ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka Nr kol. 386

Ryszard BARTŁOMIEJCZYK

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH CIĄGÓW ZWIĄZANYCH Z RZĘDEM ZBIEŻNOŚCI

Streszczenie. W pracy niniejszej zajmuję się własnościami ciągów związanych z pojęciem rzędu zbieżności. Wykazane są dwa twierdzenia T1 i T2, z których wynika równoważność dwóch najczęściej stosowanych definicji rzędu zbieżności ciągu, gdy rząd zbieżności jest większy od 1. H.P. Helfrich [1] podaje bez dowodu fakt równoważności tych definicji; dowodu tego nie znalazłem w znanej mi literaturze. Podaję również przykłady ilustrujące nierozstrzygalny przypadek w twierdzeniu T2.

Dla ustalenia uwagi rozważam ciągi liczb zespolonych, jednak dowody twierdzeń przeneszą się bez zmian w przypadku ciągów z dowolnej przestrzeni Banacha.

Rozpatrzmy ciąg $\{p_n\}$ liczb zespolonych taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, $p_n \neq p_{n+1}$

Twierdzenie T1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $k > 1$ zachodzi w rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych (patrz [2]) równość

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k}. \tag{1}$$

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeżeli jedna z granic (1) jest skończona, to druga z granic też jest skończona i obie są równe.

A) Niech $q_n = p_n - p$ dla $n = 1,2, \ldots$. Przy tych oznaczeniach równość (1) można zapisać w postaci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1} - q_n|}{|q_n - q_{n-1}|^k}.$$

Załóżmy, że $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|q_{n+1}|}{|q_n|^k} = c$.

Z własności modułu mamy

$$\frac{\big||q_{n+1}| - |q_n|\big|}{(|q_n| + |q_{n-1}|)^k} \leqslant \frac{|q_{n+1} - q_n|}{|q_n - q_{n-1}|^k} \leqslant \frac{|q_{n+1}| + |q_n|}{\big||q_n| - |q_{n-1}|\big|^k}. \tag{2}$$

Ponieważ

$$k > 1 \quad \text{i} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|^k} \cdot \lim_{n\to\infty} |q_n|^{k-1} = c.0 = 0,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} = 0. \tag{3}$$

Na podstawie (3) otrzymujemy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1}| + |q_n|}{\big||q_n| - |q_{n-1}|\big|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_n|}{|q_{n-1}|^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|q_{n+1}|}{|q_n|} + 1}{\left|\dfrac{|q_n|}{|q_{n-1}|} - 1\right|^k} = c.1 = c.$$

Podobnie

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\big||q_{n+1}| - |q_n|\big|}{(|q_n| + |q_{n-1}|)^k} = c.$$

Stąd na podstawie (2) mamy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|q_{n+1} - q_n|}{|q_n - q_{n-1}|^k} = c.$$

B) Niech $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k} = c.$

Wprowadzamy oznaczenia $r_1 = p_1$, $r_n = p_n - p_{n-1}$ dla $n = 2,3, \ldots$.
Przy tych oznaczeniach mamy

$$p_n = \sum_{s=1}^{n} r_s, \quad p = \sum_{s=1}^{\infty} r_s, \quad c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|r_{n+1}|}{|r_n|^k},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|r_{n+2} + r_{n+3} + \dots|}{|r_{n+1} + r_{n+2} + \dots|} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|r_{n+2}|}{|r_{n+1}|^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|r_{n+2} + r_{n+3} + \dots|}{|r_{n+2}|} \left(\frac{|r_{n+1}|}{|r_{n+1} + r_{n+2} + \dots|}\right)^k$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r_{n+1} + r_{n+2} + r_{n+3} + \dots|}{|r_{n+1}|} = 1 . \tag{4}$$

Ponieważ $\big||a+b| - |b|\big| \leqslant |a|$, więc

$$\big||r_{n+1} + r_{n+2} + r_{n+3} + \dots| - |r_{n+1}|\big| \leqslant |r_{n+2} + r_{n+3} + \dots| .$$

Z ostatniej nierówności mamy

$$\left|\frac{|r_{n+1} + r_{n+2} + r_{n+3} + \dots|}{|r_{n+1}|} - 1\right| \leqslant \frac{|r_{n+2} + r_{n+3} + \dots|}{|r_{n+1}|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|r_{n+2}| + |r_{n+3}| + \dots}{|r_{n+1}|} . \tag{5}$$

Podobnie jak (3) można wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r_{n+1}|}{|r_n|} = 0 . \tag{6}$$

Stąd wynika, że dla $n > N$ mamy $\frac{|r_{n+1}|}{|r_n|} \leqslant a \leqslant 1$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Z ostatniej nierówności dla $n > N$ wynika

$$0 \leqslant \frac{|r_{n+2}| + |r_{n+3}| + \dots}{|r_{n+1}|} = \frac{|r_{n+2}|}{|r_{n+1}|} \left(1 + \frac{|r_{n+3}|}{|r_{n+2}|} + \frac{|r_{n+3}|}{|r_{n+2}|}\frac{|r_{n+4}|}{|r_{n+3}|} + \dots\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|r_{n+2}|}{|r_{n+1}|} (1 + a + a^2 + \dots) < \frac{|r_{n+2}|}{|r_{n+1}|} \cdot \frac{1}{1-a} ,$$

a więc na podstawie (6) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r_{n+2}| + |r_{n+3}| + \dots}{|r_{n+1}|} = 0 . \tag{7}$$

Z (7) na podstawie (5) wynika (4).

<u>Twierdzenie T2.</u> Jeżeli jedna z granic

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p_n|}{\ln|p_n - p_{n-1}|}$$

jest większa od 1, to są spełnione równości

$$k_0 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p_n|}{\ln|p_n - p_{n-1}|} ,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < k < k_0 \\ +\infty & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}$$

(w szczególności może być $k_0 = +\infty$).

Uwaga. Liczbę k_0 nazywamy rzędem zbieżności ciągu $\{p_n\}$ (patrz [1], [3])

Dowód twierdzenia poprzedzimy prostym lematem.

Lemat. Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ o wyrazach rzeczywistych i dodatnich są zbieżne do 0. Jeżeli

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} > 1 , \quad \text{to} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 ,$$

jeżeli natomiast

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} < 1 , \quad \text{to} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty .$$

Dowód lematu. Wykażemy pierwszą część lematu.

Z założenia kolejno mamy

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{\ln a_n}{\ln b_n} - 1\right) > 0 , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{-\ln \frac{a_n}{b_n}}{-\ln b_n} > 0 .$$

Stąd wynika, że $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-\ln \frac{a_n}{b_n}) = +\infty$ (ponieważ $\lim_{n\to\infty} (-\ln b_n) = +\infty$),

a więc

$$\lim_{n\to\infty} (-\ln \frac{a_n}{b_n}) = +\infty \quad .$$

Z ostatniej równości otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Dowodząc drugiej części lematu, kolejno z założenia mamy

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (1 - \frac{\ln a_n}{\ln b_n}) > 0 \ , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{-\ln \frac{b_n}{a_n}}{-\ln b_n} > 0 \ .$$

Stąd, podobnie jak w pierwszej części lematu

$$\lim_{n\to\infty} (-\ln \frac{b_n}{a_n}) = +\infty \ , \quad \text{a więc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad \text{czyli} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \ .$$

<u>Dowód twierdzenia.</u> Wykażemy najpierw, że jeżeli

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} = k_1 > 1 \ ,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < k < k_1 \ , \\ +\infty & \text{dla} \quad k > k_1 \ , \end{cases} \tag{8}$$

Mamy

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|^k} = \frac{k_1}{k} \ .$$

Stąd na podstawie lematu wynika (8).

Podobnie można wykazać, że jeżeli

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} = k_2 > 1 ,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < k < k_2 , \\ + & \text{dla} \quad k > k_2 . \end{cases} \tag{9}$$

Pozostaje wykazać, że $k_1 = k_2$.

Załóżmy, że $k_1 < k_2$. Wtedy dla dowolnej liczby $k^* \in (k_1 ; k_2)$ na podstawie (8) i (9) kolejno mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{k^*}} = +\infty , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^{k^*}} = 0 ,$$

a więc otrzymujemy sprzeczność z twierdzeniem T1.
Podobnie dochodzimy do sprzeczności, gdy $k_1 > k_2$. Zatem $k_1 = k_2$ i, dowód twierdzenia został zakończony.

Granica

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{k_0}} , \quad \text{gdzie} \quad 1 < k_0 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} < +\infty$$

może przybierać różne wartości co ilustrują przykłady.

Rozpatrzmy ciągi

$$p_{n+1} = p_n^{k_0} \left(- \frac{1}{\ln p_n}\right), \quad q_{n+1} = q_n^{k_0} \cdot c, \quad r_{n+1} = r_n^{k_0} (- \ln r_n) \tag{10}$$

$n = 1,2,\ldots,$

gdzie $c > 0$, $k_0 > 1$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi; liczby p_1, q_1 r_1 określimy poniżej.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 0^+} \left(- \frac{x^{k_0-1}}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (x^{k_0-1} c) = \lim_{x\to 0^+} (-x^{k_0-1} \ln x) = 0 ,$$

więc istnieją liczby rzeczywiste p_1, q_1, r_1 spełniające warunki

$$0 < -\frac{x^{k_0-1}}{\ln x} < 1 \qquad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant p_1 < 1,$$

$$0 < x^{k_0-1} \, c < 1 \qquad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant q_1 < 1,$$

$$0 < -x^{k_0-1} \ln x < 1 \qquad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant r_1 < 1.$$

Z ostatnich nierówności na podstawie indukcji wnioskujemy, że ciągi (10) są malejące.

Łatwo również wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

Stąd na podstawie (10) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln p_{n+1}}{\ln p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln r_{n+1}}{\ln r_n} = k_0 ,$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{(p_n)^{k_0}} = 0 , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{(q_n)^{k_0}} = c , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{(r_n)^{k_0}} = +\infty .$$

LITERATURA

1. H.P. Helfrich: Ein modifiziertes Newtonsches Verfahren, Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik. ISNM Vol. 12, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1969.
2. W. Rudin: Podstawy analizy matematycznej. PWN Warszawa 1969.
3. A. Ralston: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ПОРЯДКОМ СХОДИМОСТИ

Р е з ю м е

В работе доказаны две теоремы о последовательностях, которые связаны с понятием порядка сходимости.

Дана последовательность $\{P_n\}$ комплексных чисел, для которых $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, $P_n \neq P_{n+1}$ и $P_n \neq P$ при всех $N = 1,2,\ldots$

Теорема 1. Для любого действительного числа $k > 1$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_{n+1} - P|}{|P_n - P|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_{n+1} - P_n|}{|P_n - P_{n-1}|^k}.$$

Теорема 2. Когда один из пределов

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|P_{n+1} - P|}{\ln|P_n - P|}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|P_{n+1} - P_n|}{\ln|P_n - P_{n-1}|}$$

больше 1, тогда удовлетворены равности

$$K_0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|P_{n+1} - P|}{\ln|P_n - P|} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|P_{n+1} - P_n|}{\ln|P_n - P_{n-1}|}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_{n+1} - P|}{|P_n - P|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_{n+1} - P_n|}{|P_n - P_{n-1}|^k} = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 < k < k_0 \\ +\infty & \text{для } k > k_0 \end{cases}$$

SOME PROPERTIES OF SEQUENCES CONNECTED WITH THE ORDER OF CONVERGENCE

S u m m a r y

The paper contains the proofs of two theorems on sequences which are connected with the order of the convergence of a sequence.

Let $\{p_n\}$ be the sequence of complex numbers and let $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $p_n \neq p_{n+1}$ and $p_n \neq p$ form $n = 1,2 \ldots$

Theorem 1.

For an arbitrary real number $k > 1$ the equality

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k}$$

holds good.

Theorem 2.

If one of the limits

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|p_{n+1} - p_n|}{\ln|p_n - p_{n-1}|}$$

is greater than 1, the following equalities will be true:

$$k_0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|p_{n+1} - p|}{\ln|p_n - p|} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|p_{n+1} - p_n|}{\ln|p_n - p_{n-1}|},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p_{n-1}|^k} = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < k < k_0 \\ +\infty & \text{for } k > k_0. \end{cases}$$