ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Bronon SZOCIŃSKI

NIEZMIENNIKI PARY PUNKTÓW GEOMETRII PODWÓJNIE PSEUDOSTOCHASTYCZNEJ

Streszczenie. W pracy tej zostały wyznaczone wszystkie niezmienniki dwóch punktów w przestrzeni opartej na grupie podwójnie pseudostochastycznej. Otrzymane wyniki zostały zastosowane do wyznaczenia niezmienników ciągłych oraz do określenia normy w tej przestrzeni.

Wstęp

Macierz $A = [a_{ik}]$, $i,k = 1,2\ldots, n$ o elementach rzeczywistych nazywa się podwójnie pseudostochastyczną, jeżeli spełnia warunki

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1, \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1 \qquad k = 1,2,\ldots, n.$$

W dalszym ciągu macierze podwójnie pseudostochastyczne będziemy nazywać krótko macierzami dps.

W pracy [1] wykazano, że zbiór DS (n,R) wszystkich regularnych macierzy dps stopnia n o elementach rzeczywistych tworzy grupę.
Zgodnie z definicją podaną w pracy [2] geometrią podwójnie pseudostochastyczną nazywamy trójkę (R^n, G, f), gdzie zbiór

$$G := \left\{(A,a) : A \in DS\,(n,R), \quad a \in R^n\right\}$$

jest grupą, w której działanie wyraża się wzorem

$$(B,b) \circ (A,a) = (BA,\ Ba+b)\ ,$$

zaś f określone jest związkiem

$$f(x,g) = Ax + a$$

dla dowolnych $x \in R^n$ oraz $g = (A,a) \in G$.

W pracy tej zostały wyznaczone wszystkie niezmienniki pary punktów geometrii podwójnie pseudostochastycznej. Wyznaczanie tych niezmienników opiera się na rozwiązaniach pewnego równania funkcyjnego.

W § 1 wprowadzam pomocnicze pojęcia potrzebne w dalszej części pracy. § 2 zawiera pięć lematów, przy pomocy których wyznaczam w § 3 rozwiązania wspomnianego równania funkcyjnego. W ostatnim § 4 podaję zasadnicze twierdzenia pracy dotyczące niezmienników oraz normy.

§ 1. Na wstępie rozpatrzmy pewne szczególne macierze dps.

Definicja 1.1. Macierz, która powstaje z macierzy jednostkowej E przez zamianę miejscami i-tego oraz k-tego wiersza nazywa się macierzą permutacji P_{ik}.

Macierze permutacji posiadają następujące własności:

1° Iloczyn macierzy kwadratowych $A.P_{ik}$ jest macierzą, która powstaje z A przez zamianę miejscami i-tej oraz k-tej kolumny.

2° Iloczyn macierzy kwadratowych $P_{ik}.A$ jest macierzą, która powstaje z A przez zamianę miejscami i-tego oraz k-tego wiersza.

Definicja 1.2. Macierzą dps elementarną pierwszego rodzaju stopnia $n \geqslant 3$ $F_k(\alpha)$, $\alpha \neq 0$ nazywa się macierz powstałą z jednostkowej E przez zastąpienie wiersza k-tego oraz (k+1)-go wierszami

$$\begin{array}{cccccc} (1) & (k-2) & (k-1) & (k) & (k+1) & (n) \\ (0,\ldots, & 0, & 1-\alpha, & \alpha, & 0,\ldots, & 0) \\ (0,\ldots, & 0, & \alpha-1, & 1-\alpha, & 1,\ldots, & 0) \\ (1) & (k-2) & (k-1) & (k) & (k+1) & (n). \end{array}$$

Definicja 1.3. Macierz $G_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, której elementy a_{kl}, $k,l=1,2..n$ $n \geqslant 2$ określone są związkami

$$a_{ii} = a_{jj} = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad a_{ij} = a_{ji} = \frac{1-\alpha}{2},$$

$a_{kl} = \delta_{kl}$ w pozostałych przypadkach, nazywa się macierzą dps elementarną drugiego rodzaju.

Łatwo zauważyć, iż macierze E, P_{ik}, $F_k(\alpha)$, $G_{ij}(\alpha)$ są macierzami dps oraz $\mathrm{Det}\, F_k(\alpha) = \alpha$, $\mathrm{Det}\, G_{ij}(\alpha) = \alpha$.

§ 2. Podam teraz bez dowodów dwa lematy, które są szczególnymi przypadkami lematu 3.3 dowiedzionego w pracy [1].

Lemat 2.1. Jeżeli elementy u^l, $l = 1,2,\ldots, n$, $n \geqslant 3$ jednokolumnowej macierzy u spełniają następujące założenia

$$u^{i-1} \neq u^i , \qquad u^{i-1} \neq 0 , \qquad 1 < i < n ,$$

to istnieje regularna macierz $F_i(\alpha)$ taka, że

$$F_i(\alpha) \cdot u = \bar{u} , \qquad \bar{u}^i = 0$$

oraz

$$\bar{u}^{i+1} = u^i + u^{i+1} , \qquad \bar{u}^l = u^l \quad \text{dla} \quad l \neq i, \quad i+1 .$$

Lemat 2.2. Jeżeli elementy u^l, $l = 1,2,\ldots,n$, $n \geqslant 3$ jednokolumnowej macierzy u spełniają następujące założenia

$$u^{i-1} \neq u^i , \qquad u^{i-1} \neq u^i + u^{i+1} , \qquad 1 < i < n ,$$

to istnieje regularna macierz $F_i(\alpha)$ taka, że

$$F_i(\alpha) \cdot u = \bar{u} , \qquad \bar{u}^{i+1} = 0$$

oraz

$$\bar{u}^i = u^i + u^{i+1} , \qquad \bar{u}^l = u^l \quad \text{dla} \quad l \neq i , \quad i+1 .$$

Lemat 2.3. Jeżeli u^i, u^{i+1}, $i < n$ są elementami jednokolumnowej macierzy u zawierającej $n \geqslant 2$ wierszy, to istnieje macierz $G_{ii+1}(\alpha)$ taka, że $G_{ii+1}(\alpha) \cdot u = \bar{u}$, przy czym

$$\bar{u}^i = 0 , \quad \text{gdy} \quad u^i \neq \pm u^{i+1}$$

oraz

$$\bar{u}^i = 1 , \quad \bar{u}^{i+1} = -1 , \quad \text{gdy} \quad u^i = -u^{i+1} \neq 0 .$$

Dowód. Istotnie, przyjmując

$$\alpha = \frac{u^{i+1} + u^{i}}{u^{i+1} - u^{i}}, \quad \text{gdy} \quad u^{i} \neq \pm u^{i+1}$$

względnie

$$\alpha = \frac{1}{u^{i}}, \quad \text{gdy} \quad u^{i} = -u^{i+1} \neq 0$$

po łatwych przeliczeniach dochodzimy do związków zawartych w tezie lematu.

Oznaczmy przez $\left\{k;\ u^{k+1},\dots,u^{n}\right\}$ jednokolumnową macierz elementami której są kolejno: k zer oraz $u^{k+1},\dots,u^{n}$. Udowodnię następujący

<u>Lemat 2.4.</u> Jeżeli elementy u^{l}, $l = 1,2,\dots,n$ jednokolumnowej macierzy u nie wszystkie są sobie równe, to istnieje macierz L będąca iloczynem skończonej liczby macierzy dps elementarnych i permutacji taka, że

$$Lu = \left\{n-1;\ \sum_{l=1}^{n} u^{l}\right\}, \quad \text{gdy} \quad \sum_{l=1}^{n} u^{l} \neq 0, \tag{2.1}$$

$$Lu = \left\{n-2;\ 1,\ -1\right\} \quad \text{gdy} \quad \sum_{l=1}^{n} u^{l} = 0\ . \tag{2.2}$$

Dowód. W przypadku, gdy n=2 związki (2.1) oraz (2.2) wynikają natychmiast z lematu 2.3.

Niech teraz $n \geqslant 3$. Wykażę najpierw, że jeśli wszystkie elementy macierzy u są różne od zera oraz nie są sobie równe, to istnieje iloczyn L_1 macierzy dps elementarnych i permutacji spełniający równanie

$$L_1 u = \left\{1;\ v^{2},\ v^{3},\dots,v^{n}\right\}\ . \tag{2.3}$$

Istotnie, przy powyższych założeniach istnieją elementy u^{i} oraz u^{j} macierzy u takie, że $u^{i} \neq u^{j}$. Wówczas z równości

$$P_1 u = \left\{0;\ u^{i},\ u^{j},\ u_1^{3},\ u_1^{4},\dots,u_1^{n}\right\},$$

gdzie P_1 jest skończonym iloczynem stosownie dobranych macierzy permutacji, zaś $u^1, u^j, u_1^3, u_1^4, \ldots, u_1^n$ elementami u oraz lematu 2.1 wynika równość

$$P_{12}\, F_2(\alpha_1)\, P_1 u = \left\{1;\, u^1,\, u^j + u_1^3,\, u_1^4, \ldots,\, u_1^n\right\}$$

dowodząca związku (2.3)

Niech teraz macierz u posiada $k < n - 2$ elementów równych zeru i niech P_2 będzie iloczynem macierzy permutacji tak dobranych, aby

$$P_2 u = \left\{k;\, u^{k+1},\, u^{k+2}, \ldots,\, u^n\right\}. \tag{2.4}$$

Jeżeli

$$u^{k+1} = u^{k+2} = \ldots u^n, \tag{2.5}$$

to na mocy lematu 2.2

$$L_2 u = \left\{k+1;\, u^{k+1} + u^{k+2},\, u^{k+3}, \ldots,\, u^n\right\},$$

gdzie

$$L_2 = P_{k+1,\, k+2}\, F_{k+1}(\alpha_2)\, P_2 .$$

Jeżeli związek (2.5) nie zachodzi, to wśród $u^{k+1}, u^{k+2}, \ldots, u^n$ istnieje para elementów różnych. Wtedy mnożąc macierz $P_2 u$ przez odpowiedni iloczyn macierzy permutacji otrzymujemy równanie postaci (2.4), gdzie $u^{k+1} \neq u^{k+2}$ z którego w oparciu o lemat 2.1 można łatwo otrzymać równanie postaci

$$L_2 u = \left\{k+1;\, u^{k+1},\, u^{k+2} + u^{k+3},\, u^{k+4}, \ldots,\, u^n\right\}.$$

W ten sposób na mocy indukcji matematycznej otrzymujemy

$$L_3 u = \left\{n-2;\, w^{n-1},\, w^n\right\},$$

gdzie

$$w^{n-1} + w^n = \sum_{i=1}^{n} u^i ,$$

zaś L_3 jest pewnym skończonym iloczynem macierzy dps elementarnych i permutacji.

Jeżeli $w^{n-1} + w^n \neq 0$, to przy pomocy lematu 2.2 dochodzimy łatwo do związku (2.1). W przypadku, gdy $w^{n-1} + w^n = 0$ z lematu 2.3 wynika natychmiast (2.2).

c.n.d.

<u>Lemat 2.5.</u> Suma elementów jednokolumnowej macierzy $\bar{u} = Au$, gdzie $A \in DS(n,R)$ równa jest sumie elementów macierzy u.

Dowód. Istotnie, z tego, że $\bar{u} = Au$ wynika równość

$$\bar{u}^l = \sum_{i=1}^{n} a_{li}\, u^i,$$

gdzie

a_{li}, u^i, $\bar{u}^l$ są odpowiednio elementami macierzy A, u, $\bar{u}$.

Stąd

$$\sum_{l=1}^{n} \bar{u}^l = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{li}\, u^i = \sum_{i=1}^{n} u^i \sum_{l=1}^{n} a_{li} = \sum_{i=1}^{n} u^i .$$

c.n.d.

§ 3. Przy pomocy lematów 2.4 i 2.5 udowodnię następujące:

<u>Twierdzenie 3.1.</u> Każda funkcja $F : R^n \times R^n \longrightarrow R$ spełniające równanie

$$F(p,q) = F(Ap + a,\ Aq + a) \tag{3.1}$$

dla dowolnych $A \in DS(n,R)$, $p,q,a \in R^n$, jest postaci

$$F(p,q) = \begin{cases} \Psi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right), & \text{gdy wszystkie } u^l = q^l - p^l \text{ są równe,} \\ \Phi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right), & \text{gdy nie wszystkie } u^l = q^l - p^l \text{ są równe,} \end{cases} \tag{3.2}$$

gdzie

$\Phi : R \longrightarrow R$ oraz $\Psi : R \longrightarrow R$ są dowolnymi funkcjami.

Dowód. Przyjmując w równaniu (3.1)

$$A = E, \qquad a = -p$$

otrzymujemy

$$F(p,q) = F(0,q-p) = f(u) ,$$

gdzie

$$u = q-p.$$

Funkcja f z kolei powinna spełniać równanie

$$f(u) = f(Au) . \tag{3.3}$$

Jeżeli nie wszystkie u^l dla $l = 1,2,\ldots, n$ są sobie równe oraz

$$\sum_{l=1}^{n} u^l \neq 0, \tag{3.4}$$

to na mocy lematu 2.4 istnieje taka macierz $L \in DS(n,R)$, że

$$f(u) = f(Lu) = f(0,\ldots,0, \sum_{l=1}^{n} u^l) = \varphi_1 (\sum_{l=1}^{n} u^l) ,$$

przy czym w myśl lematu 2.5

$$\varphi_1 (\sum_{l=1}^{n} \bar{u}^l) = \varphi_1(\sum_{l=1}^{n} u^l) ,$$

gdzie $\bar{u}^l$ są elementami $\bar{u} = Au$. Zatem, jeśli nie wszystkie u^l są sobie równe oraz zachodzi (3.4), to

$$F(p,q) = \varphi_1 (\sum_{l=1}^{n} u^l) ,$$

gdzie $\varphi_1 : R-\{0\} \longrightarrow R$ jest dowolną funkcją.

Jeżeli nie wszystkie liczby u^l są równe oraz

$$\sum_{l=1}^{n} u^l = 0 ,$$

to na mocy lematu 2.4 istnieje macierz $L \in DS(n,R)$ taka, że

$$Lu = \left\{ n-2;\ 1,\ -1 \right\} .$$

Przyjmując wtedy w równaniu (3.3) $A = L$ otrzymujemy

$$f(u) = f(0,\dots,0,1,\ -1) = C ,$$

a zatem w przypadku tym

$$F(p,q) = C ,$$

gdzie C jest dowolną stałą. Ostatecznie, gdy nie wszystkie u^l są równe funkcja F przyjmuje postać

$$F(p,q) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right) = \begin{cases} \varphi_1\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right), & \text{gdy } \sum_{l=1}^{n} u^l \neq 0 , \\ C , & \text{gdy } \sum_{l=1}^{n} u^l = 0 , \end{cases}$$

gdzie $\varphi : R \longrightarrow R$ jest dowolną funkcją.

Niech wreszcie $u^l = \mu$ dla $l = 1,2,\dots, n$. Obliczmy elementy $\bar{u}^l$ iloczynu Au

$$\bar{u}^l = \sum_{i=1}^{n} a_{li} u^i = \mu \sum_{i=1}^{n} a_{li} = \mu .$$

Zatem $Au = u$. Stąd na mocy (3.3)

$$f(u) = f(\mu,\mu,\dots,\mu) = \Psi_1(\mu) = \Psi(n\mu) = \Psi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right) ,$$

czyli gdy wszystkie u^l są równe, funkcja F przyjmuje postać

$$F(p,q) = \Psi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right),$$

gdzie $\Psi : R \longrightarrow R$ jest dowolną funkcją.

c.n.d.

Ogólną postać ciągłych rozwiązań równania (3.1) podaje

<u>Twierdzenie 3.2.</u> Jeżeli rozwiązanie $F : R^n \times R^n \longrightarrow R$ równania (3.1) jest funkcją ciągłą, to musi mieć postać

$$F(p,q) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} u^l\right), \tag{3.5}$$

gdzie $\varphi : R \longrightarrow R$ jest dowolną funkcją a $u^l = q^l - p^l$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia 3.1 funkcja $F(p,q)$ musi mieć postać (3.2) Pokażemy, że jeśli F jest funkcją ciągłą, to $\varphi(t) \equiv \Psi(t)$.

Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz

$$p_m = (0,0,\ldots,0) \quad \text{i} \quad q_m = \left(\frac{t}{n} + \frac{1}{m}, \frac{t}{n} - \frac{1}{m}, \frac{t}{n}, \ldots, \frac{t}{n}\right)$$

Wówczas ze związku

$$\lim_{m\to\infty} (p_m, q_m) = (p_0, q_0),$$

gdzie

$$p_0 = (0,0,\ldots,0), \quad q_0 = \left(\frac{t}{n}, \frac{t}{n}, \ldots, \frac{t}{n}\right)$$

oraz z ciągłości funkcji F, otrzymujemy

$$\lim_{m\to\infty} F(p_m, q_m) = F(p_0, q_0).$$

Ale na mocy twierdzenia 3.1 mamy

$$\lim_{m\to\infty} F(p_m, q_m) = \lim_{m\to\infty} \varphi(t) = \varphi(t).$$

oraz

$$F(p_0, q_0) = \Psi(t)$$

Z ostatnich trzech związków wynika, że $\varphi(t) \equiv \Psi(t)$, co dowodzi tezy twierdzenia.

§ 4. Przejdźmy teraz do wyznaczania niezmienników pary punktów geometrii podwójnie pseudostochastycznej. Poszukujemy takich własności punktów p i q, które nie ulegają zmianie przy przekształceniach postaci $\bar{x} = Ax + a$, gdzie $A \in DS(n,R)$ zaś $x = [x^k]$, $\bar{x} = [\bar{x}^k]$, $a = [a^k]$, $k = 1,2,\ldots,n$ oznaczają macierze jednokolumnowe.
Poszukiwana funkcja $F : R^n \times R^n \longrightarrow R$ musi spełniać równanie $F(p,q) = F(\bar{p},\bar{q})$ czyli równanie (3.1). Wyznaczanie niezmienników pary punktów sprowadza się więc do rozwiązania równania (3.1).
Z twierdzeń 3.1 oraz 3.2 otrzymujemy zatem następujące

<u>Twierdzenie 4.1.</u> Niezmiennikiem pary punktów p i q geometrii podwójnie pseudostochastycznej jest funkcja $F : R^n \times R^n \longrightarrow R$ określona wzorem (3.2) Jeżeli założymy ciągłość tej funkcji, to wyraża się ona związkiem (3.5).

Zbiór wektorów $u = q - p$ tworzy n - wymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych, którą będziemy oznaczać przez V^n. Nasuwa się pytanie: Czy można w tej przestrzeni wprowadzić ciągłą normę $\|u\| : V^n \longrightarrow R$ spełniającą warunki

I $\|u\| \geqslant 0$ i $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

II $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$

III $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

IV $\|u\|$ jest niezmiennikiem obiektu $(V^n, DS(n,R), f)$, gdzie f określone jest związkiem $f(u,A) = Au$ dla dowolnych $u \in V^n$ oraz $A \in DS(n,R)$.

Można pokazać, że norma taka w tej przestrzeni nie istnieje. Istotnie, jeśliby istniała norma, to w myśl twierdzenia 4.1 musi ona być postaci

$$\|u\| = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u^i\right).$$

Wtedy z warunku I wynika, że $\|o\| = \varphi(o) = 0$, a stąd

$$\|(0,\dots,0,1,-1)\| = \varphi(0) = 0 ,$$

co jest sprzeczne z tym, że

$$u \neq 0 \Longrightarrow \|u\| > 0 .$$

Dlatego należy zapytać się, czy można w tej przestrzeni wektorowej wprowadzić ciągłą pseudonormę $\|u\| : V^n \longrightarrow R$ spełniającą warunki:

$$\text{I}^* \qquad \|u\| \geqslant 0 \quad \text{i} \quad u = 0 \Rightarrow \|u\| = 0$$

oraz II-IV? Twierdzącą odpowiedź na to pytanie daje następujące

<u>Twierdzenie 4.2.</u> W przestrzeni wektorowej V^n jedyną ciągłą pseudonormę $\|u\| : V^n \longrightarrow R$ spełniającą warunki I^* oraz II - IV jest funkcja

$$\|u\| = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u^i\right) = C\left|\sum_{i=1}^{n} u^i\right| , \tag{3.6}$$

gdzie C jest dowolną stałą dodatnią.

Dowód. Z warunku II otrzymujemy związek

$$\|\lambda u\| = \varphi\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} u^i\right) = |\lambda| \; \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u^i\right) .$$

Jeżeli $\sum_{i=1}^{n} u^i \neq 0$, to przyjmując

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u^i}$$

mamy

$$\varphi(1) = \frac{1}{\left|\sum_{i=1}^{n} u^i\right|} \; \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u^i\right) ,$$

więc

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u^i\right) = \varphi(1)\left|\sum_{i=1}^{n} u^i\right|,$$

przy czym w myśl warunku I* stała $C = \varphi(1)$ musi być dodatnia jak również $\varphi(0) = 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja (3.6) spełnia także warunek III, więc jest jedyną pseudonormą w tej przestrzeni.

LITERATURA

1. M. Kucharzewski, B. Szocliński: Über eine kanonische Form der regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen, Prace Naukowe U.Śl., Prace Mat. (w druku).
2. E.J. Jasińska und M. Kucharzewski: Kleinische Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

ИНВАРИАНТЫ ДВУХ ТОЧЕК
ВДВОЙНЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Р е з ю м е

В этой работе определены все инварианты двух точек в пространстве, основанном на группе вдвойне псевдослучайной. Полученные результаты были применены к определению непрерывных инвариантов, а также к определению нормы в этом пространстве.

INVARIANTS OF TWO POINTS IN DOUBLY PSEUDOSTOCHASTIC GEOMETRY

S u m m a r y

In this paper there have been determined all the invariants of two points in space, which is supported on a doubly pseudostochastic group. The results, which have been obtained, are applied to determine continous invariants and to determine the norm in this space.