ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Czesław KLUCZNY
Adam CZECH

O STABILNOŚCI NIELINIOWYCH RÓWNAŃ PARABOLICZNYCH Z STOCHASTYCZNYMI WSPÓŁCZYNNIKAMI

Streszczenie. W pracy badamy stabilność nieliniowych układów i równań parabolicznych ze stochastycznymi warunkami brzegowymi i współczynnikami mogącymi być procesami stochastycznymi. Wyprowadza się warunki dostateczne stabilności takich układów w sensie Kozina, lokalnej stabilności stochastycznej, stabilności przy stale działających zaburzeniach. W części drugiej rozpatrujemy n-wymiarowe równanie paraboliczne z jednorodnymi warunkami brzegowymi i podajemy tw. o jego lokalnej stabilności udowodnione przy pomocy zmodyfikowanego lematu Westhallo-Prodiego.

1. Wstęp

Będziemy rozpatrywać zadanie mieszane dla równania typu parabolicznego następującej postaci:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + A(t,x,\omega))\, u\,(t,x) + F(t,x,z,\omega) \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{x\in\Gamma} = \xi(t,\omega)\ , \tag{3}$$

gdzie L_0 jest macierzowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych, $A(t,x,\omega)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są przestrzenno-czasowymi procesami stochastycznymi $F(t,x,u,\omega)$ jest funkcyjnym członem nieliniowym mogącym zależeć od przypadku.

Γ jest brzegiem obszaru G przestrzeni R^n, na którym jest określony układ (1-3). Zakładamy w dalszym ciągu, że $F(t,x,0,\omega) \not\equiv 0$ z prawd. 1. W dalszych rozważaniach będziemy używać sformułowania "układ (1-3) jest stabilny ..." Rozumiemy przez to stabilność funkcji $u(t,x) = 0$ będącej rozwiązaniem układu

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + A(t,x,\omega))\, u\,(t,x) \tag{1}$$

$$u(0,x) = 0 \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{x\in\Gamma} = 0 \,. \tag{3}$$

Pokażemy, że małe zmiany warunków brzegowych i początkowych oraz zaburzenia nieliniowego powodują małe odchylenia rozwiązania $u(t,x,\omega)$ od stanu zerowego. Będziemy zakładać, że proces $\xi(t,\omega)$ posiada średnio-kwadratową pochodną, co umożliwia przeprowadzenie transformacji

$$u(t,x) = w(t,x) + \xi(t,\omega) \tag{4}$$

po zastosowaniu, której równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = (L_0 + A(t,x,\omega))\, w\,(t,x) + A(t,x,\omega)\,\xi(t,\omega) -$$

$$\frac{\partial \xi(t,\omega)}{\partial t} + F(t,x,w(t,x) + \xi(t,\omega),\, \omega)$$

$$w(0,x) = \varphi(x) - \xi(0,\omega) \tag{6}$$

$$w(t,x)\Big|_{x\in\Gamma} = 0 \,. \tag{7}$$

Do analizy układu wykorzystamy idee zaproponowane przez Mowczana, Wanga, Tylikowskiego i innych. Dwa pierwsze twierdzenia będą się opierały na własnościach półgrupowych rozwiązań, pozostałe na funkcjach analogicznych do funkcji Lapunowa. Jeżeli przez $\Phi(t_1,t_2)$ oznaczymy operator półgrupowy generowany przez L_0, to układ (5-7) można zapisać w postaci

$$w(t,x) = \Phi(t,0)\, w\,(o,x) + \int_0^t \Phi(t,s)\, A\,(s,x,\omega)\, w\,(s,x)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \Phi(t,s)\, \Big[A(s,x,\omega)\;\; \xi(s,\omega) - \frac{\partial \xi(s,\omega)}{\partial s} +$$

$$+ F(s,x,\, w\,(s,x) + \xi(s,\omega),\omega)\Big]\, ds \,. \tag{8}$$

Wprowadzimy następujące definicje stabilności:

Definicja 1

Mówimy, że układ (1-3) jest stabilny globalnie w sensie Kozina, jeżeli

$$\bigwedge_{u(0,x)\in M} \lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| = 0$$

z prawd. 1 M jest przestrzenią funkcji ograniczonych co do normy z prawd. 1.

Definicja 2

Mówimy, że układ (1-3) jest lokalnie stabilny w sensie Kozina, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \|u(0,x)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| = 0 \quad \text{z prawdop. 1.}$$

Definicja 3

Mówimy, że układ (1-3) jest lokalnie stochastycznie stabilny względem trzech norm, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \|u(0,x)\|_0 + \|\xi(t,\omega)\|_1 < r \Rightarrow \bigwedge_0 P\left\{\omega : \|u(t,x)\|_2 > \varepsilon\right\} < \delta,$$

Definicja 4

Mówimy, że układ (1-3) jest stabilny stochastycznie względem czterech norm przy stale działającym zaburzeniu F, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{>0} \|u(0,x)\|_0 + \|\xi(t,\omega)\|_1 + \|F(t,x,u,\omega)\|_2 < r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{>0} P\left\{\omega : \|u(t,x)\|_3 > \varepsilon\right\} < \delta .$$

Uwaga 1

Normy występujące w definicjach (3) i (4) mogą być identyczne. Będziemy wtedy mówić o stabilności wg jednej normy. Na ogół normy występujące w definicjach będą zależeć od czasu.

2. Podstawowe rezultaty

Biorąc pod uwagę postać układu (1-3), nie zmniejszymy ogólności rozważań, jeżeli przyjmiemy, że badana funkcja $u(t,x) \in M^*$ z prawdop. 1, gdzie $M^* = \left\{ u(t,x,\omega): \bigvee_{\mu(t)>0} \|u(t,x,\omega)\| \geqslant \mu(t) > 0 \right\}$.

Przyjmiemy także, że wszystkie niezerowe elementy macierzy $A(t,x,\omega)$ są z prawd. 1 ograniczone z góry co do normy. Tak więc będziemy badać stabilność $u(t,x,\omega) = 0$ w klasie M^*.
Liczba μ występująca w definicji klasy M^* jest dobierana w zależności od t i $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0$.

Twierdzenie 1

Jeżeli

(i) $\bigwedge_{t_1,t_2 \geqslant 0} \|\Phi(t_1,t_2)\| \leqslant C$ oraz $\|\Phi(t,0)\| < Ce^{-\vartheta t}$

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|\xi(t,\omega)\| = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{\partial \xi(t,\omega)}{\partial t} \right\| = 0$ z prawd. 1

(iii) $F(t,x,w(t,x) + \xi(t,\omega),\omega)\| \leqslant \eta(t,\omega)\, w(t,x)$ z prawd. 1

gdzie $\eta(t,\omega) \longrightarrow 0$ przy $\|w(t,x)\| \longrightarrow 0$ z prawdop. 1

(iv) istnieje proces stochastyczny $B(t,\omega)$ taki, że

$$\sup_{w \in M^*} \frac{\left\| A(t,x,\omega)\,\xi(t,\omega) - \frac{\partial \xi(t,\omega)}{\partial t} \right\|}{\|w(t,x,\omega)\|} \leqslant B(t,\omega) \text{ z prawd. } 1$$

(V) $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[B(s,\omega) + \|A(s,x,\omega)\| + \|\eta(s,\omega)\| \right] ds < \frac{\vartheta}{C}$

(VI) $\|\xi(t,\omega)\| < \infty$ z prawdopodob. 1 i $\left\| \frac{\partial \xi(t,\omega)}{\partial t} \right\| < \infty$ z prawd. 1

to układ (1-3) jest stabilny w sensie def. 1.

Uwaga 2.

Biorąc pod uwagę definicję klasy M^* oraz założenia (VI) otrzymujemy że $\sup_{w \in M^*} \{\dots\}$ występujące w założeniu (iv) istnieje dla każdego skończonego t, ponieważ wtedy $\|w(t,x,\omega)\| > \mu(t)$, a licznik jest ograniczony. W wypadku gdy $w(t,x,\omega) \to 0$, to z definicji klasy M^* wynika, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy $t \to \infty$, ale wtedy licznik także dąży do 0, co usprawiedliwia przyjęcie założenia (iv).

Dowód

Przechodząc do normy $\| \ \|$ i wykorzystując założenia tw. otrzymujemy z (8)

$$\|w(t,x)\| \leqslant \|\Phi(t,0)\| \ \|w(0,x)\| + \int_0^t \|\Phi(t,s)\| \ \|A(s,x,\omega)\| \ \|w(s,x)\| \, ds + \tag{9}$$

$$\int_0^t \|\Phi(t,s)\| \ B(s,\omega) \ \|w(s,x)\| \, ds + \int_0^t \|\Phi(t,s)\| \ \|\eta(s,\omega)\| \ \|w(s,x)\| ds$$

wykorzystując nierówność Gronwalla-Bellmana oraz założenia (ii),(i) otrzymujemy

$$\|w(t,x)\| \leqslant C \ \|w(0,x)\| \ \exp\left[-\gamma t\right] \exp C \int_0^t \Big[\|A(s,x,\omega)\| + \tag{10}$$

$$+ B(s,\omega) + \|\eta(s,\omega)\| \Big] ds$$

$$\|w(t,x)\| < C \ \|w(0,x)\| \exp\Big[t - \frac{\gamma}{C} + \frac{1}{t} \int_0^t \|A(s,x,\omega)\| + \tag{11}$$

$$+ B(s,\omega) + \|\eta(s,\omega)\| \Big] ds$$

biorąc pod uwagę, że $-\frac{\gamma}{C} + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Big[B(s,\omega) +$

$$+ \|A(s,x,\omega)\| + \|\eta(s,\omega)\| \Big] ds < 0 \quad \text{z praw. 1}$$

otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \|w(t,x)\| \leqslant 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|w(t,x)\| = 0 \text{ z prawd. } 1, \tag{12}$$

a ile $\|w(0,x)\| < \infty$, ale to wynika z (6). Mieliśmy

$$u(t,x) = w(t,x) + \xi(t,\omega), \tag{13}$$

a więc

$$\|u(t,x)\| \leqslant \|w(t,x)\| + \|\xi(t,\omega)\|, \tag{14}$$

skąd otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| = 0 \text{ z prawdop. } 1 \tag{15}$$

Uwaga 3

Jeżeli proces $B(t,\omega)$ z tw. 1 jest silnie stacjonarny i ergodyczny warunek (V) można zastąpić warunkiem $\sup_{t>0} E\, B(t,\omega) < \frac{\gamma}{2C}$ i analogicznie

$$\sup_{t>0} E\left[\|A(t,x,\omega)\| + \|\eta(t,\omega)\|\right] < \frac{\gamma}{2C}$$

Twierdzenie 2

Jeżeli

(i) $\bigwedge_{t_1,t_2} \|\Phi(t_2,t_1)\| < C e^{-\gamma(t_2-t_1)}$

(ii) proces $B_1(t,\omega)$ spełnia słabe prawo wielkich liczb, gdzie

$$B_1(t,\omega) = B(t,\omega) + \|\eta(t,\omega)\| + \|A(t,x,\omega)\|$$

(iii) $\sup_{t>0} E\, B_1(t,\omega) < \frac{\gamma}{C}$

(iv) $\xi(0,\omega) = 0$ z prawd. 1,

to układ (1-3) jest lokalnie stabilny w sensie definicji 3 wg normy.

Dowód

Modyfikując dowód podany w pracy Tylikowskiego (1) otrzymujemy:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{r>0} \|w(0,x)\| < r \Rightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega: \|w(t,x)\| > \varepsilon\right\} < \delta \tag{16}$$

Biorąc pod uwagę że: $u(t,x) = w(t,x) + \xi(t,\omega)$ otrzymujemy $\|u(t,x)\| \leqslant \leqslant \|w(t,x)\| + \|\xi(t,\omega)\|$. Jeżeli przyjmiemy że $\|u(t,x)\| > \varepsilon$ to tym bardziej $\|w(t,x)\| + \|\xi(t,\omega)\| > \varepsilon$.

Otrzymujemy więc ciąg nierówności

$$P\left\{\omega: \|u(t,x)\| > \varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\omega: \|w(t,x)\| + \|\xi(t,\omega)\| > \varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\omega: \|w(t,x)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{\omega: \|\xi(t,\omega)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{17}$$

z definicji stabilności wynika, że $\|\xi(t,\omega)\| < r$; przyjmiemy bez zmniejszenia ogólności, że $r < \frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy wtedy

$$P\left\{\omega: \|\xi(t,\omega)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0, \tag{18}$$

a więc jeżeli wybierzemy r tak jak w pracy (1) dla $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ to otrzymujemy na mocy def. 3, (17) (18) następujące:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{r>0} \|w(0,x)\| + \|\xi(t,\omega)\| < r \Rightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega: \|u(t,x)\| > \varepsilon\right\} < \delta \tag{19}$$

ale $|w(0,x)|$ na mocy założenia(iv)mamy $|w(0,x)| = |u(0,x)|$ co kończy dowód.

Uwaga 4

W wypadku gdyby $\xi(0,\omega) \not\equiv 0$ można zmodyfikować definicje (3) w następujący sposób:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{r>0} \|u(0,x)\| + 2\max\left[\xi(0,\omega), \max_{t>0} \|\xi(t,\omega)\|\right] < r =$$

$$= \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega: \|u(t,x)\| > \varepsilon\right\} < \delta \tag{20}$$

my wtedy w (19)

$$\|w(0,x)\| \leqslant \|u(0,x)\| + \|\xi(0,\omega)\|$$

i oczywiście, jeżeli $\|u(0,x)\| + 2\max\left[\|\xi(0,\omega)\| \max_{t>0} \|\xi(t,\omega)\|\right] <$, to tym bardziej

$$\|u(0,x)\| + \|\xi(0,\omega)\| + \|\xi(t,\omega)\| < r.$$

Przykłady wyznaczania operatora $\Phi(t_2,t_1)$ można znaleźć w pracy Wanga, względnie pracy Tylikowskiego [1]. Dla badań stabilność układu w sensie definicji 4, wprowadzimy funkcję $V(t,u,\xi,F)$.

Twierdzenie 3

Jeżeli istnieje funkcja $V(t,u,\xi,F) \geqslant 0$ spełniająca następujące warunki:

(i) jest dodatnio określona względem normy $\|\cdot\|_3$, tzn.

$$\bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{\gamma>0} \bigwedge_{t>0} \|u(t,x)\|_3 > \delta \Longrightarrow V(t,u,\xi,F) \geqslant \gamma$$

(ii) $V(t,u,\xi,F)$ jest ciągła względem norm $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ w punkcie $t = 0$, tzn.

$$\bigwedge_{\beta>0} \bigvee_{>0} \|u(0,x)\|_0 + \|\xi\ 0,\omega)\|_1 + \|F(0,x,u_0,\omega)\|_2 < r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V(0,u_0,\xi,F) < \beta$$

(iii) $$\bigvee_{\chi(t,\omega)} \bigwedge_{t>0} V\ t,u,\xi,F) < \chi(t,\omega)\ V\ (t,u,\xi,F)$$

(iv) $$E\ V(0,u_0,\ \xi(0,\omega)\ F\ (0,x,u_0,\omega)\ \exp\int_0^t X(s,\omega)\ ds \leqslant$$

$$\leqslant V(0,u_0,\xi(0,\omega),\ F(0,x,u_0,\omega)\ E\ \exp\int_0^t \chi(s,\omega)\ ds \text{ z prawdop. } 1.$$

(v) $$E\left[\exp\int_0^t \chi(s,\omega)\right] ds < M < \infty$$

wtedy układ (1-3) jest stabilny w sensie definicji 4.

Dowód

Z założenia (iii) wynika, że

$$V(t,u,\xi,F) \leqslant V(0,u,\xi,F) \exp \int_0^t \chi(s,\omega)\, ds \tag{20}$$

i uśredniając przy wykorzystaniu założenia (IV) otrzymujemy

$$E\, V(t,u,\xi,F) \leqslant V(0,u,\xi,F)\, E \exp \int_0^t \chi(s,\omega)\, ds \tag{21}$$

przyjmując dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$b = \inf V(t,u,\xi,F) \tag{22}$$

$$(u,t,\xi,F) \in \left\{ u : \|u\|_3 > \varepsilon \right\} x \left\{ t : t \geqslant 0 \right\} x \left\{ F : \|F\|_2 > \varepsilon \right\} x \left\{ \xi : \|\xi_1\|_1 > \varepsilon \right\}$$

w warunku ciągłości funkcji V mamy

$$\bigvee_{r>0} \|u(0,x)\|_0 + \|\xi(0,\omega)\|_1 + \|F(0,x,u_0\omega)\|_2 < r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(0,u_0, \xi(0,\omega)\, F\, (0,x,u_0,\omega)) < b \tag{23}$$

i z nierówności Czebyszewa wynika, że

$$P\left\{ \omega : \|u(t,x)\| > \varepsilon \right\} < \delta \tag{24}$$

Można uzyskać zdecydowane uproszczenie założenia (iv), jeżeli przyjmiemy że $\xi(0,\omega) = 0$ z prawdop. 1 oraz, że $F(0,x,u_0,\omega) = 0$ z prawd. 1. Wtedy można przyjąć, że $V(0,x,\xi(0,\omega)\, F\, 0,x,u_0,\omega)) = V_0(0,u_0)$ – jest funkcją zdeterminowaną. W tym przypadku można by rozważać stabilność tylko wg warunku początkowego.

Uwaga 5

Założenie (iv) powyższego tw. jest bardzo krępujące, gdyż w wypadku gdy $V(0,u_0,\xi(0,\omega)\, F\, (0,x,u_0,\omega))$ oraz $\exp \int_0^t \chi(s,\omega)\, ds$ były niezależne [co często ma miejsce], to wtedy $V(0,u_0, \xi(0,\omega)\, F\, P,x,u_0,\omega))$ powinno być zdeterminowane.

Można więc założenie (iv) zastąpić następującym:

$$V(0,u_0,\ \xi(0,\omega),\ F\ (0,x,u_0,\omega)) \quad \text{i} \quad \exp\int_0^t \chi(s,\omega)\,ds$$

są niezależne.
W tym wypadku można powtórzyć dowód twierdzenia 3 przy następujących zmianach.
Z warunku (ii) wynika, że

$$E\ V(0,u_0,\ \xi(0,\omega),\ F(0,u_0,x,\omega)) < p$$

przy odpowiednio dobranym r. Korzystając z (iv) mamy

$$E\ V(t,u,\xi,F) < E\ V(0,u_0,\xi(0,\omega)\ F(0,x,u_0\omega))\ .\ E\exp\int_0^t \chi(s,\omega)\,ds$$

wybierając p analogicznie jak w dowodzie tw. 3 otrzymamy za pomocą nierówności Czebyszewa jego tezę.
Będziemy dalej rozważać równanie postaci

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + F(x,t,u,\omega)$$

$$u(t,x)\Big|_{x\in\Gamma} = 0 \text{ z prawd. } 1 \quad \text{i} \quad F(x,t,0,\omega) = 0 \text{ z prawd. } 1 \tag{26}$$

Będziemy badać stabilność lokalną tego równania w sensie Kosina wykorzystując lemat Westphalla-Prodiego odpowiednio zmodyfikowany.

Lemat Westphalla-Prodiego (zmodyfikowany)

Niech $u(t,x,\omega)$ i $v(t,x,\omega)$ będą przestrzennie ograniczonymi procesami stochastycznymi, których realizacje z prawdopodobieństwem 1 są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, v_t, v_{x_i}, $v_{x_i x_j}$ i z prawd. 1 są spełnione nierówności

$$\left.\begin{aligned} v_t &< F(x,t,v,q_i,q_{ij}),\\ u_t &> F(x,t,u,p_i,p_{ij}),\end{aligned}\right\} \text{ z prawd. } 1$$

wówczas, jeżeli

$$P\left\{\omega: v(x,t,\omega) - u(x,t,\omega) > 0\right\} = 1 \quad \text{dla} \quad x,t, \in B$$

to

$$P\left\{\omega: v(x,t,\omega) - u(x,t,\omega) > 0\right\} = 1 \quad \text{dla} \quad x,t, \in \bar{B}\ .$$

Uwaga 3

Jeżeli G jest obszarem, w którym określone jest równanie (25) z brzegiem Γ, to rozpatrzymy n + 1 - wymiarowy obszar $B = [G+\Gamma] \times x[0,T]$. Przez E oznaczymy wnętrze tego hipercylindra, przez B_T układ punktów (x,T), gdzie $x \in G$ a B będzie pozostałą częścią granicy B. Wtedy $\bar{B} = E + B_T + B$

Dowód

Ustalmy ω ze zbioru Ω, dla którego odpowiednie realizacje u_ω i v_ω są ciągłe i wprowadzimy funkcję $u - v = q$. Załóżmy, że zbiór punktów (x,t), dla których $q_\omega(x,t) < 0$, nie jest miary zero. Z założenia o ciągłości realizacji wynika, że $\bigvee_{(\bar{x},\bar{t})}$ takie że $q_\omega(x,t) = 0$ oraz $q_\omega(x,t) > 0$ dla $t < \bar{t}$ i $x \in G$ Punkt $(\bar{x},\bar{t})$ jest punktem wewnętrznym $\bar{B}$, ponieważ na B zachodzi $q_\omega(x,t) < 0$.
Mamy $q_\omega(x,\bar{t}) \geqslant 0$ dla $x \in G$, a więc funkcja $q_\omega(x,\bar{t})$ rozpatrywana jako funkcja x osiąga wewnętrzne minimum w punkcie $(\bar{x},\bar{t})$, a więc w tym punkcie

$$q_i = \frac{\partial q_\omega}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum_{i,j} q_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0 \tag{27}$$

$$q_t(\bar{x},\bar{t}) \leqslant 0.$$

Mamy więc

$$v = u$$

$$g_i = p_i \tag{28}$$

$$v_t > u_t$$

$$\sum_{i,j} (p_{ij} - g_{ij})\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0\ .$$

Przyjmijmy dodatkowo, że forma $\sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j$ jest dodatnio określona dla prawie każdego ω. Na mocy znanych tw. o formach kwadratowych mamy

$$\sum_{i,j} \frac{\partial F_\omega}{\partial p_{ij}} (p_{ij} - g_{ij}) \geqslant 0 . \tag{29}$$

Otrzymujemy

$$F_\omega(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{p}_i,\bar{p}_{ij}) - F_\omega(\bar{x},\bar{t},\bar{v},\bar{g}_i,\bar{g}_{ij}) = \sum_{i,j} \frac{\partial F_\omega}{\partial p_{ij}} (p_{ij} - g_{ij}) \geqslant 0 ,$$

gdzie wielkości zaznaczone kreską należy obliczać w punkcie $(\bar{x},\bar{t})$
Mamy więc

$$u_t > F_\omega(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{p}_i,\bar{p}_{ij}) \geqslant F_\omega(\bar{x},\bar{t},\bar{v},\bar{g}_i,\bar{g}_{ij}) \geqslant v_t \tag{30}$$

co jest sprzeczne z (28). Tak więc zbiór punktów, dla których $g_\omega(x,t) < 0$ jest zerowy.
Ponieważ $g_\omega(x,t)$ była ustalona dowolnie, więc zachodzi teza lematu dla prawie każdej realizacji, co kończy dowód. W dalszym ciągu będziemy rozważać funkcje $u(t,x)$, takie że $\|u(t,x)\| < K$, gdzie K jest pewną stałą. Oznaczymy prawą stronę (25) przez $L(u)$

Twierdzenie 4

Funkcja $u(t,x,\omega)$ jest rozwiązaniem (25) i dla prawie każdego ω u, u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ są funkcjami ciągłymi dla $x \in G + \Gamma$ i spełnia jednorodny warunek brzegowy.

(ii) forma kwadratowa $\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ jest dodatnio określona dla $x \in G + \Gamma$

(iii) istnieje funkcja $\Phi(t,x,\omega)$ taka, że

$$\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial t} > L[\Phi] + F_\omega(t,x,\Phi) \text{ z prawd. } 1$$

oraz $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x,\omega) = 0$ jednostajnie względem x, z prawdep. 1.

(iv) $\Phi(0,x) \geqslant \delta^2$ dla $x \in G + \Gamma$,

to równanie jest stabilne w sensie def. 2.

Dowód

Korzystając z lematu Westphalla-Prodiego otrzymujemy że na brzegu B $u_\omega(t,x) \leqslant \Phi_\omega(t,x)$ z prawd. 1 o ile $\|u_\omega(0,x)\| < \delta$. Tym samym otrzymujemy w całym obszarze $\overline{B}$ dla prawie każdego ω

$$u_\omega(t,x) \leqslant \Phi_\omega(t,x) .$$

Przechodząc do granicy $t \to \infty$ otrzymujemy o ile $\|u(0,x)\| < \delta$ z prawd. 1.

$$\lim_{t\to\infty} \|u_\omega(t,x)\| = 0 \text{ z prawd. } 1 ,$$

co kończy dowód.

Przykład 1

Zbadamy stabilność równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + F(t,x,u,\omega) \tag{31}$$

przy dodatkowym założeniu: $u\,F(t,x,u,\omega) \leqslant \lambda(\omega)\,u^2$ z pr. 1. o ile $\|u\| < K$ gdzie $\lambda(\omega)$ jest funkcją przyjmującą z prawd. 1 wartości dodatnie i założymy, że istnieje stała λ , taka, że $\max_\omega \lambda(\omega) \leqslant \lambda_1$, pomnożymy obie strony równania (31) przez u.
Otrzymamy wtedy

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} = L\left[u^2\right] - 2\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, u_{xi}\, u_{xj} + 2\,u\,F \tag{32}$$

wykorzystując poczynione założenia. Otrzymamy

$$\frac{\partial u^2_\omega}{\partial t} \leqslant L\left[u^2_\omega\right] + 2\lambda_\omega\, u^2 \leqslant L\left[u^2_\omega\right] + \lambda_2\, u^2 \tag{33}$$

dla ustalonego ω (33)
wprowadzimy dla ustalonego ω funkcję

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\gamma}\left(A - e^{D x_1}\right) e^{-\alpha t} \tag{33}$$

gdzie występujące stałe są odpowiednio dobrane.

Mamy

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + L\Phi + \lambda_2\Phi = \frac{e^{-\alpha t}}{N}\left\{(\alpha + \lambda_1)(A - e^{DX_1}) - \right.$$

$$\left. - e^{DX_1}(D^2 a_{11} + D b_1)\right\}. \qquad (34)$$

Dla dowolnego $\delta^2 > 0$ można dobrać $D > 0$ tak, aby $(D^2 a_{11} + D b_1) > \delta^2$. Natomiast przyjmiemy $A = e^{DX_1} + y^2$, gdzie $y^2 < 1$. X_1 jest maksymalną wartością x_1 $G + \Gamma$. Wybierzemy α ta, aby $(\alpha + \lambda_1) < {}^2e - {}^{DX_1}1$ $N^{-1}e^{DX_1} < K$. Wtedy $\frac{\partial\Phi}{\partial t} > L[\Phi] + \lambda_1\Phi$ 1 $\Phi \geqslant \delta^2$. Jeżeli $|u_\omega(x,0)| < \delta$ dla $x \in G$ biorąc pod uwagę warunki brzegowe otrzymujemy na mocy lematu, że $\Phi_\omega > u_\omega^2$ w $\bar{B}$, a więc dla prawie każdego ustalonego ω otrzymujemy $\lim_{t\to\infty} u_\omega^2(t,x) = 0$ jednostajnie względem x, a więc możemy przyjąć, że $\lim_{t\to\infty} |u(t,x)| = 0$ z prawd. 1.

Dodatkowe założenie, że $uF \leqslant \lambda(\omega)\, u^2$ pozwalało nam stosunkowo łatwo przyjąć funkcję $\Phi(x,t)$. Dla konstrukcji funkcjonałów można użyć metody podanej w pracy Infante, Plauta po odpowiedniej modyfikacji.

LITERATURA

1. A. Tylikowski: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej z. 20, "Automatyka", nr 20, Gliwice 1972.
2. B. Skalmierski, A. Tylikowski: Stabilność w mechanice, PTMTiS, Gliwice 1972.
3. R.H. Plaut E.F. Infante: On stability of some continous systems subjected to random excitation Trans ASME E37 No3 1970 pp 623-38.
4. R. Narasimhan: On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equations Journal of Rational Mechanics and analisis Vol. 3 No3 1954 pp 303-313.
5. P.K.C. Wang On the almost sure stability of linear stochstic distributed parameter dynamical systemes, Trans. ASME, E33, No1 1966 pp 182-6.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р е з ю м е

В этой работе мы исследуем случайную устойчивость некоторых нелинейных систем при помощи леммы Westphalla-Prodie'go методом Лапунова и методом, основанным на неравности Гронвалла-Беллмана.

THE STABILITY OF SOLUTIONS OF PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDON COEFFICIENTS

S u m m a r y

In this work we analyse the stochastic stability of some nonlinear continous systems subject to stochastic perturbations. We have applied Westphall-Prodie's modified theore of Lapunov's method as well as the method supported by Gronwall-Bellman.