

Olga BEREŚNIEWICZ-RAJCA
Janina ŚLĄDKOWSKA

O PEWNYM TWIERDZENIU POŁOWYM

Streszczenie. Rozważa się rodzinę $C\{a\}$ funkcji $f(z)$ regularnych i jednolistnych w $|z| < 1$, $f(0) = 0$, które spełniają ponadto warunek $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq a$, dla każdej pary z_1, z_2 , $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, gdzie a jest dowolną liczbą zespoloną. Otrzymane zostało oszacowanie pochodnej Schwarzma

$$\left\{ f, z \right\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

dla rodziny $C\{a\}$ i zostały zbadane funkcje ekstremalne dla tego oszacowania. W dowodzie posłużono się uogólnionym twierdzeniem połowym Bieberbacha, otrzymanym przez Pran Nath Chiohra.

1. Wprowadzenie

Pran Nath Chiohra w swojej pracy: "An area theorem for bounded univalent functions" [2] podał pewną nową wersję twierdzenia połowego Gronwalda dla funkcji meromorfoloznych z biegunem w dowolnym punkcie p , a mianowicie:

Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorfolozną, jednolistną w kole $|z| < 1$, z jednym biegunem w punkcie $z=p$, $|p| < 1$, i oęsnością główną $\frac{a-1}{z-p}$, taką, że $f(z)$ może być rozszerzona na $|z| < 1$ jako

$$f(z) = \frac{a-1}{z-p} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

wówczas mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq \frac{|a-1|^2}{1-|p|^2}, \quad (1)$$

a w szczególności

$$|a_1| \leq \frac{|a-1|}{1-|p|}. \quad (2)$$

Równość w (2) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(z) = a_{-1} \left(\frac{1}{z-p} \right) - \frac{\bar{p}}{p} \frac{z}{1-|p|^2} + a_0,$$

przy $p \neq 0$ oraz gdy

$$f(z) = a_{-1} \left(\frac{1}{z} + z \right) + a_0 \quad (3)$$

przy $p = 0$.

Pran Nath Chichra z powyższego twierdzenia wyprowadził dla funkcji jednolistnych w kole $|z| < 1$ postaci

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \quad (4)$$

dla których zachodzi $|f(z)| < 1$, następującą nierówność

$$\left| \frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(f(z_1)-f(z_2))^2} - \frac{1}{(z_1-z_2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} - \left| \frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(1-f(z_1)f(z_2))^2} \right| \quad (5)$$

$$|z_1| < 1, \quad |z_2| < 1.$$

Nierówność (5) wynika również z nierówności podanej przez Singha [3].

Po przejściu do granicy przy $z_2 \rightarrow z_1$, z (5) można otrzymać oszacowanie Schwarzjana w tej rodzinie, a mianowicie

$$\left| \left\{ f, z \right\} \right| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2} - \frac{6|f'(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}, \quad (6)$$

gdzie

$$\left\{ f, z \right\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (7)$$

Okazuje się, że twierdzenie Pran Nath Chichra ma zasięg szerszy i można przy jego pomocy wyprowadzić nierówności analogiczne do (5) dla innych klas funkcji jednolistnych.

2. Niech $C \{a\}$ oznacza klasę funkcji jednolitych w kole $|z| < 1$ postaci (4) oraz takich, że

$$f(z_1) f(z_2) \neq a, \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| < 1,$$

gdzie a jest dowolną liczbą zespoloną.

Widać od razu, że $C \{1\}$ oznacza dobrze znaną klasę funkcji Bieberbacha-Eilenberga.

Zajmijmy się najpierw oszacowaniem funkcjonału stojącego po lewej stronie nierówności (5) dla funkcji klasy $C \{1\}$.

Niech $f \in C \{1\}$ na rozwinięciu postaci (4), niech z_1, z_2 będą dwoma dowolnymi punktami koła $K(0,1)$ i niech

$$z = h_1(z) = \frac{z + z_1}{1 + z\bar{z}_1}, \quad (8)$$

$$w = h_2(w) = \frac{w - f(z_2)}{1 - w\bar{f}(z_2)}. \quad (9)$$

Homografia (8) przekształca koło $K(0,1)$ na koło $K(0,1)$, tak że $h_1(0) = z_1$ natomiast homografia (9) nie przyjmuje w kole jednostkowym jednocześnie wartości w i $\frac{1}{w}$, ponieważ

$$h\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{h(w)}.$$

Złożenie:

$$w = F(z) = h_2(f(h_1(z))) = \frac{f\left(\frac{z+z_1}{1+z\bar{z}_1}\right) - f(z_2)}{1 - f\left(\frac{z+z_1}{1+z\bar{z}_1}\right)\bar{f}(z_2)} \quad (10)$$

jest zatem funkcją jednolitą przekształcającą koło $K(0,1)$ na obszar w -płaszczyźnie (w), który nie zawiera jednocześnie punktów w i $\frac{1}{w}$.

Jeżeli teraz złożymy funkcję Koebego

$$K(w) = \frac{w}{(1+w)^2}, \quad (11)$$

która, jak wiadomo, przyjmuje wartości równe jedynie w punktach W i $\frac{1}{W}$, z funkcją (10), to otrzymana w ten sposób funkcja

$$\Phi(Z) = K(F(Z)) = \frac{F(Z)}{(1+F(Z))^2} \quad (12)$$

jest funkcją jednolistną w kole $K(0,1)$ oraz

$$\Phi(p) = 0,$$

gdzie

$$p = \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}.$$

Funkcja:

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{\rho-1}{z-p} + \rho_0 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 + \dots \quad (13)$$

jest funkcją meromorficzną, jednolistną w kole $|z| < 1$, z biegunem w punkcie $z=p$, spełniona jest więc, zgodnie z cytowanym na początku twierdzeniem, nierówność (2) czyli

$$|\rho_1| < \frac{|\rho-1|}{1-|p|^2}. \quad (14)$$

Ponieważ

$$\rho_{-1} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z-p}{\Phi(z)}$$

oraz

$$\rho_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\Phi(z)} - \frac{\rho-1}{z-p} - \rho_0}{z} \right] = \frac{\Phi'(0)}{[\Phi(0)]^2} + \frac{1}{p^2 \Phi'(p)},$$

otrzymany

$$\left[\frac{\Phi'(0)\Phi'(p)}{[\Phi(0)]^2} - \frac{1}{p^2} \right] < \frac{1}{1-|p|^2}, \quad (15)$$

gdzie

$$\Phi(o) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(1-f(z_2))(1+f(z_1))}. \quad (16)$$

Obliczając kolejno

$$F'(z) = \frac{1 - f^2(z_2)}{(1-f(z_2))(1+f(z_1))} \cdot \frac{f'(z+z_1)}{1+z\bar{z}_1} \cdot \frac{1-|z_1|^2}{(1+z\bar{z}_1)^2},$$

$$F'(o) = \frac{1+f^2(\bar{z}_2)}{(1-f(z_1)f(z_2))^2} f'(z_1)(1-|z_1|^2)^2,$$

$$F'(p) = \frac{f'(z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)}{(1-f^2(z_2))(1-|z_1|^2)},$$

$$\Phi'(z) = \frac{1-F(z)}{(1+F(z))^3} F'(z),$$

otrzymujemy

$$\Phi'(o) = \frac{(1-f(z_1))(1+f(z_2))(1-f^2(z_2))f'(z_1)(1-|z_1|^2)}{(1-f(z_2))^2(1+f(z_1))^3} \quad (17)$$

i

$$\Phi'(p) = \frac{f'(z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)^2}{(1-f^2(z_2))(1-|z_1|^2)}. \quad (18)$$

Podstawiając (16), (17) i (18) do (15), otrzymamy nierówność

$$\left| \frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(f(z_1)-f(z_2))^2} - \frac{1}{(z_2-z_1)^2} - \frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(1-f(z_1))f(z_2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}, \quad (19)$$

która jest odpowiednikiem nierówności (5) dla funkcji klasy $C\{1\}$.

Nierówność (19) wynika także z nierówności podanej przez Alenicyna [1].

3. Jeżeli teraz $f \in C\{a\}$, to funkcja

$$g(z) = a^{-\frac{1}{2}} f(z) \quad (20)$$

jest funkcją klasy $C\{1\}$, zachodzi więc dla niej nierówność (19). Uwzględniając (20) otrzymany dla funkcji klasy $C\{a\}$ następującą nierówność

$$\left| \frac{f'(z_1) f'(z_2)}{(f(z_1) - f(z_2))^2} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} - \frac{f'(z_1) f'(z_2)}{(a - f(z_1) f(z_2))^2} \right| \leq \frac{1}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \quad (21)$$

4. Oszacujemy z kolei przez \tilde{C} klasę funkcji $f(z)$ jednolitych w kole $|z| < 1$, spełniających warunek $f(0) = 1$ oraz warunek

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0, \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| < 1.$$

Zauważmy, że funkcja

$$g(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)} \quad (22)$$

jest klasy $C\{1\}$, a więc zachodzi dla niej nierówność (19). Podstawiając (22) do (19), otrzymany po prostych przekształceniach nierówność

$$\left| \frac{f'(z_1) f'(z_2)}{(f(z_1) - f(z_2))^2} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} - \frac{f'(z_1) f'(z_2)}{(f(z_1) + f(z_2))^2} \right| \leq \frac{1}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}, \quad (23)$$

która jest odpowiednikiem nierówności (19) dla funkcji klasy \tilde{C} .

5. Przechodząc następnie do granicy przy $z_2 \rightarrow z_1 = z_0$ w nierównościach (19), (21) i (23), otrzymany analogiczne do (6) oszacowanie szwarczajana $\{f, z_0\}$ kolejno dla klas $C\{1\}$, $C\{a\}$, \tilde{C} :

$$\left| \{f, z_0\} - \frac{6 f^2(z_0)}{(1 - f^2(z_0))^2} \right| \leq \frac{6}{(1 - |z_0|^2)^2}, \quad (24)$$

$$\left| \left(\bar{f}, z_0 \right) - \frac{6 f'^2(z_0)}{(a-f^2(z_0))^2} \right| \leq \frac{6}{(1-|z_0|^2)^2}, \quad (25)$$

$$\left| \left(f, z_0 \right) - \frac{3 f'^2(z_0)}{2(f(z_0))^2} \right| \leq \frac{6}{(1-|z_0|^2)^2}. \quad (26)$$

6. Przejdźmy obecnie do odnalezienia funkcji ekstremalnych dla oszacowań (24), (25) i (26).

Łatwo zauważyć, że równość w (24) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\beta_1| = \frac{\beta - 1}{1 - |\beta|},$$

a to z kolei na mocy twierdzenia Pran Nath Chiehra ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{\phi(z)} = \beta_{-1} \left(\frac{1}{2} + z \right) + \beta_0, \quad (27)$$

gdzie β_0 i β_{-1} są dowolne.

Ze względu na (12) oznacza to, że

$$\frac{(1+F(z))^2}{F(z)} = \beta_{-1} \left(\frac{1}{2} + z \right),$$

czyli

$$\frac{1}{F(z)} + 2 + F(z) = \beta_{-1} \left(\frac{1}{2} + z \right) + \beta_0.$$

Kładąc w szczególności

$$\frac{1}{\beta_{-1}} = b, \quad \beta_0 = 2, \quad 0 < b < 1,$$

otrzymany

$$\frac{F(z)}{1+F^2(z)} = \frac{bz}{1+z^2}, \quad (28)$$

czyli przyjmując

$$L(W) = \frac{W}{1+W^2},$$

mały

$$L(F(Z)) = bL(Z).$$

A więc jedną z funkcji ekstremalnych dla oszacowania (24) jest

$$f_1(z) = h_2^{-1}(F_1(h_1^{-1}(z))), \quad (29)$$

gdzie $F_1(Z)$ jest tą gałęzią funkcji uwikłanej (28), która dla $Z=0$ przyjmuje wartość 0, $h_1^{-1}(z)$ jest funkcją odwrotną do (8) przy $Z_1 = z_0$, a

$$h_2^{-1}(W) = \frac{W + \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + W \frac{\omega}{\omega_0}},$$

gdzie $\omega_0 = F_1(-z_0)$, skąd $f_1(z_0) = \omega_0$.

Zdefiniowana w ten sposób funkcja $f_1(z)$ jest funkcją Bieberbacha-Eilenberga. Istotnie,

$$f_1(0) = 0.$$

Przypuśćmy ponadto, że

$$f_1(z_1) f_1(z_2) = 1 \quad \text{dla} \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| < 1.$$

Kładąc

$$Z_1 = h_1^{-1}(z_1), \quad Z_2 = h_2^{-1}(z_2),$$

$$w_1 = f_1(z_1), \quad w_2 = f_1(z_2),$$

otrzymamy z (29)

$$h_2(w_1) = F_1(Z_1) \quad \text{i} \quad h_2(w_2) = F_1(Z_2).$$

Ale

$$h_2(w_2) = h_2\left(\frac{1}{w_1}\right) = \frac{1}{h_2(w_1)},$$

czyli

$$F_1(Z_2) = \frac{1}{F_1(Z_1)},$$

co daje dalej

$$bL(Z_2) = L(F_1(Z_2)) = L\left(\frac{1}{F_1(Z_1)}\right) = L(F_1(Z_1)) = bL(Z_1),$$

a stąd i z $|Z_1| < 1$ i $|Z_2| < 1$ wnioskujemy, że $Z_1 = Z_2$, czyli $F_1(Z_1) = \pm 1$, co jest niemożliwe, bo $|F_1(Z)| < 1$ dla $|Z| < 1$.

Zbadajmy teraz, jak wygląda obraz koła $|z| < 1$ po odwzorowaniu przy pomocy funkcji (29).

W tym celu wykonamy ostery odwzorowania.

Funkcja:

$$z = h_1^{-1}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}z_0}$$

odwzorowuje koło $|z| < 1$ na koło $|Z| < 1$.

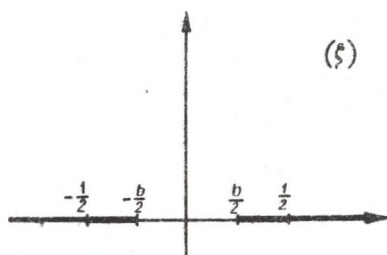
Funkcja:

$$\xi = bL(z) = \frac{bz}{1+z^2}$$

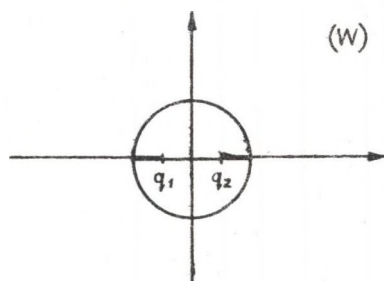
odwzorowuje koło $|z| < 1$ na obszar \sum , będący płaszczyzną rozciętą wzdłuż półprostych:

$$\operatorname{Re} \xi \leq -\frac{b}{2}, \quad \operatorname{Im} \xi = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{Re} \xi > \frac{b}{2}, \quad \operatorname{Im} \xi = 0$$

(rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

Funkcja

$$W = L^{-1}(\xi)$$

odzworowuje obszar \sum na obszar G , który powstaje przez usunięcie z koła $|W| < 1$ dwóch odcinków osi rzeczywistej: $[-1, q_1]$ i $[q_2, 1]$ (rys. 2), przy czym punkty: $-1, q_1, q_2, 1$ są odpowiednio obrazami punktów:

$$-\frac{1}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2}, \text{ a więc } q_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-b^2}}{b}, \text{ a } q_2 = \frac{1 + \sqrt{1-b^2}}{b}$$

Funkcja

$$w = L_2^{-1}(W) = \frac{W + \omega_0}{1 + \omega_0 W}$$

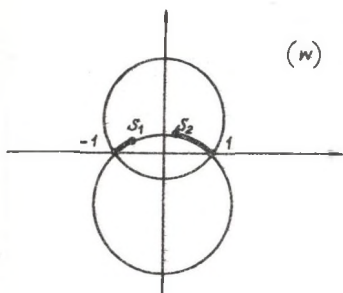
odzworowuje obszar G na obszar D , który powstaje z koła

$$\left| w + \frac{2 \operatorname{Im} \omega_0}{|\omega_0|^2 - 1} z \right| < \left(1 + \frac{2 \operatorname{Im} \omega_0}{|\omega_0|^2 - 1} z \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

przez usunięcie dwóch łuków, które są obrazami odcinków $[-1, q_1]$ i $[q_2, 1]$ i leżą na okręgu

$$\left| w + \frac{1 - |\omega_0|^2}{2 \operatorname{Im} \omega_0} z \right| = \left(1 + \frac{1 - |\omega_0|^2}{2 \operatorname{Im} \omega_0} z \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

przy czym obrazami punktów $-1, q_1, q_2, 1$ są odpowiednio punkty $-1, s_1, s_2, 1$ (rys. 3).



Rys. 3

Punkty s_1 i s_2 dane są przy pomocy związków

$$s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-b^2} + b\omega_0}{b + \omega_0(-1 + \sqrt{1-b^2})}, \quad (32)$$

$$s_2 = \frac{1 - \sqrt{1-b^2} + b\omega_0}{b + \omega_0(1 - \sqrt{1-b^2})}.$$

W szczególnym przypadku, gdy ω_0 jest liczbą rzeczywistą koło (30) przejdzie na koło

$$|w| < 1$$

a odcinki $[-1, q_1]$ i $[q_2, 1]$ na odcinku osi rzeczywistej.

W rezultacie widzimy, że funkcja (29) odwzorowuje koło $|Z| < 1$ na obszar D.

Z zależności (27) można znaleźć inną funkcję ekstremalną. Kładąc mianowicie w (27) $\beta_{-1} = \frac{1}{b}$ i $\beta_0 = \frac{2}{b}$, $0 < b < 1$, otrzymamy

$$\frac{F(Z)}{(1+F(Z))^2} = \frac{bZ}{(1+Z)^2},$$

czyli przyjmując

$$K(W) = \frac{W}{(1+W)^2}$$

mamy

$$K(F(Z)) = bK(Z),$$

a więc inną funkcją ekstremalną dla oszacowania (24) jest

$$f_2(z) = h_2^{-1}(F_2(h_1^{-1}(z))),$$

gdzie $F_2(Z)$ jest tą gałęzią funkcji uwikłanej (33), która dla $Z=0$ przyjmuje wartość 0, $h_1^{-1}(z)$ jest funkcją odwrotną do (8) przy $Z_1=Z_0$, a

$$h_2^{-1}(W) = \frac{W + \omega'_0}{1 + W\omega'_0},$$

gdzie $-\omega'_0 = F_2(-Z_0)$, skąd $f_2(Z_0) = \omega'_0$. Funkcja $f_2(z)$, podobnie jak funkcja $f_1(z)$, jest funkcją Bieberbaoha-Eilenberga.

Poszukajmy teraz obrazu koła $|z| < 1$ przy pomocy funkcji (34).
Funkcja

$$Z = h_1^{-1}(z) = \frac{z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 z}$$

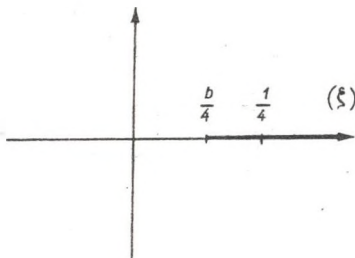
odwzorowuje koło $|z| < 1$ na koło $|Z| < 1$.

Funkcja

$$\xi = bK(Z) = \frac{bZ}{(1+Z)^2}$$

odwzorowuje koło $|Z| < 1$ na obszar \sum_1 będący płaszczyzną rozciętą wzdłuż półprostej $\operatorname{Re} \xi > \frac{b}{4}$, $\operatorname{Im} \xi = 0$ (rys. 4).

Funkcja



Rys. 4

Funkcja

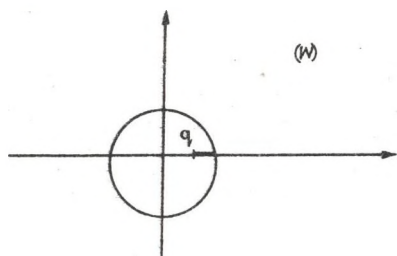
$$W = K^{-1}(\xi)$$

odwzorowuje obszar \sum_1 na obszar G_1 , który powstaje przez usunięcie z koła $|W| < 1$ odcinka osi rzeczywistej $[q, 1]$, gdzie

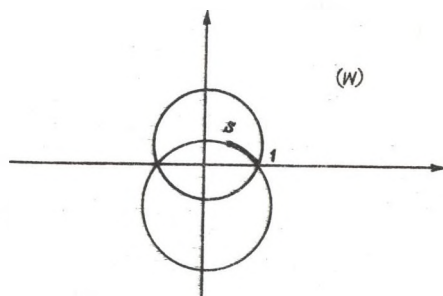
$$q = \frac{-b + 2\sqrt{1-b}}{b}$$

jest obrazem punktu $\frac{b}{4}$, a 1 obrazem $\frac{1}{4}$ (rys. 5).

$$w = h_2^{-1}(W) = \frac{W + \omega'_0}{1 + W\omega'_0}$$



Rys. 5



Rys. 6

odwzorowuje obszar G_1 na obszar D_1 , który powstaje z koła

$$\left| w + \frac{2 \operatorname{Im} \omega'_0}{|\omega'_0|^2 - 1} z \right| < \left(1 + \left(\frac{2 \operatorname{Im} \omega'_0}{|\omega'_0|^2 - 1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

przez usunięcie łuku, który jest obrazem odcinka $(q, 1)$ i leży na okręgu

$$\left| w + \frac{1 - |\omega'_0|^2}{2 \operatorname{Im} \omega'_0} z \right| = \left(1 + \left(\frac{1 - |\omega'_0|^2}{2 \operatorname{Im} \omega'_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

przy czym obrazem punktu q jest punkt $s = \frac{-b + 2 - 2\sqrt{1-b} + \omega'_0 b}{b + \omega'_0 (-b + 2 - 2\sqrt{1-b})}$ (rys. 6)

zatem funkcja (34) odwzorowuje koło $|z| < 1$ na obszar D_1 zilustrowany na rys. 6.

Przejdźmy z kolei do odnalezienia funkcji ekstremalnych dla oszacowania (25).

Analogicznie do poprzedniego przypadku podamy dwie funkcje ekstremalne

$$f_1^a(z) = a^{-\frac{1}{2}} f_1(z), \quad (37)$$

$$f_2^a(z) = a^{-\frac{1}{2}} f_2(z). \quad (38)$$

Funkcje (37) i (38) odwzorowują koło $|z| < 1$ na obszary odpowiednio D^a_1 i D^a_2 , które powstają z obszarów D względnie D_1 po dokonaniu dylatacji o współczynniku $|a|^{-\frac{1}{2}}$ i obrotu o kąt $\arg \left(a^{-\frac{1}{2}} \right)$.

Pozostają do omówienia funkcje ekstremalne dla oszacowania (26). Będą nimi w szczególności funkcje

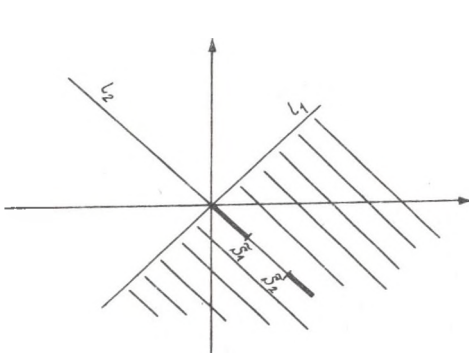
$$\tilde{f}_1(z) = \frac{1-f_1(z)}{1+f_1(z)}, \quad (39)$$

$$\tilde{f}_2(z) = \frac{1-f_2(z)}{1+f_2(z)}. \quad (40)$$

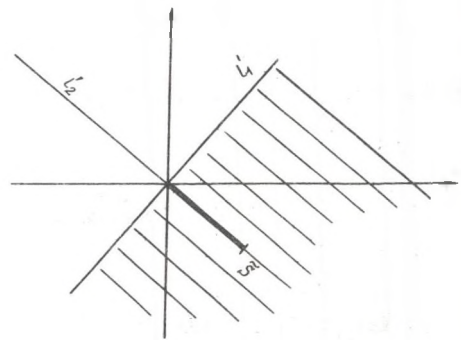
Choćo zbadać obraz koła $|z| < 1$ przy pomocy funkcji (39) zauważymy, że homografia

$$\omega = \frac{1-w}{1+w} \quad (41)$$

odwzorowuje obszar D na obszar \tilde{D} (rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8

Brzeg tego obszaru składa się z prostej l_1 , która jest obrazem okręgu (30) oraz dwóch odcinków $[0, \tilde{s}_1]$ i $[\tilde{s}_2, \infty]$, leżących na prostej l_2 , która jest obrazem okręgu (31). Punkty s_1 i s_2 są odpowiednio obrazami punktów \tilde{s}_1 i \tilde{s}_2 z rys. 3.

Analogicznie jest dla funkcji (40). Homografia (41) odwzorowuje obszar D_1 na obszar \tilde{D}_1 (rys. 8). Brzeg tego obszaru składa się z prostej l'_1 , która jest obrazem okręgu (35) oraz odcinka $[0, \tilde{s}]$, leżącego na prostej l'_2 , która jest obrazem okręgu (36). Punkt \tilde{s} jest obrazem punktu s z rys. 6.

LITERATURA

1. J.E. Alenicyн: Ob odnolistnych funkcijach bez obszozich znaozenij w mnogoswjaznoј oblasti, Dokl. AN. SSSR, 167, 1 (1966).
2. Pran Nath Chichra: An area theorem for bounded univalent functions, Proc. Camb. Phil. Soc., 66 (1969).
3. V. Singh; Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, Math. 310 (1962).

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕВОЙ ТЕОРЕМЕ

Резюме

Рассуждается семейство с $\{a\}$ функции $f(z)$ регулярных и однолистных, в $|z| \leq 1$, $f(0) = 0$ которые, кроме того, исполняют условие $f(z_1) f(z_2) \neq a$ для всякой пары z_1, z_2 , $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, где a произвольное комплексное число. Была получена оценка производной Шварца.

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

для семейства с $\{a\}$ и исследованы экстремальные функции для этой оценки. Доказательство проведено с помощью обобщенной теоремы площадей Бибербаха, полученной Pran Nath Chichra.

ABOUT SOME AREA THEOREM

Summary

The paper is dealing with the family $C\{a\}$ consisting of functions $f(z)$ regular and univalent in $|z| \leq 1$, with $f(0) = 0$, which satisfy the condition $f(z_1) f(z_2) \neq a$ for all pairs of points z_1, z_2 , $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, where a is an arbitrary complex number. The bound of the Schwarzian derivative

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

has been obtained for the class $C\{a\}$ and the extremum functions for this bound have been characterised.