ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Janina GŁOMB
Zakład Geometrii Wykreślnej

BIEGUNOWA ODPOWIEDNIOŚĆ WZGLĘDEM DWÓCH STOŻKOWYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrywane jest przekształcenie w płaszczyźnie rzutowej, w którym dowolnemu zbiorowi punktów przyporządkowany jest zbiór biegunów względem dwóch niezdegenerowanych stożkowych. Wykazano w ogólnym przypadku, że dowolnej krzywej algebraicznej rzędu n-tego odpowiada w tym przekształceniu algebraiczna krzywa rzędu 2n.

1. Definicje i własności przekształcenia

Zdefiniujmy następujące przekształcenie f:

Definicja 1

Na płaszczyźnie rzutowej przyjmiemy dwie niezdegenerowane stożkowe k_1 i k_2 oraz dowolnie względem nich położony punkt A. Wyznaczamy proste biegunowe a_1 i a_2 punktu A względem stożkowych k_1 i k_2.
Punktowi A odpowiada punkt $A' = a_1 \times a_2$ jako część wspólna odpowiednich prostych biegunowych a_1 i a_2 względem stożkowych k_1 i k_2.

Punkt A' nazwiemy biegunem punktu A względem rozważanych stożkowych

$$A' = f(A)$$

Stożkowe k_1 i k_2 nazwiemy stożkowymi podstawowymi tego przekształcenia.

Bezpośrednio z definicji wynika, że biegunem punktu względem dwóch stożkowych k_1 i k_2 może być zarówno punkt jak i prosta.

Wykażemy, że na rzutowej płaszczyźnie istnieją tylko trzy takie punkty, dla których biegunem względem stożkowych k_1 i k_2 będzie prosta (tzn., dla których biegunowe względem stożkowych k_1 i k_2 jednoczą się). Punkty te będą podwójnymi punktami następującej kolineacyjnej odpowiedniości.

Niech na prostej a dane będą dwie nie rozdzielające się pary punktów PQ i RS.
Określają one hiperboliczną inwolucję z podwójnymi punktami M i N, harmonicznie rozdzielające zarówno punkty PQ, jak i RS. Weźmy teraz dowolny punkt A nie leżący na prostej a i połączmy go z punktami P, Q, R, S. Skonstruujmy stożkową k_1 styczną do prostych AP i AQ w punktach P i Q i stożkową k_2 styczną do prostych AR i AS w punktach R i S.

Punkt A będzie miał względem stożkowych k_1 i k_2 wspólną biegunową a. Wspólną biegunową punktu N będzie prosta przechodząca z jednej strony przez punkt A (bo biegunowa a przechodzi przez N), a z drugiej strony przez M (bo N i M rozdziela harmonicznie pary punktów PQ i RS), tj. prosta MA. Analogicznie wspólną biegunową punktu M względem stożkowych k_1 i k_2 będzie prosta NA.

Punkty AMN będą jedynymi punktami podwójnymi tak określonej przez stożkowe k_1 i k_2 odpowiedniości.

Istnieją więc na płaszczyźnie rzutowej tylko trzy takie punkty, których proste biegunowe względem stożkowych k_1 i k_2 jednoczą się.

Biegunem punktu A' względem stożkowych k_1 i k_2 jest punkt A. Oznacza to że przekształcenie f posiada przekształcenie odwrotne.

$$f^{-1}(A') = A .$$

Definicja 2

Na rzutowej płaszczyźnie przyjmujemy dwie stożkowe k_1 k_2 oraz ustalony zbiór punktów Z.
Obrazem Z zbioru Z względem stożkowych k_1 i k_2 nazwiemy zbiór biegunów poszczególnych punktów zbioru Z.

2. Obraz prostej względem stożkowych k_1 i k_2

Niech zbiór Z przedstawia ustaloną prostą.

Twierdzenie 1

Obrazem ustalonej prostej względem dwóch stożkowych k_1 i k_2 jest stożkowa.

Dowód

Niech dana będzie prosta "a" jako podstawa szeregu punktów PQR ..... Wyznaczymy proste p_1, q_1, r_1 ..... biegunowe punktów prostej a względem stożkowej k_1. Proste te przecinają się w punkcie S_1 tworząc pęk prostych rzutowych do szeregu punktów prostej a

$$a(P,Q,R...) \barwedge S_1(p_1, q_1, r_1...) \tag{1}$$

Następnie wyznaczamy proste p_2, q_2, r_2... biegunowe punktów prostej a względem stożkowej k_2. Proste te przecinają się w punkcie S_2 tworząc pęk prostych rzutowy do szeregu punktów prostej a

$$a(P,Q,R...) \barwedge S_2(p_2,q_2,r_2...) \tag{2}$$

Z zależności (1) i (2) wynika, że tak otrzymane pęki prostych są rzutowe

$$(S_1) \barwedge (S_2) \tag{3}$$

a więc ich utworem jest krzywa stopnia drugiego. Punkty przecięcia odpowiednich promieni tych dwóch rzutowych pęków zgodnie z definicją 1 są obrazami punktów prostej a.

3. Obraz stożkowej względem stożkowych k_1 i k_2

Twierdzenie 2

Obrazem ustalonej stożkowej C_2^2 względem dwóch stożkowych k_1 i k_2 jest krzywa rzędu czwartego.

Dowód

Niech dana będzie stożkowa określona przez dwa rzutowe pęki prostych o wierzchołkach P_1 i P_2

$$(P_1) \barwedge (P_2) \tag{1}$$

Zbiorem biegunów pęku (P_1) względem stożkowej k_1 jest szereg (p_1): pęku (P_2) - szereg (q_1)

$$(P_1) \barwedge (p_1) \tag{2}$$

$$(P_2) \barwedge (q_1) \tag{3}$$

z zależności (1), (2) i (3) wynika, że

$$(p_1) \barwedge (P_1) \barwedge (P_2) \barwedge (q_1) \tag{4}$$

$$(p_1) \barwedge (q_1) \tag{5}$$

Zależność (5) przedstawia pęk promieni drugiej klasy. Zbiorem biegunów pęku (P_1) i pęku (P_2) względem stożkowych k_1 i k_2 będą odpowiednie szeregi (p_2) i (q_2)

$$(P_1) \barwedge (p_2) \tag{6}$$

$$(P_2) \barwedge (q_2) \tag{7}$$

z zależności (1), (6) i (7) wynika, że

$$(p_2) \barwedge (P_1) \barwedge (P_2) \barwedge (q_2) \tag{8}$$

$$(p_2) \barwedge (q_2) \tag{9}$$

zależność (9) przedstawia pęk promieni drugiej klasy.
Z zależności (1) - (9) wynika, że tak otrzymane pęki prostych drugiej klasy są rzutowe

$$(p_1) \barwedge (q_1) \barwedge (p_2) \barwedge (q_2) \tag{10}$$

a więc ich utworem jest krzywa rzędu czwartego. Punkty przecięcia odpowiednich promieni tych dwóch pęków zgodnie z definicją 1 są obrazami punktów stożkowej C_2^2.

4. Obraz krzywej algebraicznej rzędu 3 względem stożkowej k_1 i k_2

Twierdzenie 3

Obrazem ustalonej algebraicznej krzywej C^3 rzędu trzeciego względem stożkowych k_1 i k_2 jest algebraiczna krzywa rzędu szóstego.

Dowód

Niech dana będzie algebraiczna krzywa 3 rzędu jako utwór dwóch rzutowych pęku promieni pierwszej i drugiej klasy

$$(P) \barwedge \left[(a) \barwedge (b)\right] \tag{1}$$

Obrazem pęku (P) względem stożkowej k_1 jest szereg punktów o podstawie (p_1) rzutowy do pęku (P)

$$(p_1) \barwedge (P) \tag{2}$$

Obrazem pęku (a) $\barwedge$ (b) drugiej klasy względem stożkowej k_1 jest szereg punktów drugiego rzędu (podstawą tegò szeregu jest stożkowa)

$$(a) \barwedge (b) \barwedge (A_1) \barwedge (B_1) \tag{3}$$

z zależności (1), (2) i (3) wynika, że

$$(p_1) \barwedge (P) \barwedge \left[(a) \barwedge (b)\right] \barwedge \left[(A_1) \barwedge (B_1)\right] \tag{4}$$

skąd

$$(p_1) \barwedge \left[(A_1) \barwedge (B_1)\right] \quad (5)$$

zależność (5) przedstawia pęk promieni klasy trzeciej.
Zbiorem biegunów pęku (P) względem stożkowej k_2 jest szereg (p_2) rzutowy do pęku (P)

$$(P) \barwedge (p_2) \quad (6)$$

Obrazem pęku $(a) \barwedge (b)$ względem stożkowej k_2 jest szereg punktów drugiego rzędu jako utwór rzutowych pęków promieni i wierzchołkach (A_2) i (B_2)

$$\left[(a) \barwedge (b)\right] \barwedge \left[(A_2) \barwedge (B_2)\right] \quad (7)$$

z zależności (1), (6) i (7) wynika, że

$$(p_2) \barwedge (P) \barwedge \left[(a) \barwedge (b)\right] \barwedge \left[(A_2) \barwedge (B_2)\right] \quad (8)$$

skąd

$$(p_2) \barwedge \left[(A_2) \barwedge (B_2)\right] \quad (9)$$

zależność (9) przedstawia pęk promieni trzeciej klasy.
Z zależności (1) - (9) wynika, że tak otrzymane pęki prostych trzeciej klasy są rzutowe

$$\left\{(p_1) \barwedge \left[(A_1) \barwedge (B_1)\right]\right\} \barwedge \left\{(p_2) \barwedge \left[(A_2)\, (B_2)\right]\right\} \quad (10)$$

a więc ich utworem jest krzywa rzędu szóstego.
Punkty przecięcia odpowiednich promieni tych dwóch rzutowych pęków zgodnie z definicją 1 są obrazami punktów krzywej rzędu trzeciego.

5. Obraz krzywej algebraicznej rzędu n względem stożkowej k_1 i k_2

Niech zbiór Z przedstawia ustaloną krzywą algebraiczną rzędu n,

Twierdzenie 4

Obrazem krzywej algebraicznej rzędu n względem dwóch stożkowych k_1 i k_2 jest krzywa algebraiczna rzędu 2 n

Dowód

Oznaczamy "w" jako własność przekształcenia, która dowolnej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę 2n. Jeśli "w" jest własnością w zbiorze liczb naturalnych taką, że

A) liczba 1 ma własność "w" – w(1)

B) jeśli przy założeniu, że n ma własność "w" wynika, że n + 1 ma własność "w" to każda liczba naturalna ma własność "w".

Na podstawie twierdzenia 1 prostej odpowiada w danym przekształceniu – stożkowa, a więc warunek (A) jest spełniony.

Zakładając, że krzywej rzędu n odpowiada w przekształceniu krzywa rzędu 2n, sprawdzamy czy (n+1) spełnia własność "w". Na rzutowej płaszczyźnie obieramy krzywą rzędu n i prostą.

Na podstawie założenia oraz twierdzenia 1 obrazem krzywej rzędu n będzie krzywa rzędu 2n i obrazem prostej – stożkową.

Tak więc obrazem układu n + 1 będzie układ 2n + 2 = 2(n + 1). Wnioskujemy stąd, że liczba n + 1 ma własność "w" co dowodzi (B). Ponieważ spełnione są warunki (A) i (B) wnioskujemy, że każda liczba naturalna ma własność "w", a to oznacza, że dowolnej krzywej algebraicznej rzędu n odpowiada w przekształceniu f krzywa rzędu 2n.

LITERATURA

1. A. Planitzer: Elementy geometrii rzutowej, Warszawa 1927.
2. E. Otto: Geometria wykreślna, PWN, Warszawa 1961.
3. N.A. Głagolew: Projektiwnaja geometrija.Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Wyzszaja Szkoła, Moskwa 1963.
4. R. Matla: Biegunowa sprzężność względem dwóch powierzchni drugiego stopnia – Z.N. "Geometria wykreślna" nr VII, Warszawa-Poznań 1970.

ПОЛЯРНОЕ СООТВЕТСТВИЕ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРЫ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривалось такое отображение на проективной плоскости, в котором произвольному множеству точек соответствует множество их полюсов относительно двух кривых второго порядка.

Доказано, что в общем случае произвольной кривой "n" - ряда соответствует алгебраическая кривая ряда "2n".

POLAR CERRESPONDENCE WITH RESPECT TO TWO CONICS

S u m m a r y

The paper deals with a transformation in the projective plane in which to an arbitrary set of points there is attributed a set of polar points with respect to two conics. It has been shown that to any algebraic curve of the order "n" there corresponds an algebraic curve of the order "2n".