ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

KRYSTYNA SZAŁAJKO

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BIHARMONICZNEGO W PEWNYM OBSZARZE PRZESTRZENNYM

Streszczenie. W niniejszej pracy została skonstruowana funkcja Greena, którą następnie wykorzystuje się do podania rozwiązania równania biharmonicznego $\Delta^2 u = 0$ w obszarze

$$D = \left\{(x,y,z) : 0 < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty\ ,\ 0 < z < \sqrt{3}x\right\}$$

z warunkami brzegowymi

$$u(x,y,0) = f_1(x,y) \qquad u(x,y,\sqrt{3}x) = f_2(x,y)$$
$$\Delta u(x,y,0) = f_3(x,y) \qquad \Delta u(x,y,\sqrt{3}x) = f_4(x,y).$$

W niniejszej pracy podamy rozwiązanie zagadnienia biharmonicznego w obszarze $D = \left\{(x,y,z) : 0 < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty\ ,\ 0 < z < \sqrt{3}x\right\}$ przy pomocy funkcji Greena skonstruowanej metodą obrazów symetrycznych.

1. Weźmy pod uwagę równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

oraz obszar D.

Szukamy funkcji $u(x,y,z)$ biharmonicznej w D i spełniającej warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &u(x,y,0) = f_1(x,y) \qquad && u(x,y,\sqrt{3}x) = f_2(x,y) \\ &\Delta u(x,y,0) = f_3(x,y) \qquad && \Delta u(x,y,\sqrt{3}x) = f_4(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

dla $0 < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty$.

2. Konstrukcja funkcji Greena dla równania (1) i dla obszaru D

Niech $x_0 = X(x,y,z)$ będzie dowolnym punktem wewnętrznym obszaru D. Oznaczmy przez X_1 odbicie symetryczne punktu X_0 względem płaszczyzny $z = 0$ przez X_2 odbicie symetryczne punktu X_1 względem płaszczyzny $z = -\sqrt{3}x$, punkt X_3 niech będzie odbiciem symetrycznym punktu X_2 względem płaszczyzny $z = \sqrt{3}x$, punkt X_4 - obrazem symetrycznym punktu X_3 względem płaszczyzny $z = 0$, wreszcie punkt X_5 niech oznacza obraz symetryczny punktu X_4 względem płaszczyzny $z = -\sqrt{3}x$.

W domknięciu $\overline{D}$ obszaru D obieramy dowolny punkt $Y(s,t,v)$. Niech $r_i = \overline{X_i Y}$ dla $i = 0,1, \ldots, 5$.

Wyrażając współrzędne x_i, y_i, z_i punktów X_i ($i = 1, \ldots, 5$) przez współrzędne x, y, z punktu X_o otrzymujemy

$$r_o = \left[(s - x)^2 + (t - y)^2 + (v - z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_1 = \left[(s - x)^2 + (t - y)^2 + (v + z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = \left[(s + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{\sqrt{3}}{2} z)^2 + (t - y)^2 + (v + \tfrac{\sqrt{3}}{2} x + \tfrac{1}{2} z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_3 = \left[(s + \tfrac{1}{2} x + \tfrac{\sqrt{3}}{2} z)^2 + (t - y)^2 + (v + \tfrac{\sqrt{3}}{2} x - \tfrac{1}{2} z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_4 = \left[(s + \tfrac{1}{2} x + \tfrac{\sqrt{3}}{2} z)^2 + (t - y)^2 + (v - \tfrac{\sqrt{3}}{2} x + \tfrac{1}{2} z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_5 = \left[(s + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{\sqrt{3}}{2} z)^2 + (t - y)^2 + (v - \tfrac{\sqrt{3}}{2} x - \tfrac{1}{2} z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

3. Oznaczmy przez S_1 płaszczyznę $z = 0$, a przez S_2 płaszczyznę $z = \sqrt{3}x$. Udowodnimy

Twierdzenie 1. Funkcja Greena $G(X,Y)$ dla równania (1) i obszaru D z warunkami brzegowymi

$$G(X,Y) = 0, \quad \Delta_Y G(X,Y) = 0 \qquad \text{dla } Y \in S_1 \cup S_2 \tag{3}$$

ma postać

$$G(X,Y) = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i r_i \tag{4}$$

Dowód: 1° Ponieważ każdy składnik sumy (4) jest funkcją biharmoniczną dla $Y \neq X$, przeto funkcja $G(X,Y)$ jest biharmoniczna jako funkcja punktu Y dla każdego $Y \in D$, $Y \neq X$.

2° Funkcja $G(X,Y)$ jest różnicą rozwiązania podstawowego $V(X,Y) = r_o$ i funkcji $H(X,Y) = \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i+1} r_i$ biharmonicznej dla każdego $Y \in D$.

3° Jeżeli punkt Y leży na płaszczyźnie S_1, to $r_o = r_1$, $r_2 = r_5$, $r_3 = r_4$, więc są spełnione warunki (3). Gdy punkt Y leży na płaszczyźnie S_2, wówczas $r_o = r_5$, $r_2 = r_3$, $r_4 = r_1$ i warunki (3) są również spełnione.

4° Bezpośredni rachunek pokazuje, że funkcja (4) jest funkcją symetryczną punktów X i Y.

Z własności $1^{\circ} - 4^{\circ}$ wynika, że funkcja $G(X,Y)$ określona wzorem (4) jest funkcją Greena dla naszego zagadnienia.

4. Weźmy pod uwagę funkcję

$$(5) \qquad u(X) = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{S_1 \cup S_2} \left[u(Y) \frac{d\Delta_Y G}{dn_Y} + \Delta u(Y) \frac{dG}{dn_Y}\right] d\sigma_Y,$$

gdzie n_Y oznacza normalną wewnętrzną do brzegu $S_1 \cup S_2$ obszaru D.

Udowodnimy, że przy pewnych założeniach o funkcjach f_i $(i = 1, \ldots, 4)$ funkcja $u(X)$ określona wzorem (5) jest rozwiązaniem zagadnienia (1),(2)

5. Po obliczeniu pochodnych kierunkowych występujących pod całką we wzorze (5) otrzymujemy

$$(6) \qquad u(X) = \sum_{k=1}^{4} J_k(X),$$

gdzie

$$J_1(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s,t)\Big\{z\left[(s - x)^2 + (t - y)^2 + z^2\right]^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}x - z}{2}\left[(s + \frac{x + \sqrt{3}z}{2})^2 + (t - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x - z}{2})^2\right]^{-\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{3}x + z}{2}\left[(s + \frac{x - \sqrt{3}z}{2})^2 + (t - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x + z}{2})^2\right]^{-\frac{3}{2}}\Big\} ds dt$$

$$J_2(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(s,t)\Big\{z\left[(2s + x)^2 + (t - y)^2 + z^2\right]^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}x - z}{2}\left[(2s - \frac{x + \sqrt{3}z}{2})^2 + (t - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x - z}{2})^2\right]^{-\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{3}x + z}{2}\left[(2s - \frac{x - \sqrt{3}z}{2})^2 + (t - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x + z}{2})^2\right]^{-\frac{3}{2}}\Big\} ds dt$$

$$J_3(X) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_3(s,t)\Big\{-z\left[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}x-z}{2}\left[\left(s+\frac{x+\sqrt{3}z}{2}\right)^2+(t-y)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x-z}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}x+z}{2}\left[\left(s+\frac{x-\sqrt{3}z}{2}\right)^2+(t-y)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x+z}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\Big\}dsdt$$

$$J_4(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_4(s,t)\Big\{-z\left[(2s+x)^2+(t-y)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}x-z}{2}\left[\left(2s-\frac{x+\sqrt{3}z}{2}\right)^2+(t-y)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x-z}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}x+z}{2}\left[\left(2s-\frac{x-\sqrt{3}z}{2}\right)^2+(t-y)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x+z}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\Big\}dsdt.$$

Zauważmy, że całka $J_1(X)$ stanowi sumę składników postaci

$$A(X) = c\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_1(s,t)\zeta\left[K(s,t;\alpha,y,\zeta)\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt,$$

całka $J_2(X)$ jest sumą składników postaci

$$\tilde{A}(X) = c\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_2(s,t)\zeta\left[\tilde{K}(s,t;\alpha,y,\zeta)\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt,$$

natomiast całki $J_3(X)$ i $J_4(X)$ są odpowiednio sumami składników postaci

$$B(X) = c\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_3(s,t)\zeta\left[K(s,t;\alpha,y,\zeta)\right]^{-\frac{1}{2}} dsdt$$

i

$$\tilde{B}(X) = c\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_4(s,t)\zeta\left[\tilde{K}(s,t;\alpha,y,\zeta)\right]^{-\frac{1}{2}} dsdt,$$

gdzie

$$K(s,t;\alpha,y,\gamma) = (s-\alpha)^2 + (t-y)^2 + \gamma^2,$$

$$\tilde{K}(s,t;\alpha,y,\gamma) = (2s+\alpha)^2 + (t-y)^2 + \gamma^2,$$

α i γ zależą w sposób liniowy od x i z, $\gamma > 0$ w obszarze D, c jest współczynnikiem stałym różnym od zera.

6. Niech $M_i(\varrho,\varphi) = |f_i(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)|$.

Udowodnimy

Lemat 1. Jeżeli

1^o $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{\infty} M_i(\varrho,\varphi)\varrho^{-2}\, d\varrho < \infty$ dla i = 1, 2 i pewnego $a > 0$

2^o funkcje $f_3(s,t)$, $f_4(s,t)$ są bezwzględnie całkowalne w półpłaszczyźnie $s > 0$,

to funkcja u(X) określona wzorem (6) jest biharmoniczna w obszarze D.

Dowód: Niech

$$(7) \qquad \bar{f}_i(s,t) = \begin{cases} f_i(s,t) & \text{dla } 0 < s < \infty,\ -\infty < t < \infty \\ 0 & \text{dla } -\infty < s < 0,\ -\infty < t < \infty \end{cases}$$

$(i = 1, \dots, 4)$ i niech $\Omega = \{(\alpha,y,\gamma) : |\alpha - x_0| \leq A,\ |y-y_0| \leq A,\ b \leq \gamma \leq B\}$, gdzie A,B,b i x_0 są dowolnymi liczbami dodatnimi, y_0 jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Weźmy pod uwagę koło $K_R = \{(s,t) : s^2 + t^2 \leq R^2\}$ oraz punkt $Q(\alpha,y,\gamma) \in \Omega$. Wówczas

$$(8) \qquad \overline{QY} = \left[(s-\alpha)^2 + (t-y)^2 + \gamma^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(s^2+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

dla $Y(s,t) \in E_2 - K_R$, o ile R jest dostatecznie duże.

Dla całki A(X) mamy następujące oszacowanie

$$\left|\iint_{E_2-K_R} \bar{f}_1(s,t)\gamma\left[(s-\alpha)^2 + (t-y)^2 + \gamma^2\right]^{-\frac{3}{2}} ds dt\right| \leq$$

$$\leq 2\sqrt{2}\, B \iint_{E_2-K_R} |\bar{f}_1(s,t)|(s^2+t^2)^{-\frac{3}{2}} ds dt = 2\sqrt{2}\, B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{\infty} M_1(\varrho,\varphi)\varrho^{-2} d\varrho.$$

Ostatnia całka jest dowolnie mała dla dostatecznie dużego R. Stąd wynika jednostajna zbieżność całki $A(X)$ dla $\gamma > 0$, a więc całki $J_1(X)$ w zbiorze $\left\{(x,y,z):\ \sqrt{3}x + z > 0,\ \sqrt{3}x - z > 0,\ z > 0\right\}$ zawartym w obszarze D.

Dla całki $\tilde{A}(X)$ mamy równość

$$\tilde{A}(X) = c \iint_{E_2} \bar{f}_2(s,t)\gamma\left[(2s + \alpha)^2 + (t - y)^2 + \gamma^2\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt =$$

$$= -\frac{c}{2} \iint_{E_2} \bar{f}_2\left(-\frac{u}{2}, t\right)\gamma\left[(u - \alpha)^2 + (t - y)^2 + \gamma^2\right]^{-\frac{3}{2}} dudt.$$

Niech $\Omega_R = \left\{(u,t):\ \frac{u^2}{4} + t^2 \leqslant R^2\right\}$ i niech $Y(u,t) \in E_2 - \Omega_R$.
Mamy wówczas

$$|H(Q)| = \left|\iint_{E_2-\Omega_R} \bar{f}_2\left(-\frac{u}{2}, t\right)\gamma\left[(u - \alpha)^2 + (t - y)^2 + \gamma^2\right]^{-\frac{3}{2}} dudt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\, B \iint_{E_2-\Omega_R} \left|\bar{f}_2\left(-\frac{u}{2}, t\right)\right| \left(\frac{u^2}{4} + t^2\right)^{-\frac{3}{2}} dudt.$$

Stosując podstawienie $u = -2\varrho\cos\varphi$, $t = \varrho\sin\varphi$ otrzymujemy

$$|H(Q)| \leqslant 4\sqrt{2}\, B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{\infty} M_2(\varrho,\varphi)\varrho^{-2}\, d\varrho < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużego R, skąd wynika jednostajna zbieżność całki $J_2(X)$ w obszarze D.

Dla całek $B(X)$ i $\tilde{B}(X)$ mamy nierówności

$$\left|\iint_{E_2-K_R} \bar{f}_3(s,t)\gamma K^{-\frac{1}{2}} dsdt\right| \leqslant \iint_{E_2-K_R} \left|\bar{f}_3(s,t)\right| dsdt$$

oraz

$$\left|\iint_{E_2-K_R} \bar{f}\,(s,t)\gamma K^{-\frac{1}{2}} dsdt\right| \leqslant \iint_{E_2-K_R} \left|\bar{f}_4(s,t)\right| dsdt,$$

gdyż $\zeta K^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1$, $\zeta \tilde{K}^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1$ dla $(\alpha, y, \zeta) \in \Omega$. Stąd i z założenia 2° wynika jednostajna zbieżność całek $J_3(X)$ i $J_4(X)$ w obszarze D.

Pochodne rzędu pierwszego i drugiego względem x,y i z jądra $\zeta K^{-\frac{3}{2}}$ występującego w całke $A(X)$ są odpowiednio sumami składników postaci $CK^{-\frac{3}{2}}$ i $\zeta K^{-\frac{5}{2}} P_1(s-\alpha, t-y, \zeta)$ oraz $K^{-\frac{5}{2}} P_1(s-\alpha, t-y, \zeta)$ i $\zeta K^{-\frac{7}{2}} [P_1(s-\alpha, t-y, \zeta)]^2$, gdzie C jest stałą, a P_1 wielomianem jednorodnym stopnia pierwszego zmiennych $s-\alpha$, $t-y$, ζ.

Zachodzi nierówność

$$|P_1(s-\alpha, t-y, \zeta)| \leqslant C_1 K^{\frac{1}{2}},$$

gdzie C_1 jest pewną stałą dodatnią.

Stąd i z (8) wynika, że całka $A(X)$ jest funkcją klasy C^2 zmiennych x,y,z w obszarze D.

Analogicznie dowodzi się, że całki $A(X)$, $\tilde{A}(X)$, $B(X)$, $\tilde{B}(X)$ są klasy C^4 w obszarze D.

Na podstawie wzoru (5) mamy

$$\Delta u = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_1 \cup S_2} \left[u(Y) \frac{d\Delta_X \Delta_Y G}{dn_Y} + \Delta u(Y) \frac{d\Delta_X G}{dn_Y} \right] d\sigma_Y .$$

Z symetrii funkcji Greena wynika, że

$$\Delta u = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_1 \cup S_2} \Delta u(Y) \frac{d\Delta_X G}{dn_Y} d\sigma_Y, \tag{9}$$

a stąd

$$\Delta^2 u = 0.$$

7. Niech $M(\xi, \eta, \zeta)$ będzie dowolnym punktem przestrzeni, $Y(s,t) \in S_1$

Udowodnimy

Lemat 2. Dla każdego $M \in E_3$ i każdego $a > 0$ całka $\iint_{\overline{MY} \geqslant a} (\overline{MY})^{-3} ds dt$ jest zbieżna.

Dowód: Niech $\tilde{M}(\xi, \eta, 0)$ oznacza rzut punktu M na płaszczyznę S_1.

Zachodzi nierówność

$$\overline{\tilde{M}Y} \geqslant \overline{MY} - \overline{M\tilde{M}} \geqslant a - \zeta .$$

Zatem

$$\iint\limits_{\overline{MY} > a} (\overline{MY})^{-3} ds dt \leqslant \iint\limits_{\widetilde{MY} > a - \zeta} \left[(s - \xi)^2 + (t - \eta)^2 + \zeta^2\right]^{-\frac{3}{2}} ds dt$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe $z - \xi = \varrho \cos\varphi$, $t - \eta = \varrho \sin\varphi$ otrzymujemy

$$\iint\limits_{\overline{MY} > a} (\overline{MY})^{-3} ds dt \leqslant \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a-\zeta}^{\infty} (\varrho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} \varrho \, d\varrho =$$

$$= 2\pi\left[(a - \zeta)^2 + \zeta^2\right]^{-\frac{1}{2}} < \infty, \quad \text{ponieważ } (a - \zeta)^2 + \zeta^2 > 0 \text{ dla } a > 0.$$

8. Oznaczmy przez J_{ki} ($k = 1, \ldots, 4$; $i = 1,2,3$) i-ty składnik całki $J_k(X)$ występującej we wzorze (6), a przez Γ_{ki} jądro całki J_{ki}.

Niech $\breve{X}_1 = \breve{X}_1(\breve{x},\breve{y},0)$, $\breve{x} > 0$.

Lemat 3. Jeżeli

1° dla każdego $M \in E_3$ i $a > 0$ są zbieżne całki

$$\iint\limits_{\overline{MY} > a} |f_i(Y)| (\overline{MY})^{-3} ds dt, \quad i=1,2$$

2° funkcja $f_1(Y)$ jest ciągła w $\breve{X}_1$,

3° $\lim\limits_{X \to \breve{X}_1} J_{31}(X) = \lim\limits_{X \to \breve{X}_1} J_{41}(X) = 0$,

to

$$\lim_{X \to \breve{X}_1} u(X) = f_1(\breve{X}_1). \tag{10}$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{E_2} \Gamma_{11} ds dt = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{E_2} z\left[(s - x)^2 + (t - y)^2 + z^2\right]^{-\frac{3}{2}} ds dt = 1.$$

Niech $W_1\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left\{(x,y,z) : (x - \breve{x})^2 + (y - \breve{y})^2 + z^2 \leqslant \frac{\delta^2}{4}\right\}$,

$K_\delta = \left\{(s,t) : (s - \breve{x})^2 + (t - \breve{y})^2 \leqslant \delta^2\right\}$, gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią.

Przedłużamy funkcję $f_1(s,t)$ na całą płaszczyznę według wzoru (7) i przedstawiamy całkę $J_{11}(X)$ w postaci sumy

(11) $$J_{11}(X) = \frac{1}{2\pi}\left[H_1(X) + H_2(X) + H_3(X)\right],$$

gdzie

$$H_1(X) = f_1(\tilde{X}_1) \iint_{E_2} \Gamma_{11} dsdt = 2\pi f_1(\tilde{X}_1)$$

$$H_2(X) = \iint_{K_\delta} \left[\bar{f}_1(Y) - f_1(\tilde{X}_1)\right] \Gamma_{11} dsdt$$

$$H_3(X) = \iint_{E_2 - K_\delta} \left[\bar{f}_1(Y) - f_1(\tilde{X}_1)\right] \Gamma_{11} dsdt.$$

Z założenia 2° wynika dla dostatecznie małego δ

(12) $$\left|H_2(X)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iint_{K_\delta} \Gamma_{11} dsdt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iint_{E_2} \Gamma_{11} dsdt = 2\pi \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dla całki $H_3(X)$ mamy oszacowanie

$$\left|H_3(X)\right| \leqslant z\left[\iint_{\overline{\tilde{X}_1 Y} \geqslant \delta} \left|\bar{f}_1(Y)\right| (\overline{XY})^{-3} dsdt + \left|f_1(\tilde{X}_1)\right| \iint_{\overline{\tilde{X}_1 Y} \geqslant \delta} (\overline{XY})^{-3} dsdt\right]$$

Ponieważ dla $X \in W_1(\frac{\delta}{2})$ zachodzi nierówność

$\overline{XY} \geqslant \overline{\tilde{X}_1 Y} - \overline{X\tilde{X}_1} \geqslant \delta - \frac{\delta}{2}$, mamy dalej

$$\left|H_3(X)\right| \leqslant z\left[\iint_{\overline{XY} \geqslant \frac{\delta}{2}} \left|\bar{f}_1(Y)\right| (\overline{XY})^{-3} dsdt + \left|f_1(\tilde{X}_1)\right| \iint_{\overline{XY} \geqslant \frac{\delta}{2}} (\overline{XY})^{-3} dsdt\right]$$

Na podstawie założenia 1° i lematu 2 mamy

(13) $$\left|H_3(X)\right| < 2\pi \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $z \to 0$.

Ze związków (11) - (13) wynika, że

(14) $$\lim_{X \to \tilde{X}_1} J_{11}(X) = f_1(\tilde{X}_1).$$

Dla całki $J_{21}(X)$ zachodzi nierówność

$$\left|J_{21}(X)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_2(s,t)\, z\left[(2s+x)^2+(t-y)^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt\right| \leq$$

$$\leq \frac{z}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left|f_2(s,t)\right|\left[\left(s+\frac{x}{2}\right)^2+(t-y)^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt.$$

Niech $\overline{X} = \overline{X}(-\frac{x}{2}, y,z)$. Jeżeli $X(x,y,z) \in W_1(\frac{\delta}{2})$, to $\overline{XY} \geq a > 0$, o ile δ jest dostatecznie małe.

Mamy

$$\left|J_{21}(X)\right| \leq \frac{z}{\pi}\iint_{\overline{XY}\geq a} \left|\overline{f}_2(Y)\right|(\overline{XY})^{-3}\, dsdt < \varepsilon$$

dla $z \to 0$ na podstawie założenia 1°. Stąd wynika

(15) $$\lim_{X\to\breve{X}_1} J_{21}(X) = 0.$$

Jeżeli δ jest dostatecznie małe, wówczas wyrażenia $\sqrt{3}x-z$ i $\sqrt{3}x+z$ są w $W_1(\frac{\delta}{2})$ ograniczone z dołu przez liczbę dodatnią, a więc funkcje Γ_{k2} i Γ_{k3} są ciągłe ze względu na zespół zmiennych $(x, y, z; s, t)$ w zbiorze $W_1(\frac{\delta}{2}) \times [0,s_0] \times [-t_0,t_0]$ dla każdego $s_0 > 0$, $t_0 > 0$. Ponadto całki J_{k2} i J_{k3} są jednostajnie zbieżne odpowiednio w półprzestrzeniach $\sqrt{3}x - z > 0$ i $\sqrt{3}x + z > 0$, a więc również w W_1.

Mamy poza tym

$$\lim_{X\to\breve{X}_1} (\Gamma_{k2}+\Gamma_{k3}) = 0 \qquad \text{dla } k = 1, \ldots, 4$$

i wobec tego

$$\lim_{X\to\breve{X}_1} J_k(X) = \lim_{X\to\breve{X}_1} J_{k1}(X) \qquad \text{dla } k = 1, \ldots, 4$$

Stąd oraz z (14), (15) i z założenia 3° otrzymujemy (10).

9. Niech $\breve{X}_2 = \breve{X}_2(\breve{x},\breve{y},\sqrt{3}\breve{x})$, $\breve{x} > 0$.

Lemat 4. Jeżeli

1° jest spełnione założenie 1° lematu 3

2° funkcja $f_2(Y)$ jest ciągła w $\breve{X}_1$

3° $\lim\limits_{X \to \tilde{X}_2} J_{32}(X) = \lim\limits_{X \to \tilde{X}_2} J_{42}(X) = 0,$

to

(16) $$\lim_{X \to \tilde{X}_2} u(X) = f_2(\tilde{X}_1).$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{E_2} \Gamma_{22} dsdt = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{E_2} \frac{\sqrt{3}x-z}{2} \left[(2s - \frac{x+\sqrt{3}z}{2})^2 + (t-y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x-z}{2})^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dsdt = 1.$$

Rzeczywiście, podstawiając $s - \frac{x+\sqrt{3}z}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x-z}{2} \varrho\cos\varphi$, $t-y = \frac{\sqrt{3}x-z}{2} \varrho \sin\varphi$, otrzymamy

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{E_2} \Gamma_{22} dsdt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} (\varrho^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \varrho \, d\varrho = 1.$$

Niech $W_2(r) = \left\{ (x, y, z): (x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 + (z - \sqrt{3}\tilde{x})^2 \leqslant r^2 \right\}$ $K_\delta = \left\{ (s,t): (s - \tilde{x})^2 + (t - \tilde{y})^2 < \delta^2 \right\}$, gdzie r i δ są dowolnymi liczbami dodatnimi.

Podobnie jak w dowodzie lematu 3 przedłużamy funkcję $f_2(s,t)$ na całą płaszczyznę według wzoru (7), a całkę J_{22} przedstawiamy w postaci sumy

(17) $$J_{22}(X) = \frac{1}{\pi} \left[I_1(X) + I_2(X) + I_3(X) \right],$$

gdzie

$$I_1(X) = f_2(\tilde{X}_1) \iint\limits_{E_2} \Gamma_{22} \, dsdt = \pi f_2(\tilde{X}_1),$$

(18) $$|I_2(X)| = \left| \iint\limits_{K_\delta} \left[\bar{f}_2(Y) - f_2(\tilde{X}_1) \right] \Gamma_{22} \, dsdt \right| < \pi \frac{\varepsilon}{2}$$

dla dostatecznie małego δ

$$I_3(X) = \iint\limits_{E_2 - K_\delta} \left[\bar{f}_2(Y) - f_2(\tilde{X}_1) \right] \Gamma_{22} \, dsdt.$$

Niech $\tilde{X} = \tilde{X}(\frac{x+\sqrt{3}z}{4}, y, \frac{\sqrt{3}x-z}{2})$. Dla całki $I_3(X)$ zachodzi nierówność

$$|I_3(X)| \leqslant \frac{\sqrt{3}x-z}{2}\left[\iint\limits_{\overline{\tilde{X}_1 Y} \geqslant \delta} |\bar{f}_2(Y)| (\overline{\bar{X}Y})^{-3} dsdt + |f_2(\tilde{X}_1)| \iint\limits_{\overline{\tilde{X}_1 Y} \geqslant \delta} (\overline{\bar{X}Y})^{-3} dsdt\right].$$

Jeżeli $X(x,y,z) \in W_2(r)$, to $\overline{\bar{X}\tilde{X}_1} \leqslant \frac{\delta}{2}$, o ile r jest dostatecznie małe. Wobec nierówności

$$\overline{\bar{X}Y} \geqslant \overline{\tilde{X}_1 Y} - \overline{\bar{X}\tilde{X}_1} \geqslant \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

mamy

$$|I_3(X)| \leqslant \frac{\sqrt{3}x-z}{2}\left[\iint\limits_{\overline{\bar{X}Y} \geqslant \frac{\delta}{2}} |\bar{f}_2(Y)| (\overline{\bar{X}Y})^{-3} dsdt + |f_2(\tilde{X}_1)| \iint\limits_{\overline{\bar{X}Y} \geqslant \frac{\delta}{2}} (\overline{\bar{X}Y})^{-3} dsdt\right].$$

Z lematu 2 oraz z założenia 1^o wynika, że

(19) $$|I_3(X)| \leqslant \pi \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $(\sqrt{3}x - z) \to 0$.
Na podstawie związków (17) - (19) mamy

(20) $$\lim_{X \to \tilde{X}_2} J_{22}(X) = f_2(\tilde{X}_1).$$

Zajmiemy się całką $J_{12}(X)$.

$$|J_{12}(X)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}x-z}{2} \iint\limits_{0\,-\infty}^{\infty\,\infty} |f_1(s,t)| \left[(s + \frac{x+\sqrt{3}z}{2})^2 + (t-y)^2 + (\frac{\sqrt{3}x-z}{2})^2\right]^{-\frac{3}{2}} dsdt$$

Niech $\bar{Y} = \bar{Y}(-\frac{x+\sqrt{3}z}{2}, y, \frac{\sqrt{3}x-z}{2})$. Gdy $X \in W_2(r)$, to $\overline{\bar{Y}Y} \geqslant a > 0$, o ile r jest dostatecznie małe.
Mamy wówczas

$$|J_{12}(X)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}x-z}{2} \iint\limits_{\overline{\bar{Y}Y} \geqslant a} |\bar{f}_1(Y)| (\overline{\bar{Y}Y})^{-3} dsdt < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

gdy $(\sqrt{3}x - z) \to 0$. Stąd wynika

(21) $$\lim_{X \to \tilde{X}_2} J_{12}(X) = 0.$$

Podobnie jak w dowodzie lematu 3 stwierdzamy, że funkcje Γ_{k1} i Γ_{k3} są ciągłe w zbiorze $W_2(r) \times [0,s_0] \times [-t_0,t_0]$, o ile r jest dostatecznie małe. Całki J_{k1} i J_{k3} są jednostajnie zbieżne odpowiednio w półprzestrzeniach $z > 0$ i $\sqrt{3}x + z > 0$ oraz

$$\lim_{X \to \tilde{X}_2} (\Gamma_{k1} + \Gamma_{k3}) = 0 \qquad \text{dla } k=1, \ldots, 4.$$

Wobec tego

$$\lim_{X \to \tilde{X}_2} J_k(X) = \lim_{X \to \tilde{X}_2} J_{k2}(X) \qquad \text{dla } k=1, \ldots, 4.$$

Stąd oraz z (20), (21) i z założenia 3^o wynika (16).

10. Lemat 5

Jeżeli funkcje $f_3(s,t)$, $f_4(s,t)$ są bezwzględnie całkowalne dla $s > 0$ oraz ciągłe w $\tilde{X}_1$, to

$$\lim_{X \to \tilde{X}_1} \Delta u(X) = f_3(\tilde{X}_1), \qquad \lim_{X \to \tilde{X}_2} \Delta u(X) = f_4(\tilde{X}_1).$$

Dowód: Z bezwzględnej całkowalności funkcji $f_3(Y)$ i $f_4(Y)$ wynika zbieżność całek

$$\iint\limits_{\overline{MY} \geq a} |f_i(Y)| (\overline{MY})^{-3} \, ds dt, \qquad i = 3,4$$

dla każdego $M \in E_3$ i $a > 0$.

Dowód lematu 5 jest analogiczny do dowodów lematów 3 i 4 i opiera się na wzorze (9).

11. Twierdzenie 2. Jeżeli są spełnione założenia lematów 3, 4 i 5, to funkcja $u(X)$ określona wzorem (6) jest rozwiązaniem zagadnienia biharmonicznego (1), (2) w obszarze D.

Wpłynęło do Redakcji 23.XII.1971 r.

THE SOLUTION OF THE BIHARMONIC PROBLEM IN A CERTAIN REGION OF THE SPACE

S u m m a r y

In this paper was constructed the Green's function which was subsequently applied to solve the biharmonic equation $\Delta^2 u = 0$ in the region

$$D = \left\{(x,y,z) : 0 < x < \infty ,\ -\infty < y < \infty ,\ 0 < z < \sqrt{3}x\right\}$$

with the boundary conditions

$$u(x,y,0) = f_1(x,y) \qquad u(x,y,\sqrt{3}x) = f_2(x,y)$$

$$\Delta u(x,y,0) = f_3(x,y) \qquad \Delta u(x,y,\sqrt{3}x) = f_4(x,y).$$

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В НЕКОТОРОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Р е з ю м е

В настоящей работе представлена функция Грина, с помощью которой решено бигармоническое уравнение $\Delta^2 u = 0$ в области

$$D = \left\{(x,y,z) : 0 < x < \infty ,\ -\infty < y < \infty ,\ 0 < z < \sqrt{3}x\right\}$$

с краевыми условиями

$$u(x,y,0) = f_1(x,y) \qquad u(x,y,\sqrt{3}x) = f_2(x,y)$$

$$\Delta u(x,y,0) = f_3(x,y) \qquad \Delta u(x,y,\sqrt{3}x) = f_4(x,y).$$