ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

JÓZEF SZPILECKI

STAN NIEUSTALONY W PLAZMIE CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA W PRZYBLIŻENIU LINIOWYM

Streszczenie. Równanie stanu nieustalonego w przypadku liniowym i z uwzględnieniem przestrzennej dyspersji rozwiązano metodą Laplace'a. Przedyskutowano zagadnienie położenia biegunów transformaty w szeregu przypadków szczególnych.

1. Wstęp

W pracy [1] wyprowadzono równanie różniczkowe pozwalające wyznaczyć stany ustalone i nieustalone fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka z uwzględnieniem dyspersji przestrzennej oraz nieliniowości związków łączących B z H oraz D z E.

W pracy [2] rozpatrywano związki dyspersyjne w przypadku liniowym dla stanu ustalonego.

W pracy niniejszej rozpatrywane są stany nieustalone w przypadku liniowego przybliżenia z uwzględnieniem dyspersji przestrzennej.

Wtedy równanie, wyprowadzone w pracy [1] redukuje się do następującej postaci (w oznaczeniach pracy [1])

$$(A)dC/dt + (F)C = 0. \tag{1}$$

C - oznacza wektor-kolumnę, zbudowaną z następujących funkcji czasu: składowe pola elektrycznego E_x, E_y, E_z, składowe pola magnetycznego H_x, H_y, H_z składowe polaryzacji elektrycznej P_x, P_y, P_z, składowe polaryzacji magnetycznej M_x, M_y, M_z, składowe prędkości nośników ładunków elektrycznych $V_{i,x}$ $V_{i,y}$, $V_{i,z}$, i = 1,2, koncentracje nośników ładunków N_i, i = 1,2.

Postać kwadratowych macierzy (A) i (F) podana jest w pracy [1].

W obecnej pracy wyrażenia te zostaną wprowadzone przy omawianiu fizykalnej interpretacji dyskutowanych związków.

Równanie różniczkowe (1) rozwiązujemy metodą transformacji Laplace'a. Wprowadzamy parametr transformacji p, C(p) transformatę wielkości C i wektor-kolumnę wartości początkowych C(0). Wtedy transformatę równania (1) można napisać w postaci

$$C(p) = (B)^{-1} (A) C(0), \tag{2}$$

przy czym macierz (B) można napisać w następującej postaci

$$(B) = \begin{pmatrix} B_{1,1}, & B_{1,2} \\ B_{2,1}, & B_{2,2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Macierze $B_{i,k}$ posiadają następującą postać

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} (F_1), & (A_1p + F_2), & 0, & (A_2'p + F_3) \\ (A_3p + F_4), & (F_1), & (A_4p + F_5), & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (F_6) & (F_7) & 0 & 0 \\ (F_8) & 0 & (A_5p + F_9), & 0 \\ 0 & (F_{1o}) & 0 & (A_6p + F_{11}) \end{pmatrix}$$

$$B_{2,1} = \begin{pmatrix} (F_{13}) & (F_{14}) & 0 & (F_{15}) \\ (F_{20}) & (F_{21}) & 0 & (F_{22}) \\ 0 & (F_{23}) & 0 & (A_9p + F_{24}) \\ (F_{25}) & 0 & (A_{1o}p+F_{16}) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$B_{2,2} = \begin{pmatrix} (A_7p + F_{16}) & 0 & (F_{17}) & 0 \\ 0 & (A_8p + F_{18}) & 0 & (F_{19}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Rozwiązanie równania charakterystycznego

Można napisać

$$(B)^{-1} = ad(B)/det(B), \tag{5}$$

gdzie ad(B) - macierz dołączona macierzy (B), det(B) - wyznacznik macierzy (B).

Główną trudność rozwiązania problemu stanowi rozwiązanie równania

$$\det(B) = 0. \tag{6}$$

Podobnie jak w pracy [2] rozwiążemy je w szeregu przypadków szczególnych. Faktoryzację równania można wykonać, zakładając, że pewne macierze, występujące w (B), zerują się.

3. Rozpatrzenie przypadków szczególnych

Założenie $(F_{19}) = 0$ pozwala wydzielić czynnik

$$\det(A_6 p + F_{11}) = 0 \tag{7}$$

Kolejne założenie $(F_{17}) = 0$ daje

$$\det(A_5 p + F_9) = 0 \tag{8}$$

Z założenia $(F_7) = 0$ wynika

$$\det(A_8 p + F_{18}) = 0 \tag{9}$$

Z założenia $(F_6) = 0$

$$\det(A_7 p + F_{16}) = 0 \tag{10}$$

Z założenia $(F_{23}) = 0$ wynika

$$\det(A_9 p + F_{24}) = 0 \tag{11}$$

Z $(F_{25}) = 0$

$$\det(A_{10} p + F_{26}) = 0 \tag{12}$$

Pozostaje równanie

$$\det\begin{pmatrix} (F_1) & (A_1 p + F_2) \\ (A_3 p + F_4), & (F_1) \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

Ze względu na analogiczną budowę, wystarczy rozpatrzeć równania (7), (9), (11), (13).

Równanie $\det(A_6 p + F_{11}) = 0$ posiada rozwiązanie

$$p = -j\omega_r + (V_{2,o,x}k_{r,x} + V_{2,o,y}k_{r,y} + V_{2,o,z}k_{r,z}) \tag{14}$$

gdzie ω_r – częstość rozpatrywanej fali, $k_{r,x}, k_{r,y}, k_{r,z}$ składowe wektora falowego, $V_{2,o}$ wektor stałej składowej prędkości nośnika o numerze porządkowym 2.

Równanie $\det(A_8 p + F_{18}) = 0$ może być rozłożone na dające się prosto rozwiązać równania

$$p + (1/\tau_2) + j\omega_r = 0 \tag{15}$$

$$(p + 1/\tau_2 + j\omega_r)^2 + (e_1/m_1 c)^2 \, (B^2_{o,x} + B^2_{o,y} + B^2_{o,z}) = 0 \tag{16}$$

τ_2 – czas relaksacji (opisujący proces zderzeń), B_o – stała składowa wektora indukcji magnetycznej.

Równanie $\det(A_9 p + F_{24}) = 0$ może być rozłożone na dające się łatwo rozwiązać równania

$$p + j\omega_r = 0, \tag{17}$$

$$(p + j\omega_r)^2 \left[1 + (M^2_{o,x} + M^2_{o,y} + M^2_{o,z})\,(\bar{\alpha}^2/M^2_o)\right] + 2(\bar{\alpha}/M_o)\cdot$$

$$\cdot\,(p + j\omega_r)\left\{M_{o,x}\left[\bar{\varepsilon}\,(2\bar{A}/M^2_o)k^2_r\,M_{o,x} + H_{o,x}\right] + \ldots\right\} +$$

$$+\left\{\left[M_{o,x}\ \bar{\varepsilon}\,(2\bar{A}/M^2_o)k^2_r + H_{o,x}\right]^2 + \ldots\right\} = 0 \tag{18}$$

Kropkami zaznaczono analogicznie zbudowane wyrażenia dla innych składowych.

M_o, H_o – stałe wektory polaryzacji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego.

Każde z powyższych równań ma swój odpowiednik elektryczny, który łatwo można otrzymać przez zmianę oznaczeń.

W równaniu (13) mamy następujące macierze

$$(F_1) = j\begin{pmatrix} 0 & k_{r,z}, & -k_{r,y} \\ -k_{r,z}, & 0 & k_{r,x} \\ k_{r,y} & -k_{r,x}, & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$(A_1p + F_2) = \left[(p + j\omega_r)/c\right]\left[(\beta_{i,k}) - j((\delta_{i,1,k}), (\delta_{i,2,k}),\right.$$

$$\left.(\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} - k_r^2\,(\Delta_{1,i,k}) - (\Delta_{2,i,k})(K)\right] + (2p/c)\ .$$

$$\cdot\ \left[(\eta_{i,k,1}), (\eta_{i,k,2}), (\eta_{i,k,3})\right]\begin{pmatrix} H_{x,o} \\ H_{y,o} \\ H_{z,o} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$(A_3p + F_4) = \left[(p + j\omega_r)/c\right]\left\{-(\alpha_{i,k}) + j\ \left[(\gamma_{i,1,k}), (\gamma_{i,2,k}),\right.\right.$$

$$\left.\left.(\gamma_{i,3,k})\right]\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} + (\Gamma_{1,i,k})k_r^2 + (\Gamma_{2,i,k})(K)\right\} - (2p/c)\ .$$

$$\cdot\ \left[(\varepsilon_{i,k,1}), (\varepsilon_{i,k,2}), (\varepsilon_{i,k,3})\right]\begin{pmatrix} E_{x,o} \\ E_{y,o} \\ E_{z,o} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{r,x}^2, & k_{r,x}k_{r,y}, & k_{r,x}k_{r,z} \\ k_{r,x}k_{r,y}, & k_{r,y}^2 & k_{r,y}k_{r,z} \\ k_{r,z}k_{r,x}, & k_{r,z}k_{r,y}, & k_{r,z}^2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

W powyższych wyrażeniach $(\delta_{i,1,k})$, $(\delta_{i,2,k})$, $(\delta_{i,3,k})$, $(\Delta_{1,i,k})$, $(\Delta_{2,i,k})$ tensory, opisujące przestrzenną dyspersję magnetyczną, $(\eta_{i,k,1})$, $(\eta_{i,k,2})$ $(\eta_{i,k,3})$ – tensory, opisujące nieliniową zależność B od H, $(\beta_{i,k})$ – tensor, opisujący liniową zależność B i H. Analogiczne tensory w przypadku elektrycznego pola oznaczono odpowiednio: $(\gamma_{i,1,k})$, $(\gamma_{i,2,k})$, $(\gamma_{i,3,k})$, $(\Gamma_{1,i,k})$, $(\Gamma_{2,i,k})$, $(\varepsilon_{i,k,1})$, $(\varepsilon_{i,k,2})$, $(\varepsilon_{i,k,3})$, $(\alpha_{i,k})$.
E_o stała składowa pola elektrycznego.

Z łatwo zrozumiałymi skrótami, można napisać

$$(A_1p + F_2) = \left[(p + j\omega_r)/c\right]\ (\varkappa_{i,k}) + (2p/c)(\varrho_{i,k}) =$$

$$\left[(p + j\omega_r)/c\right]\ (\varkappa_{i,k} + \varrho_{i,k}) - (j\omega_r/c)(\varrho_{i,k})$$

$$= (F_{2,i,k}) + (F_{2,i,k}) \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
(A_3 p + F_4) &= \left[(p + j\omega_r)/c\right] (\sigma_{i,k}) + (2p/c)(\tau_{i,k}) = \\
&= \left[(p + j\omega_r)/c\right] (\sigma_{i,k} + \tau_{i,k}) - (j\omega_r/c)(\tau_{i,k}) \\
&= (F_{4,i,k}) + (F_{4,i,k}')
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Wtedy macierz równania (13) można napisać następująco:

$$
\begin{pmatrix} 0 & (F_{2,i,k}) \\ (F_{4,i,k}), & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (F_{1,i,k}), & (F_{2,i,k}') \\ (F_{4,i,k}'), & (F_{1,i,k}) \end{pmatrix} = (\Phi_1) + (\Phi_2) \tag{25}
$$

Tu niewiadoma wielkość p występuje tylko w macierzy (Φ_1), macierz (Φ_2) nie zawiera p.
Wyznacznik (13) można napisać następująco:

$$
\det(\Phi_1) + \sum_{l} \det(\Phi_l) + \sum_{l,m} \det(\Phi_{l,m}) + \dots = 0 \tag{26}
$$

$l = 1,2,\dots 6, \quad i,k = 1,2,3.$

Macierz (Φ_l) powstaje z (Φ_1) przez zastąpienie l-tej kolumny przez taką kolumnę macierzy (Φ_2), macierz $(\Phi_{l,m})$ przez zastąpienie l i m kolumny itd. W ostatniej macierzy wszystkie kolumny macierzy (Φ_1) zastąpiono przez odpowiednie kolumny macierzy (Φ_2).
W ten sposób pierwszy składnik (26) jest jednorodny stopnia 6 w $p + j\omega_r$, następny stopnia 5, itd. ostatni jest wyrazem wolnym.

Na wyznaczenie p otrzymujemy równanie algebraiczne 6 stopnia.

Równanie to bez upraszczających założeń jest trudne do przedyskutowania.

Powyższe stosunkowo proste wyniki otrzymano pod założeniem znikania pewnych wielkości lub też, gdy te wielkości są małe i mogą być pominięte wobec pozostałych.

Możemy dyskusję przeprowadzić z mniejszą liczbą założeń dodatkowych, przez eliminację zmiennych V_1, V_2, N_1, N_2. Pozostanie więc równanie macierzowe między wektorami E,H,P,M.

Eliminacja wektorów V_1, V_2, i wielkości N_1, N_2.

Przez eliminację V_i, N_i, $i = 1,2$ można równanie (2) zastąpić następującym

$$
(D)\, C^x(p) = (E)\, C^x(0) + (G), \tag{27}
$$

gdzie
$C^x(p)$ - wektor-kolumna o elementach: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$,
$C^x(0)$ - analogiczna wektor-kolumna wartości początkowych,
Tensory (D), (E), (G) posiadają następujące elementy

$$D_{1,1} = (F_1),\ D_{1,2} = (A_1p + F_2),\ D_{1,3} = 0,\ D_{1,4} = (A_2p + F_3),$$

$$D_{2,1} = (A_3p + F_4) - (\alpha_1)^{-1}(F_{13})(F_6) - (\alpha_2)^{-1}(F_{20})(F_7),$$

$$D_{2,2} = (F_1) - (\alpha_1)^{-1}(F_{14})(F_8) - (\alpha_2)^{-1}(F_{21})(F_7),$$

$$D_{2,3} = (A_4p + F_5),\ D_{2,4} = -\left[(\alpha_1)^{-1}(F_{15})(F_6) + (\alpha_2)^{-1}(F_{22})(F_7)\right],$$

$$D_{3,1} = D_{3,3} = 0,\ D_{3,2} = (F_{23}),\ D_{3,4} = (A_9p + F_{24}),$$

$$D_{4,1} = (F_{25}),\ D_{4,2} = D_{4,4} = 0,\ D_{4,3} + (A_{10}p + F_{26}), \tag{28}$$

$$E_{1,1} = E_{1,3} = 0,\ E_{1,2} = (A_1),\ E_{14} = (A_2),$$

$$E_{2,1} = (A_3),\ E_{2,2} = E_{2,4} = 0,\ E_{2,3} = (A_4),$$

$$E_{3,1} = E_{3,2} = E_{3,3} = 0,\ E_{3,4} = (A_9),$$

$$E_{4,1} = E_{4,2} = E_{4,4} = 0,\ E_{4,3} = (A_{10}), \tag{29}$$

(G) - wektor-kolumna o elemencie

$$G_2 = -(\alpha_1)^{-1}\left[(A_7)\ V_1(0) - (F_{17})(A_5p + F_9)^{-1}(A_5)N_1(0)\right](F_6) -$$
$$-(\alpha_2)^{-1}\left[(A_2)\ V_2(0) - (F_{19})(A_5p + F_{11})^{-1}(A_6)\ N_2(0)\right](F_7), \tag{30}$$

Pozostałe elementy są równe zeru.

$$(\alpha_1) = (A_7p + F_{16}) - (F_{17})(A_5p + F_9)^{-1}(F_8),$$
$$(\alpha_2) = (A_8p + F_{18}) - (F_{19})(A_6p + F_{11})^{-1}(F_{10}). \tag{31}$$

Miejsca zerowe macierzy (D) dadzą się stosunkowo prosto wyznaczyć, jeśli przyjmiemy $(F_{25}) = 0$, $(F_{23}) = 0$. Wtedy otrzymujemy dwa poprzednio znane równania (12) i (11)

$$\det(A_{10}p + F_{26}) = 0$$

$$\det(A_9p + F_{24}) = 0$$

oraz równanie

$$\det\begin{pmatrix} (F_1), & (A_1p + F_2) \\ (A_3p + F_4 - F_4'), & (F_1 - F_1') \end{pmatrix} = 0, \tag{32}$$

gdzie

$$(F_4') = (\alpha_1)^{-1}(F_{13})(F_6) + (\alpha_2)^{-1}(F_{20})(F_7) = (\alpha_1)^{-1}(4\pi N_1 e_1^2/m_1 c) + + (\alpha_2)^{-1}(4\pi N_2 e_2^2/m_2 c) \tag{33}$$

$$(F_1') = (\alpha_1)^{-1}\,(F_{14})(F_8) + (\alpha_2)^{-1}\,(F_{21})(F_7) =$$

$$= (\alpha_1)^{-1}\Big\{-(e_1/m_1c)(\beta_{1,i,k}) + j(e_1/m_1c)((D_{i,1,k}),$$

$$(D_{i,2,k}),\ (D_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} + (e_1\ k_r^2/m_1c)(\Delta_{1,1,i,k}) + (\Delta_{2,1,i,k})\ \cdot$$

$$\cdot\ (e_1/m_1c)(K)\Big\}\ (-j\ N_{1,o}k_{r,x},\ -j\ N_{1,o}\ k_{r,y},\ -\ j\ N_{1,o}\ k_{r,z}) +$$

$$(\alpha_2)^{-1}\Big\{-\ (e_2/m_2c)(\beta_{1,i,k}) + j\ (e_2/m_2c)((D_{i,1,k}),\ (D_{i,2,k}),$$

$$(D_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} + (e_2\ k_r^2/m_2c)(\Delta_{1,1,i,k}) + (\Delta_{2,1,i,k})(e_2/m_2c)\ \cdot$$

$$\cdot\ (K)\Big\}\ (4\pi N_2 e_2/c). \tag{34}$$

$$(\alpha_1) = (A_7p + F_{16}) - (F_{17})(A_5p + F_9)^{-1}(F_8) =$$

$$= \begin{pmatrix} p + 1/\tau_1 + j\omega_r, & -(e_1/m_1c)B_{o,z}, & (e_1/m_1c)B_{o,y} \\ (e_1/m_1c)B_{o,z}, & p + 1/\tau_1 + j\omega_r, & -\ (e_1/m_1c)B_{o,x} \\ -\ (e_1/m_1c)B_{o,y}, & (e_1/m_1c)B_{o,x}, & p + 1/\tau_1 + j\omega_r \end{pmatrix}$$

$$-(jc_1^2/N_{1,o})\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix}\frac{(-j\ N_{1,o}\ k_{r,x},\ -j\ N_{1,o}\ k_{r,y},\ -j\ N_{1,o}\ k_{r,z})}{p+j\omega_r - j(V_{1,o,x}k_{r,x} + V_{1,o,y}\ k_{r,y} + V_{1,o,z}k_{r,z})} \tag{35}$$

Analogicznie zbudowane jest wyrażenie (α_2), z tym, że w miejsce wskaźnika 1 należy podstawić 2.

Macierz odwrotną $(\alpha_1)^{-1}$ obliczamy według następującego przepisu

$$(\alpha_1)^{-1} = \mathrm{ad}(\alpha_1)/\det(\alpha_1) \; . \tag{36}$$

$$\det(\alpha_1) = N^3 + N(e_1/m_1c)^2 B_o^2 - (c_1^2/(N-A)) \left\{k_r^2 N^2 + (e_1/m_1c)^2 \cdot \right.$$
$$\left. \cdot (k_{r,x}B_{o,x} + k_{r,y}B_{o,y} + k_{r,z}B_{o,z})^2\right\}, \tag{37}$$

gdzie

$$N = p + 1/\tau_1 + j\omega_r, \tag{38}$$

$$A_1 = 1/\tau_1 + j(V_{1,o,x}k_{r,x} + V_{1,o,y}k_{r,y} + V_{1,o,z}k_{r,z}) \tag{39}$$

Macierz kwadratowa trzeciego rzędu $\mathrm{ad}(\alpha_1)$ posiada następujące elementy

$$\alpha_{i,i} = N^2 + (e_1/m_1c)^2 B_{o,i}^2 - (c_1^2/(N-A))\, N(k^2-k_i^2) \quad i = x,y,z \tag{40}$$

oraz oznaczając

$$B_{o,x}k_{r,x} + B_{o,y}k_{r,y} + B_{o,z}k_{r,z} = (B_o,k_r) \tag{41}$$

$$\alpha_{1,2} = (e_1/m_1c)B_{o,z}\, N + (e_1/m_1c)^2\, B_{o,x}\, B_{o,y} + (c_1^2/(N-A)) \; \cdot$$
$$\cdot \left[N\, k_{r,y}k_{r,z} - (e_1/m_1c)k_{r,z}(B_o,k_r)\right],$$

$$\alpha_{1,3} = (e_1/m_1c)^2\, B_{o,z}\, B_{o,x} - (e_1/m_1c)\, B_{o,y}\, N + (c_1^2/(N-A)) \; \cdot$$
$$\cdot \left[N\, k_{r,x}\, k_{r,z} + (c_1/m_1c)k_{r,y}\, (B_o,k_r)\right],$$

$$\alpha_{2,1} = N(e_1/m_1c)B_{o,z} - (e_1/m_1c)^2\, B_{o,x}\, B_{o,y} + (c_1^2/(N-A)) \; \cdot$$
$$\left[N\, k_{r,x}k_{r,y} - (e_1/m_1c)k_{r,z}(B_o,k_r)\right],$$

$$\alpha_{2,3} = (e_1/m_1c)B_{o,x}\, N + (e_1/m_1c)^2\, B_{o,y}\, B_{o,z} + (c_1^2/(N-A)) \; \cdot$$
$$\cdot \left[N\, k_{r,y}k_{r,z} - (e_1/m_1c)k_{r,x}\, (B_o,k_r)\right],$$

$$\alpha_{3,1} = (e_1/m_1c)B_{o,y}\ N + (e_1/m_1c)^2\ B_{o,x}\ B_{o,z} + (c_1^2/(N-A))\ \cdot$$

$$\cdot\ \left[N\ k_{r,x}\ k_{r,z} - (e_1/m_1c)k_{r,y}\ (B_o,k_r)\right],$$

$$\alpha_{3,2} = -(e_1/m_1c)B_{o,x}\ N + (e_1/m_1c)^2\ B_{o,z}\ B_{o,y} + (c_1^2/(N-A))\ \cdot$$

$$\cdot\ \left[N\ k_{r,y}\ k_{r,z} + (e_1/m_1c)k_{r,x}\ (B_o,k_r)\right]. \tag{42}$$

Analogicznie oblicza się $(\alpha_2)^{-1}$.
Podstawienie (35)-(42) do wyrażeń na (F_4') i (F_1') pozwala wyliczyć poprawkowe macierze, którymi różni się równanie (32) od rozpatrzonego poprzednio równania (25), w którym $(F_4') = 0$ i $(F_1') = 0$.

Równanie (32) w ogólnej postaci nie daje się rozwiązać i przedyskutować w sposób przejrzysty. Natomiast daje się ono użyć w celu przedyskutowania, jakie są tendencje zmian miejsc zerowych równania (25) gdy założymy, że pominięte w nim wielkości $N_{i,o}$, $V_{i,o}$, $i = 1,2$ są bliskie zera.

Z postaci poprawkowych macierzy wynika, że jeśli tylko pierwiastki równania (25) leżą dostatecznie daleko od wartości spełniających równanie $N-A = 0$ oraz $\det(\alpha_i) = 0$, $i = 1,2$, wtedy przyjmując, że koncentracje $N_{i,o}$ są bardzo małe, można wyliczyć pierwiastki równania (32), przyjmując je w postaci

$$p_i = p_{i,o} + \Delta p_i, \tag{43}$$

gdzie $p_{i,o}$ - pierwiastki równania (25), Δp_i - wyrażenia poprawkowe, których tylko pierwsze potęgi uwzględniamy w obliczeniach, przyjmując w wyrażeniach poprawkowych przybliżenie $p_i \approx p_{i,o}$.

W ogólnym przypadku uwzględnienie wyrażeń poprawkowych podwyższa stopień równania. Uwzględnienie więc poprawkowych macierzy, daje dodatkowe miejsca zerowe.

Pewne uproszczenia wyrażeń poprawkowych można otrzymać w pewnych przypadkach szczególnych. I tak widać z (37) i (42), że można wyeliminować wyrażenia, zawierające mianownik $N-A_1$, jeśli przyjąć, że $c_i = 0$; wielkości te są wprost proporcjonalne do temperatur nośników, odwrotnie do ich mas. Założenie więc daje się spełnić w temperaturach bliskich zera. Wtedy można prosto wyznaczyć miejsca zerowe równania $\det(\alpha_i) = 0$, mianowicie są one równe $N=0$, i $N = \pm (e_1/m_1c)B_o\ j$. Wyrażenie (37) upraszcza się również w przypadku $B_o=0$. Otrzymujemy $N^3 - (c_1^2/(N-A_1))k_r^2\ N^2 = 0$, co daje $N = 0$ (pierwiastek podwójny), $N(N-A_1) - c_1^2\ k_r^2 = 0$.

Także w przypadku $B_o \neq 0$, otrzymujemy proste przypadki, przy odpowiednim ustawieniu wektora B_o względem wektora falowego k_r.

Gdy wektor B_o jest równoległy do k_r, otrzymujemy

$$N^2 + (e_1/m_1 c)^2 B_o^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad N - (c_1^2/(N-A_1))k_r^2 = 0.$$

Także pewne uproszczenie otrzymujemy w przypadku gdy B_o jest prostopadły do k_r, gdyż wtedy znika iloczyn skalarny w ostatnim wyrażeniu (37).

Znajomość miejsc zerowych w przypadku $B_o = 0$, pozwala w przypadku $B_o \neq 0$ bardzo małego wyznaczyć, jakim tendencjom ulegają położenia miejsc zerowych, np. metodą graficzną. W szczególności można łatwo zobaczyć, że pierwiastek podwójny ulega rozszczepieniu na dwa pierwiastki oraz w jakim kierunku przesuwają się pozostałe pierwiastki.

Znajomość miejsc zerowych równania (6) pozwala zastosować twierdzenie Heaviside'a do wyznaczenia rozwiązania na stan nieustalony.

Wpłynęło do Redakcji 15 maja 1972 r.

LITERATURA

1. J. Szpilecki, Teoria rozchodzenia się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. Zesz.Nauk. Pol.Śl. Mat. Fiz. nr 14, 1969, 69-95.

2. J. Szpilecki, Związki dyspersyjne w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. Zesz.Nauk. Pol.Śl. Mat.Fiz. nr 14, 1969, 97-120.

TRANSIENT STATE OF SOLID STATE FERROELECTRIC AND FERROMAGNETIC BODY IN LINEAR APPROXIMATION

S u m m a r y

The equations of transient state in linear approximation, assuming space dispersion (non-lecal approximation) were solved with help of Laplace's transform method. The location of poles of the transform has been discussed in some special cases.

ПЕРЕХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ ТВЕРДОГО ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ФЕРРОМАГНИТНОГО ТЕЛА В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Р е з ю м е

Уравнения переходного состояния в линейном приближении, принимая во внимание пространственную дисперсию (нелокальное приближение) были решены методом трансформации Лапласа. Рассмотрено местоположение полюсов трансформанты Лапласа в некоторых частных случаях.