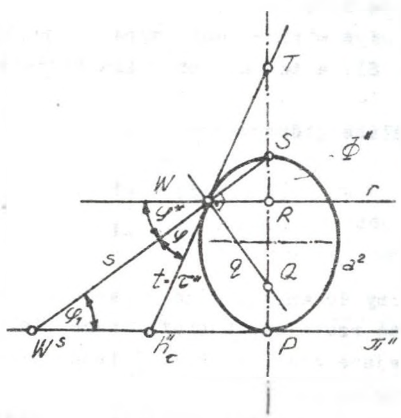
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr. kol. 340

MARIAN PALEJ

ANALIZA WIERNOKĄTNOŚCI STYCZNYCH DO DOWOLNEJ KWADRYKI KRZYWOLINIOWEJ W UOGÓLNIONYM RZUCIE STEREOGRAFICZNYM

W publikacji (1) udowodniono, że znana własność rzutu stereograficznego sfery polegająca na wiernym odwzorowaniu kąta pomiędzy dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez ognisko przenosi się na te ogólniejsze przypadki rzutu stereograficznego, w których miejsce sfery zajmuje dowolna, obrotowa, krzywoliniowa powierzchnia stopnia drugiego.

Nasuwa się pytanie w jakim stopniu przenosi się również druga własność rzutu stereograficznego sfery dotycząca wierności odwzorowania kąta utworzonego przez dwie proste styczne do sfery w punkcie różnym od środka rzutów.



Rys. 1

Rozpatrzmy dowolną krzywoliniową powierzchnię obrotową drugiego stopnia Φ (rys. 1) i jej rzut stereograficzny z wierzchołka S na płaszczyznę styczną π w wierzchołku P.

Jeżeli rzut stereograficzny m^s, n^s dowolnej pary prostych m, n stycznych do kwadryki Φ w dowolnym jej punkcie W ma mieć tę własność, że $\sphericalangle m^s n^s = \sphericalangle mn$, to winno zachodzić:

1) $SW \perp h_\tau$, gdzie h_τ jest śladem na π płaszczyzny τ stycznej do kwadryki Φ w punkcie W,
2) odległość prostej h_τ od punktów W i W^s jednakowa:

$$d(W, h_\tau) = d(W^s, h_\tau)$$

Relacja 1) zachodzi dla wszystkich punktów W kwadryki obrotowej o osi $l = SP$. W odniesieniu natomiast do relacji 2) zauważmy, że konsekwencją równości odcinków $\overline{Wh_r} = \overline{W^s h_r}$ jest równość $\sphericalangle \varphi, \sphericalangle \varphi_1$ i połowienie kąta prostych t,r $(r \parallel \pi')$ przez prostą $s = SW$.
W płaszczyźnie prostych r,s,t przyjmijmy prostą q spełniającą warunek

$$(q\, s\, r\, t) = -1$$

Jeżeli $\varphi = \varphi^s$, to:

$$q \perp s,$$

a dalej:

$$(Q\, S\, R\, T) = -1$$

Z drugiej jednak strony z punktami R i T sprzężona jest względem stożkowej a^2 para punktów S,P.
Zauważmy, że $Q \neq P$, gdyż w przeciwnym wypadku punkt W musiałby leżeć na okręgu o średnicy SP, a ten nie przecina stożkowej a^2 w punktach różnych od S i P.
Ponieważ nie jest możliwe jednoczesne:

$$(Q\, S\, R\, T) = -1$$
$$(P\, S\, R\, T) = -1$$

przy $Q \neq P$, dochodzimy do wniosku, że relacja 2) nie może mieć miejsca i analizowana własność rzutu stereograficznego nie przenosi się na przypadek, w którym w miejsce sfery występuje inna obrotowa powierzchnia krzywoliniowa stopnia drugiego.

Rozumowanie powyższe rozstrzyga jednocześnie następujące przypadki:

a) kwadryka Φ jest nieobrotowa, a środek rzutu stereograficznego S jest wierzchołkiem kwadryki.
W przypadku tym stożkowa a^2 może być okręgiem i wszystkie punkty W kwadryki Φ incydentne z okręgiem a^2 spełniają warunek 2 - nie jest jednak możliwe jednoczesne spełnienie warunku 1. Gdyby bowiem tak było tzn. gdyby ślad h_r incydentny z biegunem płaszczyzny okręgu a^2 względem kwadryki Φ był prostopadły do płaszczyzny a^2, wówczas kierunek h_r byłby jednym z kierunków głównych kwadryki Φ, co w konsekwencji prowadziłoby do wniosku, że kwadryka Φ jest obrotowa wbrew podstawowemu założeniu.

b) kwadryka Φ jest obrotowa, lecz jej oś główna l, na której leży środek rzutu stereograficznego S nie stanowi osi obrotu.

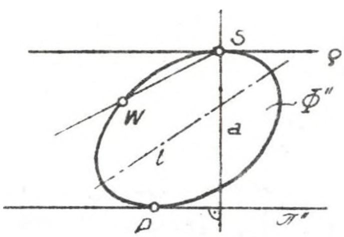
Zgodnie z rozważaniami w punkcie a) warunek 1 i 2 analizowanej własności rzutu stereograficznego spełniony jest dla wszystkich punktów incydentnych z równikiem a^2. Istnieje więc nieskończenie wiele punktów W kwadryki Φ, w których styczne odwzorowuje się przy pomocy rzutu stereograficznego wiernokątnie.

c) kwadryka Φ jest paraboloidą obrotową lub eliptyczną, a środek rzutu stereograficznego S - punktem niewłaściwym tej powierzchni.

Jest oczywiste, że w przypadku tym nie może być spełniony warunek 2 i punkty W o żądanych własnościach różne od P nie istnieją.

Przejdźmy z kolei do omówienia przypadku ogólniejszego.

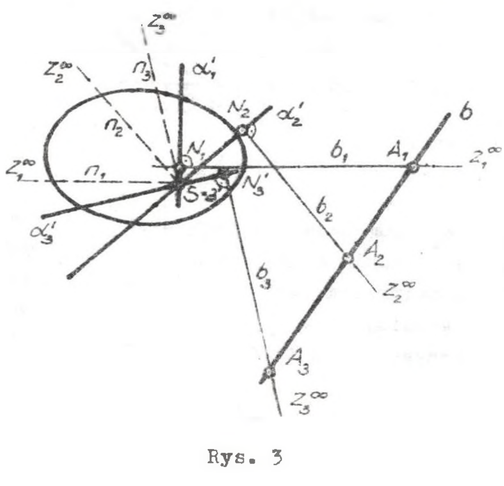
Niech kwadryka Φ będzie dowolną krzywoliniową powierzchnią stopnia drugiego, a środek rzutów S - dowolnym, różnym od wierzchołka punktem powierzchni (rys. 2).



Rys. 2

Warunek 1) jest równoznaczny z warunkiem prostopadłości płaszczyzny stycznej τ do płaszczyzny promienia SW i prostej $a \in S$ i $a \perp \pi$. Rozważmy miejsce geometryczne punktów W_i kwadryki Φ, w których płaszczyzny styczne τ_i spełniają powyższy warunek. W tym celu weźmy pod uwagę pęk płaszczyzn α_i o osi a przecinających kwadrykę Φ w stożkowych a_i^2. Jest oczywiste, że każda płaszczyzna styczna do kwadryki Φ w punkcie należącym do a_i^2 musi przechodzić przez biegun płaszczyzny α_i - punkt A_i. Dla pęku płaszczyzn α_i o osi a - zbiór punktów A_i leżeć będzie na prostej wzajemnej biegunowej b, przy czym zachodzić winna rzutowość:

$$b(A_1, A_2 \dots A_i) \barwedge a(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i)$$



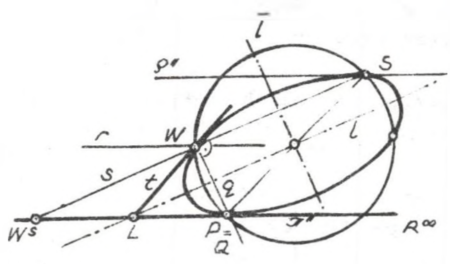
Rys. 3

Na skutek przynależności prostej b do płaszczyzny ϱ stycznej w punkcie S ($\varrho \parallel \pi$) zachodzi również: $b \perp a$.
Zwróćmy uwagę, że płaszczyzna styczna τ_i przechodząca przez punkt A_i prostopadle względem płaszczyzny α_i jest określona jednoznacznie przez rzut normalny punktu A_i na płaszczyznę α_i. Przez punkt ten bowiem N_i - przechodzi krawędź płaszczyzn α_i τ_i - styczna do przekroju a_i^2 w punkcie W_i spełniającym warunek 1).
Zbadajmy miejsce geometryczne punktów W_i.
Zauważmy przede wszystkim, że krawędzie płaszczyzn stycznych τ_i z płaszczyzną ϱ tworzą zbiór złożony z prostych przechodzących przez punkty A_i prostopadle do odpowiednich płaszczyzn α_i. Aby określić ten zbiór, wprowadźmy pomocniczy pęk prostych $S(n_i)$ odpowiednio prostopadłych do płaszczyzn α_i i rozpatrzmy szereg punktów $z^\infty(Z_i^\infty)$ powstałych z przecięcia tego pęku prostą niewłaściwą z^∞ płaszczyzny ϱ.
Stwierdzamy ważność następujących relacji:

$$z^\infty(Z_i^\infty) \barwedge S(n_i) \barwedge S(\alpha_i) \barwedge b(A_i)$$

$$z^\infty(Z_i^\infty) \barwedge b(A_i).$$

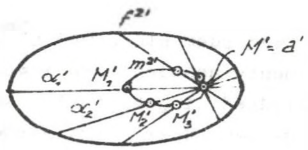
Zbiór prostych b_i łączących elementy szeregu $z^\infty(Z_i^\infty)$ z odpowiednimi elementami szeregu $b(A_i)$ tworzy pęk klasy drugiej, tj. obwodzi krzywą stopnia drugiego. Krzywą tą w rozpatrywanym przypadku jest parabola, gdyż należy do niej, jako jedna z stycznych, prosta niewłaściwa.



Rys. 4

Ponieważ punkty N_i powstają w wyniku przecięcia prostych b_i (stycznych do paraboli) odpowiednio prostopadłymi prostymi pęku $S(\alpha'_i)$, stwierdzamy, że miejsce geometryczne punktów N_i jest krzywą spodkową paraboli względem punktu S. Wnosimy zatem (3), że jest to krzywa rzędu czwartego rozpadająca się na krzywą rzędu trzeciego oraz prostą niewłaściwą płaszczyzny ϱ.

Z kolei rozważmy miejsce geometryczne punktów spełniających warunek 2) tj. jednakowo odległych w swoich rzutach stereograficznych i oryginałach od prostej h_{τ}.
Dla dowolnej stożkowej punkty takie leżą na okręgu opisanym na średnicy SP[x)] (rys. 4) i dzięki współśrodkowości obydwu krzywych są położone symetrycznie względem osi stożkowej. Jedynie bowiem przy równości odcinków $\overline{WL}$, $\overline{LP}$ (rys. 4) zachodzić może wymagana równość $WL = W^sL$ (promienie s,q, r,t tworzą czwórkę harmoniczną, a punkty W^s, P, R^∞, L są ich przecięciami prostą π').



Rys. 5

Jeżeli zatem punkty W_i spełniać mają warunek 2) - płaszczyzny styczne w tych punktach do kwadryki Φ muszą przechodzić przez punkty przebicia płaszczyzny ϱ osiami l_i, $\overline{l}_i$ poszczególnych stożkowych a_i^2.
Zbadajmy czym jest zbiór takich punktów. Przede wszystkim określmy zbiór osi l_i, $\overline{l}_i$. W tym celu zauważmy, że:

1^o - środki przekrojów a_i^2 kwadryki Φ płaszczyznami pęku $a(\alpha_i)$ leżą na stożkowej.
Wniosek ten łatwo wyprowadzić rozumując następująco: średnice przekrojów a_i^2 sprzężone z kierunkiem prostej a leżą w jednej płaszczyźnie φ, której biegunem ze względu na kwadrykę Φ jest punkt $F^\infty \in a$. W płaszczyźnie φ leżą oczywiście i środki przekrojów. Przyjmując oznaczenia: $\varphi\Phi = f^2$, $\varphi a = M$ (rys. 5) ustalimy, że zbiór środków a_i^2 jest zbiorem środków cięciw stożkowej f^2 przechodzących przez punkt M. Zbiór taki jest jednak stożkową m^2 jako utwór odpowiadający prostej niewłaściwej płaszczyzny φ w uogólnionym rzutowo przekształceniu inwersyjnym.

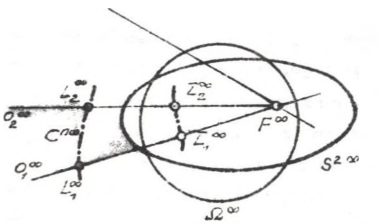
2^o - osie przekrojów a_i^2 nie przecinają się w stałych dwu punktach.
Gdyby bowiem punkty takie istniały i leżały poza prostą a, wówczas wszystkie osie leżałyby w dwu lub jednej płaszczyźnie, co oczywiście jest niemożliwe.
Gdyby punkty te np. U i V leżały na prostej a, wówczas środki przekrojów a_i^2 musiałyby leżeć na sferze opisanej na średnicy UV. Z tego jednak wynikałoby, że jednym z punktów U, V jest punkt M, czyli, że osie jednej rodziny leżą w jednej płaszczyźnie (φ), co także byłoby możliwe jedynie przy prostopadłości płaszczyzny φ do prostej a wykluczonej ogólnością rozważanego przypadku ($a \neq SP$).

Dochodzimy więc do wniosku, że zbiór osi l_i, $\overline{l}_i$ jest zbiorem prostych na ogół skośnych przecinających prostą a oraz pewną stożkową m^2.

---
x) Gdzie P jest niekoniecznie leżącym na rzutni końcem średnicy stożkowej przynależnej do S.

Ustalmy rząd powierzchni Λ utworzonej przez ten zbiór.
W tym celu przeprowadźmy następujące rozumowanie:
płaszczyzna niewłaściwa ω^{∞} przecina:

kwadrykę Φ – w stożkowej $s^{2\infty}$,
prostą a – w punkcie F^{∞},
pęk płaszczyzn $a(\alpha_i)$ – w pęku prostych $F^{\infty}(o_i^{\infty})$,
powierzchnię Λ – w krzywej $c^{n\infty}$.

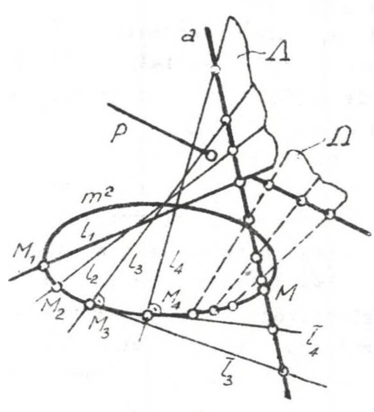


Rys. 7

Tworzące powierzchni Λ jako osie przekrojów a_i^2 przecinają proste pęku $F^{\infty}(o_i^{\infty})$ w punktach, które spełniają następujące warunki:

a) są sprzężone względem stożkowej $s^{2\infty}$,
b) stanowią elementy homologiczne inwolucji bezwzględnej i jako takie są sprzężone względem koła bezwzględnego.

Krzywa $c^{n\infty}$ jest więc zbiorem punktów, które na prostych pęku $F^{\infty}(o_i^{\infty})$ rozdzielają harmonicznie jednocześnie dwie stożkowe – okrąg Ω^{∞} i stożkową $s^{2\infty}$ (rys. 7). Wiadomo jednak (2), że zbiór taki jest krzywą rzędu trzeciego. Rozważmy z kolei dowolną prostą p przebijającą powierzchnię Λ. Aby wyznaczyć ilość punktów przebicia – wprowadźmy pomocniczą powierzchnię Π (rys. 6) utworzoną z prostych, które przecinają jednocześnie stożkową m^2, prostą a oraz prostą p. Jest to powierzchnia rzutująca prostą p w metodzie odwzorowania opartej na rzucie ze zdegenerowanej krzywej przestrzennej stopnia trzeciego. Wiadomo (4), że powierzchnia ta jest rzędu trzeciego, a konsekwentnie jej przekrój płaszczyzną niewłaściwą – $c^{m\infty}$ jest krzywą rzędu trzeciego.



Rys. 6

Punkty przecięcia krzywych $c^{m\infty}$ i $c^{m\infty}$ określają kierunki tworzących powierzchni Λ i Π wspólnych lub różnych, lecz równoległych. Dążąc do

ustalenia ilości tworzących wspólnych powierzchni Λ i Π zauważmy, że dla danego dowolnego kierunku mogą w ogólności istnieć dwie tylko różne, równoległe tworzące tych powierzchni. Wynika to stąd, że płaszczyzna ustalona prostą a i danym kierunkiem przecina stożkową m^2 w dwu punktach. Ponieważ każda tworząca powierzchni Λ przynależna do określonego punktu stożkowej m^2 jednoczy się z równoległą tworzącą powierzchni Π przynależną do tego samego punktu, można by przewidywać, że w sumie tworzących wspólnych powierzchni Λ i Π może być dwukrotnie więcej niż punktów przecięcia krzywych $c^{n\infty}$ i $c^{m\infty}$. Jeżeli jednak uwzględnimy, że w każdej z par takich tworzących równoległych jedna z nich przechodzi przez punkt $M = m^2a$, w którym tworząca powierzchni Λ jest ściśle określoną prostą a - liczbę tworzących wspólnych obydwu powierzchni należy widzieć jako równą ilości punktów przecięcia $c^{m\infty}$ $c^{m\infty}$.
Ponieważ obydwie krzywe są rzędu trzeciego wynikałoby stąd, że istnieje 9 tworzących wspólnych powierzchni Λ i Π. Zauważmy jednak, że wśród 9 punktów przecięcia krzywych $c^{n\infty}$ i $c^{m\infty}$ 2 punkty, w których płaszczyzna niewłaściwa ω^∞ przecina stożkową m^2 są stałe, niezależne od sposobu przyjęcia prostej p, a więc i od postaci powierzchni Π. Należy je zatem wykluczyć przy obliczaniu ilości wspólnych tworzących powierzchni Λ i Π. Podobnie wykluczyć trzeba z obliczeń punkt F^∞. Przeprowadźmy bowiem następujące rozumowanie: płaszczyzna utworzona przez prostą p i punkt F^∞ przecina stożkową m^2 w dwu punktach. Przez punkty te da się poprowadzić dwie tworzące powierzchni Π równoległe do a, przecinające stożkową m^2 i prostą p. Tworzące te nie mogą jednak należeć do powierzchni Λ, gdyż tylko oś a incydentna z tą powierzchnią i skośna w najogólniejszym przypadku względem p ma kierunek F^∞. Pomimo więc, że powierzchnie Λ oraz Π przechodzą przez wspólny punkt $F^\infty = c^{n\infty}$ $c^{m\infty}$, nie posiadają wspólnej tworzącej o tym kierunku i punkt ten należy z rachunku rzędu powierzchni Λ również wykluczyć. Ponieważ punkt F^∞ jest punktem podwójnym krzywej $c^{m\infty}$ wnioskujemy, że dowolna prosta p przebija powierzchnię Λ w 5 punktach, czyli że przekrojem tej powierzchni dowolną płaszczyzną jest krzywa rzędu piątego.

Wniosek powyższy pozwala na ostateczne ustalenie maksymalnej ilości punktów W_i. Skoro bowiem miejsce geometryczne punktów leżących na płaszczyźnie ϱ i ustalających płaszczyzny styczne do kwadryki Φ spełniające warunek 1 jest krzywą spodkową paraboli, a miejsce geometryczne punktów płaszczyzny ϱ ustalających płaszczyzny styczne do kwadryki i spełniające warunek 2 jest krzywą rzędu piątego - ilość punktów wspólnych obydwu miejsc geometrycznych oznacza możliwą teoretycznie, maksymalną ilość punktów W_i. Zauważmy, że chodzi tu jedynie o punkty właściwe płaszczyzny ϱ, punkty niewłaściwe bowiem prowadzą do wyznaczenia punktów W_i zjednoczonych z P, nieistotnych dla odpowiedzi na postawione pytanie.

Tak więc z kolejnych rozważań wyłączyć trzeba prostą niewłaściwą wchodzącą w skład spodkowej paraboli.
Z przecięcia pozostałej części spodkowej paraboli - krzywej rzędu trzeciego z powierzchnią Λ wyłączyć należy punkt S jako środek rzutu stereograficznego. Ponieważ stanowi on podwójny punkt krzywej spodkowej, przeto w ogólnym przypadku ilość punktów W_i nie może przekroczyć liczby (3x5)-(3x2) = 9. Jest oczywiste, że w liczbie tej mieszczą się również rozwiązania zjednoczone i urojone, których ilość zależy od doboru założeń odnośnie kwadryki i środka rzutu stereograficznego.

Wpłynęło do Redakcji 14 maja 1972 r.

LITERATURA

1. M. Palej - Zagadnienie wiernokątności w stereograficznym rzucie obrotowej kwadryki krzywoliniowej. Zesz.Nauk. Politechniki Śląskiej seria Matematyka-Fizyka nr 13 1967.
2. J. Kaczmarek - Stożkowe określone punktami, stycznymi oraz stożkową ściśle styczną, Politechnika Poznańska - Rozprawy nr 36 - Poznań - 1968
3. K. Bieda - Rzutowe uogólnienie definicji krzywej spodkowej. Zeszyty Naukowe Geometria Wykreślna nr 7 - Warszawa - 1970.
4. W. Stankiewicz - Rzut przestrzeni z krzywej przestrzennej stopnia trzeciego - Zeszyty Naukowe Geometria Wykreślna nr 4 - Warszawa - Poznań 1966.

АНАЛИЗ КОНФОРМНОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ДВУХ КАСАТЕЛЬНЫХ К НЕЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

Работа касается обобщенной стереографической проекции нелинейной поверхности 2-го порядка, в которой центром проекции S является произвольная точка поверхности, а плоскостью проекции – плоскость касательная поверхности в ее точке противоположной центру S.

Автор поставил вопрос существуют ли такие точки поверхности, в которых касательные проектируются стереографически с сохранением величины определенных ими углов.

В работе получено положительный ответ на этот вопрос и утверждено, что количество таких точек не может превышать числа 9.

THE ANALYSIS OF THE TRUANGLES PROPERTY OF A GENERALIZED STEREOGRAPHIC PROJECTION OF TWO TANGENTS TO A SECOND ORDER SURFACE

S u m m a r y

The paper concerns a generalized projection of a non-linear second order surface, in which the centre of projection is any point S of a surface and the plane of projection - the plane tangent to the surface in the point P opposite to S.

The author answers the question: are there such points on the surface, that the angle formed by two whatever tangents in each of these points is projected in its true size.

It has been proved in the paper, that such points exist and that the number of them equals 9 at the most.