ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

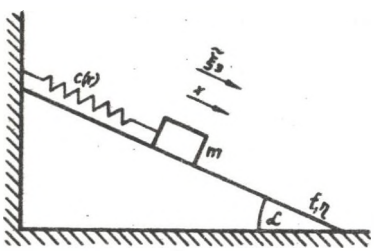
Halina SZOPA
Instytut Matematyki

Janusz SZOPA
Instytut Konstrukcji i Technologii
Urządzeń Automatyki i Elektroniki

STABILNOŚĆ STOCHASTYCZNA PEWNEGO UKŁADU

Streszczenie. W pracy zbadano stabilność stochastyczną pewnego układu o jednym stopniu swobody, przy wymuszeniu stochastycznym i stochastycznej charakterystyce sprężyny. Podano warunek dostateczny, aby położenie, wokół którego wykonuje on drgania deterministyczne, było położeniem równowagi trwałej przy uwzględnieniu wymuszenia stochastycznego.

Układ złożony jest z masy umocowanej na sprężynie i znajduje się na równi pochyłej o kącie nachylenia α (rys. 1).



Rys. 1

W równaniach ruchu uwzględniono tłumienie i tarcie. Założono, że na układ działa proces stochastyczny $\tilde{\xi}_3$ i że stała sprężyny zależy od dwóch procesów $\tilde{\xi}_1$ i $\tilde{\xi}_2$ w sposób następujący:

$$c(x) = c + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \cdot x , \qquad (1)$$

gdzie c – stała.

Równanie ruchu ma więc postać (gdzie współrzędna x jest liczona od położenia, gdy masa znajduje się w spoczynku):

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - (c + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \cdot x) \cdot x - m.g.\cos\alpha .f.\mathrm{sgn}(\dot{x}) + \tilde{\xi}_3 \qquad (2)$$

lub też:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + c\,x + \tilde{\xi}_1 x + \tilde{\xi}_2 x^2 - \tilde{\xi}_4 = 0 , \qquad (3)$$

gdzie

$$\tilde{\xi}_4 = \tilde{\xi}_3 - mg.\cos\alpha .f.\mathrm{sgn}(\dot{x}).$$

i jest przesunięciem procesu o stałą deterministyczną.

Równanie (3) można zamienić na układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \beta y + \gamma x + \bar{\xi}_1 \cdot x + \bar{\xi}_2 \cdot x^2 + \bar{\xi}_3 , \end{cases} \tag{4}$$

gdzie

$$\beta = -\frac{\eta}{m}, \quad \gamma = -\frac{c}{m}, \quad \bar{\xi}_1 = -\frac{\tilde{\xi}_1}{m}, \quad \bar{\xi}_2 = -\frac{\tilde{\xi}_2}{m},$$
$$\bar{\xi}_3 = \frac{\tilde{\xi}_4}{m} \tag{5}$$

lub też sprowadzić go do następującego układu stochastycznych równań różniczkowych:

$$\begin{cases} dx = y\,dt \\ dy = \beta y dt + \gamma x\,dt + x\,d\xi_1 + x^2 d\xi_2 + d\xi_3 , \end{cases} \tag{6}$$

przy czym $\dot{\xi}_1 = \bar{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2 = \bar{\xi}_2$, $\dot{\xi}_3 = \bar{\xi}_3$ i zakładamy, że $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$ są nieskorelowanymi "białymi" szumami lub szerokopasmowymi normalnymi procesami stochastycznymi o średnich równych zero ([2], [3]). $x \equiv 0$ i $y \equiv 0$ nie są rozwiązaniami układu (6), ze względu na występowanie $d\xi_3$. Składnik ten oraz $x^2 d\xi_2$ traktujemy jako zaburzenia. Otrzymuje się wtedy liniowy układ równań Jto ([4], [3]) mający następujący kształt w postaci macierzowej

$$d\bar{z} = A\bar{z}\,dt + \sigma \bar{z} d\xi . \tag{7}$$

W rozważanym przypadku:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$$
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Zaburzenie dane jest wektorem

$$dR = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2\, d\,\xi_2 + d\,\xi_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Rozpatrywać będziemy stabilność rozwiązania trywialnego $\bar{z} \equiv 0$ ($x \equiv 0$, $y \equiv 0$) równ. (7) przy stale działających zaburzeniach opisanych wektorem (9).

Warunkiem dostatecznym stabilności rozwiązania $\bar{z} \equiv 0$ jest twierdzenie ([3], [4]) mówiące o tym, że dla wykładniczej stabilności średniokwadratowej wystarcza, aby dla pewnej istotnie dodatnio określonej formy kwadratowej W rzędu drugiego można było znaleźć istotnie dodatnio określoną formę V również rzędu drugiego spełniającą warunek

$$L(V) = -W\,, \tag{10}$$

gdzie L – operator, przy czym, jeśli równanie wyjściowe ma postać ([3], [4])

$$dz^i(t) = F^i(\bar{z},t)\,dt + \sigma^i_k(\bar{z},t)\,d\xi^k(t)\,, \tag{11}$$

to

$$L(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z^i} F^i(\bar{z},t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^i\,\partial z^j}\sigma^i_k\,\sigma^j_r\,\delta^{kr}\,. \tag{12}$$

Dla rozpatrywanego układu (7) jest:

$$i = 1,2;\quad k = 1;\quad F^1 = y;\quad F^2 = \beta y + \gamma x\,;$$

$$\sigma^1 = 0;\quad \sigma^2 = x\,,$$

tak więc

$$L(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\,y + \frac{\partial V}{\partial y}\,(\beta y + \gamma x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,x^2 \tag{13}$$

Przyjmujemy

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}V_1\,x^2 + V_2\,xy + \frac{1}{2}V_3\,y^2 \\ W = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2\,, \end{cases} \tag{14}$$

gdzie V_1, V_2, V_3, A, B, C – stałe i A, B, C – można dobierać, tak jednak, aby W było formą kwadratową istotnie dodatnio określoną.
Po podstawieniu (14) do (13) jest

$$L(V) = (\gamma V_2 + \frac{1}{2} V_3)x^2 + (V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3)xy + (V_2 + \beta V_3)y^2 . \quad (15)$$

Ponieważ musi być spełnione (10), otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} \gamma V_2 + \frac{1}{2} V_3 = -A \\ V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = -B \\ V_2 + \beta V_3 = -C , \end{cases} \quad (16)$$

skąd

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} B + \beta\gamma B + \frac{1}{2}\beta C - \beta^2 A + \gamma A - \gamma^2 C}{\frac{1}{2} - \beta\gamma} \\ V_2 = \dfrac{\beta A - \frac{1}{2} C}{\frac{1}{2} - \beta\gamma} \\ V_3 = \dfrac{\gamma C - A}{\frac{1}{2} - \beta\gamma} . \end{cases} \quad (17)$$

Warunkiem dostatecznym stabilności stochastycznej analizowanego układu jest dodatnia określoność formy kwadratowej V, czyli ([3], [4])

$$\begin{cases} V_1 > 0 & (18.1) \\ V_1 V_3 - V_2^2 > 0 . & (18.2) \end{cases}$$

Dobierając A = C = 1, B = 0 otrzymujemy

$$2 p \, c > m^2 \quad (19)$$

(gdzie 2 jest liczbą wymiarową).
Nierówność (18.2) jest przy warunku (19) spełniona. Warunek (19) jest więc poszukiwanym warunkiem dostatecznym stabilności stochastycznej rozważanego układu.

LITERATURA

1. B. Skalmierski: Mechanika teoretyczna (skrypt). Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1972.

2. B. Skalmierski, A. Tylikowski: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

3. B. Skalmierski, A. Tylikowski: Stabilność w mechanice (skrypt) PTMTiS Gliwice, 1972.

4. Р.З. Хасьминский: Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Изд. "Наука", Москва 1969.

5. Р.Л. Стратонович: Избранные вопросы теории флуйтуаций в радиотехнике, Советское Радио, Москва 1961.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТРОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе рассматрено стохастическую устройчивость системы одной ступенью свободы при стохастическом характетере возмущения и стохастической характеристике пружины.

THE STOCHASTIC STABILITY OF A SYSTEM

S u m m a r y

This paper investigates the stochastic stability of a system with one degree of freedom and with a stochastic coercion and stochastic characteristics of the spring.