).

Założenie (c_1) dla funkcji $\varphi_n(x)$ wynika ze wzoru (9) i (c_2). Oczywiście z założenia (e_2) wynika założenie (e_1).

Wykażemy obecnie, że z założeń (c_2) i (d_2) wynika założenie (d_1). Pierwsza część założenia (d_1) wynika ze wzoru (9) oraz uwagi 2.

Gdy funkcja $\varphi_n(x)$ jest rosnąca w przedziale I_1 lub I_2, to druga część założenia (d_1) sprowadza się do wykazania nierówności

$$x < \varphi_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in I_1, \text{ lub}$$
$$x > \varphi_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in I_2.$$

Ostatnie nierówności na podstawie (2) są równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} f(x)u_{n-1}(x)u_n(x) &< 0 \quad \text{dla} \quad x \in I_1, \text{ lub} \\ f(x)u_{n-1}(x)u_n(x) &> 0 \quad \text{dla} \quad x \in I_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Z (3) wynika, że

$$u_{n-1}(\xi)u_n(\xi) = [f'(\xi)]^{n-1}[f'(\xi)]^n = [f'(\xi)]^{2n-1} \neq 0.$$

Zatem

$$\operatorname{sgn} u_{n-1}(x)u_n(x) = \operatorname{sgn} f'(\xi) \text{ dla } x \in I.$$

Stąd na podstawie ciągłości funkcji f(x) i założenia (a_2) mamy

$$f(a) < 0 \quad i \quad f(b) > 0, \quad \text{gdy} \quad u_{n-1}(x)u_n(x) > 0, \quad \text{lub}$$

$$f(a) > 0 \quad i \quad f(b) < 0, \quad \text{gdy} \quad u_{n-1}(x)u_n(x) < 0.$$

Ponieważ funkcja f(x) zachowuje znak w każdym z przedziałów I_1, I_2, więc z ostatnich warunków wynikają nierówności (13). Zachodzi więc druga część założenia (d_1).

Ponieważ z założeń (a_2) - (e_2) wynikają założenia (a_1) - (e_1) twierdzenia T1, więc dla funkcji $\varphi_n(x)$ jest spełniona teza twierdzenia T1, co kończy dowód twierdzenia T2.

III. Podamy obecnie pewien schemat obliczeniowy dla metody Königa gdyż obliczenie kolejnych przybliżeń ze wzoru (2) jest kłopotliwe. W tym celu wykażemy następujące

Twierdzenie T3. Jeżeli f(x) jest klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale $I = \langle a; b\rangle$ to

$$\varphi_n(x) = x + \delta_n(x), \tag{14}$$

gdzie $\delta_n(x)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} a_0(x) + a_1(x)\delta_1(x) = 0 \\ a_0(x) + a_1(x)\delta_2(x) + a_2(x)\delta_2(x)\delta_1(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0(x) + a_1(x)\delta_n(x) + \dots + a_n(x)\delta_n(x)\dots\delta_1(x) = 0; \end{cases} \tag{15}$$

$$a_0(x) = f(x), \quad a_i(x) = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x) \text{ dla } i=1, \dots, n.$$

Dowód indukcyjny (stosujemy uproszczone oznaczenia). Dla $n = 1$ mamy $a_0 + a_1\delta_1 = 0$, stąd

$$\delta_1 = -\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0 u_0}{u_1} \quad \text{(na podstawie (3))}.$$

Załóżmy, że

$$\delta_1 = \frac{-a_o u_o}{u_1}, \quad \delta_2 = \frac{-a_o u_1}{u_2}, \quad \ldots, \quad \delta_{n-1} = -\frac{a_o u_{n-2}}{u_{n-1}}$$

Wykażemy, że

$$\delta_n = -\frac{a_o u_{n-1}}{u_n}. \tag{16}$$

Na podstawie założenia indukcyjnego zachodzi równość

$$\delta_{n-1}\,\delta_{n-2}\ldots\delta_i = (-1)^{n-i}\, a_o^{n-i}\,\frac{u_{i-1}}{u_{n-1}},$$

dla $i = 1, \ldots, n-1$.

Ostatnie równanie układu (15) można więc napisać w postaci

$$a_o + \delta_n\left(a_1 - a_2\,\frac{a_o u_{n-2}}{u_{n-1}} + a_3\,\frac{a_o^2 u_{n-3}}{u_{n-1}} - \ldots + (-1)^{n-1}\, a_{n-1}\,\frac{a_o u_o}{u_{n-1}}\right) = 0. \tag{17}$$

Ponieważ wyznacznik (3) po rozwinięciu według pierwszej kolumny i obniżeniu stopni występujących w rozwinięciu wyznaczników przyjmuje postać

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\, a_i(x)u_{k-i}(x)\,\left[a_o(x)\right]^{i-1},$$

więc równanie (17) można napisać w postaci

$$a_o + \delta_n\,\frac{u_n}{u_{n-1}} = 0.$$

Z ostatniej równości łatwo wynika (16). Twierdzenie T3 zostało więc wykazane.

Korzystając z twierdzenia T3 można metodą Königa rzędu $n+1$ (funkcja iteracyjna $\varphi_n(x)$) traktować jako metodę, która składa się z n kolejnych kroków kolejno powtarzanych; przy czym na każdym kroku otrzymujemy przybliżenie pierwiastka ξ równania (1). Biorąc mianowicie przybliżenie początkowe x_o dla pierwiastka ξ równania (1) otrzymujemy ciąg n kolejnych przybliżeń

$$x_1^{(1)} = x_o + \delta_1, \quad x_1^{(2)} = x_o + \delta_2, \quad \ldots, \quad x_1^{(n)} = x_o + \delta_n, \tag{18}$$

gdzie (na podstawie (15))

$$\delta_1 = -\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}, \quad \delta_{i+1} = -\frac{f(x_o)}{f'(x_o) + \sum_{k=2}^{i+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_o)\delta_i \ldots \delta_{i-k+2}} \tag{19}$$

dla $i = 1, \ldots, n-1$.
Przybliżenie $x_1^{(n)} = x_1$ jest w tym schemacie obliczeniowym pierwszym przybliżeniem otrzymanym z metody Königa rzędu $n+1$.
Przyjmując x_1 za przybliżenie początkowe otrzymujemy następny n wyrazowy ciąg przybliżeń

$$x_2^{(1)}, \; x_2^{(2)}, \; \ldots \; x_2^{(n)},$$

którego n-ty wyraz $x_2^{(n)} = x_2$ jest następnym przybliżeniem otrzymanym z metody Königa rzędu $n+1$.
Postępując w ten sposób otrzymujemy ciąg przybliżeń

$$x_o, \; x_1, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots$$

zbieżny do pierwiastka ξ równania (1).
Mianowniki wyrażeń (9) można obliczać z następującego schematu Hornera; dla ustalonego i mamy

$$f'(x_o) + \sum_{k=2}^{i+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_o) \; \delta_{i-k+2} \ldots \delta_i = b_{i+1}, \tag{20}$$

gdzie

$$b_1 = \frac{1}{(i+1)!} f^{(i+1)}(x_o), \quad b_{s+1} = b_s\delta_s + \frac{1}{(i-s+1)!} f^{(i-s+1)}(x_o)$$

dla $s = 1, \ldots, i$.
Warto zauważyć, że obliczając $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ze wzorów (19) nie ma potrzeby wykonywać obliczeń z jednakową ilością miejsc dziesiętnych, lecz można kolejno zwiększać dokładność obliczeń. Z budowy wyrażenia (20) wynika, że to dość istotne z punktu widzenia praktyki obliczeniowej postępowanie będzie tylko w nieznaczny sposób wpływało na wynik obliczeń, w stosunku do obliczeń z jednakowo dużą dokładnością.

Wpłynęło do Redakcji 5 maja 1972 r.

Literatura

1. Householder A.S.: Principles of numerical analysis, New York, Toronto-London, 1953.
2. Łanowy St.: Porównanie metod iteracyjnych rozwiązywania równań rzeczywistych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ten zeszyt.

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА КЕНИГА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассматривается итерационный метод данный формулами (2) и (3). Выведена формула производной итерационной функции. На этой основе доказана следующая

Теорема Т2. Если

(a_2) $f(x)$ – это функция класса $C^{(n+1)}$ в промежутке $I = \langle a, b \rangle$;

(b_2) $f(a)\, f(b) < 0$;

(c_2) $u_{n-1}(x)\, u_n(x)\, w_{n+1}(x) \neq 0$ для $x \in \bar{I}$ (n является определенным натуральным числом);

$$(d_2)\ |\varphi_n'(x)| = \left| \frac{(n+1)\, [f(x)]^n\, w_{n+1}(x)}{u_n^2(x)} \right| < 1 \quad x \in \bar{I},$$

когда число n является четным и $w_{n+1}(x) < 0$;

(e_2) для определенного $x_0 \in \bar{I}$ и $x_0 \neq \xi$ имеем $\varphi_n(x_0) \in \bar{I}$,

то выполнены условия:

последовательность $x_1 = \varphi_n(x_0),\ x_2 = \varphi_n(x_1), \ldots,\ x_{k+1} = \varphi_n(x_k), \ldots$ монотонно или колебательно сходящая к единственному корню уравнения (1) в промежутке I;

последовательность (12) колебательна, когда n является четным числом и $w_{n+1}(x) < 0$, в остальных случаях монотонна.

Когда $[f(x_0)]^n\, w_{n+1}(x_0) > 0$, то условие ($e_2$) ненужно и последовательность $x_0,\ x_1 = \varphi_n(x_0), \ldots,\ x_{k+1} = \varphi_n(x_k), \ldots$ монотонно сходящая.

Затем подан в теореме Т3 / формулы (14) и (15) / некоторый прямой вычислительный способ для метода Кенига.

THE CONDITIONS OF ITERATIVE METHOD'S CONVERGENCE OF J. KÖNIG FOR REAL-VALUED FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper deals on iterative method given by formulas (2) and (3). The formula (9) for a derivative of iterative function (2) is deduced.
Hence follows the following
Theorem T2. If
(a_2) a function belongs to the $C^{(n+1)}$ class function in an interval $I = \langle a, b\rangle$;
(b_2) $f(a)\, f(b) < 0$;
(c_2) $u_{n-1}(x)\, u_n(x)\, W_{n+1}(x) \neq 0$ for $x \in I$ (n is a fixed natural number)
(d_2) $$|\varphi_n'(x)| = \left|\frac{(n+1)\,[f(x)]^n\, W_{n+1}(x)}{u_n^2(x)}\right| < 1 \quad \text{for } x \in I,$$
if a number n is even and $W_{n+1}(x) < 0$;
(e_2) for fixed $x_o \in I$ and $x_o \neq \xi$ we have $\varphi_n(x_o) \in I$,
then the conditions holds:
the sequence

$$x_1 = \varphi_n(x_o), \quad x_2 = \varphi_n(x_1), \ \ldots, \ x_{k+1} = \varphi_n(x_k)\ \ldots \tag{12}$$

is convergent to an unique root ξ of an equation (1) in an interval I (the convergence is monotonic or oscillating); the sequence (12) is oscillating when n is even number and $W_{n+1}(x) < 0$, in remaining cases it is monotonic.

If $[f(x_o)]^n\, W_{n+1}(x_o) > 0$ then the assumption (e_2) is dispensable and the sequence

$$x_o,\ x_1 = \varphi_n(x_o),\ \ldots,\ x_{k+1} = \varphi_n(x_k),\ \ldots$$

is convergent monotonically.

Next in the theorem T3 (formulas (14) and (15)) is given a simple computing scheme for the method of König.