ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

JÓZEF SZPILECKI

TENSOR PODATNOŚCI ELEKTRYCZNEJ I MAGNETYCZNEJ ORAZ OPORU CHARAKTERYSTYCZNEGO PLAZMY CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA

Streszczenie. Pod warunkiem spełnienia związków dyspersyjnych dla stanu ustalonego, dyskutowanych w jednej z poprzednich prac autora, podano interpretację występujących tam macierzy, opisujących rozchodzenie się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. W zagadnieniu występuje 20 zmiennych. Przez eliminację pozostałych zmiennych, można otrzymać zależność między wektorami polaryzacji elektrycznej P, magnetycznej M i natężenia pola elektrycznego E i magnetycznego H, z której można wyznaczyć tensory podatności.

Po wyeliminowaniu polaryzacji, z zależności między wektorami E i H otrzymuje się tensor oporu charakterystycznego.

Zależności wyprowadzono w przypadku polaryzacji liniowej i kołowej.

1. Wstęp

W jednej z poprzednich prac autora [1] sformułowano ogólne zagadnienie i wyprowadzono równania różniczkowe, opisujące rozchodzenie się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. W sformułowaniu tych równań nie posługiwano się wielkością polaryzowalności elektrycznej ani magnetycznej. W układzie równań występuje 20 zmiennych: składowe wektora pola elektrycznego E_x, E_y, E_z, pola magnetycznego H_x, H_y, H_z polaryzacji elektrycznej P_x, P_y, P_z, magnetycznej M_x, M_y, M_z, prędkości $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, koncentracje N_i, $i=1,2$.

Eliminując pozostałe zmienne można sprowadzić układ równań wyjściowych do czterech równań między wektorami E,H,P,M, z którego można wyznaczyć szukane wielkości. Wielkości te są zależne od składowych stałych wymienionych wyżej wielkości, uwzględniają szereg efektów jak: dyspersja przestrzenna, nieliniowość zależności oraz częstości fal harmonicznych, których zachowanie się jest rozpatrywane. Otrzymane tak wielkości są na ogół zespolone, przy czym część rzeczywista i urojona mogą przez odpowiedni dobór parametrów zmieniać znak (realizacja ujemnych przenikalności elektrycznej i magnetycznej). Wyprowadzone zależności są słuszne pod warunkiem spełnienia związków dyspersyjnych. Ponieważ są one skomplikowane nie pozwalają w sposób prosty przedyskutować sprawy zmiany znaku przenikalności.

Ponieważ zagadnienia tego typu są przez różnych autorów rozwiązywane dla fal płasko i kołowo spolaryzowanych, rozważania przeprowadzono w obu przypadkach.

2. Równanie wyjściowe. Polaryzacja liniowa

Jak podano, w jednej z poprzednich prac związki dyspersyjne, w przypadku stanu ustalonego fal, są dane równaniem wyznacznikowym

$$\det(F) = 0, \tag{1}$$

w oznaczeniach pracy [2,3]. Macierz pseudodiagonalna (F) zbudowana jest z macierzy (F_o) o elementach stałych oraz (F_r) i (F_r^*), r=1,2,... przynależnych do poszczególnych fal o częstości ω_r, przy czym * oznacza wielkość zespoloną sprzężoną. Ponieważ związki między omówionymi macierzami są proste, wystarczy rozumowanie ograniczyć do wyznacznika

$$\det(F_r) = 0. \tag{2}$$

Był on dyskutowany pod kątem związków dyspersyjnych w pracach [2,3]. Ze względu na złożoność występujących tam macierzy, odsyłamy czytelnika do tych prac, jeśli chodzi o oznaczenia, ograniczając się do interpretacji tylko niektórych wielkości, występujących w wyprowadzonych tensorach.

Przez eliminację prędkości i koncentracji nośników ładunku, otrzymujemy układ czterech równań macierzowych między składowymi wektorów E,H,P,M. Napisany macierzowo jest to układ równań o macierzy (φ) rzędu 12 o następujących elementach:

$$\begin{gathered}
\varphi_{1,1} = (F_1),\ \varphi_{1,3} = (F_2),\ \varphi_{1,4} = (F_{1\ 3}) \\
\varphi_{2,1} = (F_4) - (F_4'),\ \varphi_{2,3} = (F_5),\ \varphi_{2,2} = (F_1) - (F_1') \\
\varphi_{3,2} = (F_{23}),\ \varphi_{3,4} = (F_{24}),\ \varphi_{4,1} = (F_{25}),\ \varphi_{4,3} = (F_{26}).
\end{gathered} \tag{3}$$

przy czym

$$\begin{gathered}
(F_4') = \left[(F_{16}) - (F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right](F_{13}) + \left[(F_{18}) - (F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right] \cdot \\
\cdot (F_{20}), \\
(F_1') = \left[(F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right](F_{14}) + \left[(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right](F_{21})
\end{gathered} \tag{4}$$

Podstawiając

$$P = (\varkappa_e)E,\ M = (\varkappa_m)H \tag{5}$$

z równań trzeciego i czwartego wiersza, można wyznaczyć tensory trzeciego rzędu podatności elektrycznej $(\varkappa_e)$ i podatności magnetycznej $(\varkappa_m)$

$$(\varkappa_e) = -(F_{26})^{-1}(F_{25}),$$
$$(\varkappa_m) = -(F_{24})^{-1}(F_{23}). \tag{6}$$

Pod założeniem spełnienia związków dyspersyjnych, wyznaczone wielkości tensorowe spełniają również dwa pozostałe równania.

Eliminując z równań pierwszego i drugiego wiersza układu (3) polaryzacje P i M, otrzymujemy jako zależności między wektorami E i H układ równań o macierzy 6 rzędu

$$\begin{pmatrix} (F_1) - (F_2)(F_{26})^{-1}(F_{25}), & -(F_{13})(F_{24})^{-1}(F_{26}) \\ (F_4 - F_4') - (F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25}), & (F_1) - (F_1') \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ze względu na spełnienie związków dyspersyjnych można wyznaczyć składowe tensora oporu charakterystycznego (E/H) z dowolnego z równań, np. z ostatniego otrzymujemy

$$H = -\left[(F_1) - (F_1')\right]^{-1}\left[(F_4) - (F_4') - (F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25})\right]E \tag{8}$$

lub z przedostatniego

$$H = \left[(F_{13})(F_{24})^{-1}(F_{26})\right]^{-1}\left[(F_1) - (F_2)(F_{26})^{-1}(F_{25})\right]E \tag{9}$$

Macierze odnoszące się do pola elektrycznego i magnetycznego mają analogiczną postać, wystarczy więc obliczenie ograniczyć tylko do jednego przypadku.

W pracy [2] wyliczono macierz $(F_{24})^{-1}$ w następującej postaci

$$(F_{24})^{-1} = \mathrm{ad}(F_{24})/\det(F_{24}), \tag{10}$$

przy czym

$$\det(F_{24}) = -j\omega_r^3 - \omega_r^2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2),$$

$$X_i = \bar{\varepsilon} H_{o,i} + M_{o,i} X, \quad i=1,2,3,$$

$$X = \bar{\varepsilon}(2\bar{A}/M_o^2)k_r^2 + j\omega_r(\bar{\alpha}/M_o),$$

$$\mathrm{ad}\,(F_{24}) = (F_{i,k,24})$$

$$F_{i,i,24} = -\omega_r^2 + X_i^2$$

$$F_{1,2,24} = j\omega_r X_3 + X_1 X_2$$

$$F_{1,3,24} = j\omega_r X_2 + X_1 X_3 \qquad (11)$$

$$F_{2,1,24} = j\omega_r X_3 + X_1 X_2$$

$$F_{2,3,24} = -j\omega_r X_1 + X_2 X_3$$

$$F_{3,1,24} = -j\omega_r X_2 + X_1 X_3$$

$$F_{3,2,24} = j\omega_r X_1 + X_2 X_3$$

W równaniach tych $M_{o,i}$, $H_{o,i}$ - składowe stałe polaryzacji magnetycznej i wektora natężenia pola magnetycznego, $\bar{\varepsilon}$ - współczynnik, $\bar{A}$ - stała wymiennego działania, $\bar{\alpha}$ - stała charakterystyczna relaksacji prędkości zmiany polaryzacji magnetycznej.

Analogicznie zbudowana jest macierz $(F_{26})^{-1}$, z tym, że występują w niej wielkości odnoszące się do pola elektrycznego.

Elementy macierzy $(F_{24})^{-1}(F_{23}$ det(F_{24}) są następujące:

$$F_{1,1} = (-j\omega_r X_3 + X_1 X_2) M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} - (j\omega_r X_2 + X_1 X_3) M_{o,y}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{1,2} = -(-\omega_r^2 + X_1^2) M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} + (j\omega_r X_2 + X_1 X_3) M_{o,x}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{1,3} = (-\omega_r^2 + X_1^2) M_{o,y}\,\bar{\varepsilon} - (-j\omega_r X_3 + X_1 X_2) M_{o,x}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{2,1} = (-\omega_r^2 + X_2^2) M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} - (-j\omega_r X_1 + X_2 X_3) M_{o,y}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{2,2} = -(j\omega_r X_3 + X_1 X_2) M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} + (-j\omega_r X_1 + X_2 X_3) M_{o,x}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{2,3} = (j\omega_r X_3 + X_1 X_2) M_{o,y}\,\bar{\varepsilon} - (-\omega_r^2 + X_2^2) M_{o,x}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,1} = (j\omega_r X_1 + X_2 X_3) M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} - (-\omega_r^2 + X_3^2) M_{o,y}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,2} = -(-j\omega_r X_2 + X_1 X_3)M_{o,z}\bar{\varepsilon} + (-\omega_r^2 + X_r^2)M_{o,x}\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,3} = (-j\omega_r X_2 + X_1 X_3)M_{o,y}\bar{\varepsilon} - (j\omega_r X_1 + X_2 X_3)M_{o,x}\bar{\varepsilon} \qquad (12)$$

Tensor charakterystycznego oporu lub jego odwrotność można prosto wyznaczyć z równania

$$\left[(F_1) + (F_2)(\varkappa_e)\right] E + (F_{13})(\varkappa_m) H = 0 \qquad (13)$$

Macierze (F_1), (F_2), (F_{13}) zbudowane są następująco:

$$(F_1) = \begin{pmatrix} 0 & j\,k_{r,z}, & -j\,k_{r,y} \\ -j\,k_{r,z}, & 0 & j\,k_{r,x} \\ j\,k_{r,y}, & -j\,k_{r,x}, & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

$$(F_2) = (j\omega_r/c)(\beta_{i,k}) + (\omega_r/c)((\delta_{i,1,k}), (\delta_{i,2,k}),$$

$$(\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,y} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} - (j\omega_r/c)k_r^2(\Delta_{1,i,k}) - (j\omega_r/c)\cdot(\Delta_{2,i,k})(K) \qquad (15)$$

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{r,x}^2 & k_{r,x}k_{r,y} & k_{r,x}k_{r,z} \\ k_{r,x}k_{r,y}, & k_{r,y}^2 & k_{r,y}k_{r,z} \\ k_{r,x}k_{r,z}, & k_{r,y}k_{r,z}, & k_{r,z}^2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

(F_{13}) - macierz diagonalna o elementach e_1/m_1.
Macierze kwadratowe trzeciego rzędu $(\beta_{i,k})$, $(\delta_{i,r,k})$, $(\Delta_{r,i,k})$ opisują zależność między wektorem indukcji B i H oraz M, $k_{r,x}, k_{r,y}, k_{r,z}$ - składowe wektora falowego, c - prędkość światła.
Tensory $(\delta_{i,k})$, $(\Delta_{r,i,k})$ opisują dyspersję przestrzenną. e_1, m_1 - ładunek lub masa jednego z nośników ładunku.

3. Polaryzacja kołowa

Podobnie można wyprowadzić analogiczne wielkości dla fal kołowo spolaryzowanych. Jeśli za płaszczyznę obrotu wektorów przyjmiemy płaszczyznę (x,y), wtedy wprowadzając nowe wielkości oznaczone wskaźnikiem + lub - przy pomocy wzorów transformacyjnych np.

$$\begin{aligned} E_+ &= E_x + j\,E_y \\ E_- &= E_x - j\,E_y, \end{aligned} \tag{17}$$

Podobnie dla wszystkich wektorów, występujących w zagadnieniu.

Odwrotnie, wyrażając nowe wielkości przez stare

$$\begin{aligned} E_x &= (1/2)(E_+ + E_-) \\ E_y &= -(1/2)(E_+ - E_-) \end{aligned} \tag{18}$$

Podobnie dla innych wektorów.

Po uporządkowaniu równań, ze względu na nowe wielkości,otrzymujemy równania analogicznie zbudowane, ale ze zmienionymi współczynnikami.

Nowa macierz (F) będzie analogicznie zbudowana jak poprzednio, z tym że występujące w niej macierze trzeciego rzędu należy pomnożyć przez macierz

$$(1/2)\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ -j, & j, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Wskutek tego macierz $(F_{24})^{-1}$ przybierze następującą postać

$$(F'_{24})^{-1} = \mathrm{ad}(F'_{24})/\det(F'_{24}). \tag{20}$$

gdzie

$$\det(F'_{24}) = (1/2)\left[\omega_r - \omega_r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\right] \tag{21}$$

Elementy macierzy $\mathrm{ad}(F'_{24})$ są następujące:

$$\begin{aligned} F'_{1,1} &= -2\,j\omega_r\,(X_3 + \omega_r) - 2\,X_1(X_2 - j\,X_1), \\ F'_{1,2} &= 2\omega_r\,(\omega_r + X_3) - 2\,X_2\,(X_2 - j\,X_1), \\ F'_{1,3} &= 2\,(j\,X_1 - X_2)(X_3 + \omega_r), \\ F'_{2,1} &= -2\,j\,\omega_r(\omega_r - X_3) + 2\,X_1\,(X_2 + j\,X_1), \end{aligned} \tag{22}$$

$$F'_{2,2} = -2\omega_r(\omega_r - X_3) + 2\, X_2(X_2 + j\, X_1),$$

$$F'_{2,3} = -2\, (j\, X_1 + X_2)(\omega_r - X_3),$$

$$F'_{3,1} = (\omega_r - X_3)(X_2 - j\, X_1) + (X_3 + \omega_r)(X_2 + j\, X_1),$$

$$F'_{3,2} = -j\, (\omega_r - X_3)(X_2 - j\, X_1) + j(\omega_r + X_3)(X_2 + j\, X_1)$$

$$F'_{3,3} = 2\, j\, (\omega_r^2 - X_3^2).$$

Elementy macierzy $(F'_{24})^{-1}\,(F'_{23})\,\det(F'_{24})$ są następujące:

$$\tilde{F}_{1,1} = (\bar{\varepsilon}/2)\Big\{\big[4\omega_r\,(X_3 + \omega_r) + 2(j\, X_1 - X_2)^2\big]\, M_{o,z} - 2(j\, X_1 - X_2)\,\cdot$$

$$\cdot\,(X_3 + \omega_r)(M_{o,y} + j\, M_{o,x})\Big\},$$

$$\tilde{F}_{1,2} = (\bar{\varepsilon}/2)\Big\{-2\,(j\, X_1 - X_2)^2\, M_{o,z} + 2(j\, X_1 - X_2)(X_3 + \omega_r)(-M_{o,y} +$$

$$+ j\, M_{o,x})\Big\},$$

$$\tilde{F}_{1,3} = (\bar{\varepsilon}/2)\,\Big\{4\, M_{o,y}\,\big[-j\,\omega_e\,(X_3 + \omega_r) - X_1(X_2 - j\, X_1)\big] +$$

$$4\, M_{o,x}\,\big[-\omega_r(\omega_r + X_3) + X_2(X_2 - j\, X_1)\big]\Big\} =$$

$$(\bar{\varepsilon}/2)\,\Big\{-4\,\omega_r(\omega_r + X_3)(M_{o,y}\, j + M_{o,x}) - 4\,(X_2 - j\, X_1)\,\cdot$$

$$\cdot\,(M_{o,y}\, X_1 - M_{o,x}\, X_2)\Big\},$$

$$\tilde{F}_{2,1} = (\bar{\varepsilon}/2)\Big\{2\,(j\, X_1 + X_2)^2\, M_{o,z} + 2\,(M_{o,y} + j\, M_{o,x})(jX_1 + X_2)\,\cdot$$

$$\cdot\,(\omega_r - X_3)\,,$$

$$\tilde{F}_{2,2} = (\bar{\varepsilon}/2)\Big\{\big[-4\omega_r(\omega_r - X_3) - 2(jX_1 - X_2)(X_2 + j\, X_1)\big]\, M_{o,z} -$$

$$-2\,(M_{o,y} + j\, M_{o,x})(X_1 j + X_2)(\omega_r - X_3)\Big],$$

$$\tilde{F}_{2,3} = (\bar{\varepsilon}/2)\,\Big\{-4\omega_r\,(\omega_r - X_3)(M_{o,y}\, j - M_{o,x}) + 4(X_2 + j\, X_1)(M_{o,y}\, X_1 -$$

$$-\, M_{o,x}\, X_2)\Big\},$$

$$\tilde{F}_{3,1} = (\tilde{\varepsilon}/2)\left\{2\, j(X_3 + \omega_r)(X_2 + jX_1)M_{o,z} - 2(M_{o,y} + j\, M_{o,x})j(\omega_r^2 - X_3^2)\right\}$$

$$\tilde{F}_{3,2} = (\tilde{\varepsilon}/2)\left\{2j(\omega_r - X_3)(X_2 - jX_1)M_{o,z} + 2(-M_{o,y} + j\, M_{o,x})j(\omega_r^2 - X_3^2)\right\}$$

$$\tilde{F}_{3,3} = (\tilde{\varepsilon}/2)\Big\{2\, M_{o,y}\left[(\varepsilon_r - X_3)(X_2 - jX_1) + (X_3 + \omega_r)(X_2 + jX_1)\right] +$$

$$+ 2\, M_{o,x}\left[2(\omega_r - X_3)(X_2 - jX_1) - j(\omega_r + X_3)(X_2 + jX_1)\right]\Big\} \tag{23}$$

4. Inne przekształcenie macierzy wyjściowej. Efekt elektromagnetyczny i magnetoelektryczny

Układ równań o macierzy współczynników (3), można napisać również inaczej, uwzględniając możliwość efektu, polegającego na zależności polaryzacji elektrycznej od wektora natężenia pola magnetycznego i odwrotnie.

Jeżeli napiszemy wymieniony wyżej układ równań w postaci

$$\begin{aligned}
&(F_1)E + (F_2)P + (F_{13})M = 0,\\
&(F_4 - F_4')E + (F_1 - F_1')H + (F_5)P = 0\\
&(F_{23})H + (F_{24})M = 0,\\
&(F_{25})E + (F_{26})P = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

z drugiego równania otrzymujemy

$$P = -\,(F_5)^{-1}(F_4 - F_4')E - (F_5)^{-1}(F_1 - F_1')H. \tag{25}$$

Z pierwszego równania

$$M = -(F_{13})^{-1}\left[(F_1) - (F_2)(F_5)^{-1}(F_4 - F_4')\right] E + (F_{13})^{-1}(F_2)\,\cdot$$

$$\cdot\,(F_5)^{-1}(F_1 - F_1')H. \tag{26}$$

Podstawienie otrzymanych wyrażeń na P i M do dwu pozostałych równań daje następujące równania:

$$\left[(F_{23}) + (F_{24})(F_{13})^{-1}(F_2)(F_5)^{-1}(F_1 - F_1')\right]H -$$

$$- (F_{24})(F_{13})^{-1}\left[(F_1) - (F_2)(F_5)^{-1}(F_4 - F_4')\right]E = 0, \tag{27}$$

$$-(F_{26})(F_5)^{-1}(F_1 - F_1')H + \left[(F_{25}) - (F_{26})(F_5) - (F_4 - F_4')\right] E = 0.$$

Znikający wyznacznik tego układu równań daje związek dyspersyjny, z którego można wyznaczyć częstości fal, dla których ważne jest powyższe rozumowanie.

Z równań (25) i (26) otrzymujemy na tensory podatności

$$
\begin{aligned}
(\varkappa_e) &= -(F_5)^{-1}(F_4 - F_4'),\\
(\varkappa_m) &= (F_{13})^{-1}(F_2)(F_5)^{-1}(F_1 - F_1'),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

oraz dla scharakteryzowania efektu elektromagnetycznego i magnetoelektrycznego

$$
\begin{aligned}
(\varkappa_{e,m}) &= -(F_5)^{-1}(F_1 - F_1'),\\
(\varkappa_{m,e}) &= -(F_{13})^{-1}\left[(F_1) - (F_2)(F_5)^{-1}(F_4 - F_4')\right]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Równania (27) dadzą się prościej wyrazić za pośrednictwem wprowadzonych tensorów

$$
\begin{aligned}
(F_{23})H - (F_{24})\left[(\varkappa_m)H + (\varkappa_{m,e})E\right] &= 0,\\
(F_{25})E + (F_{26})\left[(\varkappa_{e,m})H + (\varkappa_e)E\right] &= 0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Pozwalają one stosunkowo prosto wyrazić opór charakterystyczny. Wprowadzając poszczególne macierze, otrzymujemy

$$(\varkappa_e) = -(c/4\pi j\omega_r)(\alpha_{i,k})^{-1}\Big\{(j\omega_r/c)k_r^2(\Gamma_{1,i,k}) +$$

$$+ (j\omega_r/c)(\Gamma_{2,i,k})(K) - (j\omega_r/c)(\alpha_{i,k}) - (\omega_r/c)((\gamma_{i,1,k}),$$

$$(\gamma_{i,2,k}), (\gamma_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x}\\ k_{r,y}\\ k_{r,z}\end{pmatrix} + (e_1^2/m_1^2\ c)\ \cdot$$

$$\begin{pmatrix}
-(cm_1/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r), & B_{o,z} & -B_{o,y}\\
-B_{o,z} & -(cm_1/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r), & B_{o,x}\\
B_{o,y} & -B_{o,x} & -(cm_1/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r)
\end{pmatrix}$$

$$+ (j\, c_1^2\, e_1/N_{1,o}^2\, m_1)\, \frac{\mathrm{diag}(j\, N_{1,o}\, k_{r,x}^2,\ j\, N_{1,o}\, k_{r,y}^2,\ j\, N_{1o}\, k_{r,z}^2)}{j\omega_r - j(V_{1,o,x}k_{r,x} + V_{1,o,y}k_{r,y} + V_{1,o,z}k_{rz})}$$

$$- (e_2^2/m_2^2\, c)\,\cdot$$

$$\begin{pmatrix} -(m_2c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r), & B_{o,z} & -B_{o,y} \\ -B_{o,z} & -(m_2c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r), & B_{o,x} \\ B_{o,y} & -B_{o,x} & -(m_2c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r) \end{pmatrix}$$

$$+ (jc_2^2\, e_2/N_{2,o}\, m_2)\, \frac{\mathrm{diag}(j\, N_{2,o}k_{r,x}^2,\ j\, N_{2,o}k_{r,y}^2,\ j\, N_{2,o}k_{r,z}^2)}{j\omega_r - j(N_{2,o,x}k_{r,x} + V_{2,o,y}k_{r,y} + V_{2,o,z}k_{r,z})}\Bigg\} \tag{31}$$

$$(\varkappa_m) = (m_1c/e_1\, 4\pi\, j\omega_r)\, \Big\{(j\omega_r/c)(\beta_{i,k}) + (\omega_r/c)\,\cdot$$

$$\cdot\, ((\delta_{i,1,k}),\ (\delta_{i,2,k}),\ (\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} - (j\omega_r/c)k_r^2(\Delta_{1,i,k}) -$$

$$- (j\omega_r/c)(\Delta_{2,i,k})(K)\Big\}\ (\alpha_{i,k})^{-1}\,\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & j\, k_{r,z}, & -j\, k_{r,y} \\ -j\, k_{r,z}, & 0 & j\, k_{r,x} \\ j\, k_{r,y}, & -j\, k_{r,x}, & 0 \end{pmatrix} + \Big[(e_1/m_1c)\,\cdot$$

$$\begin{pmatrix} -(m_1c/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r), & B_{o,z} & -B_{o,y} \\ -B_{o,z} & -(m_1c/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r), & B_{o,x} \\ B_{o,y} & -B_{o,x} & -(m_1c/e_1)(1/\tau_1 + j\omega_r) \end{pmatrix}$$

$$-(j\, c_1^2/N_{1,o})\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix}\frac{-j\, N_{1,o}k_{r,x},\ -j\, N_{1,o}k_{r,y},\ -j\, N_{1,o}k_{r,z})}{j\omega_r - j(V_{1,o,x}k_{r,x} + V_{1,o,y}k_{r,y} + V_{1,o,z}k_{r,z})}\Big]$$

$$\Big[-(e_1/m_1c)(\beta_{1,i,k}) + j(e_1/m_1c)((D_{i,1,k}^1),\ (D_{i,2,k}^1),\ (D_{i,3,k}^1))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix}$$

$$+ (e_1/m_1 c)k_r^2(\Delta_{1,1,i,k}) + (\Delta_{2,1,i,k})(e_1/m_1 c)(K)\Big] + \Big[(e_2/m_2 c) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -(m_2 c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r), & B_{o,z} & -B_{o,y} \\ -B_{o,z} & -(m_2 c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r), & B_{o,x} \\ B_{o,y} & -B_{o,x} & -(m_2 c/e_2)(1/\tau_2 + j\omega_r) \end{pmatrix}$$

$$+ j(c_2^2/N_{2,o}) \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} \left| \frac{(-jN_{2,o}k_{r,x}, \ -jN_{2,o}k_{r,y}, \ -jN_{2,o}k_{r,z})}{j\omega_r - j(V_{2,o,x}k_{r,x} + V_{2,o,y}k_{r,y} + V_{2,o,z}k_{r,z})} \right.$$

$$\cdot \Big[-(e_2/m_2 c)(\beta_{i,k}) + j(e_2/m_2 c) \ ((D^2_{i,1,k}), (D^2_{i,2,k}), (D^2_{i,3,k})) \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} +$$

$$+ (e_2/m_2 c)k_r^2 (\Delta_{1,2,i,k}) + (\Delta_{2,2,i,k})(e_2/m_2 c)(K)\Big]\Big\} \tag{32}$$

$$(\varkappa_{e,m}) = - \Big[(m_1/e_1)(F_2)\Big]^{-1} = - \Big[(m_1/e_1)\Big\{(j\omega_r/c)(\beta_{i,k}) +$$

$$(\omega_r/c)((\delta_{i,1,k}), (\delta_{i,2,k}), (\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} - (j\omega_r/c)k_r^2(\Delta_{1,i,k}) -$$

$$-(j\omega_r/c)(\Delta_{2,i,k})(K)\Big\}\Big]^{-1} (\varkappa_m) \tag{33}$$

$$(\varkappa_{m,e}) = - (m_1/e_1) \Big[(F_1) + (F_2)(\varkappa_e)\Big] = - (m_1/e_1) \cdot$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & j\,k_{r,z}, & -j\,k_{r,y} \\ -j\,k_{r,z}, & 0 & j\,k_{r,x} \\ j\,k_{r,y}, & -j\,k_{r,x}, & 0 \end{pmatrix} + \Big[(j\omega_r/c)(\beta_{i,k}) + (\omega_r/c) \cdot\right.$$

$$\cdot ((\delta_{i,1,k}), (\delta_{i,2,k}), (\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} - (j\omega_r/c)k_r^2(\Delta_{1,i,k}) -$$

$$- (j\omega_r/c)(\Delta_{2,i,k})(K)\Big] (\varkappa_e)\Big\} \tag{34}$$

W wyrażeniach tych poza poprzednio wprowadzonymi występują następujące oznaczenia:

τ_i, i=1,2 - czasy relaksacji (odwrotności częstości zderzeń),
$N_{i,o}$, $V_{i,o}$, i=1,2 - składowe stałe koncentracji i prędkości.
$\beta_{i,k}$, $\alpha_{i,k}$ - współczynniki między B i H lub D i E,
$\delta_{i,r,k}$, r=1,2,3, $\Delta_{s,i,k}$, s=1,2, $\gamma_{i,r,k}$, $\Gamma_{s,i,k}$ - składowe tensorów przedstawiających dyspersją przestrzenną magnetyczną i elektryczną.
$\beta_{r,i,k}$ - macierz zbudowana z składowych prędkości $V_{r,o}$ i elementów $\beta_{i,k}$
$\Delta_{t,r,i,k}$, t=1,2, r=1,2, $D^r_{i,s,k}$, s=1,2,3, r=1,2 macierze podobnie zbudowane jak $\beta_{r,i,k}$, tylko w miejsce elementów $\beta_{i,k}$ wchodzą odpowiednio $\delta_{r,i,k}$ lub $\Delta_{i,s,k}$.
W przypadku polaryzacji kołowej, wzory zasadnicze utrzymują podobną postać, z tym, że poszczególne macierze są mnożone, jak poprzednio przez macierz

$$(1/2)\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ -j, & j, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Wpłynęło do Redakcji 15 maja 1972 r.

LITERATURA

1. J. Szpilecki, Teoria rozchodzenia się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. Zesz.Nauk. Pol.Śl. Mat. Fiz. nr 14, 1969, 69-95.
2. J. Szpilecki, Związki dyspersyjne w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. Zesz.Nauk. Pol.Sl. Mat.Fiz. nr 14, 1969, 97-120.
3. J. Szpilecki, O pewnych wnioskach ze związków dyspersyjnych dotyczących plazmy ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka, Zesz.Nauk. Pol.Śl. Mat.Fiz. nr 15, 1970, 429-446.

TENSOR OF ELECTRIC AND MAGNETIC SUSCEPTIBILITY AND CHARACTERISTIC RESISTANCE OF SOLID STATE FERROELECTRIC AND FERROMAGNETIC BODY

S u m m a r y

When the dispersion formulae are satisfied, for the steady state, discussed in one of the previous papers of the author, in this paper the physical interpretation of matrices is given, describing the wave notion in sold state ferroelectric and ferromagnetic bodies. The problem is formulated in terms of 20 variables. Elimination of 8 of them gives equations between the following vectors: electric polarisation P, magnetic polarisation M, electric field strength E, magnetic field strength H. From them it is possible to evaluate the required susceptibility and characteristic resistance tensors. The formulae for linear and circular polarisation are given.

ТЕНЗОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТВЕРДОГО ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ФЕРРОМАГНИТНОГО ТЕЛА

Р е з ю м е

Если дисперсионные формулы выполнены для установившегося состояния волн, рассматриваемого в прежних работах автора, в работе дано обоснование матриц описывающих волновое движение в твердом ферроэлектрическом и ферромагнитном теле. Проблема описана 20 переменными величинами. Исключая 8 из них получаем уравнения между векторами: электрической поляризации P, намагниченности M, электрического E и магнитного H напряжения полей. Из них вычислены тензоры восприимчивостей и характеристического сопротивления в случае линейной и круговой поляризации.