ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Grażyna KOZŁOWSKA
Instytut Matematyki

APROKSYMACJA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH FUNKCJAMI CAŁKOWITYMI

Streszczenie. W pracy uogólniono na funkcje przestrzeni $L^P(^{-\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$ z mieszanymi potęgami, pewien wynik Gubanowa [3] twierdzenia Jacksena i Bernsteina oraz wynik A.A. Konjuszkowa [4].

Oznaczenia

$L^P(^{-\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$, gdzie $P = (p_1,p_2)$, $1 \le p_i < \infty$ $(i=1,2)$, jest przestrzenią funkcji mierzalnych $f(x,y)$, określonych na całej płaszczyźnie, dla których przy dowolnym a istnieje całka

$$\left\{\int_{-a}^{a}\left[\int_{-a}^{a}|f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}$$

i

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}<\infty$$

$$\|f(x,y)\|_p = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}$$

norma w $L^P(^{-\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$

$$G_{\sigma_1\sigma_2}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l x^k y^l ,$$

gdzie

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k!\,|a_k|} = \sigma_1 < \infty , \quad \overline{\lim_{l\to\infty}} \sqrt[l]{l!\,|b_l|} = \sigma_2 < \infty$$

jest funkcją całkowitą typu σ_1 ze względu na zmienną x i σ_2 ze względu na y.
Stąd, jeśli z_1 i z_2 są liczbami zespolonymi, to

$$\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(z_1,z_2)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k\right| \left|\sum_{l=0}^{\infty} b_l z_2^l\right| <$$

$$< \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|z_1|^k \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\,|z_2|^l = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_1+\varepsilon_1}{k!}\right)^k |z_1|^k \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma_2+\varepsilon_2}{l!}\right)^l |z_2|^l =$$

$$= e^{(\sigma_1+\varepsilon_1)|z_1|}\, e^{(\sigma_2+\varepsilon_2)|z_2|} \leqslant M(\varepsilon)\, e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z_1|+(\sigma_2+\varepsilon)|z_2|}$$

$$\left[G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right]^p = \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right]^{p_1} \left[\sum_{l=0}^{\infty} b_l y^l\right]^{p_2}$$

$$\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^p dx\, dy$$

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p = \inf_{G_{\sigma_1,\sigma_2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

$$\omega(f;u,v)_p = \sup_{|h|\leqslant u,\,|k|\leqslant v} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+h,y+k) - f(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

$$\omega_1(u) = \omega(f;u,0)_p = \sup_{|h|\leqslant u} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+h,y) - f(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

$$\omega_2(v) = \omega(f;0,v)_p = \sup_{|k|\leqslant v} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x,y+k) - f(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

$$\omega_{k_1}(f,h,0)_p = \sup_{|t|<h} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{l=0}^{k_1} (-1)^l \binom{k_1}{l} f(x+lt,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2},$$

$$k_1 \geqslant 1$$

$$\omega_{k_2}(f,0,k)_p = \sup_{|z|\leqslant k}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{k_2}(-1)^i \binom{k_2}{i} f(x,y+iz)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2},$$

$$k_2 \geqslant 1$$

$$\omega_{1,1}(f;u,v)_p = \sup_{|h|\leqslant u,\ |k|\leqslant v}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_h \Delta_k f(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

gdzie $\Delta_h \Delta_k f(x,y) = f(x,y) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x+h,y+k)$

$$\Delta_h^{(r)} G(x,y) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \binom{r}{k} G\left[x + (r-2k)h, y\right].$$

1. Wstęp

W trakcie dowodzenia lematów i twierdzeń wykorzystuje się w pracy pewne własności określonych poprzednio funkcji. Dowody ich wynikają na ogół natychmiast z definicji.

Własności

1. $\omega(f;u,v)_p$ jest funkcją niemalejącą ze względu na u i v

2. $\omega(f;u_1+u_2,v_1+v_2)_p \leqslant \omega(f;u_1,v_1)_p + \omega(f;u_2,v_2)_p$ stąd przy naturalnym n

3. $\omega(f;nu,nv)_p \leqslant n\,\omega(f;u,v)_p$ a dla λ rzeczywistych

4. $\omega(f;\lambda u,\lambda v)_p \leqslant (\lambda+1)\,\omega(f;u,v)_p$ oraz dla α, β rzeczywistych

5. $\omega(f;\alpha u,\beta v)_p \leqslant \left[\max(\alpha,\beta) + 1\right]\omega(f;u,v)_p$

6. $\omega(f;u,v)_p \leqslant \omega(f;u,0)_p + \omega(f;0,v)_p$

7. $\omega(f;u,v)_p \leqslant \omega_1(u) + \omega_2(v)$

8. $\omega_i(\lambda u) \leqslant (1+\lambda)\,\omega_i(u)$, gdzie $i=1,2$, λ – rzeczywista

9. $\omega_{k_1}(f;\lambda h,0)_p \leqslant (\lambda+1)^{k_1}\omega_{k_1}(f;h,0)_p$

10. $\omega_{k_2}(f;0,\lambda k)_p \leqslant (\lambda+1)^{k_2}\omega_{k_2}(f;0,k)_p$

Jeśli $f(x,y)\in L^p(\begin{smallmatrix}-\infty\\-\infty\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}\infty\\\infty\end{smallmatrix})$ ma pochodne cząstkowe jednostajnie ciągłe aż do rzędu k_1-1 ze względu na x i k_2-1 ze względu na y oraz

$$\left\|\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}}\right\|_p<\infty,\qquad \left\|\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}}\right\|_p<\infty,$$

to prawdziwe są własności

11. $\omega_{k_1+r}(f;t,0)_p \leqslant t^{k_1}\omega_r\left(\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}};t,0\right)_p$

12. $\omega_{k_2+r}(f;0,s)_p \leqslant s^{k_2}\omega_r\left(\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}};0,s\right)_p$

W dowodach własności (12) i (11) wykorzystuje się tożsamość:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}f(x+ih,y)=\Delta_h^k f(x,y)=\int_0^h\cdots\int_0^h\frac{\partial^k f(x+t_1+t_2+\ldots+t_k,y)}{\partial x^k}\,dt_1\ldots dt_k$$

(na podstawie [2] str. 116).

13. Nierówność Minkowskiego

$$\left\{\int_a^b\left[\int_c^d\left|\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta f(x,y,t,s)\,dt\,ds\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}\leqslant$$

$$\leqslant\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta\left\{\int_a^b\left[\int_c^d|f(x,y,t,s)|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}dt\,ds,$$

gdzie $f(x,y,t,s)$ jest funkcją mierzalną w punkcie $(a,b)\times(c,d)\times(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$

2. Aproksymacja funkcji $f(x,y) \in L^P(^{\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$ funkcjami całkowitymi $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$

Niech funkcja $f(x,y) \in L^P(^{\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$.

Dokładność z jaką da się ona aproksymować za pomocą całki postaci

$$f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\Phi_{\sigma_1}(t-x)\Phi_{\sigma_2}(z-y)\,dt\,dz \qquad (1)$$

gdzie $\Phi_{\sigma}(u)$ jest funkcją mierzalną a) dodatnią b) parzystą

$$c)\ \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\sigma}(u)\,du=1 \qquad d)\ \delta_{\sigma} = \int_{0}^{\infty}u\Phi_{\sigma}(u)\,du \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} 0$$

pozwala oszacować twierdzenie 1

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeśli $f(x,y)\ L^P(^{\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$, to

$$\|f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) - f(x,y)\|_P \le 3\,\omega_1(\delta_{\sigma_1}) + 3\,\omega_2(\delta_{\sigma_2})$$

<u>Dowód</u>

Wprowadzając zmianę zmiennych we wzorze 1 i korzystając z własności całek można $f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$ zapisać w postaci

$$f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\Big[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y+z) +$$

$$+ f(x-t,y-z)\Big]\Phi_{\sigma_1}(t)\Phi_{\sigma_2}(z)\,dt\,dz$$

korzystając z własności funkcji $\Phi_{\sigma_1}(u)$ można $f(x,y)$ zapisać w postaci

$$f(x,y) = 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x,y)\,\Phi_{\sigma_1}(t)\,\Phi_{\sigma_2}(z)\,dt\,dz.$$

Stąd i nierówności Minkowskiego otrzymuje się

$$\|f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) - f(x,y)\|_p \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + f(x-t,y+z) + f(x-t,y-z) - 4f(x,y) \right] \Phi_{\sigma_1}(t) \Phi_{\sigma_2}(z) \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} dt\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty 4\omega(f;t,z)_p \Phi_{\sigma_1}(t) \Phi_{\sigma_2}(z)\, dt\, dz \leqslant 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\omega_1(t) + \omega_2(z)\right] \Phi_{\sigma_1}(t) \Phi_{\sigma_2}(z) dt dz.$$

Stąd i z własności (8) funkcji $\omega_1(u)$

$$\|f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) - f(x,y)\|_p \leqslant 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left[(1 + \frac{t}{\delta_{\sigma_1}}) \omega_1(\delta_{\sigma_1}) + \right.$$

$$\left. + (1 + \frac{z}{\delta_{\sigma_2}}) \omega_2(\delta_{\sigma_2}) \right] \Phi_{\sigma_1}(t) \Phi_{\sigma_2}(z)\, dt\, dz = 3\, \omega_1(\delta_{\sigma_1}) + 3\, \omega_2(\delta_{\sigma_2}).$$

3. Najlepsze przybliżenia funkcji dwóch zmiennych funkcjami całkowitymi $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$

Twierdzenia Jacksona

Twierdzenie 1

Dla dowolnej funkcji $f(x,y) \in L^p(^{-\infty}_{-\infty}; ^{\infty}_{\infty})$ prawdziwe jest oszacowanie

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p \leqslant C\, \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p$$

Dowód

Niech

$$g_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \left(\frac{\sin \frac{\sigma_1 x}{4}}{x}\right)^4 \left(\frac{\sin \frac{\sigma_2 y}{4}}{y}\right)^4 \tag{2}$$

i

$$\gamma_{\sigma_1,\sigma_2} = \gamma_{\sigma_1,\sigma_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\sigma_1 t}{4}}{t}\right)^4 dt \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\sigma_2 z}{4}}{z}\right)^4 dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\sigma_1 t}{4}}{t}\right)^4\left(\frac{\sin\frac{\sigma_2 z}{4}}{z}\right)^4 dt\, dz \qquad (3)$$

Całka

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\, f(x+t,y+z)\, dt\, dz$$

jest funkcją $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$ ([2] str. 273)

Z (2) i (3)

$$f(x,y) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\, f(x,y)\, dt\, dz .$$

Stąd i nierówności Minkowskiego

$$\left\| f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_p \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}}\, g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\,\left(f(x,y) - f(x+t,y+z)\right)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2} dt\, dz \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}}\, g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\,\omega(f;t,z)_p\, dt\, dz.$$

Ponieważ

$$\omega(f;t,z)_p = \omega\left(f;\ \sigma_1 t\,\frac{1}{\sigma_1},\ \sigma_2 z\,\frac{1}{\sigma_2}\right)_p \leq \left[\max(t\,\sigma_1, z\,\sigma_2) + 1\right]\omega\left(f;\ \frac{1}{\sigma_1},\ \frac{1}{\sigma_2}\right)_p ,$$

więc

$$\left\| f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_p \leq$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}} \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\left[\max(t\,\sigma_1, z\,\sigma_2) + 1\right] dt\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}} \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)(t\sigma_1+1)(z\,\sigma_2+1)\, dt\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_1\,\sigma_2}{\gamma_{\sigma_1,\sigma_2}} \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p \left[\frac{4}{\sigma_1\,\sigma_2} \int_{-\frac{1}{\sigma_1}}^{\frac{1}{\sigma_1}} \int_{-\frac{1}{\sigma_2}}^{\frac{1}{\sigma_2}} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\, dt\, dz + \right.$$

$$\left. + 4 \int_{|t| \geqslant \frac{1}{\sigma_1}} \int_{|z| \geqslant \frac{1}{\sigma_2}} g_{\sigma_1,\sigma_2}(t,z)\, tz\, dt\, dz \right] \leqslant$$

$$\leqslant \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p \left\{4 + 4\left[\frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin \frac{\sigma_1 t}{4}}{t}\right)^4 t\, dt\, \frac{\sigma_2}{\gamma_{\sigma_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin \frac{\sigma_2 z}{4}}{z}\right)^4 z\, dz\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\, \omega(f; \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2})_p ,$$

bo z [2] str 274 wynika, że dla $i=1,2$

$$\frac{\sigma_i}{\gamma_{\sigma_i}} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin \frac{\sigma_i x}{4}}{x}\right)^4 x\, dx = O(1).$$

<u>Lemat 1</u>

Jeśli $f(x,y) \in L^p(\begin{smallmatrix}-\infty\\-\infty\end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix}\infty\\\infty\end{smallmatrix})$, to

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p \leqslant C(k_1,k_2)\left[\omega_{k_1}(f; \frac{1}{\sigma_1}, 0)_p + \omega_{k_2}(f; 0, \frac{1}{\sigma_2})_p\right],$$

gdzie k_1, k_2 są liczbami naturalnymi.

Dowód

Niech

$$s_{k_1\sigma_1,k_2\sigma_2}(f;x,y) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\, G_{\sigma_1,k_1}(t)G_{\sigma_2,k_2}(z)\,dt\,dz,$$

gdzie

$$\gamma_{\sigma,r} = \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\,dt$$

$$g_\sigma(t) = \left(\frac{\sin\frac{\sigma t}{2r}}{t}\right)^{2r}$$

i

$$G_{\sigma,k}(u) = \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}\binom{k}{\nu} g_\sigma\left(\frac{u}{\nu}\right),$$

Wtedy

$$s_{k_1\sigma_1,\ k_2\sigma_2}(f;x,y) - f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)g_{\sigma_2}(z)\left\{\sum_{\nu=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu}f(x+\nu t,y+\mu z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\mu-1}\binom{k_2}{\mu} f(x,y+\mu z)\right\} dt\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)g_{\sigma_2}(z)\left\{\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\mu-1}\binom{k_2}{\mu}f(x,y+\mu z) - f(x,y)\right\}dt\,dz. \quad (4)$$

Niech

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\, g_{\sigma_2}(z)\left\{\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\mu-1}\binom{k_2}{\mu}f(x,y+\mu z) - \right.$$

$$- f(x,y)\Bigg\}dt\,dz =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(z)\left\{\sum_{\mu=1}^{k_2} (-1)^{\mu-1} \binom{k_2}{\mu} f(x,y+\mu z) - f(x,y)\right\}dz$$

$$\varphi_2(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)g_{\sigma_2}(z)\left\{\sum_{\nu=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu} f(x+\nu t,y+\mu z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\mu-1}\binom{k_2}{\mu} f(x,y+\mu z)\right\} dt\,dz = \frac{1}{\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(z)\Phi(x,y,z)\,dz ,$$

gdzie

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\left\{\sum_{\nu=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu} f(x+\nu t,y+\mu z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=1}^{k_2} (-1)^{\mu-1} \binom{k_2}{\mu} f(x,y+\mu z)\right\} dt .$$

Korzystając z nierówności Minkowskiego można zapisać

$$\| \varphi_1(x,y)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{\sigma_2}(z)\left(\sum_{\mu=0}^{k_2}(-1)^{\mu}\binom{k_2}{\mu} f(x,y+\mu z)\right)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2} dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\gamma_{\sigma_2,k_2}} \int_{0}^{\infty} g_{\sigma_2}(z)\,\omega_{k_2}(f;0,z)_p\,dz .$$

Analogicznie

$$\|\varphi_2(x,y)\|_p < \frac{1}{\gamma_{\sigma_2,k_2}}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_2}(z)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x,y,z)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}dz\,.$$

Ponieważ

$$\|\Phi(x,y,z)\|_p \leqslant \frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\nu=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu}f(x+\nu t,y+\mu z)\,-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sum_{\mu=1}^{k_2}(-1)^{\mu-1}\binom{k_2}{\mu}f(x,y+\mu z)\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}dt=$$

$$=\frac{1}{\gamma_{\sigma_1 k_1}}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\mu=1}^{k_2}\sum_{\nu=0}^{k_1}(-1)^{\nu+\mu-1}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu}f(x+\nu t,y+\mu z)\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{k_2+1}}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\,\omega_{k_1}(f;t,0)_p\,dt\,.$$

Więc stąd i z (4)

$$\|f(x,y)-s_{k_1\,\sigma_1,k_2\sigma_2}(f;x,y)\|_p\leqslant\|\varphi_2(x,y)\|_p+\|\varphi_1(x,y)\|_p\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{k_2+1}}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int^{\infty} g_{\sigma_1}(t)\,\omega_{k_1}(f;t,0)_p\,dt+\frac{2}{\gamma_{\sigma_2,k_2}}\int^{\infty} g_{\sigma_2}(z)\,\omega_{k_2}(f;0,z)_p\,dz \qquad (5)$$

Ponieważ z własności (9)

$$\omega_{k_1}(f;t,0)_p=\omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1}\sigma_1 t,0\right)_p\leqslant(\sigma_1 t+1)^{k_1}\,\omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p$$

i dla $k_1 > 1$

$$\frac{\sigma_1^{k_1}}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int_{-\infty}^{\infty} t^{k_1}\left(\frac{\sin\frac{\sigma_1 t}{2k_1}}{t}\right)^{2k_1}dt=O(1)\,,\ ([2]\text{ str. }274)$$

więc

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int_0^\infty g_{\sigma_1}(t)\,\omega_{k_1}(f;t,0)_p\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p \frac{\sigma_1^{k_1}}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\int_0^\infty g_{\sigma_1}(t)\left(t+\frac{1}{\sigma_1}\right)^{k_1} dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p \frac{\sigma_1^{k_1}}{\gamma_{\sigma_1,k_1}}\left\{\left(\frac{2}{\sigma_1}\right)^{k_1}\gamma_{\sigma_1,k_1}+2^{k_1}\int_{\frac{1}{\sigma_1}}^\infty g_{\sigma_1}(t)\,t^{k_1}\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p\left\{2^{k_1}+2^{k_1}O(1)\right\} \leqslant C_{k_1}\,\omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p. \tag{6}$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma_2,k_2}}\int_0^\infty g_{\sigma_2}(z)\,\omega_{k_2}(f;0,z)_p\,dz \leqslant C_{k_2}\,\omega_{k_2}\left(f;0,\frac{1}{\sigma_2}\right)_p \tag{7}$$

Z (5), (6) i (7)

$$A_{\sigma_1\sigma_2}(f)_p \leqslant C(k_1,k_2)\left[\omega_{k_1}\left(f;\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p+\omega_{k_2}\left(f;0,\frac{1}{\sigma_2}\right)_p\right].$$

<u>Twierdzenie 2</u>

Jeśli $f(x,y)\in L^p(-\infty;\infty)$ ma pochodne cząstkowe jednostajnie ciągłe aż do rzędu k_1-1 ze względu na x i k_2-1 ze względu na y oraz

$$\left\|\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}}\right\|_p<\infty\ ,\qquad \left\|\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}}\right\|<\infty,$$

to

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p \leqslant C(k_1,k_2)\left\{\frac{1}{\sigma_1^{k_1}}\,\omega\left(\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}},\frac{1}{\sigma_1},0\right)_p+\frac{1}{\sigma_2^{k_2}}\,\omega\left(\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}},0,\frac{1}{\sigma_2}\right)_p\right\}.$$

Dowód

Z lematu 1

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p \leqslant C(k_1,k_2)\left\{\omega_{k_1+1}(f;\frac{1}{\sigma_1},0)_p + \omega_{k_2+1}(f;0,\frac{1}{\sigma_2})_p\right\}$$

Stąd i z własności (11) i (12)

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p \leqslant C(k_1,k_2)\left\{\frac{1}{\sigma_1^{k_1}}\omega(\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}},\frac{1}{\sigma_1},0)_p + \frac{1}{\sigma_2^{k_2}}\omega(\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}},0,\frac{1}{\sigma_2})_p\right\}$$

Lemat 2

$$\omega_{1,1}(f+g;u,v)_p \leqslant \omega_{1,1}(f;u,v)_p + \omega_{1,1}(g;u,v)_p$$

Dowód natychmiast z definicji $\omega_{1,1}(f;u,v)_p$.

Lemat 3

Jeśli G_{σ_1,σ_2} jest funkcją całkowitą taką, że

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p = \left\| f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_p ,$$

to

$$\omega_{1,1}(f-G_{\sigma_1,\sigma_2};u,v)_p = \sup_{|h|\leqslant u,\,|k|\leqslant v}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) - f(x,y+k) + \right.\right.\right.$$

$$+ G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y+k) - f(x+h,y) + G_{\sigma_1,\sigma_2}(x+h,y) + f(x+h,y+k) -$$

$$\left.\left.\left. - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x+h,y+k)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2} \leqslant 4\, A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p .$$

Lemat 4

$$\omega_{1,1}(G_{\sigma_1,\sigma_2};u,v)_p = \sup_{|h|\leqslant u,\,|k|\leqslant v}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_h\Delta_k\, G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2}$$

Stąd korzystająo ze związku 3.3 (4) [2] i twierdzenia o wartośoi średniej dla oałek otrzymuje się, że

$$\omega_{1,1}(G_{\sigma_1,\sigma_2};u,v)_p \leqslant \sup_{|h|\leqslant u}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_h\frac{\partial G_{\sigma_1,\sigma_2}}{\partial y}v\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 G_{\sigma_1,\sigma_2}}{\partial x\,\partial y}uv\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2} = |uv|\left\|\frac{\partial^2 G_{\sigma_1,\sigma_2}}{\partial x\,\partial y}\right\|_p .$$

Lemat 5

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{r+R}G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x^r\,\partial y^R}\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}\leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1^r\sigma_2^R\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}$$

Dowód

Jeśli $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\in L^P(^{-\infty}_{-\infty};^{\infty}_{\infty})$, to przy dowolnyoh $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$

$$G(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) = G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\,\frac{\sin\varepsilon_1 x}{\varepsilon_1 x}\,\frac{\sin\varepsilon_2 y}{\varepsilon_2 y}$$

jest funkoją całkowitą typu $\leqslant \sigma_1+\varepsilon_1$ ze względu na zmienną x i typu $\leqslant\sigma_2+\varepsilon_2$ ze względu na zmienną y i z [2] str. 231

$$G(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) = \int_{-\sigma_1-\varepsilon_1}^{\sigma_1+\varepsilon_1} g_1(\varepsilon_1,t)\,e^{ixt}\,dt\int_{-\sigma_2-\varepsilon_2}^{\sigma_2+\varepsilon_2} g_2(\varepsilon_2,\tau)\,e^{iy\tau}\,d\tau =$$

$$=\int_{-\sigma_1-\varepsilon_1}^{\sigma_1+\varepsilon_1}\int_{-\sigma_2-\varepsilon_2}^{\sigma_2+\varepsilon_2} g(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,\tau)\,e^{i(xt+y\tau)}\,dt\,d\tau ,$$

gdzie g_j są funkojami całkowalnymi z kwadratem w przedziale

$$\left[-\sigma_j-\varepsilon_j,\ \sigma_j+\varepsilon_j\right]\quad \text{dla}\quad j=1,2 ,$$

przy czym

$$\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) = \Delta_h^{(r)}\Delta_k^{(R)} G(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) =$$

$$= \int_{-\sigma_1-\varepsilon_1}^{\sigma_1+\varepsilon_1}\int_{-\sigma_2-\varepsilon_2}^{\sigma_2+\varepsilon_2} (2i\sin ht)^r (2i\sin k\tau)^R g(\varepsilon_1,\varepsilon_2;t,\tau)\, e^{i(xt+y\tau)}\, dt\, d\tau .$$

Niech $\mu(t,\tau)$ będzie na płaszczyźnie $(^{-\infty;\infty}_{-\infty;\infty})$ sumą jednostajnie zbieżnego szeregu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\, e^{\frac{im\pi t}{\sigma_1+\varepsilon_1}+\frac{in\pi\tau}{\sigma_2+\varepsilon_2}}, \quad \text{gdzie} \quad (-1)^{m+n} c_{mn} \geqslant 0 .$$

Jeśli ponadto

$$F(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) = \int_{-\sigma_1-\varepsilon_1}^{\sigma_1+\varepsilon_1}\int_{-\sigma_2-\varepsilon_2}^{\sigma_2+\varepsilon_2} \mu(t,\tau)(2i\sin ht)^r(2i\sin k\tau)^R g(\varepsilon_1,\varepsilon_2;t,\tau)e^{i(xt+y\tau)}dt\,d\tau$$

to korzystając z rozwinięcia funkcji $\mu(t,\tau)$ w szereg otrzymuje się

$$F(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y) =$$

$$= \int_{-\sigma_1-\varepsilon_1}^{\sigma_1+\varepsilon_1}\int_{-\sigma_2-\varepsilon_2}^{\sigma_2+\varepsilon_2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{\frac{im\pi t}{\sigma_1+\varepsilon_1}+\frac{in\pi t}{\sigma_2+\varepsilon_2}}(2i\sin ht)^r(2i\sin k\tau)^R g(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,\tau)e^{i(xt+y\tau)}dt\,d\tau =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\, \Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x+\frac{m\pi}{\sigma_1+\varepsilon_1}, y+\frac{n\pi}{\sigma_2+\varepsilon_2}) .$$

Jeśli $\|\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y)\|_p < \infty$, to

$$\|F(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y)\|_p \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_{mn}|\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y)|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2} =$$

$$= \mu(\sigma_1+\varepsilon_1,\sigma_2+\varepsilon_2)\|\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2;x,y)\|_p$$

więc

$$\|F(\delta_1,\delta_2;x,y)\|_P \leqslant \mu(\sigma_1+\delta_1,\sigma_2+\delta_2)\ \|\Phi(\delta_1,\delta_2;x,y)\|_P \tag{8}$$

Uwzględniając uwagę z [2] str. 230 można przyjąć przy

$$0 < h < \frac{\pi}{\sigma_1}, \qquad 0 < k < \frac{\pi}{\sigma_2}$$

$$\mu(t,\tau) = \left(\frac{t}{2\sin ht}\right)^r \left(\frac{\tau}{2\sin k\tau}\right)^R ,$$

wtedy

$$F(\delta_1,\delta_2;x,y) = \int_{-\sigma_1-\delta_1}^{\sigma_1+\delta_1}\int_{-\sigma_2-\delta_2}^{\sigma_2+\delta_2} (it)^r (i\tau)^R\, g(\delta_1,\delta_2;t,\tau)\, e^{i(xt+y\tau)}\, dt\, d\tau$$

$$F(\delta_1,\delta_2;x,y) = \frac{\partial^{r+R} F(\delta_1,\delta_2;x,y)}{\partial x^r\, \partial y^R} .$$

Stąd i z (8)

$$\left\|\frac{\partial^{r+R} G(\delta_1,\delta_2;x,y)}{\partial x^r\, \partial y^R}\right\|_P \leqslant \left(\frac{\sigma_1+\delta_1}{2\sin h(\sigma_1+\delta_1)}\right)^r \left(\frac{\sigma_2+\delta_2}{2\sin k(\sigma_2+\delta_2)}\right)^R \left\|\Delta_h^{(r)}\Delta_k^{(R)} G(\delta_1,\delta_2;x,y)\right\|_P$$

Jeśli $\delta_1 \longrightarrow 0$ i $\delta_2 \longrightarrow 0$, to uwzględniając, że

$$\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin \delta s}{\delta s}\right)\right| = O(\delta)$$

otrzymuje się

$$\left\|\frac{\partial^{r+R} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^R}\right\|_P \leqslant \left(\frac{\sigma_1}{2\sin h\sigma_1}\right)^r \left(\frac{\sigma_2}{2\sin k\sigma_2}\right)^R \left\|\Delta_h^{(r)}\Delta_k^{(R)} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P .$$

Ponieważ z [2] str. 232 wynika, że

$$\left|\Delta_h^{(r)}\Delta_k^{(R)} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right| \leqslant (2\sin \sigma_1 h)^r\, (2\sin \sigma_2 k)^R\, \left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right| ,$$

więc

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{r+R} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x^r\,\partial y^R}\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1^r\,\sigma_2^R \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^{p_1} dx\right]^{p_2/p_1} dy\right\}^{1/p_2} .$$

Lemat 6

$$2^{\nu+1} A_{2^\nu,1}(f)_p \leqslant 2^2 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2} A_{\mu,1}(f)_p$$

Dowód

$$2^2 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2} A_{\mu,1}(f)_p = 2^2 \left\{ A_{2^{\nu-1}+1,1}(f)_p + A_{2^{\nu-1}+2,1}(f)_p + \ldots + \right.$$

$$\left. + A_{2^\nu,1}(f)_p \right\} \geqslant 2^{\nu+1} A_{2^\nu,1}(f)_p .$$

Lemat 7

Jeśli $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \in L^p\left({}^{-\infty,\infty}_{-\infty,\infty}\right)$ i $\left\|f(x,y) - G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_p = A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_p$, to

$$\omega_{1,1}\left(f; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{C}{mn} \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=0}^{n} A_{\nu\eta}(f)_p$$

Dowód

Dla dowolnych $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ na podstawie lematów 2 i 3

$$\omega_{1,1}\left(f; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \omega_{1,1}\left(f - G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p +$$

$$+ \omega_{1,1}\left(G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant$$

$$\leqslant 4 A_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}(f)_p + \omega_{1,1}\left(G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p . \qquad (9)$$

Ponieważ

$$G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}(x,y) = G_{1,1}(x,y) + \sum_{\nu=0}^{r_1-1}\left\{G_{2^{\nu+1},1}(x,y) - G_{2^{\nu},1}(x,y)\right\} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_2-1}\left\{G_{1,2^{\nu+1}}(x,y) - G_{1,2^{\nu}}(x,y)\right\} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_1-1}\sum_{\eta=0}^{r_2-1} G_{2^{\nu+1},2^{\eta+1}}(x,y) - G_{2^{\nu+1},2^{\eta}}(x,y) - G_{2^{\nu},2^{\eta+1}}(x,y) + G_{2^{\nu},2^{\eta}}(x,y) \quad +$$

$$+ G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}(x,y) - G_{2^{r_1},2^{r_2}}(x,y),$$

więc stąd i z lematów 3, 4 i 5

$$\omega_{1,1}\left(G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{1}{m}\frac{1}{n}\left\|\frac{\partial^2 G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}(x,y)}{\partial x\, \partial y}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{mn}\left\|\frac{\partial^2 G_{1,1}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right\|_p + \sum_{\nu=0}^{r_1-1}\left\|\frac{\partial^2\left[G_{2^{\nu+1},1} - G_{2^{\nu},1}\right]}{\partial x\,\partial y}\right\|_p +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_2-1}\left\|\frac{\partial^2\left[G_{1,2^{\nu+1}} - G_{1,2^{\nu}}\right]}{\partial x\,\partial y}\right\|_p +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_1-1}\sum_{\eta=0}^{r_2-1}\left\|\frac{\partial^2\left[G_{2^{\nu+1},2^{\eta+1}} - G_{2^{\nu+1},2^{\eta}} - G_{2^{\nu},2^{\eta+1}} + G_{2^{\nu},2^{\eta}}\right]}{\partial x\,\partial y}\right\|_p +$$

$$+ \left\|\frac{\partial^2\left[G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}} - G_{2^{r_1},2^{r_2}}\right]}{\partial x\,\partial y}\right\|_p$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \left(G_{2^{\nu+1},1} - G_{2^\nu,1} \right)}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant 2^{\nu+1} \left\| G_{2^{\nu+1},1} - G_{2^\nu,1} \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\nu+1} \left\{ \left\| G_{2^{\nu+1},1} - f \right\|_p + \left\| f - G_{2^\nu,1} \right\|_p \right\} =$$

$$= 2^{\nu+1} \left[A_{2^{\nu+1},1}(f)_p + A_{2^\nu,1}(f)_p \right] \leqslant 2^{\nu+1} A_{2^\nu,1}(f)_p \leqslant$$

$$\leqslant 2^3 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} A_{\mu,1}(f)_p$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \left[G_{1,2^{\nu+1}} - G_{1,2^\nu} \right]}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant 2^{\nu+2} A_{1,2^\nu}(f)_p \leqslant 2^3 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} A_{1,\mu}(f)_p$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \left[G_{2^{\nu+1},2^{\eta+1}} - G_{2^{\nu+1},2^\eta} - G_{2^\nu,2^{\eta+1}} + G_{2^\nu,2^\eta} \right]}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\nu+1+\eta+1}\, 2^2 A_{2^\nu,2^\eta}(f)_p \leqslant 2^6 \sum_{\mu_1=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \sum_{\mu_2=2^{\eta-1}+1}^{2^\eta} A_{\mu_1,\mu_2}(f)_p$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \left[G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}} - G_{2^{r_1},2^{r_2}} \right]}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant 2^{r_1+1}\, 2^{r_2+2}\, 2A_{2^{r_1},2^{r_2}}(f)_p \leqslant$$

$$\leqslant 2^5 \sum_{\mu_1=2^{r_1-1}+1}^{2^{r_1}} \sum_{\mu_2=2^{r_2-1}+1}^{2^{r_2}} A_{\mu_1,\mu_2}(f)_p$$

$$\left\| \frac{\partial^2 G_{1,1}}{\partial x \partial y} \right\|_p = \left\| \frac{\partial^2 \left[G_{1,1} - G_{0,0} \right]}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant 2A_{0,0}(f)_p$$

Zatem

$$\left\| \frac{\partial^2 G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}}(x,y)}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leqslant 2A_{0,0}(f)_p + 2^3 \sum_{\nu=1}^{r_1-1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} A_{\mu,1}(f)_p +$$

$$+ 2^3 \sum_{\nu=1}^{r_2-1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} A_{1,\mu}(f)_p +$$

$$+ 2^6 \sum_{\nu=1}^{r_1-1} \sum_{\eta=1}^{r_2-1} \sum_{\mu_1=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \sum_{\mu_2=2^{\eta-1}+1}^{2^\eta} A_{\mu_1,\mu_2}(f)_p +$$

$$+ 2^5 \sum_{\mu_1=2^{r_1-1}+1}^{2^{r_1}} \sum_{\mu_2=2^{r_2-1}+1}^{2^{r_2}} A_{\mu_1,\mu_2}(f)_p + 2^5 A_{1,1}(f)_p +$$

$$+ 2^5 \sum_{\eta=1}^{r_2-1} \sum_{\mu=2^{\eta-1}+1}^{2^\eta} A_{1,\mu}(f)_p + 2^5 \sum_{\nu=1}^{r_1-1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} A_{\mu,1}(f)_p ,$$

więc

$$\omega_{1,1}\left(G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}};\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{2^8}{mn} \left\{ A_{0,0}(f)_p + \sum_{\nu=2}^{2^{r_1-1}} A_{\nu,1}(f)_p + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=2}^{2^{r_2-1}} A_{1,\nu}(f)_p + \sum_{\nu=2}^{2^{r_1-1}} \sum_{\mu=2}^{2^{r_2-1}} A_{\nu,\mu}(f)_p \right\}.$$

Jeśli przyjmie się r_1 i r_2 tak, by $2^{r_1-1} < m \leqslant 2^{r_1}$

$$2^{r_2-1} < n \leqslant 2^{r_2},$$

to

$$\omega_{1,1}(G_{2^{r_1+1},2^{r_2+1}};\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{n})_p \leqslant \frac{2^8}{mn}\left\{A_{0,0}(f)_p + \sum_{\nu=2}^{m} A_{\nu,1}(f)_p + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=2}^{n} A_{1,\nu}(f)_p + \sum_{\nu=2}^{m}\sum_{\mu=2}^{n} A_{\nu,\mu}(f)_p\right\} = \frac{2^8}{mn}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=0}^{n} A_{\nu,\eta}(f)_p .$$

Stąd i z (9)

$$\omega_{1,1}(f;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{n})_p \leqslant 4\ A_{m,n}(f)_p + \frac{2^8}{mn}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=0}^{n} A_{\nu,\eta}(f)_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^9}{mn}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=0}^{n} A_{\nu,\eta}(f)_p .$$

__Twierdzenie 3 (Bernsteina)__

Niech $f(x,y) \in L^p(-\infty;\infty)$, jeśli $A_{m,n}(f)_p \leqslant K(\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\beta}})$, to przy

1. $\alpha < 1,\quad \beta < 1 \qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p = O(\delta^{\alpha} + \gamma^{\beta})$

2. $\alpha < 1,\quad \beta = 1 \qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p = O(\delta^{\alpha} + \gamma|\ln\gamma|)$

3. $\alpha = 1,\quad \beta < 1 \qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p = O(\delta|\ln\delta| + \gamma^{\beta})$

4. $\alpha = 1,\quad \beta = 1 \qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p = O(\delta|\ln\delta| + \gamma|\ln\gamma|)$

5. $\alpha > 1,\quad \beta > 1 \qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p = O(\delta + \gamma)$

itd.

__Dowód__

Z lematu 7 wynika, że

$$\omega_{1,1}(f;\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{n})_p \leqslant \frac{C}{mn}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=0}^{n} A_{\nu,\eta}(f)_p = \frac{C}{mn}\Big[A_{0,0}(f)_p +$$

$$+ \sum_{\eta=1}^{n} A_{0,\eta}(f)_p + \sum_{\nu=0}^{m} A_{\nu,0}(f)_p + \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\eta=1}^{n} A_{\nu,\eta}(f)_p\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{mn}\Big[A_{0,0}(f)_p\,(1+n+m) + K\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\eta=1}^{n}\Big(\frac{1}{\nu^{\alpha}} + \frac{1}{\eta^{\beta}}\Big)\Big].$$

Ponieważ

$$\sum_{\eta=1}^{n}\frac{1}{\eta^{\beta}} \leqslant u_1 + I_n = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{\beta}}\,dx = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta-1} + \frac{1}{(1-\beta)n^{\beta-1}} & \text{dla} \quad \beta \neq 1 \\ 1 + \ln n & \text{dla} \quad \beta = 1, \end{cases}$$

więc

ad 1)

$$\omega_{1,1}\Big(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\Big)_p \leqslant \frac{C}{mn}\Big[(1+n+m)A_{0,0}(f)_p + K\sum_{\nu=1}^{m}\Big(n\frac{1}{\nu^{\alpha}} + \frac{\beta}{\beta-1} + \frac{1}{(1-\beta)n^{\beta-1}}\Big)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{mn}\Big[(1+n+m)A_{0,0}(f)_p + K\Big(n\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{n}{(1-\alpha)m^{\alpha-1}} + \frac{m\beta}{\beta-1} + \frac{m}{(1-\beta)n^{\beta-1}}\Big)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big[\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\beta}}\Big].$$

Niech

$$\frac{1}{m+1} \leqslant \delta < \frac{1}{m} \quad \text{i} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \gamma < \frac{1}{n},$$

wtedy

$$\omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p \leqslant \omega_{1,1}\Big(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\Big)_p \leqslant C_2\Big(\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\beta}}\Big) \leqslant C_2(\delta^{\alpha} + \gamma^{\beta})$$

ad 2)

$$\omega_{1,1}\Big(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\Big)_p \leqslant \frac{C}{mn}\Big[(1+m+n)A_{0,0}(f)_p + K\Big(n\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{n}{(1-\alpha)m^{\alpha-1}} +$$

$$+ m(1+\ln n)\Big] \leqslant C_1\Big[\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n}\Big|\ln\frac{1}{n}\Big|\Big] \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Jeśli

$$\frac{1}{m+1} \leqslant \delta < \frac{1}{m} \quad \text{i} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \gamma < \frac{1}{n}, \quad \text{to}$$

$$\omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p \leqslant \omega_{1,1}(f;\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{n})_p \quad C_2 \leqslant \left[\delta^{\alpha} + \gamma\,|\ln \gamma|\right].$$

ad 3)

Dowód analogiczny jak w przypadku 2

ad 4)

$$\omega_{1,1}(f;\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{n})_p < C_1\left[\frac{1}{mn} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}(1+\ln m) + \frac{1}{n}(1+\ln n)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left[\frac{1}{m}\left(1+\left|\ln\frac{1}{m}\right|\right) + \frac{1}{n}\left(1+\left|\ln\frac{1}{n}\right|\right)\right] \leqslant C_3\left[\frac{1}{m}\left|\ln\frac{1}{m}\right| + \frac{1}{n}\left|\ln\frac{1}{n}\right|\right].$$

Ostatnia nierówność prawdziwa jest dla $m > 1$ i $n > 1$.

Jeśli $\frac{1}{m+1} \leqslant \delta < \frac{1}{m}$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \gamma < \frac{1}{n}$, to

$$\omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p \leqslant \omega_{1,1}(f;\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{n})_p < C\left[\frac{1}{m}\left|\ln\frac{1}{m}\right| + \frac{1}{n}\left|\ln\frac{1}{n}\right|\right] <$$

$$\leqslant C_1\left[\delta\,|\ln\delta| + \gamma\,|\ln\gamma|\right]$$

ad 5)

$$\omega_{1,1}(f;\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{n})_p < C_1\left[\frac{1+n+m}{mn} + \frac{\alpha}{m(\alpha-1)} + \frac{1}{(1-\alpha)m^{\alpha}} + \frac{\beta}{n(\beta-1)} + \frac{1}{(1-\beta)n^{\beta}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right].$$

Stąd podobnie jak w przypadku 1 otrzymuje się, że

$$\omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_p \leqslant C(\delta+\gamma).$$

Dowody pozostałych możliwych przypadków przebiegają analogicznie.

Lemat 8

Niech $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \in L^P(^{-\infty,\infty}_{-\infty,\infty})$, $P = (p_1,p_2)$, $Q = (q_1,q_2)$, $P_0 = (\bar{p}_1,\bar{p}_2)$ gdzie $\bar{p}_i$ jest najmniejszą liczbą parzystą większą lub równą p_i oraz $p_i < q_i$ dla $i = 1,2$

Wtedy

$$\|G_{\sigma_1,\sigma_2}\|_Q < \left(\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \left(\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|G_{\sigma_1,\sigma_2}\|_P$$

Dowód

Z nierówności (28) str. 248 [2] jest

$$\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\|_{(2,2)} = \|G_{\sigma_1}(x)\|_2 \; \|G_{\sigma_2}(y)\|_2 \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \sup_x |G_{\sigma_1}(x)| \sup_y |G_{\sigma_2}(y)| = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \sup_{xy} |G_{\sigma_1}(x)\, G_{\sigma_2}(y)| =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \sup_{xy} |G_{\sigma_1\sigma_2}(x,y)| .$$

Stosując tę nierówność do funkcji $[G_{\sigma_1\sigma_2}(x,y)]^{P_0/2}$, która jest funkcją całkowitą typu $\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2}$ ze względu na zmienną x i typu $\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2}$ ze względu na y otrzymuje się

$$\sup_{xy} |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P_0/2} \leq \frac{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2}\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2}}}{\pi} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P_0}\, dx\, dy\right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\bar{p}_1\sigma_1\,\bar{p}_2\sigma_2}}{2\pi} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P} \, |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P_0-P}\, dx\, dy\right\}^{1/2}$$

$$\sup_{xy} |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P/2} \; \sqrt{\frac{\sigma_1\bar{p}_1}{2\pi}}\sqrt{\frac{\sigma_2\bar{p}_2}{2\pi}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)|^{P}\, dx\, dy\right\}^{1/P \; P/2}$$

Podnosząc obie strony do potęgi 2/P otrzymuje się

$$\sup_{x,y} \left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right| \leqslant \left(\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_2}} \left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P .$$

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^Q dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^{Q-P}\left|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right|^P dx\,dy <$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2\pi}\right)^{1/p_1}\left(\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2\pi}\right)^{1/p_2}\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P\right]^{Q-P}\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P^P ,$$

więc

$$\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_Q \leqslant \left(\frac{\bar{p}_1\sigma_1}{2\pi}\right)^{1/p_1-1/q_1}\left(\frac{\bar{p}_2\sigma_2}{2\pi}\right)^{1/p_2-1/q_2}\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P .$$

Wniosek

Z lematu 8 i uwagi ze str. 248 [2] wynika, że

$$\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_Q < 2\,\sigma_1^{1/p_1-1/q_1}\,2\,\sigma_2^{1/p_2-1/q_2}\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P$$

$$= 4\,\sigma_1^{1/p_1-1/q_1}\,\sigma_2^{1/p_2-1/q_2}\left\|G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\right\|_P .$$

Lemat 9

Jeśli $\alpha<1$ i $\beta<1$, to

a) $$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k,n}(f)_P\,k^{\alpha-1}\,n^{\beta-1} = \sum_{r=1}^{\infty}\ \sum_{k=2^{r-1}m+1}^{2^r m} A_{k,n}(f)_P\,k^{\alpha-1}\,n^{\beta-1} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{r=1}^{\infty} 2^r\,m(2^r m)^{\alpha-1}\,n^{\beta-1}\,A_{2^r m,n}(f)_P = \sum_{k=1}^{\infty}(2^k m)^{\alpha}\,n^{\beta-1}\,A_{2^k m,n}(f)_P$$

analogicznie

b) $$\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{m,l}(f)_P m^{\alpha-1} l^{\beta-1} \geqslant \sum_{l=1}^{\infty} m^{\alpha-1}(2^l n)^{\beta} A_{m,2^l n}(f)_P$$

c) $$\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{k,l}(f)_P k^{\alpha-1} l^{\beta-1} =$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=2^{r-1}m}^{2^r m}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=2^{s-1}n}^{2^s n} A_{k,l}(f)_P k^{\alpha-1} l^{\beta-1} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} 2^r m\, 2^s n\, A_{2^r m,2^s n}(f)_P (2^r m)^{\alpha-1}(2^s n)^{\beta-1} =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(2^k m)^{\alpha}(2^l n)^{\beta} A_{2^k m,2^l n}(f)_P$$

Twierdzenie 4

Jeśli funkcja $f(x,y)\in L^P(-\infty,\infty;-\infty,\infty)$, $\|f(x,y)-G_{\sigma_1,\sigma_2}\|_P = A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_P$, oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{k,n}(f)_P k^{1/q_1-1/p_1-1} n^{1/q_2-1/p_2}<\infty,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_{m,l}(f)_P m^{1/q_1-1/p_1} l^{1/q_2-1/p_2-1}<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{k,l}(f)_P k^{1/q_1-1/p_1-1} l^{1/q_2-1/p_2-1}<\infty$$

gdzie $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$ i $p_i\leqslant q_i$ dla $i=1,2$ $m>0$, $n>0$, to

$$A_{m,n}(f)_Q \leqslant C\Big[m^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2} A_{m,n}(f)_P +$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k,n}(f)_P k^{1/q_1-1/p_1-1} n^{1/q_2-1/p_2} +$$

$$+\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{m,l}(f)_p\, m^{1/q_1-1/p_1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1}\,+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{k,l}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1}\Big],$$

gdzie $C = C(q_1,q_2,p_1,p_2)$

Dowód

Ze zbieżności w L^p wynika, że

$$f(x,y) = G_{m,n} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(G_{2^{k+1}m,n} - G_{2^k m,n}\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\left(G_{m,2^{l+1}n} - G_{m,2^l n}\right) +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(G_{2^{k+1}m,2^{l+1}n} - G_{2^{k+1}m,2^l n} - G_{2^k m,2^{l+1}n} + G_{2^k m,2^l n}\right),$$

przy czym

$$\left\|G_{2^{k+1}m,n} - G_{2^k m,n}\right\|_p \leqslant \left\|G_{2^{k+1}m,n} - f\right\|_p + \left\|f - G_{2^k m,n}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 2\, A_{2^k m,n}(f)_p$$

$$\left\|G_{m,2^{l+1}n} - G_{m,2^l n}\right\|_p \leqslant 2\, A_{m,2^l n}(f)_p$$

$$\left\|G_{2^{k+1}m,2^{l+1}n} - G_{2^{k+1}m,2^l n} - G_{2^k m,2^{l+1}n} + G_{2^k m,2^l n}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 4\, A_{2^k m,2^l n}(f)_p\,.$$

Na podstawie wniosku z lematu 8

$$\left\|G_{2^{k+1}m,n} - G_{2^k m,n}\right\|_Q < 4\left(2^{k+1}m\right)^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2}\,\Big\|G_{2^{k+1}m,n} -$$

$$- G_{2^k m,n}\Big\|_p \leqslant C_1\left(2^k m\right)^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2}\, A_{2^k m,n}(f)_p$$

gdzie $C_1 = C_1(q_1,p_1)$

$$\left\|G_{m,2^{l+1}n} - G_{m,2^l n}\right\|_p < C_2\, m^{1/q_1-1/p_1}\,(2^l n)^{1/q_2-1/p_2}\, A_{m,2^l n}(f)_p\,,$$

gdzie $C_2 = C_2(q_2,p_2)$

$$\left\|G_{2^{k+1}m,2^{l+1}n} - G_{2^{k+1}m,2^l n} - G_{2^k m,2^{l+1}n} + G_{2^k m,2^l n}\right\|_q <$$

$$< C_3 (2^k m)^{1/q_1-1/p_1}\,(2^l n)^{1/q_2-1/p_2}\, A_{2^k m,2^l n}(f)_p\,,$$

gdzie $C_3 = C_3(q_1,q_2,p_1,p_2)$.

Stąd w oparciu o lemat 9

$$\left\|f(x,y) - G_{m,n}\right\|_q \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left\|G_{2^{k+1}m,n} - G_{2^k m,n}\right\|_q +$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left\|G_{m,2^{l+1}n} - G_{m,2^l n}\right\|_q +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left\|G_{2^{k+1}m,2^{l+1}n} - G_{2^{k+1}m,2^l n} - G_{2^k m,2^{l+1}n} + G_{2^k m,2^l n}\right\|_q <$$

$$< C_1\sum_{k=0}^{\infty}(2^k m)^{1/q_1-1/p_1}\, n^{1/q_2-1/p_2}\, A_{2^k m,n}(f)_p +$$

$$+ C_2\sum_{l=0}^{\infty} m^{1/q_1-1/p_1}\,(2^l n)^{1/q_2-1/p_2}\, A_{m,2^l n}(f)_p +$$

$$+ C_3\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(2^k m)^{1/q_1-1/p_1}\,(2^l n)^{1/q_2-1/p_2}\, A_{2^k m,2^l n}(f)_p <$$

$$< C_1\Big[m^{1/q_1-1/p_1}\, n^{1/q_2-1/p_2}\, A_{m,n}(f)_p +$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k,n}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, n^{1/q_2-1/p_2-1}\Big]+$$

$$+ C_2\Big[m^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2} A_{m,n}(f)_p +$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{\infty} A_{m,l}(f)_p\, m^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1}\Big] +$$

$$+ C_3\Big[m^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2} A_{m,n}(f)_p +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k,n}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, n^{1/q_2-1/p_2} +$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{\infty} m^{1/q_1-1/p_1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} A_{m,l}(f)_p +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} k^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} A_{k,l}(f)_p\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C\Big[m^{1/q_1-1/p_1} n^{1/q_2-1/p_2} A_{m,n}(f)_p +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k,n}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, n^{1/q_2-1/p_2} +$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{\infty} A_{m,l}(f)_p\, m^{1/q_1-1/p_1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{k,l}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1}\Big].$$

gdzie $C = C(p_1, p_2, q_1, q_2)$

4. Wnioski

Niech $f(x,y) \in L^P\left[\begin{smallmatrix}-\pi,\pi\\-\pi,\pi\end{smallmatrix}\right]$, gdzie $P = (p_1,p_2)$ będzie funkcją okresową o okresie 2π ze względu na każdą zmienną.

$$\|f(x,y)\|_P = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}$$

$$\omega(f;u,v)_P = \sup_{|h|\leqslant u,\ |k|\leqslant v}\|f(x+h,y+k) - f(x,y)\|_P$$

$$E_{m,n}(f)_P = \inf_{T_{m,n}}\|f(x,y) - T_{m,n}\|_P \,.$$

gdzie

$$T_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)(a_l\cos ly + b_l\sin ly)$$

$$\omega_{1,1}(f;u,v)_P = \sup_{|h|\leqslant u,\ |k|\leqslant v}\|\Delta_h\Delta_k f(x,y)\|_P$$

Ponieważ wielomian trygonometryczny $T_{m,n}(x,y)$ jest funkcją całkowitą typu m ze względu na zmienną x i typu n ze względu na y, więc jako szczególne przypadki twierdzeń udowodnionych w części 3 otrzymujemy twierdzenia następujące

Twierdzenie 1

Dla dowolnej funkcji $f(x,y)$ określonej jak wyżej prawdziwe jest oszacowanie

$$E_{m,n}(f)_P \leqslant C\,\omega\left(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)_P$$

Twierdzenie 2

Dla funkcji $f(x,y)$ określonej jak wyżej o pochodnych cząstkowych jednostajnie ciągłych aż do rzędu k_1-1 ze względu na x i k_2-1 ze względu na y i takich, że

$$\left\|\frac{\partial^{k_1} f}{\partial x^{k_1}}\right\|_P < \infty \quad \text{i} \quad \left\|\frac{\partial^{k_2} f}{\partial y^{k_2}}\right\|_P < \infty$$

jest

$$E_{m,n}(f)_P \leqslant C(k_1,k_2)\left[\frac{1}{m^{k_1}}\omega\Big(\frac{\partial^{k_1}f}{\partial x^{k_1}}; \frac{1}{m}, 0\Big)_P + \frac{1}{n^{k_2}}\omega\Big(\frac{\partial^{k_2}f}{\partial y^{k_2}}; 0, \frac{1}{n}\Big)_P\right]$$

Twierdzenie 3

Niech f(x,y) będzie funkcją określoną jak wyżej. Jeśli dla wszystkich naturalnych m i n

$$E_{m,n}(f)_P \leqslant A\Big(\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\beta}}\Big),$$

to przy

1. $\alpha < 1,\quad \beta < 1\qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_P = O(\delta^{\alpha}+\gamma^{\beta})$

2. $\alpha < 1,\quad \beta = 1\qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_P = O(\delta^{\alpha}+\gamma|\ln\gamma|)$

3. $\alpha = 1,\quad \beta < 1\qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_P = O(\delta|\ln\delta|+\gamma^{\beta})$

4. $\alpha = 1,\quad \beta = 1\qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_P = O(\delta|\ln\delta|+\gamma|\ln\gamma|)$

5. $\alpha > 1,\quad \beta > 1\qquad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_P = O(\delta+\gamma)$

itd.

Twierdzenie 4

Jeśli funkcja f(x,y) jest określona jak wyżej oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_{k,n}(f)_P\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, n^{1/q_2-1/p_2} < \infty,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} E_{m,l}(f)_P\, m^{1/q_1-1/p_1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} E_{k,l}(f)_P\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} < \infty$$

gdzie $P = (p_1,p_2)$ $Q = (q_1,q_2)$ i $p_1 \leqslant q_1$, $m > 0$, $n > 0$, to

$$E_{m,n}(f)_p \leqslant A\Big[m^{1/q_1-1/p_1}\, n^{1/q_2-1/p_2}\, E_{m,n}(f)_p +$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty} E_{k,n}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, n^{1/q_2-1/p_2} +$$

$$+\sum_{l=n+1}^{\infty} E_{m,l}(f)_p\, m^{1/q_1-1/p_1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1} +$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty} E_{k,l}(f)_p\, k^{1/q_1-1/p_1-1}\, l^{1/q_2-1/p_2-1}\Big],$$

gdzie $A = A(q_1,q_2,p_1,p_2)$.

Dziękuję Profesorowi dr hab. J. Musielakowi za wielce pomocne sugestie przy opracowywaniu tematu.

LITERATURA

1. I.P. Natanson: Konstruktiwnaja tieorija funkcji. Moskwa 1949.
2. A.F. Timan: Tieorija pribliżenija funkcji diejstwitielnogo pieriemiennogo. Moskwa 1960 r.
3. G.P. Gubanow: O toczności priedstawlenija nieprierywnych periodiczeskich funkcji dwuch pieriemiennych singularnymi intiegrałami. IWUZ. Matiematika No 12(91) 1969.
4. A.A. Konjuszkow: Najłuczszije pribliżenija trigonomietriczeskimi polinomami. Mat. Sb. t. 44(86):1 Moskwa 1958.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Р е з ю м е

В представленной работе обобщены на функции, принадлежащие пространству $L^{P}\binom{-\infty,-\infty}{-\infty,-\infty}$ с миксированными нормами результат Г.П. Губанова [3], теоремы Джексона и Бернштейна и результат А.А. Конюшкова [4].

THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY ENTIVE FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper there are generalized the results of G.P. Gubanow [3] and Jackson and Bernstein's theorems as well as the results of A.A. Konushkow [4] for the case of functions in the spaces $L^{p}(\substack{-\infty;\infty\\ -\infty;\infty})$, with a mixed norms