ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 21 Nr kol. 340

W. SOBIESZEK

O PEWNYCH NUMERYCZNYCH ASPEKTACH ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

1. Wstęp

W pracy niniejszej rozważa się pewne numeryczne aspekty rozwiązywania równań funkcyjnych programowania dynamicznego na przykładzie równania postaci

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \left[g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))\right], \tag{1}$$

gdzie g i h są danymi i ciągłymi w przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcjami, przy czym $g(0) = h(0) = 0$, zaś a i b są danymi liczbami z przedziału $(0,1)$; $f(x)$ jest funkcją poszukiwaną. Ze względu na możliwość przedłużania rozwiązania równania (1), gdy dane jest ono w pewnym przedziale $\langle 0, x_0 \rangle$ na przedział szerszy, istotną sprawą jest wyznaczanie go przynajmniej w pewnym prawostronnym otoczeniu zera.

W artykule tym udowadnia się pewne twierdzenia, które w tej sprawie mają istotne znaczenie oraz proponuje się pewną nową metodę wyznaczania przybliżonego rozwiązania równania (1). Założenia, które czyni się o funkcjach g i h, są mocniejsze od tych, które gwarantują istnienie i jednoznaczność ciągłego rozwiązania równania (1) (p. [1]), dlatego też sprawą istnienia i jednoznaczności w pracy tej nie będziemy się zajmowali. Wyniki uzyskane w tej pracy można uogólnić na inne typy równań funkcyjnych programowania dynamicznego, jednak i ta sprawa w niniejszej pracy zostanie pominięta.

2. Lokalne oszacowania rozwiązania

Na wstępie udowodnimy następujący

Lemat

Dla dowolnych liczb A i B ciąg

$$C_n = \max(A + a\,C_{n-1},\ B + b\,C_{n-1}), \qquad n=2,3,\ldots, \tag{2}$$

gdzie $C_1 = \max(A,B)$, jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right)$$

Dowód

W celu wykazania zbieżności ciągu C_n udowodnimy bezwzględną zbieżność szeregu

(3) $$C_1 + (C_2 - C_1) + \ldots + (C_{n+1} - C_n) + \ldots$$

W tym celu oszacujemy bezwzględną wartość różnicy $C_{n+1} - C_n$. Z definicji ciągu C_n wynika prawdziwość, dla $n=2,3,\ldots$, następującej alternatywy

$$C_{n+1} = A+aC_n, \quad C_n \geqslant A+aC_{n-1} \quad \text{lub} \quad C_{n+1}=B+bC_n, \quad C_n \geqslant B+bC_{n-1}.$$

Stąd wynika prawdziwość następującej alternatywy nierówności

$$C_{n+1}-C_n \leqslant a(C_n-C_{n-1}) \quad \text{lub} \quad C_{n+1}-C_n \leqslant b(C_n-C_{n-1}),$$

implikującej nierówność

$$C_{n+1}-C_n \leqslant \max\left[a(C_n - C_{n-1}),\ b(C_n - C_{n-1})\right]$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$C_{n+1}-C_n \geqslant -\max\left[a(C_n - C_{n-1}),\ b(C_n - C_{n-1})\right],$$

która wraz z poprzednią może być zapisana w postaci:

(4) $$|C_{n+1}-C_n| \leqslant \max\left[|a(C_n-C_{n-1})|,\ |b(C_n-C_{n-1})|\right] = c\,|C_n-C_{n-1}|,$$

gdzie $c = \max(a,b)$.
Rozumując analogicznie jak wyżej, dla różnicy $C_2 - C_1$ otrzymujemy oddzielnie oszacowanie

$$|C_2 - C_1| \leqslant c\,|C_1|$$

Stąd i z (4) wynika

(5) $$|C_{n+1} - C_n| \leqslant c^n |C_1|, \quad n=2,3,\ldots$$

Ponieważ $c \in (0,1)$, więc z (5) wynika bezwzględna zbieżność szeregu (3). Oznaczając $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ i przechodząc do granicy w (2), otrzymujemy dla wyznaczenia liczby C równanie

$$C = \max\,(A + aC,\ B + bC),$$

którego rozwiązaniem, jak łatwo sprawdzić, jest liczba

$$C = \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right),$$

co kończy dowód lematu.

TWIERDZENIE 1

Jeżeli dla funkcji g i h istnieją odpowiednio stałe $A_1 \leq A_2$ i $B_1 \leq B_2$ takie, że

$$(6) \qquad A_1 x \leq g(x) \leq A_2 x, \qquad B_1 x \leq h(x) \leq B_2 x$$

w pewnym przedziale $\langle 0, x_o \rangle$, to rozwiązanie $f(x)$ równania (1) spełnia nierówność

$$(7) \qquad \max\left(\frac{A_1}{1-a}, \frac{B_1}{1-b}\right)x \leq f(x) \leq \max\left(\frac{A_2}{1-a}, \frac{B_2}{1-b}\right)x \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, x_o \rangle .$$

Dowód.

Dla $x \in \langle 0, x_o \rangle$ i $y \in \langle 0, x \rangle$ na mocy założenia (6), otrzymujemy nierówność

$$A_1 y + B_1(x-y) \leq g(y) + h(x-y) \leq A_2 y + B_2(x-y),$$

stąd, oznaczając $f_1(x) = \max\limits_{0 \leq y \leq x} \left[g(y) + h(x-y)\right]$, wynika nierówność

$$\max(A_1,B_1)x = \max_{0 \leq y \leq x}\left[A_1 y + B_1(x-y)\right] \leq f_1(x) \max_{0 \leq y \leq x}\left[A_2 + B_2(x-y)\right] =$$

$$= \max(A_2,B_2)x,$$

którą po wyprowadzeniu oznaczenia $C_1^i = \max(A_i,B_i)$, $i=1,2$, możemy krótko zapisać w postaci:

$$(8) \qquad C_1^1 x \leq f_1(x) \leq C_1^2 x \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, x_o \rangle$$

Ponieważ $ay+b(x-y) \leq cx$ dla $y \in \langle 0, x \rangle$, gdzie $c = \max(a,b) < 1$, więc korzystając z (6) i (8) otrzymujemy dla $x \in \langle 0, x_o \rangle$ nierówność

$$A_1 y + B_1(x-y) + C_1^1\left[ay+b(x-y)\right] \leq g(y) + h(x-y) + f_1(ay+b(x-y)) \leq$$

$$A_2 y + B_2(x-y) + C_1^2\left[ay+b(x-y)\right]$$

Stąd, oznaczając $f_2(x) = \max\limits_{0 \leq y \leq x} \left[g(y) + h(x-y) + f_1(ay+b(x-y))\right]$, otrzymujemy nierówność

$$\max_{0 \leq y \leq x} \left[A_1y+B_1(x-y)+C_1^1(ay+v(x-y))\right] \leq f_2(x) \leq \max_{0 \leq y \leq x} \left[A_2y+B_2(x-y)+C_1^2(ay+b(x-y))\right]$$

równoważną nierówności

$$\max(A_1 + C_1^1a,\ B_1 + C_1^1b)x \leq f_2(x) \leq \max(A_2 + C_1^2a,\ B_2 + C_1^2b),$$

którą po wprowadzeniu oznaczenia $C_2^i = \max(A_i+C_1^ia,\ B_i+C_1^ib)$, $i=1,2$, możemy krótko zapisać w postaci

$$C_2^1\, x \leq f_2(x) \leq C_2^2 x, \qquad x \in \langle 0,x_0 \rangle$$

Można udowodnić indukcyjnie nierówność

$$(9) \qquad C_n^1\, x \leq f_n(x) \leq C_n^2\, x, \qquad x \in \langle 0,x_0 \rangle\ , \quad n=1,2,3,\ldots,$$

gdzie oznaczono

$$f_n(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \left[g(y) + h(x-y) + f_{n-1}(ay+b(x-y))\right], \quad n=2,3,\ldots$$

$$C_n^i = \max(A_i + C_{n-1}^i\, a,\ B_1 + C_{n-1}^i\, b), \quad n=2,3,\ldots;\ \ i=1,2.$$

Na mocy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności (p. [1]) rozwiązania równania (1) i lematu, mamy odpowiednio

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad \lim_{n \to \infty} C_n^i = \max\left(\frac{A_i}{1-a}\ \frac{B_i}{1-b}\right) \quad i=1,2,$$

co wraz z nierównością (9) daje oszacowanie (7).
Z udowodnionego twierdzenia 1 wynikają następujące wnioski.

<u>Wniosek 1</u>

Jeżeli funkcje g i h posiadają pochodną w zerze, to rozwiązanie $f(x)$ równania (1) także posiada w zerze pochodną, przy czym

$$f'(0) = \max\left(\frac{g'(0)}{1-a},\ \frac{h'(0)}{1-b}\right)$$

Dowód

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba x_0 taka, że

$$(g'(0)-\varepsilon)x \le g(x) \le (g'(0)+\varepsilon)x, \quad (h'(0)-\varepsilon)x \le h(x) \le (h'(0)+\varepsilon)x,$$
$$x \in \langle 0, x_0 \rangle.$$

Na mocy twierdzenia 1, kładąc $A_1 = g'(0)-\varepsilon$, $A_2 = g'(0)+\varepsilon$, $B_1 = h'(0)-\varepsilon$ i $B_2 = h'(0)+\varepsilon$, otrzymujemy nierówność

$$\max\left(\frac{g'(0)-\varepsilon}{1-a}, \frac{h'(0)-\varepsilon}{1-b}\right)x \le f(x) \le \max\left(\frac{g'(0)+\varepsilon}{1-a}, \frac{h'(0)+\varepsilon}{1-b}\right)x, \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle,$$

z której wynika z kolei nierówność

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \max\left(\frac{g'(0)}{1-a}, \frac{h'(0)}{1-b}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{1-c} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, x_0\rangle,$$

kończąca dowód wniosku 1.

Wniosek 2

Jeżeli funkcje g i h są liniowe, $g = Ax$ i $h = Bx$, to rozwiązanie $f(x)$ równania (1) jest także funkcją liniową, przy czym

$$f(x) = \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right)x$$

Dowód

Kładąc $A_1 = A_2 = A$ i $B_1 = B_2 = B$ i stosując twierdzenie 1 otrzymujemy tezę wniosku 2.

Wniosek 3

Jeżeli funkcje g i h są wklęsłe i mają pochodną w zerze, to dla rozwiązania $f(x)$ równania (1) prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\max\left(\frac{g(x_0)}{x_0(1-a)}, \frac{h(x_0)}{x_0(1-b)}\right) x \le f(x) \le \max\left(\frac{g'(0)}{1-a}, \frac{h'(0)}{1-b}\right) x$$

Dowód

Dla wykazania prawdziwości wniosku 3 wystarczy zauważyć, że kładąc

$$A_1 = \frac{g(x_0)}{x_0}, \quad A_2 = g'(0), \quad B_1 = \frac{h(x_0)}{x_0} \text{ i } B_2 = h'(0)$$

spełnione będą dla $x \in \langle 0, x_0 \rangle$ założenia twierdzenia 1.

UWAGA. Analogiczne oszacowanie prawdziwe będzie przy wypukłych funkcjach g i h; należy tylko zamienić rolami A_1 z A_2 i B_1 z B_2.

3. Przedłużanie rozwiązania i aproksymacja

Ze względu na prawdziwość nierówności

$$ay + b(x-y) \leq c\,x \quad \text{dla} \quad y \in \langle 0,x\rangle, \quad \text{gdzie} \quad c = \max(a,b) < 1,$$

można rozwiązanie równania (1), o ile dane jest ono w pewnym przedziale $\langle 0,x_0\rangle$, przedłużyć na cały przedział $\langle 0,+\infty)$.

Istotnie. Niech $f_0(x)$ będzie rozwiązaniem równania (1) w przedziale $\langle 0,x_0\rangle$. Wówczas jest oczywiście

$$f_0(x) = \max_{0\leq y\leq x}\left[g(y) + h(x-y) + f_0(ay + b(x-y))\right] \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0,x_0\rangle .$$

Ponieważ dla $x \in \langle 0,x_0c^{-1}\rangle$ i $y \in \langle 0,x\rangle$ jest $ay + b(x-y) \leq cx \leq x_0$, więc funkcja $g(y) + h(x-y) + f_0(ay + b(x-y))$ jest określona i ciągła (oczywiście przy niezbędnych założeniach o funkcjach g i h gwarantujących istnienie i jednoznaczność ciągłego rozwiązania) w obszarze $0\leq y\leq x$, $0\leq x\leq x_0c^{-1}$.

Wobec powyższego możemy zdefiniować funkcję

$$f_1(x) = \max_{0\leq y\leq x}\left[g(y) + h(x-y) + f_0(ay + b(x-y))\right] \quad \text{dla} \quad x \in \langle x_0,x_0c^{-1}\rangle .$$

Łatwo zauważyć, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{dla } x \in \langle 0,x_0\rangle \\ f_1(x) & \text{dla } x \in \langle x_0,x_0c^{-1}\rangle \end{cases}$$

spełnia równanie (1) w przedziale $\langle 0,x_0c^{-1}\rangle$

Po n krokach opisanego postępowania, przedłużymy rozwiązanie równania (1) na przedział $\langle 0,x_0c^{-n}\rangle$. Ze względu na dowolność n, uwagę o możliwości przedłużenia rozwiązania na cały przedział $\langle 0,+\infty)$, możemy uznać za uzasadnioną. Wiadomo jest, że wyznaczenie dokładnego rozwiązania równania (1), nawet w małym otoczeniu zera, nie jest łatwe. W monografii [1] jak i w pracach [2] i [3], dla wyznaczenia rozwiązania równania (1) w ustalonym przedziale $\langle 0, x_0\rangle$, zaleca się stosowanie metody kolejnych przybliżeń. Dowodzi się, że ciąg kolejnych przybliżeń, przy dowolnym początkowym przybliżeniu $f_0(x)$, jest zbieżny do rozwiązania. Dokładniej - jeżeli $f_0(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0,x_0\rangle$, przy czym $f_0(0) = 0$, to przy spełnieniu założeń o funkcjach g i h gwarantujących istnienie i jednoznaczność rozwiązania, ciąg

$$f_n(x) = \max_{0\leq y\leq x}\left[g(y) + h(x-y) + f_{n-1}(ay + b(x-y))\right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania równania (1) w przedziale $\langle 0,x_0\rangle$

Metoda wyznaczania przybliżonego rozwiązania równania (1), proponowana w niniejszej pracy, polega na równoczesnym stosowaniu metody kolejnych przybliżeń i metody przedłużania. Przyjmując jako początkowe przybliżenie funkcję aproksymującą rozwiązanie równania (1) w przedziale $<0,x_o>$, z błędem maksymalnym nie przekraczającym z góry zadanej liczby $\delta > 0$, możemy przy pomocy tej metody wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania (1) w dowolnym przedziale, z błędem maksymalnym także nieprzekraczającym liczby δ.

Uzasadnienie teoretyczne proponowanej metody daje następujące

TWIERDZENIE 2

Niech będą spełnione założenia twierdzenia 1 i niech $\bar{f}_o(x)$ będzie dowolną funkcją ciągłą w przedziale $<0,x_o>$ spełniającą warunki

$$\bar{f}_o(0) = 0, \quad \alpha x \leqslant \bar{f}_o(x) < \beta x \quad \text{dla} \quad x \in <0,x_o>,$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha = \max\left(\frac{A_1}{1-a}, \frac{B_1}{1-b}\right), \qquad \beta = \max\left(\frac{A_2}{1-a}, \frac{B_2}{1-b}\right).$$

Wówczas dla każdej funkcji ciągu

$$\bar{f}_n(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \left[g(y) + h(x-y) + \bar{f}_{n-1}(ay+b(x-y))\right], \; x \in <0, \frac{x_o}{c^n}>, \; n=1,2,...$$

i rozwiązania $f(x)$ równania (1), prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$(10) \qquad |f(x) - \bar{f}_n(x)| \leqslant c^n(\beta-\alpha)x \quad \text{dla} \quad x \in <0,x_oc^{-n}>, \quad n = 1,2,...$$

Dowód

Z twierdzenia 1 i z założenia wynika prawdziwość (10) dla n=1. Zakładając prawdziwość (10) dla $n \geqslant 1$, otrzymujemy dla $x \in <0,x_oc^{-n-1}>$ równość

$$|f(x) - \bar{f}_{n+1}(x)| = \Big| \max_{0 \leqslant y \leqslant x} g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y)) -$$

$$- \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \left[g(y) + h(x-y) + \bar{f}_n(ay + b(x-y))\right]\Big|$$

Ponieważ dla operacji "max" prawdziwa jest nierówność

$$\Big| \max_{p \leqslant x \leqslant q} M(x) - \max_{p \leqslant x \leqslant q} N(x)\Big| \leqslant \max_{p \leqslant x \leqslant q} |M(x) - N(x)|,$$

więc w naszym przypadku otrzymamy

$$|f(x) - \bar{f}_{n+1}(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant y \leqslant x} |f(ay + b(x-y)) - \bar{f}_n(ay + b(x-y))|$$

Stąd, ponieważ dla $x \in \langle 0, x_o c^{-n-1} \rangle$ i $y \in \langle 0, x \rangle$ jest $ay + b(x-y) \leq c\,x \leq x_o c^{-n}$, otrzymujemy korzystając z założenia indukcyjnego nierówność

$$|f(x) - \bar{f}_{n+1}(x)| \leq c^n(\beta-\alpha) \max_{0 \leq y \leq x} (ay + b(x-y)) = c^n(\beta-\alpha) \max(a,b) =$$

$$= c^{n+1}(\beta-\alpha)x$$

co kończy dowód twierdzenia 2.

UWAGA 1

z (10) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) = f(x), \quad x \in \langle 0, +\infty)$$

UWAGA 2

Dla celów numerycznych wygodnie jest przyjąć

$$\bar{f}_o(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} x$$

UWAGA 3

Chcąc wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania (1) w przedziale $\langle 0, x^* \rangle$, z maksymalnym błędem nieprzekraczającym z góry zadanej liczby $\delta > 0$, należy:

1. Wyznaczyć taki punkt x_o, aby $(\beta-\alpha)x_o < \delta$. Przy spełnieniu założeń twierdzenia 1 jest to zawsze możliwe, gdyż $\beta - \alpha > 0$ (p. założenia twierdzenia 1 i oznaczenia wyprowadzone w twierdzeniu 2).
2. Wyznaczyć liczbę

$$N = \min \{ n = 1,2,\ldots \; | x_o c^{-n} \geq x^* \}$$

Zauważmy, że liczba taka zawsze istnieje, przy oczywistym założeniu $0 < x_o < x^*$ (w przypadku $x_o \geq x^*$ nie byłoby potrzeby stosowania algorytmu) i wyznacza ona minimalną liczbę kroków w procesie przedłużania.

3. Przyjąć początkowe przybliżenie $\bar{f}_o(x)$ takie, by spełnione były założenia twierdzenia 2 (np. można przyjąć $\bar{f}_o(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} x$ i wyznaczyć funkcje

$$\bar{f}_n(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + \bar{f}_{n-1}((ay + b(x-y))], \quad n=1,2,\ldots,N$$

Maksymalny błąd dla funkcji $\bar{f}_N(x)$ nie przekroczy liczby

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant x_o c^{-N}} \left[(\beta-\alpha)c^N x\right] = (\beta-\alpha)x_o \leqslant \delta$$

Wpłynęło do Redakcji 16 maja 1972 r.

LITERATURA

1. Bellman R. - Dynamic Programming. Princeton, 1957.
2. Kwapisz M. - On a certain functional equation. Colloquium Mathematicum, Vol. 18, 1967.
3. Jankowski T., Kwapisz M. - On the convergence of approximate solutions of a dynamic programming equation Colloquium Mathematicum, Vol. 21, fafc. 1, 1970.

О ЦИФРОВЫХ АСПЕКТАХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р е з ю м е

В статьи показали некоторые местные оценки решения уравнения (1), которые затем используются в предлагаемом автором методе определения приближенного решения основанном на методе последовательных приближений и продолжении решения.

CERTAIN NUMERICAL ASPECTS OF SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS OF DYNAMIC PROGRAMMING

S u m m a r y

Certain local evaluations of equation solution (1) are given, which in turn are used in suggested by the autor, method for, evaluating the approximated solution based on the method of subsequent approximations and extending the solution.