ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Grażyna KOZŁOWSKA
Instytut Matematyki

APROKSYMACJA FUNKCJI OKRESOWYCH DWÓCH ZMIENNYCH PEWNYMI CAŁKAMI OSOBLIWYMI

Streszczenie. W pracy uogólniono wyniki uzyskane przez Gubanowa [1] na funkcje przestrzeni L^P z normami mieszanymi.

Oznaczenia

$L^P[G]$, gdzie $P = (p_1, p_2)$ $1 \leq p_i < \infty$ $(i = 1,2)$ jest przestrzenią funkcji mierzalnych $f(x,y)$ określonych na obszarze

$$G : \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{cases} \quad \text{dla których} \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} < \infty$$

$$\|f(x,y)\|_P = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} \quad \text{norma w} \quad L^P[G]$$

$$\omega(f;u,v)_P = \sup_{|h| \leq u,\ |k| \leq v} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h,y+k) - f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}$$

$$\omega_1(u) = \omega(f;u,0)_P = \sup_{|h| \leq u} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h,y) - f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}$$

$$\omega_2(v) = \omega(f;0,v)_P = \sup_{|k| \leq v} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y+k) - f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}$$

$H_P^{(\alpha,\beta)}$ – klasa funkcji spełniających warunek

$$\|f(x+h,y+k) - f(x,y)\|_P \leq$$

$$\leq (2\pi)^{1/p_1+1/p_2} (|h|^{\alpha} + |k|^{\beta}) \quad 0 < \alpha, \quad \beta < 1 .$$

1. Wstęp

Przy dowodzeniu twierdzeń wykorzystuje się następujące własności funkcji określonych powyżej

1. $\omega_i(\lambda u) \leqslant (1+\lambda)\,\omega_i(u)$, gdzie $i = 1,2$; λ – rzeczywista

2. $\omega(f;u,v)_P \leqslant \omega_1(u) + \omega_2(v)$

oraz uogólnioną nierówność Minkowskiego

$$\left\{\int_a^b\left[\int_c^d\left|\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta f(x,y,t,z)\,dt\,dz\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta\left\{\int_a^b\left[\int_c^d\left|f(x,y,t,z)\right|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2}dt\,dz\,,$$

gdzie $f(x,y,t,z)$ jest funkcją mierzalną w punkcie $(a,b)\times(c,d)\times(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$

2. Aproksymacja całkami singularnymi funkcji $f(x,y) \in L^P\,[G]$, okresowych o okresie 2π ze względu na każdą zmienną

Niech funkcja $f(x,y) \in L^P\,[G]$, gdzie $P = (p_1,p_2)$, $1 \leqslant p_1,p_2 < \infty$

$G: \begin{cases} -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ -\pi \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π ze względu na każdą zmienną.

Dokładność z jaką da się ona aproksymować za pomocą całki postaci

$$f_{mn}(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\,\Phi_m(t-x)\,\Phi_n(z-y)\,dt\,dz\,, \tag{1}$$

gdzie $\Phi_i(u)$ jest funkcją mierzalną a) dodatnią, b) parzystą, c) okresową o okresie 2π, d) $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_i(u)\,du = 1$, e) $\delta_i = \int_0^{\pi} u\,\Phi_i(u)\,du \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$

pozwalają oszacować twierdzenia 1 i 2.

Twierdzenie 1

Jeśli $f(x,y) \in L^P\,[G]$ i jest okresową o okresie 2π ze względu na każdą zmienną, to

$$\|f_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_P \leqslant 3\,\omega_1(\delta_m) + 3\,\omega_2(\delta_n)$$

Dowód

Wprowadzając zmianę zmiennych we wzorze (1) i korzystając z własności całek można $f_{mn}(x,y)$ zapisać w postaci

$$f_{mn}(x,y) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Big[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y+z) +$$

$$+ f(x-t,y-z)\Big] \Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz$$

Korzystając z własności funkcji $\Phi_i(u)$ można $f(x,y)$ zapisać w postaci

$$f(x,y) = 4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\,\Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz\ ,$$

zatem

$$f_{mn}(x,y) - f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Big[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y+z) +$$

$$+ f(x-t,y-z) - 4\,f(x,y)\Big] \Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz\ .$$

Stąd korzystając z nierówności Minkowskiego otrzymuje się

$$\|f_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\Big[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y+z) + f(x-t,y-z) -\right.$$

$$\left. - 4\,f(x,y)\Big] \Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\Big|^{p_1} dx\Big)^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} dt\,dz \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \omega(f;t,z)_p\,\Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Big[\omega_1(t) + \omega_2(z)\Big]\,\Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz\ .$$

Z własności (1) funkcji $\omega_1(u)$ wynika, że

$$\omega_1(t) \leqslant (1 + t/\delta_m)\,\omega_1(\delta_m), \qquad \omega_2(z) \leqslant (1 + z/\delta_n)\,\omega_2(\delta_n)$$

więc

$$\|f_{mn}(x,y) - f)x,y)\|_P \leqslant 4 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Big[(1 + t/\delta_m)\,\omega_1(\delta_m) +$$

$$+ (1 + z/\delta_n)\,\omega_2(\delta_n)\Big]\,\Phi_m(t)\,\Phi_n(z)\,dt\,dz =$$

$$= 3\,\omega_1(\delta_m) + 3\,\omega_2(\delta_n)\,.$$

A to jest tezą dowodzonego twierdzenia.

<u>Wniosek 1</u>

Jeśli $f(x,y)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i

$$F_{mn}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\Big[\Big(\sin m\,\frac{t-x}{2}\,\sin n\,\frac{z-y}{2}\Big) :$$

$$: \Big(\sin\frac{t-x}{2}\,\sin\frac{z-y}{2}\Big)\Big]^2\,dt\,dz$$

jest jej całką Fejéra, to

$$\|F_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_P \leqslant 3\omega_1\Big[\frac{\pi}{4m}\,(1 + 2\ln m)\Big] + 3\omega_2\Big[\frac{\pi}{4n}\,(1 + 2\ln n)\Big]$$

<u>Dowód</u>

Dla $i = m,n$

$$\delta_i = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} u\left[\frac{\sin i\,\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2 du = \frac{2}{\pi i}\int_0^{\frac{\pi}{2i}} u\left[\frac{\sin iu}{\sin u}\right]^2 du +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2i}}^{\frac{\pi}{2}} u\left[\frac{\sin iu}{\sin u}\right]^2 du \leqslant \frac{\pi}{2i}\left[\frac{1}{2} + \ln\Big(\frac{\pi}{2}\,\frac{2i}{\pi}\Big)\right].$$

Przyjmuje się

$$\delta_i = \frac{\pi}{4i}\left[1 + 2\ln i\right].$$

Wniosek 2

Jeśli $f(x,y)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i

$$J_{mn}(x,y) = \frac{9}{4\pi^2 mn(2m^2+1)(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\left[\left(\sin m\frac{t-x}{2}\sin\frac{z-y}{2}\right) : \right.$$

$$\left. : \left(\sin\frac{t-x}{2}\sin\frac{z-y}{2}\right)\right]^4 dt\,dz$$

jest jej całką Jacksona, to

$$\left\|J_{mn}(x,y) - f(x,y)\right\|_P \leqslant 3\,\omega_1\left[\frac{3\pi(2m^2-1)}{4m(2m^2+1)}\right] + 3\,\omega_2\left[\frac{3\pi(2n^2-1)}{4n(2n^2+1)}\right]$$

Dowód

Dla $i=m,n$, podobnie jak we wniosku 1

$$\delta_i = \frac{3}{2\pi i(2i^2+1)}\int_0^{\pi} u\left[\frac{\sin i\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right]^4 du \leqslant \frac{3\pi}{4i(2i^2+1)}\left[2i^2-1\right].$$

Wniosek 3

Jeśli $f(x,y)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i

$$V_{mn}(x,y) = \frac{(2m)!!\,(2n)!!}{4\pi^2(2m-1)!!\,(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\cos^{2m}\frac{t-x}{2}\cos^{2n}\frac{z-y}{2}\,dt\,dz$$

jest jej całką de la Vallée -Poussina, to

$$\left\|V_{mn}(x,y) - f(x,y)\right\|_P \leqslant 3\,\omega_1\left[\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\right] + 3\,\omega_2\left[\frac{(2n)!!}{2n+1)!!}\right]$$

Dowód

Dla $i=m,n$

$$\delta_i = \frac{(2i)!!}{2\pi(2i-1)!!}\int_0^{\pi} u\cos^{2i}\frac{u}{2}\,du = \frac{(2i)!!}{2\pi(2i-1)!!}\,4\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2i}t\,dt \leq$$

$$\leq \frac{(2i)!!}{(2i-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i}t\sin t\,dt = \frac{(2i)!!}{(2i+1)!!}.$$

Twierdzenie 2

Jeśli $f(x,y)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i

$$P_{qr} = P(x,y;q,r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)\left[\frac{1-q^2}{1-2q\cos(t-x)+q^2}\right]\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-y)+r^2}\right]dt\,ds,$$

gdzie $q_0 \leq q < 1$, $r_0 \leq r < 1$ jest jej całką Poissona, to

$$\|P_{qr}-f(x,y)\|_P \leq K_1\,\omega_1\left[(1-q)|\ln(1-q)|\right] + K_2\,\omega_2\left[(1-r)|\ln(1-r)|\right]$$

gdzie K_1, K_2 są stałymi zależnymi odpowiednio od q_0 i r_0.

Dowód

Podobnie jak w twierdzeniu 1 można wykazać, że

$$\|P_{qr} - f(x,y)\|_P \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} 4\left[\omega_1(t)+\omega_2(s)\right]\left[\frac{1-q^2}{1-2q\cos t+q^2}\right]\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos s+r^2}\right]dt\,ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\left(1+\frac{t}{(1-q)|\ln(1-q)|}\right)\omega_1\left[(1-q)|\ln(1-q)|\right] + \right.$$

$$\left. +\left(1+\frac{s}{(1-r)|\ln(1-r)|}\right)\omega_2\left[(1-r)|\ln(1-r)|\right]\right\}\left[\frac{1-q^2}{1-2q\cos t+q^2}\right]\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos s+r^2}\right]dt\,ds =$$

$$= \omega_1\left[(1-q)\left|\ln(1-q)\right|\right]\left[1 + \frac{1+q}{\pi\left|\ln(1-q)\right|}\int_0^{\pi}\frac{t\,dt}{(1-q)^2+4q\sin^2\frac{t}{2}}\right] +$$

$$+ \omega_2\left[(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right]\left[1 + \frac{1+r}{\pi\left|\ln(1-r)\right|}\int_0^{\pi}\frac{z\,dz}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{z}{2}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \omega_1\left[(1-q)\left|\ln(1-q)\right|\right]\left[1 + \frac{4(1+q)}{\pi\left|\ln(1-q)\right|}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\,dt}{(1-q)^2+4q\,\frac{4t^2}{\pi^2}}\right] +$$

$$+ \omega_2\left[(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right]\left[1 + \frac{4(1+r)}{\pi\left|\ln(1-r)\right|}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{z\,dz}{(1-r)^2+4r\,\frac{4z^2}{\pi^2}}\right] =$$

$$= \omega_1\left[(1-q)\left|\ln(1-q)\right|\right]\left[1 + \frac{\pi(1+q^2)}{8q\left|\ln(1-q)\right|}\ln\frac{1+q}{1-q}\right] +$$

$$+ \omega_2\left[(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right]\left[1 + \frac{\pi(1+r)^2}{8r\left|\ln(1-r)\right|}\ln\frac{1+r}{1-r}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \omega_1\left[(1-q)\left|\ln(1-q)\right|\right]\left[1 + \frac{\pi}{2q\left|\ln(1-q)\right|}\ln\frac{1+q}{1-q}\right] +$$

$$+ \omega_2\left[(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right]\left[1 + \frac{\pi}{2r\left|\ln(1-r)\right|}\ln\frac{1+r}{1-r}\right]$$

Jeśli $q_0 \leqslant q < 1$ i $r_0 \leqslant r < 1$, to

$$\left\|P_{qr} - f(x,y)\right\|_P \leqslant K_1\,\omega_1\left[(1-q)\left|\ln(1-q)\right|\right] + K_2\,\omega_2\left[(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right]$$

gdzie

$$K_1 = 1 + \frac{\pi\ln 2}{2q_0\left|\ln(1-q_0)\right|} + \frac{\pi}{2q_0}$$

$$K_2 = 1 + \frac{\pi\ln 2}{2r_0\left|\ln(1-r_0)\right|} + \frac{\pi}{2r_0}$$

3. Aproksymacja w przypadku funkcji $f(x,y) \in H_p^{(\alpha,\beta)}$

Jeśli ograniczyć się do funkcji $f(x,y) \in H_p^{(\alpha,\beta)}$, to można otrzymać dokładniejsze oszacowania. Przypadki takie rozważane są w twierdzeniach 3–5 Niech

$$U(f_{mn};\alpha,\beta) = \sup_{f(x,y) \in H_p^{(\alpha,\beta)}} \|f_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_p .$$

Wykonując przekształcenia podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 1 uzyskuje się związek następujący:

$$\|f_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_p \leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left[f(x+t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y+z) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + f(x-t,y-z) - 4f(x,y) \right] \Phi_m(t)\Phi_n(z) \right|^{p_1} dx \right)^{p_2/p_1} dy \Bigg\}^{1/p_2} dt\, dz =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left[f(x+2t,y+2z) + f(x+2t,y-2z) + f(x-2t,y+2z) + f(x-2t,y-2z) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 4f(x,y) \right] \Phi_m(2t)\Phi_n(2z) \right|^{p_1} dx \right)^{p_2/p_1} dy \Bigg\}^{1/p_2} dt\, dz \leqslant$$

$$\leqslant 16(2\pi)^{1/p_1+1/p_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(|2t|^{\alpha} + |2z|^{\beta} \right) \Phi_m(2t)\Phi_n(2z)\, dt\, dz . \qquad (2)$$

Twierdzenie 3

Jeśli $0 < q_0 \leqslant q < 1$, $0 < r_0 \leqslant r < 1$, to prawdziwe są wzory asymptotyczne

$$U(P_{qr};\alpha,\beta) = \begin{cases} (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2}{\pi}(1-q)\left|\ln(1-q)\right| + \frac{2}{\pi}(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right] + \\ \quad + O(1-q) + O(1-r), \quad \alpha = \beta = 1 \\ (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2}{\pi}(1-q)\left|\ln(1-q)\right| + (1-r)^{\beta}\sec\frac{\pi\beta}{2}\right] + \\ \quad + O(1-q) + O(1-r), \quad \alpha = 1, 0 < \beta < 1 \\ (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[(1-q)^{\alpha}\sec\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{2}{\pi}(1-r)\left|\ln(1-r)\right|\right] + \\ \quad + O(1-q) + O(1-r), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta = 1 \\ (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[(1-q)^{\alpha}\sec\frac{\pi\alpha}{2} + (1-r)^{\beta}\sec\frac{\pi\beta}{2}\right] + \\ \quad + O(1-q) + O(1-r), \quad 0 < \alpha, \quad \beta < 1. \end{cases}$$

Dowód

Z nierówności (2) i własności (d) funkcji $\Phi_1(u)$ wynika, że

$$\left\|P_{qr}(x,y) - f(x,y)\right\|_P \leqslant$$

$$\leqslant 16(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(|2t|^{\alpha} + \right.$$

$$\left. + |2z|^{\beta}\right)\left[\frac{1-q^2}{1-2q\cos 2t+q^2}\right]\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2z+r^2}\right]dt\,dz =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[|2t|^{\alpha}\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|2z|^{\beta}(1-r^2)}{(1-r)^2+4r\sin^2 z}dz\right]\frac{1-q^2}{(1-q)^2+4q\sin^2 t}dt =$$

$$= (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}(1-q^2)}{(1-q)^2+4q\sin^2 t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{1+\beta}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{z^{\beta}(1-r^2)}{(1-r)^2+4r\sin^2 z}\,dz\right] .$$

Niech $f_{\alpha,\beta}(t,z)$ będzie funkcją okresową o okresie 2π pokrywającą się w obszarze $[-\pi,\pi;-\pi,\pi]$ z funkcją $|t|^{\alpha} + |z|^{\beta}$.
Funkcja ta należy do $H_p^{(\alpha,\beta)}$ i dla niej

$$U(P_{qr};\alpha,\beta) = (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}(1-q^2)}{(1-q)^2+4q\sin^2 t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{1+\beta}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{z^{\beta}(1-r^2)}{(1-r)^2+4r\sin^2 z}\,dz\right]$$

Stąd, wykorzystując twierdzenie 5 [1] otrzymuje się natychmiast tezę, jeśli w cytowanym twierdzeniu 5 uwzględni się współczynnik

$$A = (2\pi)^{1/p_1+1/p_2} .$$

<u>Twierdzenie 4</u>

Dla całki de la Vallèe- Poussina prawdziwe są asymptotyczne równości

$$U(V_{m,n};\alpha,\beta) = \begin{cases} (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[2^{\alpha}\Gamma\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]\sqrt{\pi m^{\alpha}} + 2^{\beta}\Gamma\left[\frac{\beta+1}{2}\right]\sqrt{\pi n^{\beta}}\right] + \\ + o\left(\frac{1}{\sqrt{m^{\alpha}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\beta}}}\right), \quad 0<\alpha, \quad \beta<1 \\ (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi m}} + \frac{2}{\sqrt{\pi n}}\right] + \\ + \theta_1\sqrt{m^3} + \theta_2\sqrt{n^3}, \quad -1<\theta_1, \quad \theta_2<1, \quad \alpha=\beta=1 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l}
(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[2^{\alpha}\Gamma\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]\sqrt{\pi m^{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\right]+ \\
+\,o\left(\frac{1}{\sqrt{m^{\alpha}}}\right)+\theta_2\sqrt{n^3}, \quad 0<\alpha<1, \quad \beta=1, \quad -1<\theta_2<1 \\
(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi m}}+2^{\beta}\Gamma\left[\frac{\beta+1}{2}\right]\sqrt{\pi n^{\beta}}\right]+ \\
+\,\theta_1\sqrt{m^3}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\beta}}}\right), \quad -1<\theta_1<1, \quad \alpha=1, \quad 0<\beta<1
\end{array}\right.$$

Dowód

Z nierówności (2) i własności (d) funkcji $\Phi_1(u)$ wynika, że

$$\|V_{mn}(x,y)-f(x,y)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 16(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\frac{(2m)!!(2n)!!}{4\pi^2\,(2m-1)!!(2n-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(|2t|^{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\,|2z|^{\beta}\right)\cos^{2m}t\cos^{2n}z\,dt\,dz=$$

$$=(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2^{1+\alpha}(2m)!!}{\pi(2m-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\alpha}\cos^{2m}t\,dt+\right.$$

$$\left.+\,\frac{2^{1+\beta}(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^{\beta}\cos^{2n}z\,dz\right]$$

Uwzględniając funkcję $f_{\alpha,\beta}(t,z)$ określoną w dowodzie twierdzenia 3, otrzymuje się

$$U(V_{mn};\alpha,\beta)=(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{2^{1+\alpha}(2m)!!}{(2m-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\alpha}\cos^{2m}t\,dt+\right.$$

$$\left.\frac{2^{1+\beta}(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^{\beta}\cos^{2n}z\,dz\right]$$

Stąd i z twierdzenia 6 [1] otrzymuje się tezę uwzględniając współczynnik

$$A = (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}$$

Twierdzenie 5

Dla całki Jacksona prawdziwa jest asymptotyczna równość

$$U(J_{mn};\alpha,\beta) = (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\,\frac{3}{\pi}\left[\left(\frac{2}{m}\right)^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}}\,dt + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{n}\right)^{\beta}\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 z}{z^{4-\beta}}\,dz\right] + o(m^{-\alpha}) + o(n^{-\beta})$$

Dowód

Z nierówności (2) i własności (d) funkcji $\Phi_1(u)$ wynika, że

$$\|J_{mn}(x,y) - f(x,y)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 16(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\,\frac{9}{4\pi^2 mn(2m^2+1)(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(|2t|^{\alpha} + \right.$$

$$\left. + |2z|^{\beta}\right)\left[\frac{\sin mt\,\sin nz}{\sin t\,\sin z}\right]^4 dt\,dz$$

$$= 4(2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\,\frac{9}{\pi^2 mn(2m^2+1)(2n^2+1)}\left[\frac{\pi n(2n^2+1)}{6}\,2^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\,\frac{\sin^4 mt}{\sin^4 t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi m(2m^2+1)}{6}\,2^{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} z^{\beta}\,\frac{\sin^4 nz}{\sin^4 z}\,dz\right] \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{1/p_1+1/p_2}\left[\frac{3\cdot 2^{\alpha}}{\pi m^{\alpha+4}}\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{\sin^4\frac{t}{m}}\,dt + \right.$$

$$+ \frac{3 \cdot 2^{\beta}}{\pi n^{\beta+4}} \int_0^{\infty} z^{\beta} \frac{\sin^4 z}{\sin^4 \frac{z}{n}} dz \Big] \leq$$

$$\leq (2\pi)^{1/p_1+1/p_2} \left[\frac{3 \cdot 2^{\alpha}}{\pi m^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}} dt + \frac{3 \cdot 2^{\beta}}{\pi n} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 z}{z^{4-\beta}} dz \right] +$$

$$+ o(m^{-\alpha}) + o(n^{-\beta}),$$

a stąd teza.

Panu Prof. dr hab. J. Musielakowi dziękuję za wiele cennych uwag dotyczących mej pracy.

LITERATURA

1. G.P. Gubanow: O tocznosti priedestawlenija nieprierywnych periodiczeskich funkcji dwuch pieriemiennych singularnymi intiegrałami. IWUZ. Matiematika No 12(91) 1969.
2. I.P. Natanson: Konstruktiwnaja tieorija funkcji. Moskwa 1949.

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Р е з ю м е

В представленной работе обобщены результаты Г.П. Губанова [1] на функции, принадлежащие пространству L^p с миксированными нормами.

THE APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY SINGULAR INTEGRALS

S u m m a r y

The paper generalizes the results of G.P. Gubanow [1] for functions in the spaces L^p, with a mixed norms.