ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

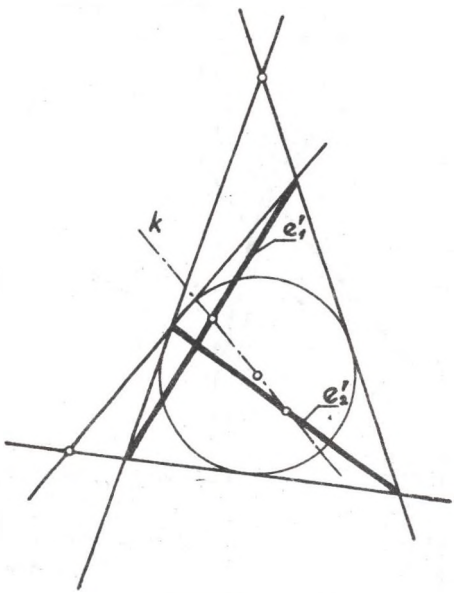
JANUSZ KAJRUNAJTYS

O SZCZEGÓLNYM PRZYPADKU PRZENIKAŃ POWIERZCHNI STOŻKOWYCH

Streszczenie. W artykule przeanalizowano linię przenikania dwóch powierzchni stożkowych opisanych na wspólnej kuli, gdy linia ta rozpada się na dwie stożkowe rzeczywiste, niezdegenerowane. Wykazano, że w tych warunkach linia przenikania nie może być sumą dwóch parabol.

Dowód tej tezy może być wykorzystany do rozwiązania niektórych zadań.

Zgodnie z znanym twierdzeniem Monge'a dwie powierzchnie stopnia drugiego, opisane na wspólnej trzeciej powierzchni stopnia drugiego, przenikają się w krzywej stopnia czwartego, która rozpada się na dwie krzywe płaskie stopnia drugiego, tj. stożkowe.

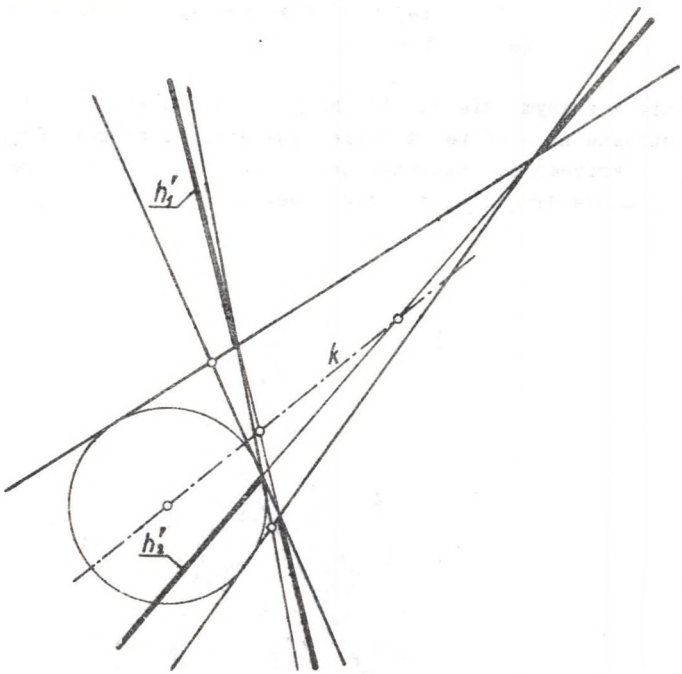


Rys. 1

Twierdzenie to wykorzystywane jest szeroko w technice przy projektowaniu i konstruowaniu połączeń lub rozgałęzień przewodów rurowych o przekroju kołowym, dyfuzorów itp.

Ograniczając rozważania do tych, stosowanych w praktyce inżynierskiej przypadków, rozpatrzmy takie wzajemne usytuowanie powierzchni stożkowych opisanych na wspólnej kuli, gdy linia ich przenikania rozpada się na dwie stożkowe rzeczywiste i niezdegenerowane. Rzutując zespół przenikających się powierzchni na płaszczyznę symetrii tego zespołu można łatwo wskazać przypadki, gdy linia przenikania rozpada się na:

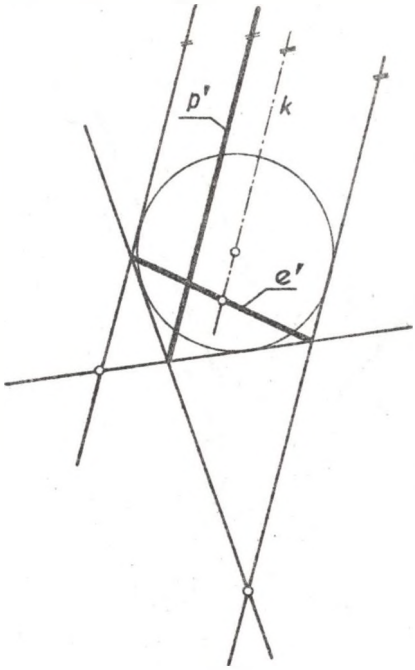
- dwie elipsy (e_1, e_2 - rys. 1)
- dwie hiperbole (h_1, h_2 - rys. 2)
- elipsę i parabolę (e, p - rys. 3)
- elipsę i hiperbolę (e, h - rys. 4)
- parabolę i hiperbolę (p, h - rys. 5)



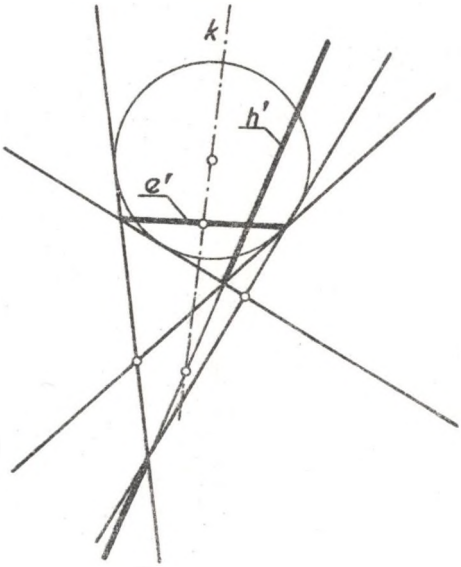
Rys. 2

W zestawieniu tym brakuje kombinacji dwóch parabol. Wykażemy, że kombinacja taka jest niemożliwa.

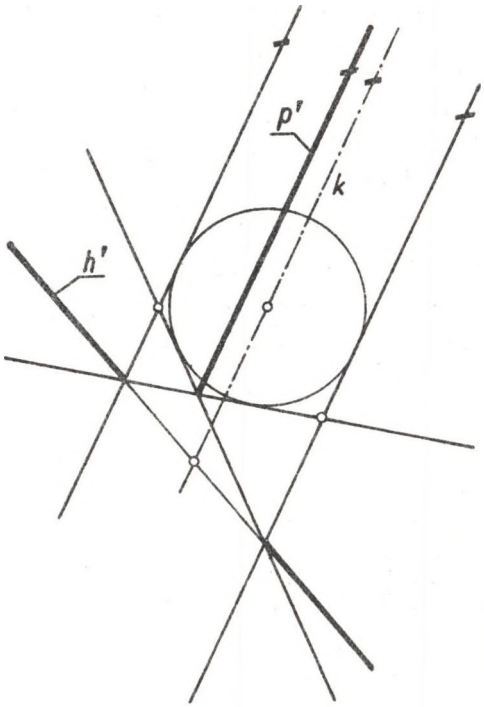
Zauważmy (rys. rys. 1, 2, 3, 4 i 5), że środki stożkowych, na które rozpada się linia przenikania i środek kuli, na której opisane są przenikające się powierzchnie leżą na jednej prostej k. Wobec tego środki



Rys. 3



Rys. 4



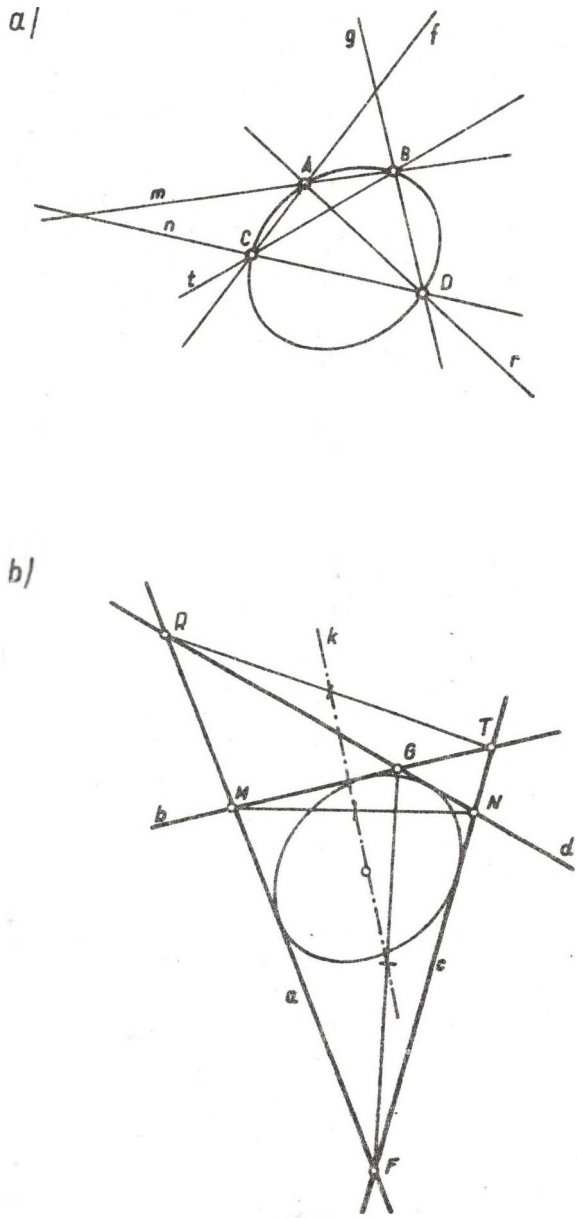
Rys. 5

dwóch parabol (hipotetycznie stanowiących linię przenikania) określają prostą niewłaściwą k^{∞})[x], na której musiałby też leżeć środek kuli.

Stąd wniosek, że krzywa stopnia czwartego, która jest sumą dwóch parabol, nie może być linią przenikania dwóch powierzchni stożkowych opisanych na wspólnej kuli.

Dla udowodnienia współliniowości omawianej trójki punktów rozważmy pęk stożkowych rzeczywistych i zdegenerowanych, którego bazą jest czwórka punktów A,B,C,D (rys. 6a). Wiadomo, że biegunowe dowolnego punktu Q względem stożkowych pęku (także zdegenerowanych) przecinają się w jednym punkcie. Gdy punkt Q jest punktem niewłaściwym, to biegunowe te stają się średnicami stożkowych pęku. Pękowi stożkowych odpowiada dwoiście pasmo stożkowych, którego bazą są styczne a,b,c,d (rys. 6b), natomiast punktowi Q dowolna prosta q. Bieguny prostej q względem stożkowych pasma (także zdegenerowanych) leżą na jednej prostej, a gdy prosta q staje się prostą niewłaściwą, to bieguny te stają się środkami stożkowych pasma.

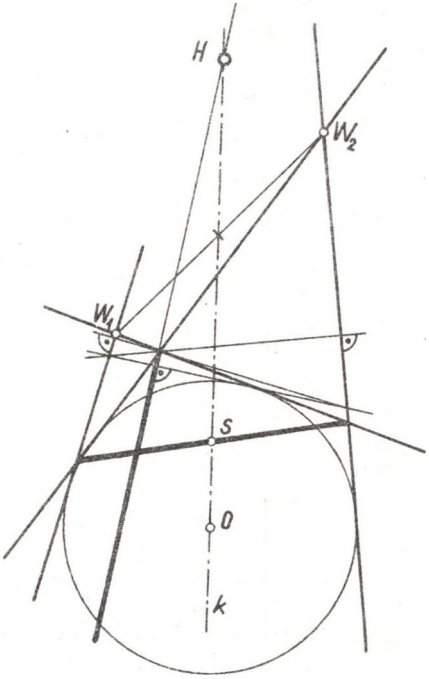
[x] Są to dwa różne punkty niewłaściwe, gdyż inaczej jedną z płaszczyzn stycznych do obydwu przenikających się powierzchni stożkowych obrotowych byłaby płaszczyzna niewłaściwa.



Rys. 6

W szczególności będą to też środki odcinków $\overline{MN}$, $\overline{RT}$ i $\overline{FG}$ jako środki zdegenerowanych stożkowych M+N, R+T i F+G pasma.

Konfiguracja elementów geometrycznych na rysunku 6b może być uważana za rzut dwóch powierzchni stożkowych W_1 = R, W_2 = T opisanych na elipsoidzie, których linia przenikania rozpada się na dwie elipsy (e'_1 = $\overline{MN}$, e'_2 = $\overline{FG}$). Jak wykazano, środki tych elips i środek elipsoidy, a także środek odcinka $\overline{W_1W_2}$ leżą na jednej prostej k.



Rys. 7

Przedstawiony tu dowód, którego koncepcję podał Jerzy K a c z m a r e k, może być wykorzystany do określenia niektórych brakujących parametrów stożkowych stanowiących linię przenikania zespołu powierzchni rozważanych w niniejszym artykule

Dla przykładu wyznaczmy środek stożkowej wchodzącej w skład linii przenikania dwóch powierzchni stożkowych opisanych na wspólnej kuli, gdy nie wszystkie tworzące konturowe tych powierzchni przecinają się w obrębie rysunku (rys. 7).

Rzuty stożkowych znajdujemy łącząc punkty przecięcia tworzących konturowych, z których jeden jest niedostępny. Następnie konstruujemy prostą k określoną przez środek kuli O i znany środek jednej ze stożkowych S lub też środek odcinka $\overline{W_1W_2}$. Prosta k przecina rzut drugiej stożkowej w szukanym jej środku H.

Wpłynęło do Redakcji 16 maja 1972 r.

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе проведен анализ линии пересечения двух конических поверхностей, которые описаны около одного шара. Доказано, что эта линия не может являться суммой двух парабол.

ABOUT A CASE OF INTERSECTION OF TWO CONES

S u m m a r y

The analysis of the line of intersection of two cones described about a sphere is the contents of the paper.
The author hes proved that such a line can not be composed of two paraboles.