ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

R. BARTŁOMIEJCZYK, F. PRZYBYLAK

PROSTE WYPROWADZENIE I WARUNKI ZBIEŻNOŚCI METODY SCHRÖDERA PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RZECZYWISTYCH

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest podanie pewnego sposobu podwyższania rzędu zbieżności danej metody iteracyjnej o 1 oraz proste wyprowadzenie metody iteracyjnej Schrödera (dla funkcji holomorficznych). W pracy podano również warunki zbieżności tej metody dla równań rzeczywistych.

I. Niech dla równania

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

będzie dana funkcja iteracyjna $\psi_n(z)$, dla której ciąg

$$z_o,\ z_1 = \psi_n(z_o),\ \ldots,\ z_{k+1} = \psi_n(z_k),\ \ldots$$

jest zbieżny do pierwiastka ζ równania (1) oraz $f'(\zeta) \neq 0$. Załóżmy nadto, że pochodna funkcji iteracyjnej $\psi_n(z)$ jest postaci

$$\psi_n'(z) = \left[-f(z)\right]^n g(z), \tag{2}$$

gdzie $g(z)$ jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu punktu ζ i $g(\zeta) \neq 0$.

Z ostatniego założenia wynika $\psi_n'(\zeta) = \ldots = \psi_n^{(n)}(\zeta) = 0$, więc funkcja iteracyjna $\psi_n(z)$ posiada rząd zbieżności równy $n+1$.

Szukamy funkcji iteracyjnej rzędu $n+2$ postaci

$$\psi_{n+1}(z) = \psi_n(z) + \left[-f(z)\right]^{n+1} \alpha_{n+1}(z), \tag{3}$$

gdzie $\alpha_{n+1}(z)$ jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu punktu ζ.

Obliczając pochodną funkcji (3) otrzymujemy

$$\psi_{n+1}'(z) = \psi_n'(z) - (n+1)\left[-f(z)\right]^n f'(z)\alpha_{n+1}(z) + \left[-f(z)\right]^{n+1} \alpha_{n+1}'(z).$$

Stąd można zauważyć, że jeżeli

$$\psi_n'(z) = (n+1)\left[-f(z)\right]^n f'(z)\, \alpha_{n+1}(z), \tag{4}$$

to funkcja iteracyjna (3) posiada rząd zbieżności równy n+2 oraz

$$\psi'_{n+1}(z) = \left[-f(z)\right]^{n+1} \alpha_{n+1}(z). \tag{5}$$

Z (4) na podstawie (2) otrzymujemy

$$\alpha_{n+1}(z) = \frac{g(z)}{(n+1)f'(z)}. \tag{6}$$

Ostatecznie z (3), (5) i (6) otrzymujemy

$$\psi_{n+1}(z) = \psi_n(z) + \frac{\left[-f(z)\right]^n \cdot g(z)}{(n+1)f'(z)} = \psi_n(z) - \frac{f(z)\psi'_n(z)}{(n+1)f'(z)} \tag{7}$$

$$\psi'_{n+1}(z) = \frac{\left[-f(z)\right]^{n+1}\left[g'(z)\,f'(z) - g(z)f''(z)\right]}{(n+1)\,\left[f'(z)\right]^2}. \tag{8}$$

Wychodząc od ustalonej funkcji iteracyjnej, można korzystać wielokrotnie z (7) i (8) (lub z (3), (5) i (6)) i otrzymywać funkcje iteracyjne dowolnie wysokiego rzędu.

Wyprowadzimy obecnie w ten sposób metodę iteracyjną Schrödera podaną w [1] i [2].

Postępowanie rozpoczynamy od metody Newtona

$$\psi_1(z) = z - \frac{f}{f'} = z + (-f)b_1, \quad \psi'_1(z) = \frac{ff''}{f'^2} = (-f)b'_1, \text{ gdzie } b_1 = \frac{1}{f'}.$$

Następnie korzystając z (3), (5) i (6) otrzymujemy

$$\psi_2(z) = z + (-f)b_1 + (-f)^2 b_2, \quad \psi'_2(z) = (-f)^2\, b'_2, \quad \text{gdzie} \quad b_2 = \frac{b'_1}{2f'}.$$

Stąd na podstawie indukcji łatwo otrzymujemy

$$\psi_n(z) = z + (-f)b_1 + \ldots + (-f)^n\, b_n, \quad \psi'_n(z) = (-f)^n\, b'_n,$$

gdzie

$$b_1 = \frac{1}{f'}, \quad b_{k+1} = \frac{b'_k}{(k+1)f'} \quad \text{dla} \quad k = 1,2, \ldots \tag{9}$$

Ostatnie dwa wzory określają funkcję iteracyjną Schrödera i jej pochodną.

Podstawiając do ostatnich wzorów

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1} v_k}{k!\, f'^{\,2k-1}}$$

otrzymujemy następującą postać metody iteracyjnej Schrödera

$$\psi_n(z) = z - \left(\frac{f}{f'} + \frac{f^2 v_2}{2!f'^3} + \ldots + \frac{f^{n-1} v_n}{n!f'^{2n-1}}\right) \quad \text{lub}$$

$$\psi_n(z) = z - \frac{f(z)w_n(z)}{n!\,[f'(z)]^{2n-1}}, \quad \text{gdzie} \quad w_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!} f^{k-1} f'^{\,2n-2k} v_k,$$

$$\psi_n'(z) = -\frac{[f(z)]^n\, v_{n+1}(z)}{n!\,[f'(z)]^{2n}},$$

przy czym

$$v_1(z) = 1, \quad v_{k+1}(z) = (2k-1)v_k(z)f''(z) - v_k(z)f'(z).$$

Opierając się na twierdzeniu T1 pracy [4] i dowodząc podobnie jak w pracy [3] można wykazać następujące

Twierdzenie. Jeżeli

(a) funkcja $f(x)$ jest klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale $\bar{I} = \langle a; b\rangle$;

(b) $f(a)\, f(b) < 0$;

(c) $f'(x)\, v_n(x) w_n(x) \neq 0$ dla $x \in \bar{I}$ (n jest ustaloną liczbą naturalną);

(d) $|\psi_n'(x)| = \left|\frac{[f(x)]^n\, v_{n+1}(x)}{n!\,[f'(x)]^{2n}}\right| < 1$ dla $x \in \bar{I}$, gdy liczba n jest parzysta i $v_{n+1}(x) > 0$;

(e) dla ustalonego $x_o \in \bar{I}$ i $x_o \neq \xi$ mamy $\psi_n(x_o) \in \bar{I}$,

to są spełnione warunki:

ciąg

$$x_1 = \psi_n(x_o),\ x_2 = \psi_n(x_1),\ \ldots,\ x_{k+1} = \psi_n(x_k),\ \ldots \tag{10}$$

jest zbieżny monotonicznie lub oscylująco do jedynego pierwiastka ξ równania

$$f(x) = 0$$

w przedziale $\bar{I}$;

ciąg (10) jest oscylujący, gdy n jest liczbą parzystą i $v_{n+1}(x) > 0$, w pozostałych przypadkach jest monotoniczny.

Gdy $\left[f(x_o)\right]^n v_{n+1}(x_o) < 0$, to założenie (e) jest zbędne i ciąg

$$x_o, \; x_1 = \varphi_n(x_o), \; \ldots, \; x_{k+1} = \varphi_n(x_k), \; \ldots$$

jest zbieżny monotonicznie.

Wpłynęło do Redakcji 5 maja 1972 r.

Literatura

1. Householder A.S.: Principles of numerical analysis, New York, Toronto-London, 1953.
2. Collatz L.: Funtionalanalysis und Numerische Mathematik, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
3. Bartłomiejczyk R.: Warunki zbieżności metody iteracyjnej J. Koniga dla funkcji rzeczywistych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ten zeszyt.
4. Łanowy S.: Porównanie metod iteracyjnych dla równań rzeczywistych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ten zeszyt.

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ И ПРЯМОЕ ВЫВЕДЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ШРЕДЕРА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе подан некоторый прямой способ повышения порядка сходимости данного итерационного метода на 1, на этой основе подано прямое выведение итерационного метода Шредера (формулы (9)). Доказано следующую

Теорему. Если

(a) функция $f(x)$ – это функция класса $C^{(n+1)}$ промежутке $\bar{I} = \langle a, b \rangle$

(b) $f(a)\,f(b) < 0$;

(c) $f'(x)\,v_n(x)\,w_n(x) \neq 0$ для $x \in \bar{I}$ (n является определенным натуральным числом);

(d) $$|\psi_n'(x)| = \frac{[f(x)]^n \, v_{n+1}(x)}{n!\,[f'(x)]^{2n}} < 1$$ для $x \in \bar{I}$, когда число n является четным и $v_{n+1}(x) > 0$;

(e) для определенного $x_0 \in \bar{I}$ и $x_0 \neq \xi$ имеем $\psi_n(x_0) \in \bar{I}$, то выполнены условия:

последовательность

$$x_1 = \psi_n(x_0), \quad x_2 = \psi_n(x_1), \ldots, \quad x_{k+1} = \psi_n(x_k), \ldots \tag{1}$$

монотонно или колебательно конвергентна к единственному корню уравнения

$$f(x) = 0$$

в промежутке $\bar{I}$;

последовательность (1) колебательна, когда n четное число $v_{n+1}(x) > 0$ в остальных случаях монотонна.

Когда $[f(x_0)]^n \, v_{n+1}(x) < 0$ то условие (e) ненужно и последовательность

$$x_0, \; x_1 = \psi_n(x_0), \ldots, \; x_{k+1} = \psi_n(x_k), \ldots$$

монотонна.

THE CONDITIONS OF CONVERGENCE AND SIMPLY PROOF OF ITERATIVE METHOD OF SCHRÖDER FOR REAL EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper is given some simple way of heighten on 1 of convergence's order of iterative method. Hence follows simply proof of iterative method of Schröder (formulas (9)). The following theorem is proved: If

(a) $f(x)$ belongs to the $C^{(n+1)}$ class function in an interval $\bar{I} = \langle a,b \rangle$;

(b) $f(a)\ f(b) < 0$;

(c) $f'(x)\ v_n(x) w_n(x) \neq 0$ for $x \in \bar{I}$ (n is fixed natural number)

(d) $|\varphi_n'(x)| = \left| \dfrac{[f(x)]^n\ v_{n+1}(x)}{n!\,[f'(x)]^{2n}} \right| < 1$ for $x \in \bar{I}$, if a number n is even and $v_{n+1}(x) > 0$;

(e) for fixed $x_0 \in \bar{I}$ and $x_0 \neq \xi$ we have $\varphi_n(x_0) \in \bar{I}$,

then the conditions holds:

the sequence

$$x_1 = \varphi_n(x_0),\ x_2 = \varphi_n(x_1),\ \ldots,\ x_{k+1} = \varphi_n(x_k),\ \ldots, \tag{10}$$

is convergent to an unique root ξ of equation $f(x) = 0$ in an interval $\bar{I}$ (the convergence is monotonic or oscillating); the sequence (10) is oscillating, if n is an even number and $v_{n+1}(x) > 0$, in the remaining cases it is monotonic.

If $[f(x_0)]^n\ v_{n+1}(x_0) < 0$, then the assumption (e) is dispensable and the sequence

$$x_0,\ x_1 = \varphi_n(x_0),\ \ldots,\ x_{k+1} = \varphi_n(x_k),\ \ldots$$

is monotonically convergent.