ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Stanisława BOGUCKA
Adam CZECH
Barbara JANIEC

JEDNOZNACZNOŚĆ I STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ DRUGIEGO ZADANIA BRZEGOWEGO DLA RÓWNAŃ PARABOLICZNYCH RZĘDU DRUGIEGO O STOCHASTYCZNYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Streszczenie. Celem pracy jest podanie pewnej własności rozwiązania II zadania brzegowego dla równań parabolicznych i na jej podstawie udowodnienie jednoznaczności i stabilności rozwiązań.

Rozpatrzmy równanie

$$L(u) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} b_i(x,t,\omega)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \tag{1}$$
$$+ c(x,t,\omega)\, u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,\omega)$$

z warunkami

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} + a(x,t,\omega)u\Big|_S = \Psi(x,t,\omega), \tag{3}$$

gdzie

aij, b_i, c, f są czasowoprzestrzennymi procesami losowymi o ciągłych realizacjach, (x,t) jest elementem obszaru cylindrycznego $\bar{D}$ zawartego w(n+1) wymiarowej przestrzeni euklidesowej, D_0 podstawa zbioru D tzn. D_0 jest obszarem leżącym w płaszczyźnie t = 0 Γ jest brzegiem obszaru, D, a S brzegiem obszaru D z wyjątkiem punktów Do, ω jest elementem przestrzeni probabilistycznej $\{\Omega, \sigma, P\}$

γ - pewien kierunek nie równoległy do osi t i tworzący kąt ostry z normalną wewnętrzną do S.

Warunek (3) można napisać w innej formie

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\omega)\cos(n,x_j)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t,\omega)u\right)\Big|_S = \Psi(x,t,\omega)\;. \qquad (3)$$

Rozwiązaniem zadania (1)-(3) lub (1)-(3) nazywamy proces stochastyczny o ciągłych realizacjach w $\bar{D}$ i spełniający w $\bar{D}/\Gamma$ równanie (1) z warunkiem (2)-(3) na Γ

Twierdzenie 1

Niech:

1) proces $u(x,t,\omega)$ ma realizacje $\in C^1(\bar{D})$ a w obszarze $\bar{D}/\Gamma$ spełnia równanie (1)
2) współczynniki równania (1) są procesami ograniczonymi z prawdopodobieństwem 1
3) $c(x,t,w) \leqslant 0$ z prawdopodobieństwem 1
4) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ dla każdego ω i wszystkich rzeczywistych α, μ - stała
5) Dla każdego punktu P powierzchni S istnieje kula Op zawierająca punkt P, a wszystkie punkty tej kuli leżące w obszarze $0 \leqslant t \leqslant T$ oprócz punktu P należą do D/Γ, przy czym promień tej kuli poprowadzony do punktu P nie jest równoległy do osi t
6) proces $u(x,t,w)$ przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 największą wartość dodatnią w $P_1(x^1,t^1)$ należącym do S

Wtedy

Albo proces $u(x,t,\omega)$ jest z prawdopodobieństwem 1 stały w otoczeniu punktu P_1 przy $t < t^1$ albo $\frac{\partial u(P_1)}{\partial \gamma} < 0$, gdzie γ dowolny kierunek tworzący kąt ostry z kierunkiem kuli O_p od punktu P_1 do środka kuli.

Dowód

Niech $t^1 < T$. Jeśli $u(x,t,\omega)$ nie jest stała w otoczeniu punktu P_1 przy $t \leqslant t^1$, to z silnej zasady max dla równań parabolicznych [patrz 1] przypadek deterministyczny lub [2] przypadek stochastyczny wynika, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $(4) < u(P_1)$ dla wszystkich punktów wewnętrznych kuli O_{P_1} zawartej w dostatecznie małym otoczeniu punktu P_1.

Bez zmniejszenia ogólności dowodu załóżmy, że początek układu znajduje się w środku kuli O_p, a promień R tej kuli jest tak mały, że nierówność (4) jest spełniona wszędzie w O_{P_1} i $O_{P_1} \subset \bar{D}$.

Rozpatrzmy funkcję w obszarze D daną wzorem

$$v(x,t) = e^{-\alpha(r^2+t^2)} - e^{-\alpha R^2} ,$$

gdzie

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Łatwo widać, że

(5) $L(v) > 0$ z prawdopodobieństwem 1 przy $r > \delta$ i dostatecznie dużym $\alpha > 0$

Rozpatrzmy obszar K ograniczony tą częścią powierzchni kuli O_{P_1}, która zawiera punkt P_1 i płaszczyzną przechodzącą prostopadle do OP_1 na tyle blisko punktu P_1, aby w K spełniona była nierówność (5).

Proces losowy

$$w(x,t,\omega) = u(x^1,t^1\omega) - u(x,t,\omega) - b\ (x,t) ,$$

gdzie b – stała dodatnia, jest nieujemny na powierzchni O_{P_1} a także na całym brzegu obszaru K.

Ponieważ

$$L(w) = c\, u(P_1) - b\, L(v) < 0 ,$$

to na podstawie twierdzenia 1 w [3], $w\,(P) \geqslant 0$ z prawdopodob. 1 w obszarze K.

Także łatwo widać, że $w\,(P_1) = 0$. Zatem z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\frac{\partial w(p_1)}{\partial \gamma} \geqslant 0 ,$$

czyli

$$\frac{\partial\ (P_1)}{\partial \gamma} \leqslant -b\frac{\partial\ (P_1)}{\partial \gamma} = 2b\alpha\ e^{-\alpha(r^2+t^2)}\ r^2+t^2\ \cos(\overline{O}P_1,\gamma) < 0$$

c.n.d.

z prawdopodobieństwem 1.

Na podstawie tego twierdzenia łatwo wynika jednoznaczność zadania (1)–(3)

Twierdzenie 2

Jeżeli współczynniki równania (1) i powierzchnia S spełniają założenie tw 1 i $a(x,t,\omega) \leqslant 0$, to $P\{\omega: u - v = 0\} = 1$, gdzie u, v rozwiązanie zagadnienia (1)-(3).

Dowód

Na podstawie założeń dowolny punkt obszaru D można połączyć ciągłą krzywą $x = x(t)$ leżącą w D z dowolnym punktem $(x,o) \in Do$

Różnicę dwóch rozwiązań $u(x,t,\omega)$ i $v(x,t,\omega)$ oznaczmy przez $z(x,t,\omega)$. Spełniona on w $\bar{D}/\Gamma$ równanie $L(z) = 0$ z warunkami

$$z\Big|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \gamma} + a(x,t,\omega)z\Big|_S = 0 .$$

Proces $z(x,t,\omega)$ nie może przyjmować największej dodatniej wartości i najmniejszej ujemnej na $\bar{D}/\Gamma$ (na podstawie zasady max). Gdyby osiągał największą dodatnią wartość, w którymś z punktów $Po \in S$, to na podstawie twierdzenia 1 $z(x,t,\omega) = m$ dla prawie każdego ω w otoczeniu punktu Po, czyli $z\big|_{t=0} = m$, otrzymana sprzeczność dowodzi tego, że $z(x,t,\omega) = 0$ dla prawie wszystkich ω.

Twierdzenie 3

Rozwiązanie trywialne zadania (1)-(3) jest stabilne w sensie następującej definicji

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \Big[\|f(x,t,\omega)\|_0 < \delta \ ; \ \|\varphi(x,\omega)\|_1 < \delta \ ; \ \|\Psi(x,t,\omega)\|_2 < \delta \Big] \Longrightarrow \|u(x,t,\omega)\|_3 < \varepsilon$$

$$\|\ \|_{0,2,3} = \sup_{x,t} E|\ | \ ; \|\ \|_1 = \sup_{x} E|\ | \ .$$

Dowód

Niech proces $u(x,t,\omega)$ spełnia równie (1) w $\bar{D}/\Gamma$ z warunkami (2),(3) na Γ

Niech

$c(x,t,\omega) \leqslant -C_0 < -1$ dla każdego ω

$a(x,t,\omega) \leqslant 0$ z prawdopodobieństwem 1.

Zbudujmy proces $v_0(x,t,\omega)$, którego realizacje są ciągłe wraz z drugą pochodną i takie, że

$$v_0\Big|_S = 0 \quad \frac{\partial v_0}{\partial \gamma}\Big|_S > 1 .$$

Niech $\|L(v_0)\| < M_1$ i $\|\dot{v}_0\| < M_1$.

Przyjmijmy $\delta = \frac{\varepsilon}{2M_1+1}$; $\|f(x,t,\omega)\|<\delta$; $\|\varphi(y,\omega)\|<\delta$; $\|\Psi(x,t,\omega)\|<\delta$

Rozpatrzmy procesy

$$w \pm \frac{\varepsilon}{2M_1+1} v_0 \pm U .$$

Proces w_+ nie może osiągać dodatniego maximum na powierzchni S, ponieważ

$$\frac{\partial w_+}{\partial \gamma} + aw_+ = \frac{\varepsilon}{2M_1+1}\frac{\partial v_0}{\partial \gamma} + \frac{\varepsilon}{2M_1+1} a\dot{v}_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} + au\right) > \frac{\varepsilon}{2M_1+1} + \Psi > 0$$

dla prawie wszystkich ω na powierzchni S.
Jeśli w_+ osiąga maximum dodatnie w $P_0 \in \bar{D}/\Gamma$, to

$$w_+(Po) \leqslant \frac{\max|L(w_+)}{C_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1+1} \cdot \frac{(M_1+1)}{C_0} .$$

Dla t = 0 mamy

$w_+ \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1+1}(M_1+1)$ Zatem $w_+ < \frac{\varepsilon(M_1+1)}{2M_1+1}$ w obszarze D.

Analogicznie otrzymujemy, że

$w_- < \frac{\varepsilon(M_1+1)}{2M_1+1}$ w D czyli $\|u(x,t,\omega)\| < \varepsilon$.

LITERATURA

1. О.А. Ладыженская, В.А. Солонников: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.
2. M. Czech, D. Jama, E. Smoleńska: Zastosowanie zasady maksimum do badania stochastycznych zadań brzegowych (przygotowane do druku).
3. B. Janiec, D. Jama: Pewne własności rozwiązań równań parabolicznych rzędu drugiego o współczynnikach stochastycznych. (przygotowane do druku).

ОДНОЗНАЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В работе указаны некоторые свойства решения второй краевой задачи для параболических уравнений со случайными параметрами.

THE EXPLICITNESS AND STABILITY OF THE SECOND BOUNDARY PROBLEM
FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH RANDOM PARAMETERS

S u m m a r y

In the paper we investigate some properties of the solotion of the second boundary problem for parabolic equations with the random parameters.