ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 23 Nr kol. 485

J. Szpilecki
Instytut Fizyki

WPŁYW DYSPERSJI PRZESTRZENNEJ NA ROZCHODZENIE SIĘ FAL W PLAZMIE CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA

Streszczenie. W pracy rozpatrzono równanie różniczkowe, pozwalające określić amplitudy fal rozchodzących się w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka, wyprowadzone w jednej z poprzednich prac. Uwzględnia ona dwa rodzaje dyspersji przestrzennej, zależnej od rodzaju symetrii. W jednym przypadku problem upraszcza się. Równanie daje się sprowadzić do typu eliptycznego, separowalnego. W tym przypadku związki dyspersyjne wyprowadzone w jednej z poprzednich prac ulegają stosunkowo nieznacznej zmianie. Dyskusji tych zmian poświęcono niniejszą pracę.

1. Wstęp

W pracy [1] wprowadzono równanie macierzowe, opisujące rozchodzenie się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka z uwzględnieniem nieliniowości przenikalności elektrycznej i magnetycznej, jak też dyspersji przestrzennej.

Na wyznaczenie amplitud tych fal otrzymano następujące równanie różniczkowe:

$$A(\partial C/\partial t) + B(\partial C/\partial x) + D(\partial C/\partial y) + E(\partial C/\partial z) + FC +$$
$$G(\partial^2 C/\partial t\partial x) + I(\partial^2 C/\partial t\partial y) + J(\partial^2 C/\partial t\partial z) +$$
$$K(\partial^3 C/\partial t\partial x^2) + L(\partial^3 C/\partial t\partial x\partial y) + M(\partial^3 C/\partial t\partial y^2) +$$
$$N(\partial^3 C/\partial t\partial y\partial z) + O(\partial^3 C/\partial t\partial z^2) + P(\partial^3 C/\partial t\partial x\partial y) +$$
$$Q(\partial^2 C/\partial x^2) + R(\partial^2 C/\partial x\partial y) + S(\partial^2 C/\partial y^2) + T(\partial^2 C/\partial y\partial z) +$$
$$U(\partial^2 C/\partial z^2) + V(\partial^2 C/\partial x\partial z) = \overline{N}_0 + \overline{N}_1, \tag{1}$$

gdzie A, B, D, E, F, G, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V - macierze kwadratowe rzędu, zależnego od ilości uwzględnionych składowych.

W przypadku n składowych fal rząd wynosi

$$20(1 + 2n).$$

C - wektor - kolumna o elementach E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, N_1, N_2.
E - wektor natężenia pola elektrycznego, H - wektor natężenia pola magnetycznego, P - wektor polaryzacji elektrycznej, M - wektor namagnesowania. V_1, V_2 - prędkości nośników ładunków, N_1, N_2 - koncentracja nośników. $\overline{N}_o$, $\overline{N}_1$ - wektory kolumny, uwzględniające wyrazy nieliniowe.

Szczegółowa postać macierzy A - V została podana w [1]. W dalszym tekście zostaną one przedyskutowane po dokonaniu pewnych dopuszczalnych uproszczeń.

Praca jest kontynuacją kilku prac poprzednich, w których stopniowano trudność rozpatrywanego zagadnienia. I tak w pracy [2, 3] przedyskutowano związki dyspersyjne dla stanu ustalonego na podstawie równania

$$\det F = 0. \tag{2}$$

W pracy [4] przedyskutowano stan nieustalony, opisany równaniem różniczkowym

$$A(\partial C/\partial t) + FC = 0. \tag{3}$$

W pracy [5] przedyskutowano postać tensora podatności elektrycznej, magnetycznej i oporu charakterystycznego.

Z uwzględnienia dyspersji przestrzennej wynika konieczność w przypadku liniowym uwzględnienia pełnej postaci lewej strony równania (1).

Jest to przedmiotem niniejszej pracy.
W porównaniu z poprzednimi przypadkami zagadnienia komplikuje się ze względu na konieczność uwzględnienia warunków brzegowych.

2. Sformułowanie zagadnienia

2.1. Równanie różniczkowe

W układzie współrzędnych prostokątnych Kartezjusza x, y, z przyjmuje się próbkę ciała stałego w kształcie graniastosłupa o krawędziach równoległych do osi współrzędnych, o długościach odpowiednio l_x, l_y, l_z, z jednym narożem w początku współrzędnych, w jednorodnym polu elektrycznym i magnetycznym. Wobec tego muszą być spełnione znane z teorii elektromagnetyzmu warunki ciągłości wektorów natężenia i indukcji elektrycznej i magnetycznej. Z warunków tych wynikają pewne warunki dla wielkości występu-

jących w zagadnieniu. Dla pozostałych wielkości V_i, N_i, $i = 1, 2$ należy przyjąć warunki zerowe.

Przyjmując rozwiązanie jednorodnej części równania (1) w postaci

$$C = \overline{C}\, e^{pt}, \tag{4}$$

gdzie

p - parametr do wyznaczenia i uwzględniając w macierzach współczynników tylko podmacierze różne od zera, otrzymujemy następującą modyfikację równania (1):

$$(Ap + F)\overline{C} + \left[(G_2, G_3)p + B\right](\partial\overline{C}/\partial x) + \left[(I_2, I_3)p + D\right](\partial\overline{C}/\partial y) +$$
$$\left[(J_2, J_3)p + E\right](\partial\overline{C}/\partial z) + \left[(K_2, K_3)(p + j\omega), (K_6, K_7)\right](\partial^2\overline{C}/\partial x^2) +$$
$$+ \left[(M_2, M_3)(p + j\omega), K_6, K_7\right](\partial^2 C/\partial y^2) + \left[(O_2, O_3)(p + j\omega),\right.$$
$$\left. K_6, K_7\right], (\partial^2\overline{C}/\partial z^2) + \left[(L_2, L_3)(p + j\omega)\right](\partial^2\overline{C}/\partial x\partial y) + \left[(N_2, N_3)(p +\right.$$
$$\left. + j\omega)\right], (\partial^2\overline{C}/\partial y\partial z) + \left[(P_2, P_3)(p + j\omega)\right](\partial^2\overline{C}/\partial x\partial z) = 0 \tag{5}$$

Macierze współczynników posiadają następującą postać:

$$B = \begin{bmatrix} B_1, & B_2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ B_3, & B_1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & B_8, & 0, & B_{12}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & B_9, & 0, & B_{13} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & B_4, & 0, & B_{10}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & B_5, & 0, & B_{11} \\ 0, & 0, & 0, & B_6, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & B_7, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \end{bmatrix} \tag{6}$$

Macierz trzeciego rzędu B_1 posiada różne od zera następujące elementy $b_{3,2} = -b_{2,3} = 1$,

B_4, B_5 - macierz diagonalna 3 rzędu o elementach $V_{1,o,x}$ lub $V_{2,o,x}$,

B_6, B_7 - macierz $-j(2\overline{A}/M_o^2)k_{r,x} \cdot F_{23}$ lub $j(2\overline{B}/P_o^2)k_{r,x} \cdot F_{25}$

B_8, B_9 - wiersz $N_{1,o}$, 0,0 lub $N_{2,o}$, 0,0

B_{10}, B_{11} - kolumna o elementach $c_1^2/N_{1,o}$, 0, 0 lub $c_2^2/N_{2,o}$, 0, 0

B_{12}, B_{13} - element $V_{1,o,x}$ lub $V_{2,o,x}$.

Macierz D posiada analogiczną postać.

D_1 posiada różne od zera elementy $d_{1,3} = -d_{3,1} = 1$

D_4, D_5 macierz diagonalna 3 rzędu o elementach $V_{1,o,y}$ lub $V_{2,o,y}$,

D_6, D_7 macierz $-j(2\overline{A}/M_o^2)k_{r,y} \cdot F_{23}$ lub $j2(\overline{B}/P_o^2)k_{r,y} \cdot F_{25}$

D_8, D_9 - wiersz 0, $N_{1,o}$, 0 lub 0, $N_{2,o}$, 0

D_{10}, D_{11} - kolumna o elementach 0, $c_1^2/N_{1,o}$, 0 lub 0, $c_2^2/N_{2,o}$, 0

D_{12}, D_{13} - element $V_{1,o,y}$ lub $V_{2,o,y}$.

Podobną postać posiada macierz E.

E_1 posiada różne od zera elementy $E_{2,1} = -E_{1,2} = 1$,

E_4, E_5 - macierz diagonalna 3 rzędu o elementach $V_{1,o,z}$ lub $V_{2,o,z}$,

E_6, E_7 - macierze $-j(2\overline{A}/M_o^2)k_{r,z} \cdot F_{23}$ lub $j(2\overline{B}/P_o^2)k_{r,z} \cdot F_{25}$

E_8, E_9 - wiersz 0,0, $N_{1,o}$ lub 0, 0, $N_{2,o}$

E_{10}, E_{11} - kolumna o elementach 0, 0, $c_1^2/N_{1,o}$ lub 0, 0, $c_2^2/N_{2,o}$,

E_{12}, E_{13} - element $V_{1,o,z}$ lub $V_{2,o,z}$.

$$pG_2 + j\omega B_2 = (j\omega + p)(jk_{r,x}K_2 + jk_{r,y}L_2 + jk_{r,z}P_2) + j\omega\delta_{i,k,1} \tag{7}$$

$$pI_2 + j\omega D_2 = (j\omega + p)(jk_{r,y}M_2 + jk_{r,x}L_2 + jk_{r,z}P_2) + j\omega\delta_{i,k,2}$$

$$pJ_2 + j\omega E_2 = (j\omega + p)(jk_{r,z}O_2 + jk_{r,x}P_2 + jk_{r,y}N_2) + j\omega\delta_{i,k,3}$$

Analogicznie zbudowane są macierze ze wskaźnikiem 3, tylko w miejsce $\delta_{i,k,j}$ występują w nich $-\gamma_{i,k,j}$.

Pozostałe macierze 3 rzędu

$$\begin{aligned}
K_2 &= 1/c\left\{\mathrm{diag}(\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}) + \mathrm{diag}(\Delta_{2,1}, 0, 0)\right\},\\
M_2 &= 1/c\left\{\mathrm{diag}(\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}) + \mathrm{diag}(0, \Delta_{2,2}, 0)\right\}\\
O_2 &= 1/c\left\{\mathrm{diag}(\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}) + \mathrm{diag}(0, 0, \Delta_{2,3})\right\},\\
L_2 &= 1/c\ \mathrm{diag}(\Delta_{2,1}, \Delta_{2,2}, 0)\\
N_2 &= 1/c\ \mathrm{diag}(\Delta_{2,1}, 0, \Delta_{2,3})\\
P_2 &= 1/c\ \mathrm{diag}(0, \Delta_{2,2}, \Delta_{2,3}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Podobnie zbudowane są macierze ze wskaźnikiem 3, tylko w miejsce $\Delta_{r,i,k}$ występują w nich $-\Gamma_{r,i,k}$.

$$K_6 = M_6 = O_6 = (2\bar{A}/M_o^2)\begin{bmatrix} 0, & -M_{o,z}, & M_{o,y} \\ M_{o,z}, & 0, & -M_{o,x} \\ -M_{o,y}, & M_{o,x}, & 0 \end{bmatrix} = (2\bar{A}/M_o^2)\ .\ F_{23}$$

$$K_7 = M_7 = O_7 = (2\bar{B}/P_o^2)\begin{bmatrix} 0, & -P_{o,z}, & P_{o,y} \\ P_{o,z}, & 0, & -P_{o,x} \\ -P_{o,y}, & P_{o,x} & 0, \end{bmatrix} = (2\bar{B}/P_o^2)\ .\ F_{25} \tag{9}$$

M_o, P_o - wektor stałej składowej namagnesowania lub polaryzacji.

2.2. Warunki brzegowe

Wykorzystując tensorowe zależności [5] między D i E, P i E, M i H, B i H

$$D = \varepsilon_{i,k}\, E, \qquad P = \varkappa_{i,k}\, E$$
$$E = \varepsilon^{-1}_{i,k}\, D \qquad P = \varkappa_{i,k}\, \varepsilon^{-1}_{i,k}\, D \tag{10}$$

i analogiczne dla wielkości magnetycznych, otrzymujemy następujące warunki brzegowe:

Dla $x = 0$ i $x = l_x$

$$E_{1,x} = \left[1 - (\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,1} - (\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\varepsilon_{3,1}\right]^{-1}\Big\{(\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,x}D_{2,x}$$
$$+ \left[(\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,2} + (\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\varepsilon_{3,2}\right]E_{2,y} + \left[(\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,3} +\right.$$
$$\left. + (\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\varepsilon_{3,3}\right]E_{2,z}\Big\} \tag{11}$$

$$E_{1,y} = E_{2,y}$$

$$E_{1,z} = E_{2,z}$$

$$P_{1,x} = (\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,x}D_{2,x} + \left[(\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,1} + (\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\right.$$
$$\left.\varepsilon_{3,1}\right]E_{1,x} + \left[(\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,2} + (\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\varepsilon_{3,2}\right]E_{2,x}$$
$$+ \left[(\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,y}\varepsilon_{2,3} + (\varkappa_{i,k}\varepsilon^{-1}_{i,k})_{x,z}\varepsilon_{3,3}\right]E_{2,z} \tag{12}$$

W składowych $P_{1,y}$, $P_{1,z}$ należy składowe xx, xy, xz zastąpić przez yx, yy, yz lub zx, zy, zz.
Analogiczną postać mają warunki dla wektorów magnetycznych.
Dla $y = 0$ i $y = l_y$

$$E_{1,x} = E_{2,x}$$

$$E_{1,z} = E_{2,z}$$

$$E_{1,y} = \left[1 - (\delta^{-1}_{i,k})_{y,x}\delta_{1,2} - (\delta^{-1}_{i,k})_{y,z}\delta_{3,2}\right]^{-1} \cdot \Big\{(\delta^{-1}_{i,k})_{y,y}D_{2,y} + \left[(\delta^{-1}_{i,k})_{y,x}\delta_{1,1} + (\delta^{-1}_{i,k})_{y,z}\delta_{3,1}\right]E_{2,x} + \left[(\delta^{-1}_{i,k})_{y,x}\delta_{1,3} + (\delta^{-1}_{i,k})_{y,z}\delta_{3,3}\right]E_{2,z}\Big\} \tag{13}$$

$P_{1,x}$, $P_{1,y}$, $P_{1,z}$ zbudowane są analogicznie jak poprzednio z tym, że w miejsce $E_{1,x}$ wchodzi $E_{1,y}$, wartości zaś $E_{1,x}$ i $E_{1,z}$ otrzymuje się z warunków brzegowych.
Dla $z = 0$ i $z = l_z$, mamy

$$E_{1,x} = E_{2,x}, \quad E_{1,y} = E_{2,y}$$

$$E_{1,z} = \left[1 - (\delta^{-1}_{i,k})_{z,x}\delta_{1,3} - (\delta^{-1}_{i,k})_{z,y}\delta_{2,3}\right]^{-1} \Big\{(\delta^{-1}_{i,k})_{z,z}D_{z,z} + \left[(\delta^{-1}_{i,k})_{z,x}\delta_{1,1} + (\delta^{-1}_{i,k})_{z,y}\delta_{2,1}\right]E_{2,x} + \left[(\delta^{-1}_{i,k})_{z,x}\delta_{1,2} + (\delta^{-1}_{i,k})_{z,y}\delta_{2,2}\right]E_{2,y}\Big\} \tag{14}$$

$P_{1,x}$, $P_{1,y}$, $P_{1,z}$ są analogicznie zbudowane jak dla x, z odpowiednimi wartościami $E_{1,x}$, $E_{1,y}$, $E_{1,z}$.
Analogicznie zbudowane są wyrażenia dla wielkości magnetycznych.

2.3. Dwa przypadki sformułowania problemu

Dyspersja przestrzenna charakteryzowana jest przez następujące tensory

$$\delta_{i,k,j}, \quad \gamma_{i,k,j}, \quad \Delta_{i,k,j}, \quad \Gamma_{i,k,j}.$$

Dla pewnych symetrii kryształu mogą znikać $\delta_{i,k,j}$, $\gamma_{i,k,j}$. Dla innych $\Delta_{i,k,j}$, $\Gamma_{i,k,j}$.

W drugim przypadku znikają macierze L, N, P, R, T, V, odpowiadające mieszanym pochodnym. Ze względu na jednakowy współczynnik przy drugich pochodnych, równanie jest typu eliptycznego i separowalne.

Rozpatrzmy drugi typ równania.

Wprowadzając stałe separacji k_i, $i = 1, 2, 3$, otrzymujemy następujące równania na wyznaczenie funkcji $T(t)$, $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$, których iloczynem jest całka szczególna równania jednorodnego.

$$dT/dt = -k_1 T$$

$$(B - k_1 G)dX/dx + (Q - k_1 K)d^2X/dx^2 + k_2^2 X = 0$$

$$(D - k_1 I)dY/dy + (S - k_1 M)d^2Y/dy^2 + k_3^2 Y = 0 \tag{15}$$

$$(F - k_1 A)Z + (E - k_1 J)dZ/dz + (U - k_1 O)d^2Z/dz^2 - (k_2^2 + k_3^2)Z = 0$$

2.4. Postać rozwiązania

Rozwiązanie równania (5) z warunkiem znikania tensorów $\Delta_{i,k,j}$, $\Gamma_{i,k,j}$ przyjmujemy w postaci sumy trzech rozwiązań, z których każde spełnia tylko dla jednej współrzędnej niejednokrotne warunki brzegowe, dla pozostałych zaś warunki jednorodne. W tym celu dobieramy odpowiednio rozwiązania równań (15). Trzy ostatnie równania mają zasadniczo tę samą postać oraz trzy parametry, pozwalające wpływać na charakter tych rozwiązań. Ze względu na periodyczne warunki brzegowe przyjmujemy następujące rozwiązania: w przypadku niejednorodnych warunków brzegowych

$$e^{\alpha_{1,k}x}\cos(\alpha_{2,k}x) \tag{16}$$

w przypadku zaś jednorodnych

$$e^{\alpha_{1,k}Y,Z}\sin(\alpha_{2,k}Y,Z) \tag{17}$$

i podobnie dla dwu pozostałych osi współrzędnych.

Funkcje te spełniają warunek ortogonalności w przedziale $(0, \pi)$. Wobec tego należy przyjąć

$$\alpha_2 = \pi m_i/l_i \ . \ i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

$$m_1 = x, \ m_2 = y, \ m_3 = z, \ l_1 = l_x, \ l_2 = l_y, \ l_3 = l_z.$$

Spełnienie niejednorodnego warunku brzegowego wymaga rozwinięcia funkcji prawej strony w szereg funkcji własnych problemu. Ponieważ wartości tych funkcji są stałe, należy wyliczyć współczynniki następującego rozwinięcia:

$$C_o = \sum_i C_{o,i}\, e^{\alpha_{1,i}X}\cos(\alpha_{2,i}X). \tag{19}$$

W celu wyliczenia k-tego współczynnika, mnożymy równanie przez k-tą funkcję własną i całkujemy w przedziale $(0, l_x)$. Daje to na $C_{o,k}$

$$C_{o,k} = -4\alpha_{1,k}^2 C_o/(\alpha_{1,k}^2 + \alpha_{2,k}^2)(e^{\alpha_{1,k} l_x} - 1) \tag{20}$$

2.5. Dyskusja wartości własnych

Możliwość istnienia przyjętego typu rozwiązań można sprawdzić np. na równaniu na funkcję X

$$\det\left\{\begin{bmatrix}(j\omega + p)j(k_{r,x}K_2 + k_{r,y}L_2 + k_{r,z}P_2) + j\omega\delta_{1,k,1} & B - B_2 - B_3 \\ (j\omega + p)j(k_{r,x}K_3 + k_{r,y}L_3 + k_{r,z}P_3) + j\omega\delta_{1,k,1} & \end{bmatrix}\cdot\right.$$

$$\left.(\alpha_1 \pm j\alpha_2) + \left[(K_2, K_3)(p + j\omega), K_6, K_7\right](\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \pm 2j\alpha_1\alpha_2) - k_2^2\right\} = 0. \tag{21}$$

Ponieważ $\alpha_2 = k\pi/l_x$, $k = 1, 2, \ldots$, jest to równanie na wyznaczenie α_1. Wielkość tę można wyznaczyć jednoznacznie dzięki temu, że musi być spełnione niezależnie równanie na składową rzeczywistą i urojoną. W równaniu na składową urojoną nie wchodzi k_2^2, więc pozwala ono wyznaczyć α_1. Następnie przez dobór k_2^2 powodujemy spełnienie równania na składową rzeczywistą.

Gdyby wielkość α_1 okazała się zespoloną, można część urojoną doliczyć do α_2 i następnie przyjmując $\alpha_2 = k\pi/l_x$, wyeliminować tę składową.

Na wyznaczenie składowej urojonej otrzymujemy (poza $\alpha_1^2 = 0$, $\alpha_2^4 = 0$)

$$\det\left\{(p\alpha_1 \mp \omega\alpha_2)(k_{r,z}K_2 + k_{r,y}L_2 + k_{r,z}P_2) + K_2\left[\omega(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \pm 2p\alpha_1\alpha_2\right]\right\} = 0 \tag{22}$$

i analogiczne równanie dla wskaźnika 3.

Macierze K_2, L_2, P_2, K_3, L_3, P_3 są rzędu 3.

Otrzymane równanie jest funkcją parametru p, który jest na razie dowolny.

Podobnie można postąpić z równaniem na funkcję Y o analogicznej postaci. Wyznaczymy z niego części rzeczywistą i urojoną wartości własnej β_1, $\beta_2 = l\pi/l_y$, $l = 1, 2, \ldots$, oraz stałą k_3^2.

Równanie dla funkcji Z jest nieco bardziej skomplikowane, ale zasadniczo posiada tę samą postać. W tym równaniu parametrem do wyznaczenia jest p. Rozwiązanie tego równania wymaga jednak wstawienia w nim wartości stałych k_2^2, k_3^2. Postępowanie jest analogiczne jak w poprzednich przypadkach. Wygodniej jednak posłużyć się równaniem (5), po podstawieniu w nim $\alpha_2 = k\pi/l_x$, $\beta_2 = l\pi/l_y$, $\gamma_2 = m\pi/l_z$ oraz wyliczonych wartości α_1, β_1, γ_1. Należy przy tym uwzględnić wszystkie kombinacje znaków przy α_2, β_2, γ_2.

Otrzymane równanie algebraiczne jest zbudowane analogicznie, jak równanie rozpatrzone w pracy [2] i [4], więc pozwala na porównanie wpływu dyspersji przestrzennej, nawet bez dokładnej znajomości wielkości α_1, β_1, γ_1, (które są funkcją parametru p).

2.6. Całka zupełna. Warunki początkowe

Całka zupełna równania (5) posiada następującą postać (przy czym występują funkcje sin lub cos, zależnie od warunków brzegowych)

$$C = \sum A_{k,l,m,n,o,p,r} \cdot e^{p_{k,l,m,n,o,p,r}t} \, e^{\alpha_{1,k,n,r}x} \begin{Bmatrix} \sin \alpha_{2,k,r}x \\ \cos \alpha_{2,k,r}x \end{Bmatrix}$$

$$e^{\beta_{1,l,o,r}y} \begin{Bmatrix} \sin \beta_{2,l,r}y \\ \cos \beta_{2,l,r}y \end{Bmatrix} e^{\gamma_{1,m,p,r}z} \begin{Bmatrix} \sin \gamma_{2,m,r}z \\ \cos \gamma_{2,m,r}z \end{Bmatrix} \tag{23}$$

We wskaźnikach uwzględniono 3 rozwiązania, odpowiadające trzem warunkom brzegowym (r) oraz fakt, że do poszczególnych wartości α_2, β_2, γ_2 może przynależeć kilka wartości α_1, β_1, γ_1.

Wskaźniki te mogą zmieniać się od 1 do ∞.

Warunek początkowy $t = 0$, $C = T_o$ - wektor kolumna wartości początkowych, można spełnić rozwijając prawą stronę ostatniej równości w szereg funkcji własnych zagadnienia. Pozwala to przy uwzględnieniu, że współczynniki w przypadku funkcji sin i cos są jednakowe, otrzymać następujące wyrażenia na współczynniki szeregu (23)

$$A_{k,l,m,n,o,p,r} = - T_o(4\alpha^2_{1,k,n,r}/\left[(\alpha^2_{1,k,n,r} + \alpha^2_{2,k,r}) \cdot \right.$$

$$\left.(e^{\alpha_{1,k,n,r}l_x} - 1)\right])(4\beta^2_{1,k,c,r}/\left[(\beta^2_{1,l,c,r} + \beta^2_{2,l,r}) \cdot \right.$$

$$\left.(e^{\beta_{1,l,c,r}l_y} - 1)\right])(4\gamma^2_{1,m,p,r}/\left[(\gamma^2_{1,m,p,r} + \gamma^2_{2,m,r}) \cdot \right.$$

$$\left.(e^{\gamma_{1,m,p,r}l_z} - 1)\right]). \tag{24}$$

3. Porównanie otrzymanych wyników z poprzednio otrzymanymi

W sposób wygodny można porównać wpływ dyspersji przestrzennej na zachowanie się plazmy, pisząc równanie charakterystyczne w postaci

$$\det\Big\{(A_p + F) + \Big[(G_2, G_3)p + B\Big](\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + \Big[(I_2, I_3)p + D\Big] \cdot (\beta_1 \pm jl\pi/l_y) + \Big[(J_2, J_3)p + E\Big](\gamma_1 \pm jm\pi/l_z) + \Big[(K_2, K_3)(p + j\omega), K_6, K_7\Big](\alpha_1 \pm jk\pi/l_x)^2 + \Big[(M_2, M_3)(p + j\omega), K_6, K_7\Big] \cdot (\beta_1 \pm jl\pi/l_y)^2 + \Big[(O_2, O_3)(p + j\omega), K_6, K_7\Big](\gamma_1 \pm jm\pi/l_z)^2\Big\} = 0. \tag{25}$$

Jeżeli podstawimy tu wyznaczone z poprzednich równań wielkości α_1, β_1, γ_1 wyrażone w funkcji p, otrzymamy równanie na wyznaczenie p. W pracy [4] rozpatrywano równanie

$$\det(Ap + F) = 0. \tag{26}$$

Wprowadzając oznaczenie typu

$$L(B, D, E) = B(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + D(\beta_1 \pm jl\pi/l_y) + E(\gamma_1 \pm jm\pi/l_z) \tag{27}$$

i podobnie $L^2(B, D, E)$ wyrażenie, w którym w miejsce pierwszych potęg wartości własnych występują ich kwadraty, można napisać zmodyfikowane elementy macierzy $Ap + F$

$F_1 + L(B_1, D_1, E_1)$

$A_1p + F_2 + L\Big[(G_2p + B_2), (I_2p + D_2), (J_2p + E_2)\Big] + L^2\Big[K_2(p + j\omega), M_2(p + j\omega, O_2(p + j\omega)\Big]$

$A_3p + F_4 + L(G_3p + B_3, I_3p + D_3, J_3p + E_3) + L^2\Big[K_3(p + j\omega), M_3(p + j\omega), O_3(p + j\omega)\Big]$

$F_8 + L(N_8, D_8, E_8)$

$A_5p + F_9 + L(B_{12}, D_{12}, E_{12})$

$A_6p + F_{11} + L(B_{13}, D_{13}, E_{13})$

$A_7p + F_{16} + L(B_4, D_4, E_4)$

$F_{17} + L(B_{10}, D_{10}, E_{10})$

$A_8p + F_{18} + L(B_5, D_5, E_5)$

$F_{19} + L(B_{11}, D_{11}, E_{11})$

$A_9p + F_{24} + L(B_6, D_6, E_6) + L^2(K_6, K_6, K_6)$

$$A_{10}p + F_{26} + L(B_7, D_7, E_7) + L^2(K_7, K_7, K_7). \tag{28}$$

Natomiast elementy $A_2p + F_3$, $A_4p + F_5$, F_6, F_7, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{20}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{25} nie ulegają zmianie.
Dzięki temu dyskusję porównawczą można przeprowadzić analogicznie jak w pracy [4]. Przedyskutowano w niej szereg przypadków szczególnych.
Równanie wyznacznikowe (25) daje się rozłożyć na 7 równań. Ze względu na ich symetrię w składowych pola elektrycznego i magnetycznego, wystarczy rozpatrzeć 4 równania

$$\det\left[A_6p + F_{11} + L(B_{13}, D_{13}, E_{13})\right] = 0 \tag{29}$$

$$\det\left[A_8p + F_{18} + L(B_5, D_5, E_5)\right] = 0 \tag{30}$$

$$\det\left[A_9p + F_{24} + L(B_6, D_6, E_6) + L^2\left[K_6\right]\right] = 0 \tag{31}$$

$$\det\begin{pmatrix} \overline{F}_1, & \overline{A_1p + F_2} \\ \overline{A_3p + F_4}, & \overline{F_1} \end{pmatrix} = 0. \tag{32}$$

Szczegółowo równania te posiadają następującą postać
Równanie (29)

$$p + j\omega_r - j(\vec{V}_{2,o}\vec{k}_r) + V_{2,o,x}(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + V_{2,o,y}(\beta_1 \pm jl\pi/l_y)$$

$$+ V_{2,o,z}(\gamma_1 \pm jm\pi/l_z) = 0 \tag{29}$$

w którym występują dodatkowe stałe składowe wektora prędkości nośnika 2.
Równanie (30), które po wprowadzeniu oznaczenia

$$\bar{p} = p + 1/\tau_2 + j\omega_r + V_{2,o,x}(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + \ldots \tag{33}$$

sprowadza się do takiej samej postaci, jak w pracy [4], więc daje się rozszczepić na 2 równania

$$\bar{p} = 0$$

$$\bar{p}^2 + (e_2/m_2c)^2(B_{o,x}^2 + B_{o,y}^2 + B_{o,z}^2) = 0 \tag{34}$$

Równanie (31) po wprowadzeniu w miejsce k_r^2 wielkości

$$\bar{k}_r^2 = k_r^2 + j\left[k_{r,x}(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + \ldots\right] - \left[(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x)^2 + \right.$$

$$\left. + (\beta_1 \pm jl\pi/l_y)^2 + (\gamma_1 \pm jm\pi/l_z)^2\right] \tag{35}$$

posiada podobną postać, jak w pracy [4] i daje się rozszczepić na dwa równania

$$p + j\omega_r = 0$$

$$(p + j\omega_r)^2\left[1 + M_o^2(\bar{\alpha}^2/M_o^2)\right] + 2(\bar{\alpha}/M_o)(p + j\omega_r)\left\{M_{o,x}\left[\bar{\delta}(2\bar{A}/M_o^2)\,.\right.\right.$$

$$\left.\left. M_{o,x}\bar{k}_r^2 + H_{o,x}\right] + \ldots\right\} + \left\{\left[M_{o,x}\,\bar{\delta}\,2\bar{A}/M_o^2 k_r^2 + H_{o,x}\right]^2 + \ldots\right\} = 0 \tag{36}$$

W równaniu (32) $\bar{F}_1$ powstaje z F_1 przez podjęcie od składowych $k_{r,x}$, $k_{r,y}$, $k_{r,z}$ odpowiednio $\alpha_1 \pm jk\pi/l_x$, $\beta_1 \pm jl\pi/l_y$, $\gamma_1 \pm jm\pi/l_z$.

$$A_1p + F_2 = A_1p + F_2 + (j\omega_r/c)\left\{\delta_{i,k,1}(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + \right.$$

$$\left. + \delta_{i,k,2}(\beta_1 \pm jl\pi/l_y) + \delta_{i,k,3}(\gamma_1 \pm jm\pi/l_z)\right\} \tag{37}$$

Podobna jest postać $A_3p + F_4$ z tym, że występują w niej wielkości odnoszące się do pola elektrycznego.

Wprowadzone więc zmiany są takiego rodzaju, że pozwalają na podobne traktowanie równania (32) jak w pracy [4] z nieznacznymi tylko zmianami oznaczeń.

Podobnie jak w pracy [4] można przedyskutować równanie, powstałe przez eliminację V_i, N_i, $i = 1, 2$, przez co macierze współczynników w równaniu redukują się do 12 rzędu. Wystarczy w tym celu wprowadzić w poprzednich wzorach [4] nowych wielkości (28). W tym przypadku równanie charakterystyczne daje się rozszczepić na 3 równania, z których 2 pokrywają się z otrzymanymi w poprzednim przypadku. Ze względu na symetrię względem pola

elektrycznego i magnetycznego, wystarczy rozpatrzeć jedno z nich, mianowicie (31). W miejsce równania (32) otrzymuje się

$$\det\begin{pmatrix} \bar{F}_1, & \overline{A_1p + F_2} \\ \overline{A_3p + F_4 - F_4'}, & \overline{F_1 - F_1'} \end{pmatrix} = 0. \tag{38}$$

Występujące tu w porównaniu z (32) nowe macierze $\bar{F}_4'$ i $\bar{F}_1'$, obliczają się następująco:

$$\bar{F}_4' = (4\pi/c)\left\{(\bar{\alpha}_1)^{-1}(N_1e_1^2/m_1) - (\bar{\alpha}_2)^{-1}(N_2e_2^2/m_2)\right\} \tag{39}$$

$$(\bar{\alpha}_1) = (\overline{A_7p + F_{16}}) - \bar{F}_{17}(\overline{A_5p + F_9})^{-1}\bar{F}_8 \tag{40}$$

$$(\bar{\alpha}_2) = (\overline{A_8p + F_{18}}) - \bar{F}_{19}(\overline{A_6p + F_{11}})^{-1}\bar{F}_{10} \tag{41}$$

$\overline{A_7p + F_{16}}$ powstaje z $F_7p + F_{16}$ przez zastąpienie $p + 1/\tau_1 + j\omega_r$ przez $p + 1/\tau_1 + j\omega_r + V_{1,o,x}(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) + \ldots$

$$\overline{A_5p + F_9} = A_5p + F_9 - 2j\left[V_{1,o,x}(k_{r,x} + j(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x)) + \ldots\right] \tag{42}$$

$$\bar{F}_{17} = -j(c_1^2/N_{1,o})\begin{pmatrix} k_{r,x} + j(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x) \\ k_{r,y} + j(\beta_1 \pm jl\pi/l_y) \\ k_{r,z} + j(\gamma_1 \pm jm\pi/l_z) \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\bar{F}_8 = -jN_{1,o}\left[k_{r,x} + j(\alpha_1 \pm jk\pi/l_x),\ k_{r,y} + j(\beta_1 \pm jl\pi/l_y),\ k_{r,z} + j(\gamma_1 \pm jm\pi/l_z)\right] \tag{44}$$

$$\bar{F}_1' = (\bar{\alpha}_1)^{-1}F_{14}F_6 + (\bar{\alpha}_2)^{-1}F_{21}F_7 = (4\pi/c^2)\left[-(\bar{\alpha}_1)^{-1}\cdot(N_1c_1^2/m_1) + (\bar{\alpha}_2)^{-1}(N_2c_2^2/m_2)\right]\left\{-(\beta_{1,i,k}) + j((D_{i,1,k}), (D_{1,2,k}), (D_{1,3,k}))\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix}\right\} \tag{45}$$

Przejście do macierzy $(\bar{\alpha}_1)^{-1}$, $(\bar{\alpha}_2)^{-1}$ może być dokonane podobnie jak w [4]. Podobne uwagi dotyczą rozwiązania równania (38).

Otrzymane tu równania, mimo formalnego podobieństwa, komplikują się wskutek zależności α_1, β_1, γ_1 od p. Dlatego będą one przedyskutowane w innej pracy.

LITERATURA

1. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz." 1969, z. 14, s. 69-95.
2. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz." 1969, z. 14, s. 97-120.
3. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz." 1970, z. 15, s.429-446.
4. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz." 1973, z. 21, s.103-114.
5. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz." 1973, z. 21, s.115-127.

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА СО СВОЙСТВАМИ ФЕРРОЭЛЕКТРИКА И ФЕРРОМАГНЕТИКА

Р е з ю м е

Автор, основываясь на прежних своих работах, сравнивает дисперсионные зависимости из прежних работ с зависимостью, полученной с учётом пространственной дисперсии и её влияние на распространение волн в плазме твёрдого тела, обладающего ферроэлектрическими и ферромагнитными свойствами.

THE INFLUENCE OF SPACE DISPERSION ON WAVE PROPAGATION IN SOLID STATE PLASMA WITH FERROELECTRIC AND FERROMAGNETIC PROPERTIES

S u m m a r y

The author basing on his previous papers compares the dispersion formulae discussed in pravious papers with a formula received with regard to space dispersion and its influence on wave propagation in solid state plasma with ferroelectric and ferromagnetic properties.