ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Adam CZECH
Danuta JAMA
Barbara JANIEC

O STABILNOŚCI PEWNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W pracy będziemy rozważać stabilność rozwiązania zerowego układu ciągłego opisanego równaniem o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego przy stale działających zaburzeniach na brzegu.

W pierwszej części pracy badamy stabilność przy pomocy funkcji analogicznych do funkcjonałów Lapunowa. W drugiej części badamy stabilność układu przy pomocy zasady maximum dla równań parabolicznych, a w trzeciej rozważymy stabilność pewnego układu dyskretno-ciągłego z jednostronnym sprzężeniem. Otrzymane wyniki można stosować zarówno do układów deterministycznych, jak i losowych. Wszystkie wyniki są sformułowane dla procesów losowych czasowych, ale można je przenieść na przypadki deterministyczne.

I. O stabilności pewnych układów ciągłych przy stale działających zaburzeniach na brzegu

Zakładamy, że układ dynamiczny posiada następujące własności:

1. określony jest na przestrzennym k-wym. zbiorze $D \subset E_k$ z brzegiem C na przedziale czasowym $[0,\infty)$
2. opisany jest równaniem

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t)\,u(t,x) \quad \text{dla} \quad x \in D \tag{1}$$

$$G(t)\,u(t,x) = \xi(t,x) \quad \text{dla} \quad x \in D \tag{2}$$

$$u(0,x) = \Phi(x)\,, \tag{3}$$

gdzie $L(t)$ jest macierzą zawierającą operatory różniczkowe względem zmiennych przestrzennych, których współczynniki mogą być procesami losowymi, czasowymi, $G(t)$ – jest macierzą zawierającą operatory różniczkowe względem zmiennej czasowej, której współczynniki mogą być procesami losowymi, $\xi(t,\omega)$ jest procesem losowym.

Będziemy zakładać, że istnieje $G^{-1}(t)$ i oznaczmy

$$G^{-1}(t)\,\xi(t,x) = \eta(t,x) \quad \text{dla} \quad x \in C.$$

Niech proces losowy $\xi(t,x,\omega)$ dąży do zera z prawdopod. 1 przy $t \to \infty$. W dalszych rozważaniach będziemy zwyczajowo pomijać ω w zapisie procesu losowego. Będziemy badać stabilność rozwiązania zerowego układu

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t)\,u(t,x) \quad \text{dla} \quad u \in D \tag{1'}$$

$$G(t)\,u(t,x) = 0 \qquad x \in C \tag{2'}$$

$$u(0,x) = 0\,. \tag{3'}$$

przy warunku brzegowym (2) i początkowym (3).
Niech H będzie przestrzenią Hilberta rzeczywistą o elementach będących funkcjami wektorowymi ciągłymi w DxT. Wprowadzimy iloczyn wewnętrzny wzorem:

$$\langle y,z\rangle = \int_D y'(t,x)\,z(t,x)\,dD\,, \tag{4}$$

gdzie znak "'" oznacza transpozycję.
Przestrzeń stanów S układu definiujemy jako podprzestrzeń H z elementami-wektorami spełniającymi warunki brzegowe (2) i inne warunki gładkości. Dla stanów początkowych $u(0,x) = \varphi(x)$ wprowadzimy normę

$$\|u(0,x)\| = \|u_0\| = \langle u_0, Mu_0\rangle\,, \tag{5}$$

gdzie M jest pewnym symetrycznym macierzowym operatorem względem zmiennych przestrzennych, dodatnio określonym. Ponieważ warunki brzegowe (2) można również zapisać jako $u(t,x)\big|_{x\in C} = \eta(t,x,\omega)$, więc wprowadzimy normę

$$\|\eta(t,x,\omega)\|_1 = \sup_{t \geqslant 0} E\sqrt{\eta'(t,x,\omega)\,\eta(t,x,\omega)}\,. \tag{6}$$

Dla rozwiązania wprowadzimy normę

$$\|u(t,x)\|_2 = \sup_{t \geqslant 0} E\langle u,B(t)u\rangle\,, \tag{7}$$

gdzie B(t) zostanie zdefiniowana poniżej.

Definicja 1

Rozwiązanie trywialne $u(t,x,\omega) = 0$ równania (1) jest stabilne w sensie Kozina, jeżeli

$$\bigwedge_{\omega} \lim_{t\to\infty} \|u(t,x,\omega)\| = 0 .$$

Definicja 2

Rozwiązanie trywialne $u(t,x,\omega) = 0$ układu (1) – (3) jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 względem 3 norm $\|\cdot,\cdot\|_0$; $\|\cdot,\cdot\|_1$; $\|\cdot,\cdot\|_2$, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} (\|u(0,x)\|_0 + \|\eta(t,x)\|_1) < \delta \Rightarrow \|u(t,x)\|_2 < \varepsilon$$

z prawdopodobieństwem 1 dla norm $\|\cdot,\cdot\|_0$; $\|\cdot,\cdot\|_1$; $\|\cdot,\cdot\|_2$ określonych w przestrzeni M w sposób dowolny, spełniających postulaty normy.

Definicja 3

Rozwiązanie trywialne $u(t,x) = 0$ jest lokalnie stabilne stochastycznie względem 3 norm $\|\cdot,\cdot\|_0$; $\|\cdot,\cdot\|_1$; $\|\cdot,\cdot\|_2$, jeżeli

$$\bigwedge_{r>0} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} (\|u(0,x)\|_0 + \|\eta(t,x)\|_1) < \delta \Rightarrow P\{\omega: \|u(t,x)\|_2 > \varepsilon\} < r$$

Definicja 4

Funkcja $V(u,t,\eta)$ jest ciągła wg średniej względem $\|(u)o,t)\|_0$ i $\|\eta(t,x)\|_1$ dla $t = 0$, jeżeli

$$\bigwedge_{\rho>0} \bigvee_{r} (\|u_0\|_0 + \|\eta(0,x)\|_1) < r \Rightarrow E\, V(u_0,0,\eta(0)) < \rho$$

Twierdzenia o stabilności w oparciu o metodę Lapunowa

Wprowadźmy funkcję $V: s \times \Delta \times s \longrightarrow s$, $\Delta = [0,\infty)$

$$V(u,t,\eta(t,x)) = \langle u, B(t)u\rangle + \eta'(t,x)\,\eta(t,x) , \qquad (8)$$

gdzie $B(t)$ jest pewnym symetrycznym operatorem $H \longrightarrow H$, a $\eta(t,x,\omega)$ jest procesem czasowo-przestrzennym określonym w D takim, że $u(x,t) = \eta(t,x)$ dla $x \in C$.

Założenia dotyczące funkcji V względnie B(t) będziemy formułować w toku twierdzeń.

Ogólnie zakładamy, że

$$\bigvee_{L>0} V(u,t,\eta) \geq L(u(t,x))$$

oraz wprowadzimy pochodną czasową wzdłuż trajektorii

$$\dot{V}(u,t,\eta) = \langle Lu, Bu\rangle + \langle Lu, BLu\rangle + \langle u,\dot{B}u\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\left[(\eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right], \tag{9}$$

co można dalej zapisać

$$\dot{V}(u) = \langle u, N(t)u\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right], \tag{1P}$$

gdzie

$$N(t) = L^{*}B + BL + \dot{B} \tag{11}$$

(gwiazdka oznacza transpozycję macierzy).
Łatwo spostrzec, że operator N(t) jest symetryczny.
Rozpatrzmy problem

$$N(t)y = \lambda B(t)y, \quad y \in S\ . \tag{12}$$

W tej części pracy obowiązuje założenie, że powyższy problem ma rozwiązania i istnieje maksymalna wartość własna λ max.

Twierdzenie 1

Jeżeli istnieje operator macierzowy B(t) taki, że

$$\text{i} \quad \bigvee_{\gamma}\ \bigwedge_{\|u\|_2 \geq \gamma > 0}\ \bigvee_{Mo} \langle u, B(t)u\rangle > M_o \tag{13}$$

$$\text{ii} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda \max(t)\, dt < 0 \tag{14}$$

$$\text{iii} \quad \bigwedge_{\omega}\ \bigwedge_{x\in C}\ \lim_{t\to\infty} \eta(t,x) = 0\ , \tag{15}$$

to rozwiązanie trywialne $u(t,x,\omega) = 0$ układu (1) jest stabilne w sensie Kozina.

Dowód:

Rozpatrzmy iloraz

$$\frac{\dot{V}(u,t,\eta)}{V(u,t,\eta)} = \frac{<u,N(t)u> + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(tx),\ \eta(t,x)\right]}{<u,B(t)u> + \eta'(t,x)\ \eta(t,x)} =$$

$$= \frac{<u,\lambda B(t)u> + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(t,x)\ \eta(tx)\right]}{<u,\ B(t)u> + \eta'(t,x)\ \eta(t,x)} =$$

$$= \frac{\lambda <u,\ B(t)u> + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right]}{<u,\ B(t)u> + \eta'(t,x)\ \eta(t,x)},$$

ponieważ $\eta'(t,x)\ \eta(t,x) \geqslant 0$, więc

$$\leqslant \frac{\lambda <u,B(t)u> + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right]}{<u,B(t)u>}$$

$$\leqslant \lambda\max + \frac{1}{Mo}\frac{\partial}{\partial t}\left[\eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right]. \qquad (16)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$V(u,t,\eta) \leqslant V(u_0,0,\eta(o))\exp\left[\int_0^t \lambda\max(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Mo}\ \eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right]. \qquad (17)$$

W oparciu o (14) i (15) mamy więc, że

$$\bigwedge_{x\in\bar{D}}\ \bigwedge_{\omega}\ \lim_{t\to\infty} V(u,t,\eta) = 0 \qquad (18)$$

czyli $\lim\limits_{t\to\infty} L\left|u(t,x)\right| = 0$ dla każdego ω i dla każdego $X \in \bar{D}$, a więc teza.

Twierdzenie 2

Przy założeniach twierdzenia 1 przyjmujemy dodatkowo:

$$1 \quad \exp\left[\int_0^t \lambda\max(\tau)\,d\tau + \frac{1}{Mo}\ \eta'(t,x)\ \eta(t,x)\right] \leqslant 1 \ \bigwedge_{t>0} \text{ z prawdop.1} \qquad (19)$$

ii z prawdopod. 1 $\eta(0,x,\omega) = 0$ (20)

iii istnieje stała β taka, że $\langle u_0, B(t)u_0\rangle \leqslant \beta\langle u_0\, Mu_0\rangle$, wtedy rozwiązanie trywialne $u(x,t,\omega) = 0$ układu (1) jest stabilne z prawdop. 1.

Dowód:

Korzystamy z (17). Stosując założenia (19) – (21) otrzymujemy:

$$V(u,t,\eta) \leqslant V(u_0,0,0)) = \langle u_0, B(t)u_0\rangle \leqslant \beta \langle u_0, Mu_0\rangle \tag{22}$$

z prawdop. 1.

$$\langle u, B(t)u\rangle + \eta^{*}(t,x)\,\eta(t,x) \leqslant \beta\langle u_0, Mu_0\rangle \text{ z prawdop. 1} \tag{23}$$

Ponieważ

$$\eta^{*}(t,x)\,\eta(t,x) \geqslant 0 , \tag{24}$$

więc

$$\langle u, B(t)u\rangle \leqslant \beta\langle u_0, Mu_0\rangle \text{ z prawdop. 1,} \tag{25}$$

a więc tymbardziej

$$\langle u, B(t)u\rangle \leqslant \beta\langle u_0, Mu_0\rangle + \sqrt{\eta^{*}(t,x)\,\eta(t,x)} \text{ z prawdop. 1} \tag{26}$$

Biorąc wartość oczekiwaną, a następnie supremum po x i t otrzymamy

$$\sup_t E\langle u, B(t)u\rangle \;\; \sup_t \; E\beta\langle u_0, Mu_0\rangle + \sup_t E\sqrt{\eta^{*}(t,x)\,\eta(t,x)}$$

$$\sup_t E\langle u, B(t)u\rangle \leqslant \beta \sup_x \langle u_0, Mu_0\rangle + \sup_t E\sqrt{\eta^{*}(t,x)\,\eta(t,x)}$$

W oparciu o (15), (6) i (7) mamy

$$\|u(t,x,\omega)\|_2 \leqslant \beta\, \|u(0,x)\|_0 + \|\eta(t,x,\omega)\|_1 \quad \text{z prawdop. 1.}$$

Niech $N = \max(1, p)$

$$\|u(t,x,\omega)\|_2 \leqslant N\left[(\|u(0,x)\|_0 + \|\eta(t,x,\omega)\|_1\right]. \tag{27}$$

Kładąc w def. 2 $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ otrzymujemy tezę

Uwaga 1 (do tw. 2)

Wyrażenie $\frac{1}{M_0}\eta'(t,x)\,\eta(t,x)$ biorąc pod uwagę definicję stabilności może być uczynione dostatecznie małym przy odpowiednim wyborze δ.

Wniosek 1

$V(u,t,\eta)$ określona wzorem (8) jest ciągła względem norm $\|u\|_0$ i $\|\eta\|_1$ dla $t = 0$.

Dowód

W przypadku gdy $\eta(0,\omega) = 0$ z prawdop. 1 wniosek wynika natychmiast. Dowód przeprowadzimy dla $\eta(0,x,\omega) \neq 0$.
Na mocy (24) i (22)

$$V(u,t,\eta) \leqslant \langle u, B(t)u\rangle + \eta'(t,x)\,\eta(t,x) \tag{28}$$

dla $t = 0$

$$V(u_0,0,\eta(0,x,\omega)) \leqslant \langle u_0, B(0)u_0\rangle + \eta'(0,x,\omega)\,\eta(0,x,\omega)$$

$$\leqslant p\langle u_0, Mu_0\rangle + \sup_x\sqrt{(\eta'(0,x,w)\,\eta(0,x,w))^2}$$

$$\leqslant p\langle u_0, Mu_0\rangle + \sup_x\sqrt{\eta'(0,x)\,\eta(0,x)}\,\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\eta'(0,x)\,\eta(0,x)}$$

Biorąc pod uwagę z definicji stabilności (2) $\|\eta\|_1 < \delta$ możemy przyjąć, że $\sqrt{\eta'\eta} < 1$,
czyli

$$E\,V(u_0,0,\eta(0,x,\omega)) \leqslant p\langle u_0\, Mu_0\rangle + \sup_x E\sqrt{\eta'(0,x)\,\eta(0,x)}$$

przyjmując teraz za normę $\|\eta\|_1 = \sup_x E\sqrt{\eta'(0,x)\,\eta(0,x)}$ otrzymamy w oparciu o (5) co następuje:

$$<u_0\, Mu_0> + \|\eta\|_1 \leqslant N\left[\|u\|_0 + \|\eta\|_1\right],$$

gdzie $N = \max(b, 1)$.

Kładąc $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ mamy spełnienie def. 4.

Z wniosku wynika natychmiast przy założeniach tw. 2 lokalna stabilność stochastyczna.

Uwaga 2

Jeżeli $\lambda\max(t)$ jest procesem ergodycznym i silnie stacjonarnym, to wtedy w powyższych sformułowaniach można zastąpić $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda\max(s)\,ds$ przez $E\lambda\max(t)$.

Przykład 1

Jeżeli rozpatrzymy (pręt) kolumnę, to równanie małych odkształceń poprzecznych (bezwymiarowych) będzie miało postać we współrzędnych bezwymiarowych x, t

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in (0,1)$$

z warunkami brzegowymi w postaci

$$w(0,t) = w(1,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(t,1)}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie: $u(t,x) = \begin{bmatrix} w(t,x) \\ v(t,x) \end{bmatrix}$; $w(t,x)$ jest przemieszczeniem, $v(t,x)$ prędkością.

Za Hs_u i Lee wybierzmy

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

i

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + q(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + L_2 + \frac{\beta^2}{4} & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & 1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

gdzie $q(t)$, L_2 mogą być ustalone w zależności od procesu $f(t)$. Łatwo można sprawdzić, że macierz $B(t)$ spełnia założenia twierdzenia 1, o ile w jego sformułowaniach przyjąć $\eta(t,x) = 0$. Możliwe jest w tym przypadku przyjęcie funkcjonału o stałych współczynnikach. Przyjmujemy wtedy $q(t) = 0$ $L_2 = \frac{\beta^2}{4}$ i po rozwiązaniu sprzężonego problemu własnego otrzymujemy

$$\lambda_{max}(t) = -\beta + \max_n \sqrt{\frac{\left[2n^2\pi^2 f(t) + \beta^2\right]^2}{4n^2\pi^2 + \beta^2}}. \tag{31}$$

Ze wzoru (31) wynika wyraźnie, że $\lambda_{max}(t)$ jest procesem stochastycznym, o ile $f(t)$ jest procesem. W przypadku przyjęcia $q(t) \neq 0$ problem ulega znacznemu skomplikowaniu, uzyskuje się jednak dużą poprawę kryterium stabilności.
Wtedy

$$\lambda_{max} = \max\left\{-\beta - \frac{\dot{q}(t)}{2n^2\pi^2 D_2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\dot{q}(t)}{2n^2\pi^2 D_2}\right)^2 + \frac{1}{D_2}\left(f(t) - q(t) + \frac{4L_2 + \beta^2}{4n^2\pi^2}\right)^2},\right.$$

gdzie $D_2 = 1 - \frac{q(t)}{n^2\pi^2} + \frac{L_2}{n^2\pi^4}$.

Szczególnie ciekawy jest przypadek funkcji zdeterminowanej $f(t) = \varrho\pi^2\cos\Omega t$ W tym wypadku $q(t) = \pi^2 R\varrho\cos\Omega t$. Zasadniczą trudnością powyższej teorii jest konstrukcja funkcjonału V. Pewne metody ich konstrukcji są podane w pracach Tylikowskiego [1], Infante, Plauta [2].

2. Twierdzenia o stabilności w oparciu o zasadę maximum

Rozważmy równanie dyfuzji:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \quad x \in (0,1) \tag{32}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{33}$$

$$u(t,0) = 0 \quad u(t,1) = \xi(t,\omega). \tag{34}$$

Do oceny rozwiązania będziemy używać normy zależnej od czasu $\|u(t,x)\|_2 = \max\limits_{x\in(0,1)} |u(t,x)|$.

Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja spełnia postulaty normy. Funkcja $a(t,x) \geqslant a_0 > 0$ i $b(t,x)$ są ustalonymi funkcjami ciągłymi w zbiorze $[0,1] \times [0,\infty)$.

Twierdzenie 3

Rozwiązanie trywialne równania dyfuzji (32) przy stale działającym zaburzeniu na brzegu jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 w sensie definicji 2.

Dowód

Rozważmy pewną realizację $\xi(t,\omega)$ przy ustalonym ω. Zgodnie ze słabą zasadą maximum dla równań parabolicznych odpowiednia realizacja $u_\omega(t,x)$ osiąga maximum na łamanej: $x = 0$ lub $x = 1$ lub $t = 0$

$$\max_{x\in[0,1]} u_\omega(t,x) \leqslant \max_{x\in[0,1]} |u(0,x)| + \max_{t\in\Delta} |u(t,1)| + \max_{t\in\Delta} |u(t,0)|$$

$$E \max_{x\in[0,1]} |u_\omega(t,x)| \leqslant E \max_{x\in[0,1]} |u(0,x)| + E \max_{t\in\Delta} |u(t,1)| + \tag{35}$$

$$E \max_{t\in\Delta} |u(t,0)| \ ; \quad \max u(t,0) = 0.$$

przyjmując:

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 = E\,(\max_{x\in[0,1]} |u_w(t,x)|)$$

$$\|u(0,x)\|_0 = E(\max_{x\in[0,1]} |u(0,x)|)$$

$$\|u(t,1)\|_1 = |\xi_\omega(t,w)|_1 = E(\max_t |\xi_\omega(t,x)|)$$

przy ustalonym ω mamy:

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 \leqslant \|u(0,x)\|_0 + \|\xi_\omega(t,x)\|_1 .$$

Powyższa nierówność jest spełniona dla prawie każdej realizacji, a więc z prawdopodobieństwem 1. Przyjmując $\delta = \varepsilon$ w definicji 2 otrzymujemy tezę.

Rozważmy dalej układ zawierający równanie dyfuzji i warunki brzegowe w postaci

$$u(t,0) = 0 \quad u(t,1) = \int_0^1 q(t,x)\, u(t,x)\, dx$$

$$u(0,x) = u_0(x) ,$$

gdzie $q(t,x)$ jest czasowo-przestrzennym procesem stochastycznym.

Twierdzenie 4

Jeżeli rozwiązanie równania dyfuzji z warunkami brzegowymi jest ograniczone co do normy, tzn. $\underset{M_1 > 0}{\forall} \|u(t,x)\|_2 < M_1$, to rozwiązanie trywialne jest stabilne w sensie definicji 2, gdzie zamiast normy $\|\cdot\,,\,\cdot\|_1$ używamy normy $\|\cdot\,,\,\cdot\|_1$ zdefiniowanej w dowodzie.

Dowód

Stosując rozważania analogiczne jak w twierdzeniu poprzednim otrzymujemy dla prawie każdego ω

$$\max_{x\in[0,1]} |u\ (t,x)| \leqslant \max_t |u_\omega(t,1)| + \max_t |u(t,0)| + \max_{x\in[0,1]} |u(0,x)|$$

$$\leqslant \max_t \left(\max_{x\in[0,1]} |u_\omega(t,x)| \int_0^1 q_\omega(t,x)\, dx\right. +$$

$$+ \max_t |u(t,0)| + \max_{x\in[0,1]} |u(0,x)|$$

$$\max_t |u(t,0)| = 0 .$$

przyjmując:

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 = \max_{x\in[0,1]} |u_\omega(t,x)|$$

$$\|q_\omega(t,x)\|_1 = \max_t \int_0^1 |q_\omega(t,x)|\, dx$$

$$\|u(0,x)\|_0 = \max_{x\in[0,1]} |u(0,x)|$$

mamy

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 \leqslant \max \|u_\omega(t,x)\|_2 \cdot \|q_\omega(t,x)\|_1 + \|u(0,x)\|_0 . \tag{38}$$

Na mocy założenia o ograniczoności rozwiązania co do normy

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 \leqslant M_1 \|q_\omega(t,x)\|_1 + \|u(0,x)\|_0$$

$$< N\left[\|q_\omega(t,x)\|_1 + \|u(0,x)\|_0\right]$$

dla prawie każdego ω, gdzie $N = \max(1, M_1)$.
Kładąc więc $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ na mocy definicji 2 otrzymujemy tezę.

II. Układy ciągło-dyskretne

Rozważmy stabilność w sensie Kozina z prawdopod. 1 następującego układu

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(t,x) \tag{39}$$

$$u(t,x)_{x \in C} = \xi(t,w) \tag{40}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = H(t)\omega(t) + \int_C u(t,x)\, d(C) ,$$

gdzie L_0 jest macierzą, której niezerowe elementy są operatorami różniczkowymi względem czasu, $H(t)$ jest pewną macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi. C oznacza brzeg obszaru, w którym jest określony układ ciągły. Wektory $u(t,x)$ i $w(t)$ mają jednakowy wymiar,

Twierdzenie 5

Rozwiązanie trywialne układu ciągło-dyskretnego jest stabilne w sensie Kozina z prawdopodobieństwem 1, jeżeli rozwiązanie trywialne układu ciągłego i rozwiązanie trywialne układu

$$\frac{dw}{dt} = \begin{matrix} H(t)\, w(t) \\ w(o,\omega) = 0 \text{ z pr. } 1 \end{matrix} \tag{42}$$

jest stabilne w sensie Kozina w prawdop. 1 oraz $\int_0^t f(s) w_0^{-1} ds < \infty$ w przedziale $(0,\infty)$.

Dowód

Rozwiązanie układu dyskretnego można zapisać formalnie w postaci:

$$w(t) = \left(\int_0^t f(s)\, w_0^{-1}\, ds\right) w_0 ,$$

gdzie

$$f(s) = \int_C u(t,x)\, d(C) \tag{43}$$

i w_0 jest rozwiązaniem układu $\frac{dw}{dt} = H(t)\, w(t)$.

Biorąc normę i przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ otrzymamy $\lim_{t\to\infty} \|w(t)\| = 0$ z prawdopodobieństwem 1.

Ponieważ: $\|z(t,x)\| \leqslant \|u(t,x)\| + \|w(t)\|$ dla każdego więc $\lim_{t\to\infty} \|z(t,x)\| = 0$

gdzie $z = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$, a norma z "z" w sensie norm wektora.

c.n.d.

Przykład 2

Jako układ ciągły rozważymy równanie hiperboliczne

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2m\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} ; \quad m > 0 \tag{44}$$

$$u(1,t) = u(0,t) = \int_0^t \left[\int_0^s \xi(l)\, dl\right] ds$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 ,$$

które można zamienić na układ rozpatrywanej postaci.

Stosując do zagadnienia klasyczną metodę Fouriera można stwierdzić, że przy pewnych założeniach dla warunków brzegowych układ jest stabilny w sensie Kozina w prawdopodob. 1 tzn. jego rozwiązanie jest stabilne w sensie Kozina z prawdopodobieństwem 1 przy czym $\|u(t,x)\|_2 \leqslant e^{-mt} C$ przy ustalonym t.

Jako układ dyskretny rozważmy

$$\frac{dw(t)}{dt} = (1 + \xi(t))_w + \int_0^t u(t,x)\,dx$$

wtedy

$$w = \left\{ \int_0^t \exp\left[lt + \int_0^t \xi(t)\,dt \int_0^1 u(t,x)\,dx \right] dt \right\} \exp \int_0^t (1 + \xi(t))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C \left[\int_0^t \exp\left[-lt - \int_0^t \xi(t)\,dt - nt \right] dt \right] \exp\left[lt + \int_0^t \xi(t)\,dt \right] =$$

$$= C \left[\int_0^t \exp\left[-l - \frac{1}{t} \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau - n \right] dt \right] \exp\left[(l + \frac{1}{t} \int_0^t \xi(t)\,dt \right].$$

Mamy

$$\lim_{t\to\infty} |w| \leqslant C \left[\int_0^\infty \exp\left[-l-n-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(t) \right] dt \right] \exp\left[l+\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(t)\,dt \right], \qquad (45)$$

jeśli przyjmiemy, że proces jest silnie stacjonarny i ergodyczny, to wtedy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(t,\omega)\,dt = E\,\xi(t,\omega) .$$

Układ będzie stabilny w sensie Kozina, jeżeli:

$$-l - n - E\,\xi(t) < 0 \qquad i \qquad nl + E\,(\xi(t)) < 0$$

$$E\,(\xi(t)) > -l - n \qquad\qquad E\,(\xi(t) < -l .$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. Tylikowski: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Automatyka", z. 20, Gliwice 1972.
2. R.H. Plaut, E.F. Infante: On the stability of some continous systems subjected to rondom excitotion. Trans. A.S. M.E. E. 37 No 3, 1970.
3. P.K.C. Wang: On the almost sure stability of linoar stochastie distributed systems. Journal of applied mechanies. 33 Trans ASME seroes E No 1 Martch 1966.
4. C.S.Hsu.T.H.Lee: A stability study of continous systems under parametrie excitotion vo Lapuna'a direet methad "Instability of continous systems". Symposium Merrenalb ed. H. Leipholiz "Springer", Berlin-Heidelberg - Ne York 1971.
5. A. Czech, B. Janiec: O asymptotycznych własnościach rozwiązań problemu brzegowego dla struny. Sympozjum pod hasłem: Metody statystyczne w mechanice. Streszcz. referatów PTMTiS, Gliwice 1973.
6. B. Skalmierski, A. Tylikowski: Stabilność w mechanice, PTMTiS, Gliwice

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В этой работе мы изучаем устойчивость некоторых непрерывных и непрерывно-дискретных систем со случайными коэффициентами при помощи функции Ляпунова и принципа максимум.

Мы даём тоже некоторые методы строения функционала.

THE STABILITY OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

This paper deals with the stability of some continueus discrete systems with stochastic coefficients making use of Lapunow's functions and of the maximum principle.