

Anna WALASZEK-BABISZEWSKA , Andrzej MANDLA

Katedra Elektryfikacji i Automatykacji Górnictwa  
Politechnika Śląska, Gliwice

Antoni SIWIEC

Zakład Przeróbki Kopalini, Ochrony Środowiska i Utylizacji Odpadów  
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

## BADANIA SYMULACYJNE WYBRANYCH PROCESÓW PRZERÓBCZYCH NA PODSTAWIE MODELI PROCESÓW MARKOWA

**Streszczenie.** Przedstawione w referacie badania symulacyjne dotyczą dynamiki procesów cyklicznych. Zakłada się, że charakterystyka materiału jest określona przez dyskretny rozkład prawdopodobieństwa występowania ziarn. Dynamika procesu jest opisana przez zależne od czasu rozkłady prawdopodobieństwa przechodzenia ziarn do produktu.

## SIMULATION TESTS OF SELECTED PREPARATION PROCESSES BASED ON MARKOV PROCESSES

**Summary.** Simulation tests included in the paper concern of the dynamics of batch processes. It is assumed that the characteristic of the grain material is determined by the discrete probability distribution of occurrence of grains. The dynamics of the separation process is described by time dependent probability functions of passing the grains to the product.

### 1. Wprowadzenie

W wielu wcześniejszych już pracach wykazano przydatność procesów Markowa do modelowania dynamiki procesów przeróbki kopalini i utylizacji odpadów. Badania symulacyjne zawarte w tym opracowaniu dotyczą pewnego typu dynamiki tych procesów, opisującej na ogół procesy cykliczne. Zakłada się, że w materiale występuje kilka rodzajów ziarn, ze względu na pewną wyróżnioną cechę  $x$ , np. średnicę, gęstość, podatność na flotację, na działanie pola magnetycznego, zdolność sedymentacji itp. Istnieje określone prawdopodo-

bieństwo występowania w materiale ziarn posiadających cechę  $x$ . Dalej, zakłada się, że dynamikę badanego procesu przeróbki lub utylizacji można opisać w postaci zmiennego w czasie prawdopodobieństwa znajdowania się ziarna w jednym z dwóch produktów.

## 2. Opis procesu

### 2.1. Charakterystyka materiału

Wymienione cechy pojedynczego ziarna są wielkościami losowymi. Zakładając, że w badaniach doświadczalnych przyjmuje się na ogół pewną skończoną, rozłączną ilość  $J$  frakcji, tj. rozłącznych przedziałów cechy  $X$  poszczególnych ziarn, określone zostały prawdopodobieństwa przynależności ziarna do  $j$ -tej frakcji:

$$P[x_j \in (x_{j,\min}, x_{j,\max})] = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (1)$$

Miarą prawdopodobieństwa może być iloraz liczby  $N_j$  ziarn, których cecha  $x$  należy do  $j$ -tego przedziału, przez ogólną liczbę  $N$  ziarn w populacji:

$$p_j = \frac{N_j}{N} \quad (2)$$

lub iloraz masy  $M_j$  ziarn, których cecha  $X$  należy do  $j$ -tego przedziału, przez masę  $M$  wszystkich ziarn [1]:

$$\pi_j = \frac{M_j}{M} = \frac{V_j \delta_j N_j}{V_{sr} \delta_{sr} N} = \frac{V_j \delta_j}{V_{sr} \delta_{sr}} p_j \quad (3)$$

gdzie:

$V_j$  - objętość średnia ziarn należących do  $j$ -tej klasy,

$\delta_j$  - gęstość średnia ziarn należących do  $j$ -tej klasy,

$V_{sr}, \delta_{sr}$  - odpowiednio: objętość i gęstość średnia ziarn w populacji, zdefiniowane tak, aby spełnione były zależności:

$$V_{sr} \delta_{sr} N = \sum_j V_j \delta_j N_j; \quad \sum_{j=1}^J N_j = N.$$

Tak określone miary prawdopodobieństwa  $p$  oraz  $\pi$  spełniają równości:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_J = 1$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_J = 1$$

i stanowią rozkłady prawdopodobieństwa cechy  $X$ , dotyczącej ziarn występujących w materiale, traktowanej jako zmienna losowa dyskretna.

W dalszej części opracowania będzie używane prawdopodobieństwo określone poprzez iloraz liczby ziarn.

## 2.2. Charakterystyka statyczna procesu

W warunkach statycznych, tzn. gdy czas trwania procesu jest wystarczająco długi, istnieje charakterystyka  $R(x_j)=R_j$ , która określa warunkowe prawdopodobieństwo, że ziarno o cechach  $x_j$  znajdzie się w danym produkcie [3]. Prawdopodobieństwo to, zależne od sposobu prowadzenia procesu, jest graniczną wartością (dla  $t \rightarrow \infty$ ) prawdopodobieństwa opisującego dynamikę procesu.

## 2.3. Dynamika procesu

W opisie dynamiki procesu zakłada się, że każde ziarno może znajdować się w jednym z dwu stanów (tzn. w jednym z dwu produktów) z prawdopodobieństwem zależnym od czasu. Istnieje  $J$  typów ziarn. Warunki początkowe dla jednego ze stanów są określone poprzez prawdopodobieństwa występowania ziarn w materiale, a dla drugiego stanu warunki początkowe są zerowe.

Przedmiotem analizy będą równania prawdopodobieństwa znajdowania się ziarna  $j$ -tej frakcji w jednym z produktów (np. w koncentracie), jako funkcje czasu  $t$ :

$$w_j(t) = p_j R_j (1 - e^{-\alpha_j t}), \quad w_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad (4)$$

przy czym istnieją jednocześnie prawdopodobieństwa  $v_j(t)$  znajdowania się ziarna w drugim z produktów, z warunkami początkowymi  $v_j(0) = p_j$  oraz spełniającymi warunek dla każdej chwili  $t$ :

$$\sum_{j=1}^J [w_j(t) + v_j(t)] = 1 \quad (5)$$

### 3. Badania symulacyjne

Celem badań symulacyjnych była analiza dokładności identyfikacji założonego procesu. Jako źródła błędów uwzględniono losowość charakterystyki w próbce materiału poddawanego procesowi oraz czas pomiaru.

W pierwszej kolejności przedmiotem badań symulacyjnych była zmienność charakterystyki materiału [4,5]. Obliczone zostały, według rozkładu wielomianowego, prawdopodobieństwa zdarzeń jednoczesnych, polegających na obecności ziarn należących do poszczególnych frakcji w próbce  $n$ -elementowej. Uporządkowane, według malejących wartości, prawdopodobieństwa występowania ziarn w trzech frakcjach, w próbkach 9- i 20-elementowych pokazano w tab. 1, a na rys.1 przedstawiono wykres jednego z rozkładów. Należy zwrócić uwagę (tab.1), że maksymalna wartość prawdopodobieństwa w próbce 20-elementowej jest mniejsza niż maksymalna wartość prawdopodobieństwa w próbce 9-elementowej. Przyczyną tego jest większa liczba możliwych zdarzeń elementarnych. Najbardziej prawdopodobna kombinacja ziarn: 2,2,5 w próbce 9-elementowej występuje tylko w ok. 9 przypadkach na 100, a w próbce 20-elementowej najbardziej prawdopodobna kombinacja ziarn: 5,5,10 występuje tylko w ok. 4 przypadkach na 100.

Na rys.1 każdemu zdarzeniu odpowiadają trzy punkty, przez które przechodzi płaszczyzna jednakowego prawdopodobieństwa. Wektor  $e$  błędu oszacowania hipotetycznej charakterystyki materiału  $(p_1, p_2, \dots, p_j)$  przez charakterystykę próbkową, równy różnicy tych dwóch wektorów, jest wielowymiarową zmienną losową. Miara dokładności aproksymacji może być kwadrat normy losowego wektora błędu:

$$e^T e = \left[ \left( p_1 - \frac{n_1}{n} \right)^2 + \left( p_2 - \frac{n_2}{n} \right)^2 + \dots + \left( p_j - \frac{n_j}{n} \right)^2 \right] \quad (6)$$

lub wartość oczekiwana wyrażenia ( 6). Uwzględniając prawdopodobieństwo zdarzenia jednoczesnego, mamy:

$$E\{e^T e\} = \sum_r \left[ \left( p_1 - \frac{n_1}{n} \right)^2 + \left( p_2 - \frac{n_2}{n} \right)^2 + \dots + \left( p_j - \frac{n_j}{n} \right)^2 \right] \frac{n! p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_j^{n_j}}{n_1! n_2! \dots n_j!} = D^2 \quad (7)$$

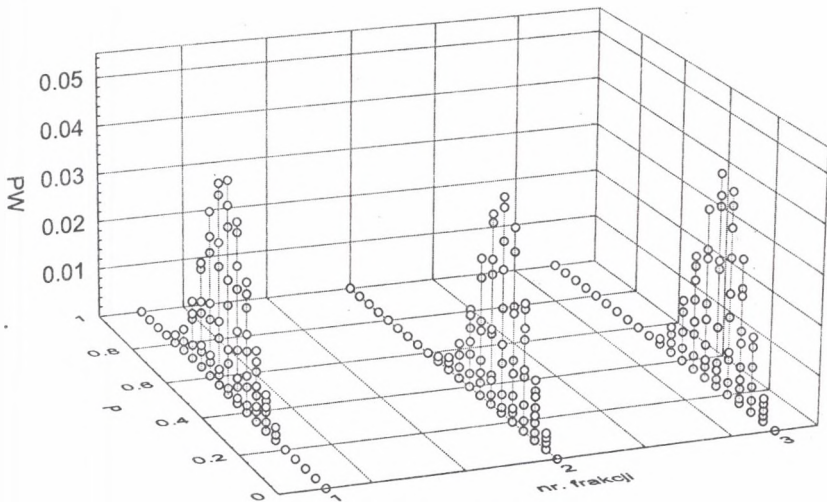
gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie kombinacje liczb  $n_1, n_2, \dots, n_j$  przy stałej liczności próbki  $n$ .

Tabela 1

Początkowe wartości rozkładów prawdopodobieństw zdarzeń jednoczesnych występowania trzech rodzajów ziarn w próbce n-elementowej, pobranej z populacji o danych:  $p_1=0.2406$ ,

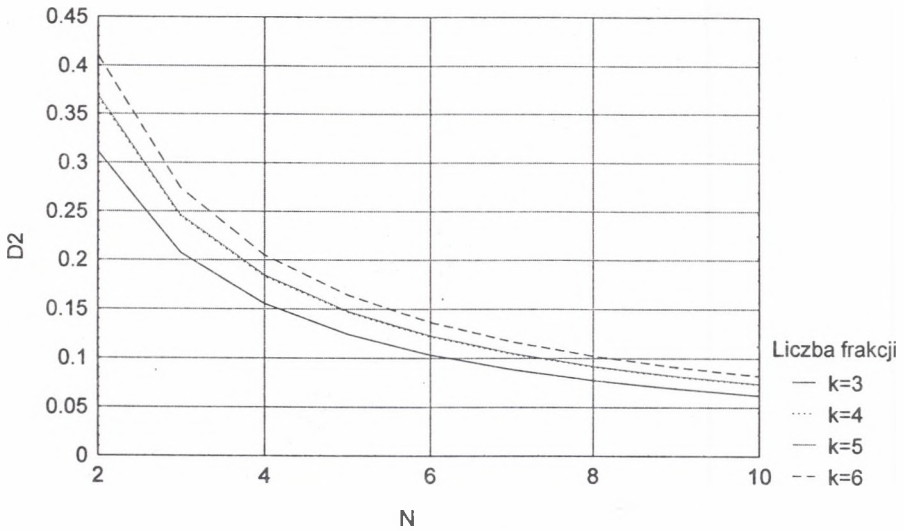
$$p_2=0.2555, p_3=0.5039$$

Lp.	n=9		n=20	
	$n_1, n_2, n_3$	$P(n_1, n_2, n_3)$	$n_1, n_2, n_3$	$P(n_1, n_2, n_3)$
1	2,2,5	0.09281	5,5,10	0.04314
2	2,3,4	0.07844	4,5,11	0.04106
3	3,2,4	0.07386	5,4,11	0.03866
4	1,3,5	0.06571	4,6,10	0.03818
5	1,2,6	0.06479	5,6,9	0.03646
6	2,1,6	0.06100	6,5,9	0.03433
7	3,1,5	0.05826	6,4,10	0.03385
8	3,3,3	0.04994	4,4,12	0.03374
9	1,4,4	0.04166	3,6,11	0.02907
10	2,4,3	0.03978	3,5,12	0.02867
11	1,1,7	0.03650	4,7,9	0.02766
12	4,2,3	0.03527	6,6,8	0.02611
13	4,1,4	0.03477	5,3,12	0.02541
14	0,3,6	0.02294	6,3,11	0.02427
15	0,2,7	0.0194	5,7,8	0.02377

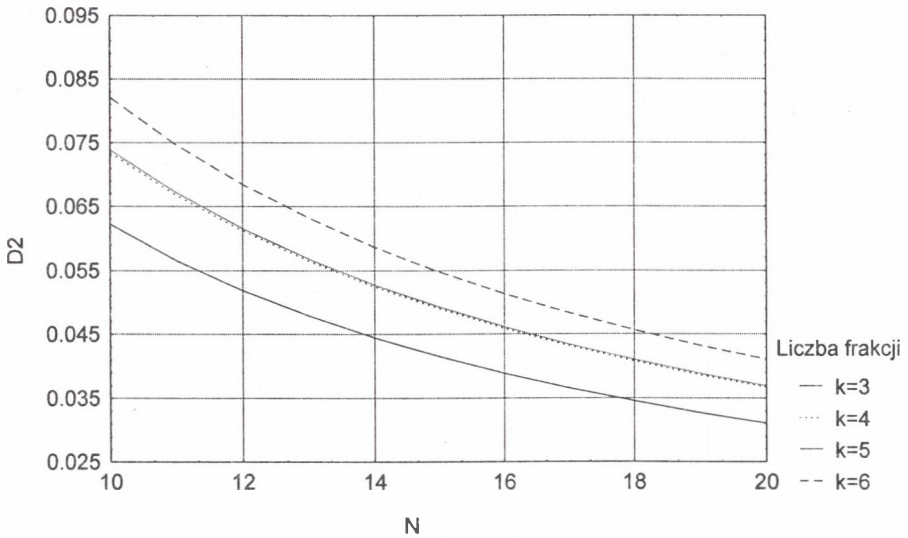


Rys. 1. Rozkład wielomianowy ziarn w próbce; liczba frakcji: 3; liczba ziarn w próbce: 20

Fig. 1. The polynomial distribution function of occurrence of grains in a sample; number of fractions: 3; number of grains in a sample: 20



Rys.2. Statystyczny błąd oszacowania charakterystyki materiału; liczba frakcji  $k=3,4,5,6$   
 Fig 2. The statistical error of determining of the material characteristic; number of fractions:  $k=3,4,5,6$



Rys.3. Statystyczny błąd oszacowania charakterystyki materiału; liczba frakcji  $k=3,4,5,6$   
 Fig 3. The statistical error of determining of the material characteristic; number of fractions:  $k=3,4,5,6$

Przeprowadzono obliczenia według kryterium (7) dla próbek o różnej liczności (do  $n=450$ ) i ilości frakcji w materiale. Generalnie, statystyczny błąd oszacowania charakterystyki maleje wraz ze wzrostem liczby ziarn w próbce. Na rys.2 i 3 przedstawiono fragmenty obliczeń wykonanych dla 3,4,5,6 frakcji i dla początkowego zakresu zmian  $n$ . Błąd oszacowania charakterystyki rośnie wraz ze wzrostem liczby określanych frakcji. Wartości błędu oszacowania zależą oczywiście od samej charakterystyki materiału.

Przedmiotem dalszych analiz był błąd oszacowania charakterystyki procesu dla badanych wcześniej rodzajów nadawy oraz kilku przyjętych krzywych rozdziału.

Na rys. 4 przedstawione zostały wykresy opisujące dynamikę procesu według równania (4) dla trzech frakcji, przy czym:

$$p_1=0.2406, p_2=0.2555, p_3=0.5039;$$

$$\alpha_1=1, \alpha_2=1.2, \alpha_3=1.4;$$

$$R_1=0.95, R_2=0.5, R_3=0.05.$$

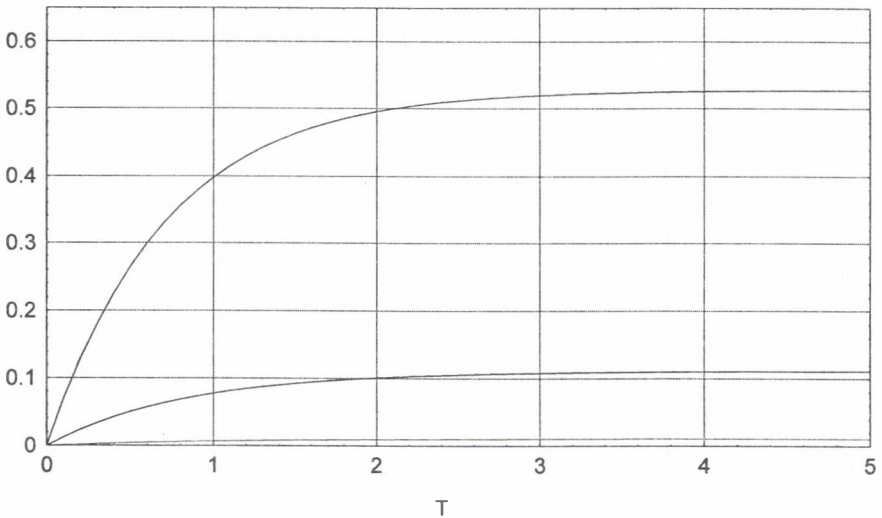
Przy losowaniu próbek materiału o różnym składzie (tab.1) prawdopodobieństwo przechodzenia ziarn do danego produktu nie zawsze jest zbliżone do wartości wynikającej ze wzoru (4). Przyjęto, przez analogię do kryterium (6), jako miarę łącznej odchyłki prawdopodobieństwa znajdowania się ziarn wszystkich  $J$  frakcji w badanym produkcie, kwadrat normy wektora różnic  $e(t)$ :

$$e(t)^T e(t) = \sum_{j=1}^J \left[ p_j R_j - (1 - e^{-\alpha_j t}) \frac{n_j}{n} R_j \right]^2 \quad (8)$$

lub, dla unormowanego (warunkowego) prawdopodobieństwa [3], kryterium:

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^J \left[ \frac{p_j R_j}{\sum_j p_j R_j} - (1 - e^{-\alpha_j t}) \frac{\frac{n_j}{n} R_j}{\sum_j \frac{n_j}{n} R_j} \right]^2 \quad (9)$$

Wektor losowy  $e(t)$  reprezentuje błąd dynamiczny procesu separacji. Wielkość ta zależy od czasu i od 'reprezentatywności' pobranej próbki. Jeśli wylosowana próbka  $(n_1, n_2, \dots, n_j)$  dobrze przybliży charakterystykę materiału w sensie (6), to wartość wyrażenia (8) zmierza do zera wraz ze wzrostem  $t$ .

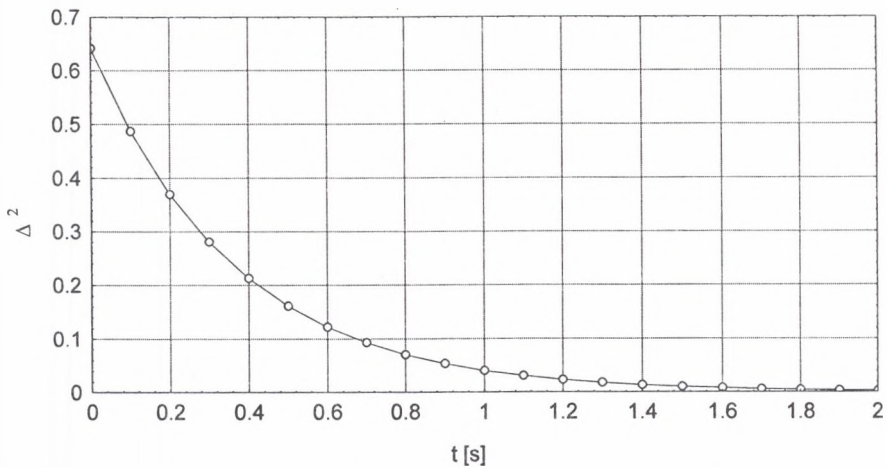


Rys.4. Założona dynamiczna charakterystyka procesu  
 Fig. 4. The assumed dynamic characteristic of the process

Przeprowadzone zostały obliczenia zmienności w czasie kryterium (9) dla tej samej charakterystyki materiału i dla zmiennych parametrów: liczności próbki  $n$ , losowego składu próbki  $n_1, n_2, n_3$ , zmiennej charakterystyki statycznej  $R_1, R_2, R_3$ . Wyniki obliczeń przedstawione zostały na kolejnych rysunkach.

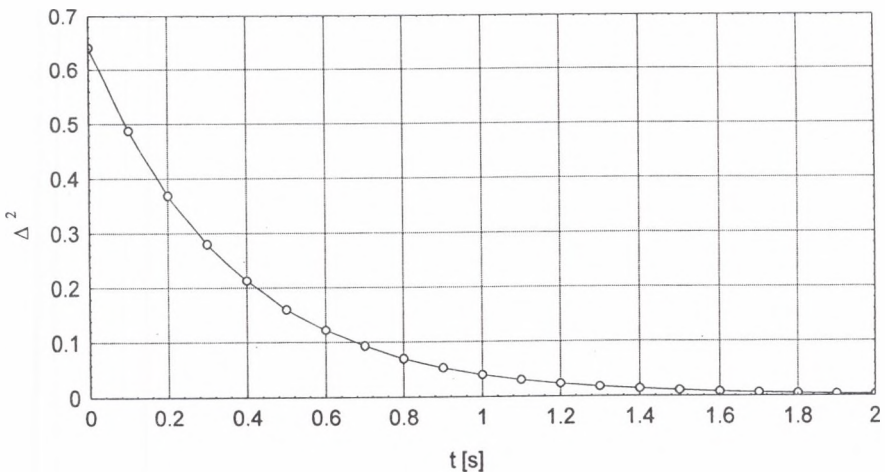
Podsumowując, można wskazać, że główną przyczyną błędu uwzględniającego dynamikę procesu jest niereprezentatywność próbek materiału pobieranego do badań. Jednakże prawdopodobieństwo występowania takich kombinacji ziarn nie zawsze jest duże. Jeśli skład ziarn w próbce można uznać za reprezentatywny w stosunku do charakterystyki materiału, to znacznie mniejszy błąd w sensie (9) uzyskuje się przy podobnym składzie próbki liczniejszej.





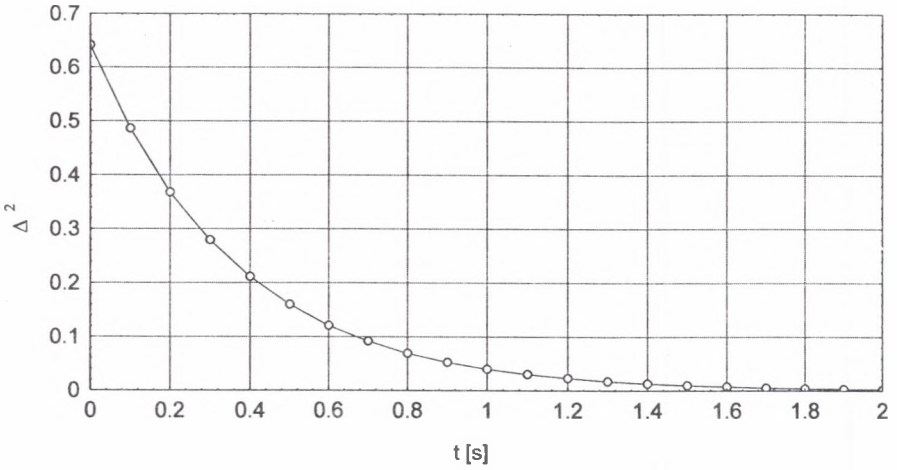
Rys. 5. Błąd dynamiki procesu obliczony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w  
 próbce: 50 26 24; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,000036

Fig. 5. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a  
 sample: 50 26 24; the static error (delta min): 0,000036

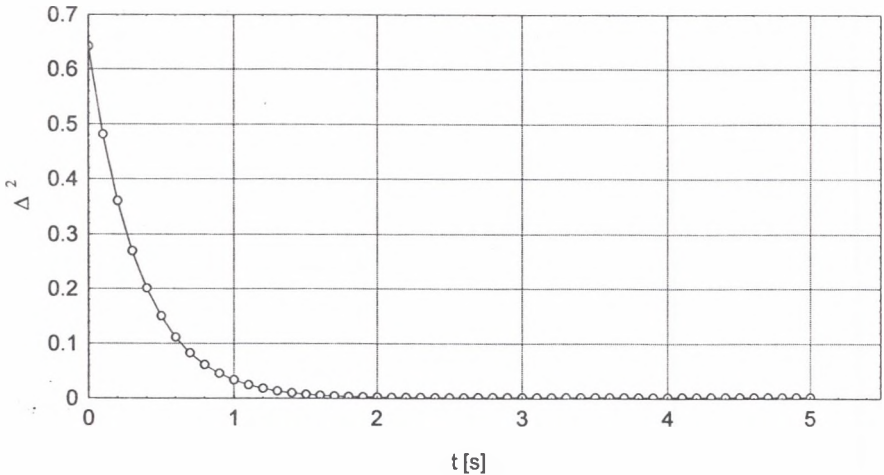


Rys. 6. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w  
 próbce: 40 21 19; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,000066

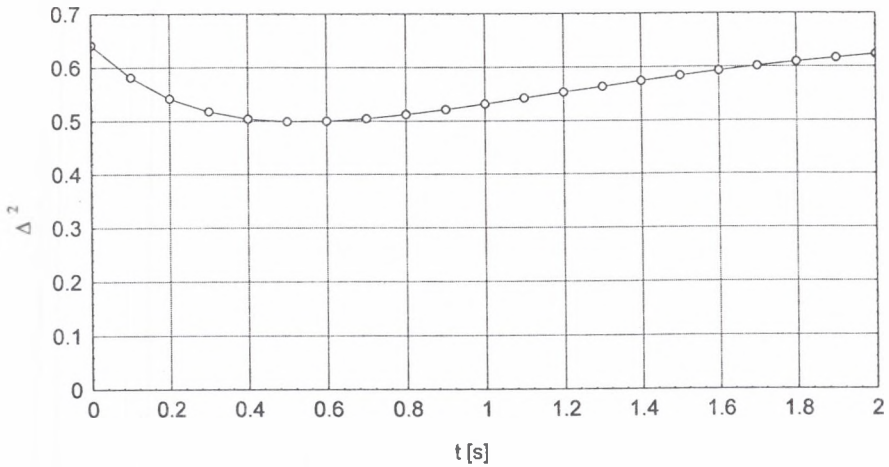
Fig. 6. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a  
 sample: 40 21 19; the static error (delta min): 0,000066



Rys. 7. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w próbce: 10 5 5; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,00001  
 Fig. 7. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a sample: 10 5 5; the static error (delta min): 0,00001

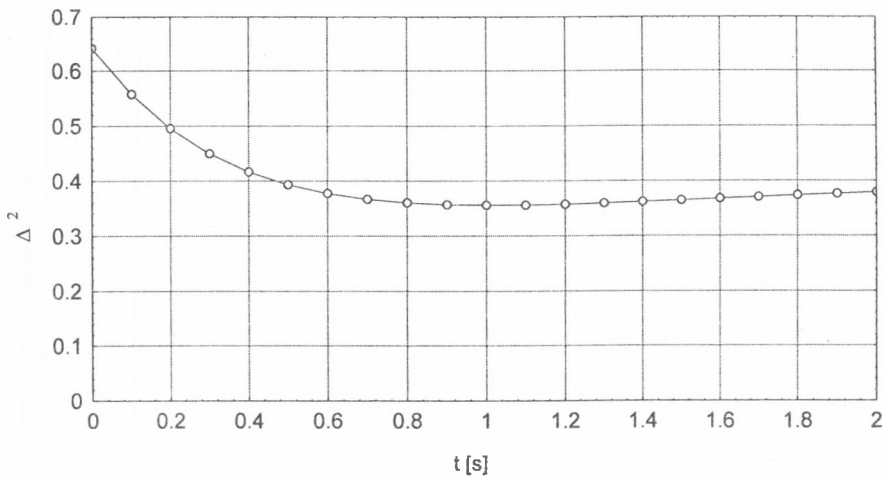


Rys. 8. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w próbce: 5 2 2; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,0027  
 Fig. 8. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a sample: 5 2 2; the static error (delta min): 0,0027



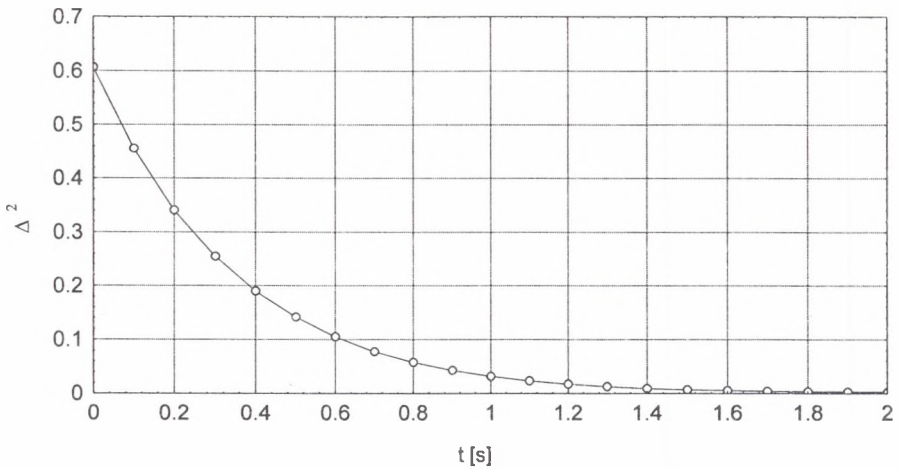
Rys. 9. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w  
 próbce: 1 9 10; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,6817

Fig. 9. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a  
 sample: 1 9 10; the static error (delta min): 0,6817



Rys. 10. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w  
 próbce: 1 4 4; wartość błędu w stanie ustalonym (delta min): 0,4074

Fig. 10. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a  
 sample: 1 4 4; the static error (delta min): 0,4074



Rys. 11. Błąd dynamiki procesu określony według wzoru (9);  
 charakterystyka statyczna: 0,95 0,5 0,05; liczba ziaren poszczególnych frakcji w  
 próbce: 5 2 2; wartość błędu w stanie ustalonym ( $\Delta_{\min}$ ): 0,00289

Fig. 11. The dynamic error of the process calculated according to the formula (9);  
 the static characteristic: 0,95 0,5 0,05; numbers of grains of a particular fraction in a  
 sample: 5 2 2; the static error ( $\Delta_{\min}$ ): 0,00289

#### 4. Zakończenie

Przedstawione w opracowaniu badania stanowią rozwinięcie szczegółowe bardziej ogólnych modeli zawartych w pracach [1] i [2] oraz stanowią część przygotowywanej pracy magisterskiej A. Mandli w Katedrze Elektryfikacji i Automatykacji Górnictwa Politechniki Śląskiej.

Ze względu na ograniczenie objętości referatu niektóre problemy zostały tylko zasygnalizowane. Przewidywana jest kontynuacja badań i obszerniejsze ich opracowanie.

#### LITERATURA

1. Siwiec A., Walaszek - Babiszewska A., Tumidajski T.: Dyskretne procesy Markowa w opisie procesów przerobczych. *Kwartalnik Górnictwo*, z.3, AGH, Kraków 1996.

2. Walaszek-Babiszewska A.: Modele stochastyczne opróbowania węgla. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, seria Górnictwo, z.203, Gliwice 1992.
3. Walaszek-Babiszewska A.: Stochastic models of a characteristic of the grain composition and a densimetric characteristic in samples of the enrichment process products. *Archives of Mining Sciences*, Vol.38, Iss.2, 1993.
4. Walaszek - Babiszewska A.: O błędzie próbkowania przy określaniu charakterystyki ziarnowej materiału. Mat. Konf. nt. „*Automatyzacja procesów przeróbki mechanicznej węgla*.” Szczyrk 1996.
5. Walaszek-Babiszewska A, Mandla A.: Badania symulacyjne nad efektem pomniejszania skali eksperymentu przy separacji materiałów uziarnionych. Materiały Konferencji nt. „*Automatyzacja procesów przeróbki węgla*”. Szczyrk 1996.

Recenzent: Dr Tadeusz Tumidajski

Wpłynęło do Redakcji 25.09.1996 r.

## Abstract

The Markov processes have been used in many previous works. These models are very convenient to describe preparation processes dynamics. Simulation tests presented in this paper deal with a certain dynamics type of batch preparation and utilization processes.

It is assumed that material consists with several types of grains in relation on a specified features, for example: density, diameter, flotability and other. There is a probability distribution function of occurrence of grains which have those properties. Further it is assumed, that dynamics of that preparation processes may be described by changing in time probability distribution functions.