

Tadeusz TUMIDAJSKI, Krzysztof PRZYBYCIEŃ

Zakład Przeróbki Kopalni, Ochrony Środowiska i Utylizacji Odpadów  
AGH, Kraków

## STOCHASTYCZNE MODELE DYNAMIKI PROCESÓW PRZERÓBczyCH

**Streszczenie.** W artykule omówiono modele dynamiki procesów przeróbczych uwzględniających zjawiska konwekcji i dyfuzji (równania Fokkera - Plancka - Kołmogorowa). Szczególną uwagę poświęcono modelowi procesu sedymentacji opartemu na równaniu Langevine'a oraz symulacji jego przebiegu stochastyczną metodą Rungego-Kutty.

Pierwszy model opisuje procesy przesiewania lub flotacji, a drugi procesy sedymentacji lub klasyfikacji przepływowej.

## STOCHASTIC MODELS OF THE DYNAMICS OF MINERAL DRESSING PROCESSES

**Summary.** Models of the dynamics of mineral dressing processes with regard to phenomena of convection and diffusion (equations of Fokker - Planck - Kolmogorov) are discussed in the presented paper.

The special notice was devoted for the model of a sedimentation process based on the Langevine's equation and the simulation of its course by stochastic method of Range-Kutta. The first of them describes screening processes and the second - sedimentation or classification processes.

### 1. Wstęp

Modelowanie matematyczne zmian stanu procesu w czasie jest zadaniem złożonym. Można wyróżnić zasadniczo dwa podejścia do tego problemu - modelowanie kinetyki rozdziału, które sprowadza się z reguły do prostych układów równań różniczkowych liniowych oraz modelowanie dynamiki ruchu ziarn w przestrzeniach roboczych separatorów. To drugie podejście, mające na celu opis zmiany prędkości i, w konsekwencji, położenia ziarna prowadzi do równań (lub układów równań) różniczkowych cząstkowych, które dla stanów ustalonych (stacjonarnych) przechodzą w równania różniczkowe zwyczajne, niekoniecznie liniowe. Równania te powstają na podstawie analizy wpływu sił działających na ziarno w

przestrzeniach roboczych urządzeń. Występujące składowe losowe ruchu ziarn uwzględnia się w analizie uzupełniającej [4] lub bezpośrednio poprzez wprowadzenie tzw. siły losowej [12].

W przypadku gdy mamy do czynienia ze zjawiskami konwekcji i dyfuzji do opisu dynamiki ruchu ziarn stosuje się teorię procesów Markowa [7,8]. Celem prezentowanego referatu jest omówienie możliwych rozwiązań w tym zakresie ze szczególnym wyeksponowaniem trójparametrowego modelu Markowa dotyczącego procesu sedimentacji lub procesu klasyfikacji w strumieniach pionowo-prądowych.

## 2. Dyfuzyjne modele procesów przeróbczych

Generalnie rzecz biorąc, w opisie dynamiki procesów przeróbczych szerokie zastosowanie znalazły procesy Markowa o ciągłym czasie i dyskretnej liczbie stanów [9,10]. Podejście to pozwala na pogłębioną interpretację zachowania się ziarn w procesie (wyróżnienie możliwych stanów), przy czym nie jest wolne od trudności wyznaczania intensywności przejść ziarn ze stanu do stanu oraz pewnej arbitralności w wyborze stanów (przyjętych założeń).

Zastosowanie procesów Markowa z ciągłym czasem i ciągłą przestrzenią stanów do opisu procesu przeróbczych budzi wiele wątpliwości ze względu na to, że jest ono oparte na analizie ruchów Browna i procesu Wienera.

Przeniesienie interpretacji związanej z cieczami i gazami na ziarna może być usprawiedliwione tylko w przypadku ziarn skrajnie drobnych.

Zjawiska konwekcji i dyfuzji opisuje równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa w postaci (przypadek jednowymiarowy)

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ K_1(x,t) w(x,t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K_2(x,t) w(x,t) \right] \quad (1)$$

Fizyczna interpretacja tego równania dla tzw. „gazodynamicznego” modelu jest następująca. Po przyjęciu warunków początkowych w postaci  $\delta$  Diraca z punktu  $x_0$  wychodzi duża liczba cząsteczek. Ich koncentracja w momencie  $t$  w punkcie  $x$  jest proporcjonalna do  $w(x,t)$  (gęstości prawdopodobieństwa tego, że położenie cząstki  $x(t)$  w momencie  $t$  mieści się w przedziale  $(x, x + dx)$ ), a średnia prędkość ruchu deterministycznego (systematycznego) jest równa  $K_1(x,t)$ . Tak więc iloczyn  $K_1(x,t)w(x,t)$  - to

systematyczny konwekcyjny strumień cząstek gazu wzdłuż osi  $x$ . Oprócz ruchu konwekcyjnego w gazie zachodzi proces dyfuzji. Strumień dyfuzji przy  $K_2(x, t) = K_2 = const$  jest proporcjonalny do gradientu koncentracji gazu i skierowany jest od koncentracji większej do mniejszej i dlatego strumień dyfuzyjny jest określony wyrażeniem

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x, t) w(x, t)] \quad (2)$$

Całkowity strumień  $G(x, t)$  cząstek gazu przez przekrój na poziomie  $x$  jest charakteryzowany sumą strumieni konwekcyjnego i dyfuzyjnego

$$G(x, t) = K_1(x, t) w(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x, t) w(x, t)] \quad (3)$$

Równanie (1) wykorzystali Siwiec i Sztaba [8] do opisu procesu przesiewania, przyjmując zachowanie się ziarn wąskiej wybranej klasy materiału tworzącego warstwę na sicie za analogiczne do zachowania się cząstek gazu. Współczynniki  $K_1(x, t)$  oraz  $K_2(x, t)$  zostały przyjęte za stałe, co pozwoliło na rozwiązanie równania (1) metodą rozdzielania zmiennych Fouriera.

Do opisu procesu flotacji został użyty analogiczny model [1], przy czym odwołano się do analogii z procesami chemicznym i równań przepływu masy [11, 12, 14]. Jest to układ równań

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\bar{w}_i c_i) + \operatorname{div}(D_i \operatorname{grad} c_i) \pm G_i \quad (4)$$

gdzie  $\frac{\partial c_i}{\partial t}$  - zmiana w czasie koncentracji  $c_i$ ,  $i$  - tej klasy ziarnowej;

$\bar{w}_i c_i$  - natężenie strumienia konwekcji ( $\bar{w}_i$  - prędkość transportu ziaren  $i$  - tej klasy);

$D_i \operatorname{grad} c_i$  - natężenie strumienia dyfuzji ( $D_i$  - turbulentny współczynnik dyfuzji);

$G_i$  - zmiana koncentracji  $i$  - tej klasy na skutek dopływu lub odpływu.

Jeżeli w równaniu (4)  $c_i$  oznacza koncentrację wolnych ziaren  $i$  - tej klasy oraz jest mierzona zawartością tych ziarn w objętościowym elemencie mętów, to  $G_i$  oznacza ilość odprowadzonych wolnych ziarn na skutek tworzenia się agregatów ziarno-pęcherzyk powietrza. Można wtedy przyjąć, że  $G_i = -k_i c_i$ , przy czym  $k_i$  jest rozumiane jako prędkość powstawania tych agregatów. Równanie (3) zostało rozwiązane w kilku przy-

padkach rozpatrujących mechanizm tworzenia się agregatów ziarno-pęcherzyk, ich rozkład, sposób transportu, stopień wymieszania mętów itd. [1].

Wydaje się możliwe zastosowanie równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa do opisu innych procesów przeróbczych, przyjmując za podstawę interpretację związaną ze wzorem (1) lub wzorem (3).

### 3. Modele oparte na równaniu Langevine'a

Pickard i Tory przedstawili, po wieloletnich badaniach [5,6,13], model pozwalający opisywać ruch ziaren skrajnie drobnych w procesach sedymentacji lub też klasyfikacji w strumieniach o przepływach laminarnych. Punktem wyjścia było równanie Langevine'a opisujące prędkość cząstki Browna. Kolejne modyfikacje tego równania doprowadziły autorów do przyjęcia jako modelu ruchu ziarna w procesie sedymentacji następującego układu stochastycznych równań różniczkowych

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu + \varepsilon(t), \quad X(0) = X_0 \quad (5)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\beta\varepsilon(t) + \beta g_w(t), \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0$$

gdzie  $X(t)$  - położenie ziarna,

$\varepsilon(t)$  - proces Ornsteina-Uhlenbecka [3,7], tzw. „szum kolorowy”;

$\mu$  - prędkość średnia,

$\beta$  - odwrotność czasu korelacji;

$g_w(t)$  - szum biały Gaussa o własnościach:

$$E[g_w(t)] = 0, \quad E[g_w(t)g_w(t')] = 2D\delta(t-t').$$

( $E(\cdot)$  - wartość średnia,  $\delta(\cdot)$  - delta Diraca,  $D$  - stała).

Formalnym rozwiązaniem układu (5) jest [2,3,13]

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\beta t} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^{n+1} \Gamma_n(t)$$

(6)

$$X(t) = X_0 + \mu t + \frac{\varepsilon_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \beta^n \Gamma_n(t)$$

przy czym

$$\Gamma_0 = \int_0^t g_W(x) dx, \quad \Gamma_n(t) = \int_0^t \Gamma_{n-1}(x) dx, \quad n \geq 1$$

Honeycutt [2,3,13] opracowała algorytm wyznaczania wartości  $X(\Delta t)$  oraz  $\varepsilon(\Delta t)$  oparty na 4-krokowej procedurze stochastycznej Rungego-Kutty.

Wprowadziła ona wielkości  $\varphi_i = a_i \psi_1 + b_i \psi_2$ ,  $i=0,1,2,3,4$ , gdzie  $\psi_1$  i  $\psi_2$  są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym  $N(0,1)$ , wyznaczanymi zgodnie z algorytmem Boxa-Muellera, tzn.

$$\psi_1 = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2)$$

$$\psi_2 = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin(2\pi r_2)$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  są liczbami losowymi (rozkład równomierny) z przedziału  $(0,1)$ .

Porównując własności stochastyczne układów:

- powstałych przez obcięcie szeregów (6);
- utworzonych przez odpowiednie zastąpienie zmiennych  $\Gamma_n$  kombinacjami zmiennych

$\psi_i$ ;

otrzymujemy z kolei układ dla zmiennych  $a_i, b_i$  ( $i=0,1,2,3,4$ ), którego jednym z rozwiązań (wybranych przez Honeycutt) jest następujący zestaw współczynników:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_4 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad b_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad b_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b_4 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{12}$$

i wzory na postaci  $X(\Delta t)$  oraz  $\varepsilon(\Delta t)$  w czterokrokowej metodzie Rungego-Kutty

$$X(\Delta t) X_o + \frac{1}{6} \Delta t (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$\varepsilon(\Delta t) = \varepsilon_o + \frac{1}{6} \Delta t (H_1 + 2H_2 + 2H_3 + H_4) + (D\beta\Delta t)^{\frac{1}{2}} (\psi_1 + \psi_2) \quad (7)$$

gdzie

$$H_1 = -\beta \left[ \varepsilon_o + (D\beta^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} (a_1\psi_1 + b_1\psi_2) \right]$$

$$H_2 = -\beta \left[ \varepsilon_o + \frac{1}{2} \Delta t H_1 + (D\beta^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} (a_2\psi_1 + b_2\psi_2) \right]$$

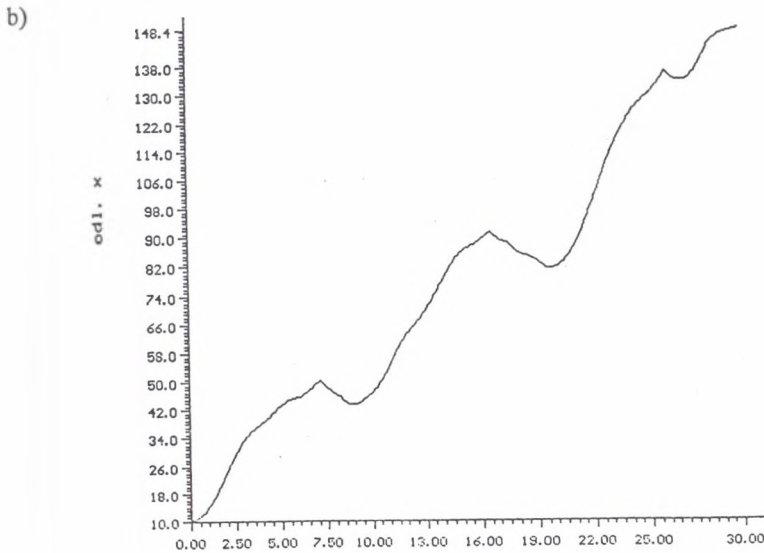
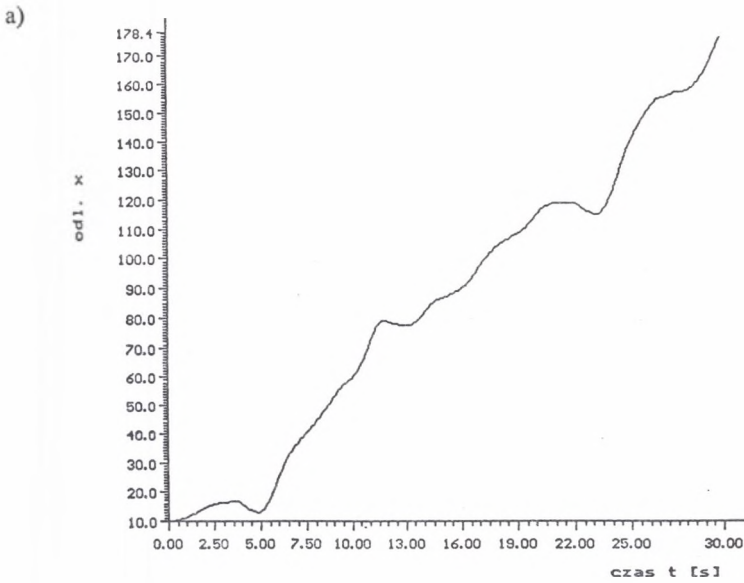
$$H_3 = -\beta \left[ \varepsilon_o + \frac{1}{2} \Delta t H_2 + (D\beta^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} (a_3\psi_1 + b_3\psi_2) \right]$$

$$H_4 = -\beta \left[ \varepsilon_o + \frac{1}{2} \Delta t H_3 + (D\beta^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} (a_4\psi_1 + b_4\psi_2) \right]$$
(8)

oraz

$$F_i = \mu - \frac{H_i}{\beta}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

Zgodnie z sugestiami autorów [13] przyjmujemy  $\lambda = \sqrt{D\beta} / \mu$  i wyznaczamy prędkość początkową ziarna na podstawie rozkładu  $VN(1, \lambda)$ . Rozkład ten uzyskujemy generując  $v_o = 1 + \varepsilon_o$  z rozkładu  $N(1, \lambda)$ , a następnie przyjmujemy tę wartość, gdy  $v_o > r(1 + 5\lambda)$ , gdzie  $r$  jest liczbą losową z przedziału  $(0, 1)$  (rozkład równomierny).  $N$  - tym krokiem algorytmu jest wyznaczenie pary położenie - prędkość w chwili  $n\Delta t$ . Wartościami początkowymi są wielkości obliczone w kroku  $n-1$ . W naszym przypadku wykonanie kroku sprowadza się do wyznaczenia zmiennych losowych Gaussa  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , wyznaczeniu współczynników  $H$  i  $F$  zgodnie ze wzorami (7) i (8) oraz wartości  $X(n\Delta t)$ ,  $\varepsilon(n\Delta t)$



Rys. 1. a,b. Przykładowe wykresy  $x=f(t)$

$x$  - położenie ziarna,

$t$  - czas

Fig. 1. a, b. The examples of relations  $x - f(t)$

$x$  - position of grain,

$t$  - time

zgodnie z (6). Rysunki 1a) i b) przedstawiają przykładowe przebiegi realizacji  $X(t)$ . Korzystając z powstałego przebiegu, można również wyznaczyć czas pierwszego jej przejścia z góry ustalonej odległości  $X_c$ .

#### 4. Zakończenie

Ten skrótowy przegląd modeli związanych z analizą ruchów ziarn w przestrzeniach roboczych urządzeń pokazuje możliwe zakresy poszukiwań i kierunków badań. Nie jest on wyczerpujący pod względem interpretacji poszczególnych procesów, ponieważ celem było pokazanie strony matematycznej zagadnień. Praca jest efektem projektu badawczego KBN nr 9S60104004.

#### LITERATURA

1. Bilsing U., Geidel T.: Zur Prozeßgleichung der Flotation. Teil I; Aufbereitungs-Technik, nr 4, (1984).
2. Honeycutt R.L.: Stochastic Runge - Kutta algorithms I. White noise; Physical Review A, 45, 2, pp. 600-603, (1992).
3. Honeycutt R.L.: Stochastic Runge - Kutta algorithms II. Colored noise. Physical Review A, 45, 2, pp. 604-610, (1992).
4. Nowak A.: Charakterystyki rozkładu jednorodnych ziarn mineralnych w wirówkach klasyfikujących, PWN, Warszawa, Kraków 1981.
5. Pickard D.K., Tory E.M., Tuckman B.A.: A three-parameter Markov model for sedimentation. II. Simulation of transit times and comparison with experimental results. Powd. Techn., 49, pp. 227-240, (1987).
6. Pickard D.K., Tory E.M.: A Markov model for sedimentation. J. Math. Anal. and Applic. 60, pp. 349-369 (1977).
7. Schuss Z.: Teoria i zastosowanie stochastycznych równań różniczkowych, PWN, Warszawa 1989.
8. Siwiec A., Sztaba K.: Convection and diffusion phenomena in a screening process, Arch. Min. Sci., 28, 1, pp. 63-71, (1983).



9. Siwiec A.: Modele wybranych procesów przeróbczych, Zesz.Nauk. AGH, Górnictwo 118, Kraków 1982.
10. Siwiec A., Walaszek-Babiszewska A., Tumidajski T.: Dyskretne procesy Markowa w opisie procesów przeróbczych, Górnictwo, z. 3. (1996).
11. Sztaba K., Tora B., Tumidajski T.: Modelling of processes of the mineral processing, SAMS; p. 1-9, (1996).
12. Tichonow O.N.: Zakonomiarnosti effektivnogo razdelenija mineralow w processach obogaszczeniya poleznych iskopajemych, Izd. Nedra, Moskwa 1984.
13. Tory E.M., Bargiel M., Honeycutt R.L.: A three - parameter Markow model for sedimentation. III. A stochastic Runge - Kutta method for computing first-passage Times. Powd. Techn. 80, pp. 133-146, (1994).
14. Tumidajski T.: Stochastic models of separation of mineral raw materials, Arch. Górn. 41, 4, (1996).

Recenzent: Dr Marian Brożek

Wpłynęło do Redakcji 24.09.1996 r.

### Abstract

Two types of models of grain motion dynamics in separator's working space was shown in the paper: diffusion equations of Fokker - Planck - Kolmogorow and models based on Langevine's equation.

The first model is applied to description of screening processes, flotation or gravitational beneficiation and it determines probabilities of grain's occurins in chosen product. The second model describes precisely the behavior of single grains in sense of their velocities and positions (Brownian motion). The second model was characterized by computer program which may be applied to simulation of grain positions. The chosen figures were shown.