ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Franciszek PRZYBYLAK

ZASTOSOWANIE JEDNOPUNKTOWYCH METOD ITERACYJNYCH DO KONSTRUKCJI PRZYBLIŻEŃ WYMIERNYCH FUNKCJI MONOTONICZNYCH

Celem niniejszej pracy jest zwrócenie uwagi na pewien prosty sposób znajdowania przybliżeń wymiernych funkcji ściśle monotonicznych, polegający na tym, że odwracanie funkcji traktujemy jako rozwiązywanie równania przy pomocy danej jednopunktowej metody iteracyjnej. Powyższy sposób nabiera znaczenia w związku z pracą [2], w której podana jest algebraiczna charakteryzacja jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych.

Stosując jednopunktowe metody iteracyjne, dla których zostały podane wzory w [2], można w jednolity sposób uzyskiwać wieloparametrowe rodziny przybliżeń wymiernych dla danej funkcji monotonicznej. Podstawiając za parametry pewne wartości uzyskujemy w szczególności wiele znanych przybliżeń wymiernych dla konkretnych funkcji (por. [1]) jak np. redukty rozwinięć funkcji na ułamki łańcuchowe, przybliżenia Pade'go.

W pracy dowodzi się, że przybliżenia wymierne funkcji $\sqrt{1+x}$ otrzymane z kolejnych reduktów rozwinięcia tej funkcji w ułamek łańcuchowy.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} {}_{+} \frac{x}{2} {}_{+} \dots \tag{1}$$

uzyskujemy stosując zaproponowaną uprzednio metodę.

Pokazano również, że początkowe przybliżenia Pade'go $\frac{N_p(x)}{D_q(x)}$ dla funkcji e^x, można również uzyskać podaną wyżej metodą.

I. Do konstrukcji przybliżeń będziemy stosować pewną klasę jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych, które podamy za [2] (por. [2], tw. 6.3). Niech funkcja $h(t)$ jest klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale I (n – ustalona liczba naturalna) oraz równanie

$$h(t) = 0 \tag{2}$$

posiada w przedziale I dokładnie jeden pierwiastek ξ taki, że $h'(\xi) \neq 0$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\varphi_n(t,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ h(t)) = t - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_{n-i-1}(t)\left[h(t)\right]^{i+1}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_{n-i}(t)\left[h(t)\right]}, \tag{3}$$

gdzie $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ - liczby rzeczywiste; $u_0(t) = 1$, $u_1(t) = h(t)$,

$$u_k(t) = \begin{vmatrix} h'(t) & h(t) & 0 & \ldots, 0 \\ \frac{1}{2!} h''(t) & h'(t) & h(t) & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(t), & \frac{1}{(k-2)!} h^{(k-2)}(t), & \frac{1}{(k-3)!} h^{(k-3)}(t), & \ldots, h(t) \\ \frac{1}{k!} h^{(k)}(t) & \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(t), & \frac{1}{(k-2)!} h^{(k-2)}(t), & \ldots, h'(t) \end{vmatrix} \tag{4}$$

dla $k = 2,3,\ldots,n$.

Jeżeli przy pewnych ustalonych liczbach $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ funkcja $\bar{\Phi}_n(t) = \varphi_n(t, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n;\ h(t))$ jest określona w przedziale I, to ciąg przybliżeń

$$t_0,\ t_1 = \bar{\Phi}_n(t_0),\ \ldots,\ t_{k+1} = \bar{\Phi}_n(t_k),\ \ldots \tag{5}$$

jest zbieżny do pierwiastka ξ równania (2), jeżeli przybliżenie początkowe $t_0 \in I$ jest dostatecznie bliskie ξ, przy czym rząd zbieżności ciągu (5) jest równy co najmniej n+1, tzn.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|t_{k+1} - \xi|}{|t_k - \xi|^{n+1}} < +\infty .$$

II. Załóżmy, że funkcja g(t) jest ściśle monotoniczną funkcją klasy $C^{(n+1)}$ w pewnym otoczeniu punktu t_0. Przez f(x) oznaczmy funkcję odwrotną do funkcji g(t).

Przy ustalonym x równanie

$$g(t)-x = 0 \tag{6}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $t = f(x)$, jeżeli x należy do przeciw-dziedziny funkcji $g(t)$.

Stosując do równania (6) metodę iteracyjną określoną wzorem (3) (przy przybliżeniu początkowym t_0) otrzymujemy, pierwsze przybliżenie pierwiastka $f(x)$ równania (6) które wyraża się wzorem

$$\varphi_n(t_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; g(t_0) - x).$$

Stąd już wynika, że dla dowolnego układu liczb $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = g(t)$ mamy

$$f(x) \approx \varphi_n(t_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; g(t) - x) . \tag{7}$$

Z (7) na podstawie (3) i (4) otrzymujemy

$$f(x) \approx t_0 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_{n-1-i}(x)(\beta_0 - x)^{i+1}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_{n-i}(x)\,(\beta_0 - x)^i} \tag{8}$$

w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = g(t_0)$, gdzie

$$\beta_0 = g(t_0), \quad \beta_i = \frac{1}{i!} g^{(i)}(t_0) \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n; \tag{9}$$

$v_0(x) = 1, \quad v_1(x) = \beta_0 - x,$

$$V_k(x) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_0 - x & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 - x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \ldots & \beta_0 - x \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

dla $k = 2, \ldots, n$.

III. Zastosujemy obecnie wzór (8) do znalezienia n parametrowej rodziny przybliżeń wymiernych funkcji $\sqrt{1+x}$ w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. W tym celu przyjmujemy

$$g(t) = t^2 - 1, \quad t_0 = 1.$$

Z (9) wynika, że

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad p_k = 0 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 3.$$

Na podstawie (8) mamy więc

$$\sqrt{1+x} \approx R_n(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i w_{n-1-i}(x)(-x)^{i+1}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i w_{n-i}(x)(-x)^{i}} \tag{11}$$

dla dowolnych liczb $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = 0$, gdzie (na podstawie (10)) $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = -x$,

$$w_k(x) = \begin{vmatrix} 2, & -x, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2, & -x, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -x \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2 \end{vmatrix} \tag{12}$$

dla $k = 2, 3, \ldots,$

Przez $\frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$ oznaczmy k-ty redukt rozwinięcia funkcji $\sqrt{1+x}$ na ułamek łańcuchowy (1). Redukty te są przybliżeniami wymiernymi funkcji $\sqrt{1+x}$.

Podamy obecnie twierdzenie z którego wynika, że dla ustalonej liczby naturalnej n redukty

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}, \quad \frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)}, \ \ldots, \ \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$$

zawierają się w n parametrowej rodzinie przybliżeń wymiernych

$$R_n(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{funkcji} \quad \sqrt{1+x}.$$

Twierdzenie. Jeżeli

$$\gamma_i^{(p)} = (-1)^i \binom{p}{i} 2^{p-i} \tag{13}$$

dla i=0, ..., p, to

$$R_n(x, \gamma_0^{(p)}, \gamma_1^{(p)}, \ldots, \gamma_p^{(p)}, 0, \ldots, 0) = \frac{P_{n+p}(x)}{Q_{n+p}(x)} \tag{14}$$

dla $p = 0, \ldots, n$.

Dowód twierdzenia poprzedzimy dwoma prostymi lematami.

Lemat 1. Dla wielomianów $w_k = w_k(x)$ określonych wzorem (12) zachodzą tożsamości:

$$w_k = 2\, w_{k-1} + x\, w_{k-2}, \quad k = 2,3, \ldots; \tag{15}$$

dla liczb całkowitych p i m takich, że $0 \leq 2p \leq m$

$$w_m = \sum_{k=p}^{2p} 2^{2k-p} \binom{p}{k-p} w_{m-k} x^{k-p}; \tag{16}$$

dla liczb całkowitych n i p takich, że $0 \leq p \leq n$

$$w_{n+p} = \sum_{i=0}^{p} \gamma_i^{(p)} w_{n-i} (-x)^i, \tag{17}$$

gdzie $\gamma_i^{(p)}$ określa (13).

Dowód lematu 1. Rozwijając wyznacznik (12) według ostatniej kolumny otrzymujemy (15).

Tożsamość (16) wykażemy stosując indukcję względem zmiennej p.
Dla $p = 0$ otrzymujemy łatwo $w_m = w_m$.

Załóżmy, że zachodzi tożsamość (16) oraz $2(p+1) \leqslant m$. Stosując do tożsamości (16) tożsamość (15) otrzymujemy

$$w_m = \sum_{k=p}^{2p} 2^{2p-k+1} \binom{p}{k-p} w_{m-k-1} x^{k-p} + \sum_{k=p}^{2p} 2^{2p-k} \binom{p}{k-p} w_{m-k-2} x^{k-p+1} =$$

$$= \sum_{k=p+1}^{2p+1} 2^{2(p+1)-k} \binom{p}{k-p-1} w_{m-k} x^{k-(p+1)} + \sum_{l=p+2}^{2p+2} 2^{2(p+1)-k} \binom{p}{k-p-2} w_{m-k} x^{k-(p+1)},$$

skąd już łatwo wynika teza przejścia indukcyjnego.

Przyjmując we wzorze (16) $m = n+p$ otrzymujemy

$$w_{n+p} = \sum_{k=p}^{2p} 2^{2p-k} \binom{p}{k-p} w_{n+p-k} x^{k-p} = \sum_{i=0}^{p} 2^{p-i} \binom{p}{i} w_{n-i} x^{i},$$

skąd na podstawie (13) wynika (17).

Lemat 2. Dla kolejnych reduktów $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ rozwinięcia funkcji $\sqrt{1+x}$ na ułamek łańcuchowy (1) zachodzą tożsamości

$$P_n = w_n + x\, w_{n-1}, \quad Q_n = w_n \tag{18}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Dowód lematu 2 prowadzimy metodą indukcji ze względu na zmienną n.

Dla $n = 1, 2$ odpowiednie redukty są równe

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{x+2}{x}, \quad \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{3x+4}{x+2}.$$

Na podstawie (17) łatwo sprawdzamy, że wzory (17) są słuszne dla $n = 1,2$

Załóżmy, że tożsamości (18) zachodzą dla $n = 1, \ldots, k-1$.

Ponieważ dla reduktów ułamka łańcuchowego zachodzą wzory

$$P_k = 2\, P_{k-1} + x\, P_{k-2}, \quad Q_k = 2\, Q_{k-1} + x\, Q_{k-2}$$

(por. [1], str. 8), więc na podstawie założenia indukcyjnego i (15) otrzymujemy kolejno

$$P_k = 2(w_{k-1} + x\, w_{k-2}) + x(w_{k-2} + x\, w_{k-3}) =$$

$$= 2\, w_{k-1} + x\, w_{k-2} + x\,(2\, w_{k-2} + x\, w_{k-3}) = w_k + x\, w_{k-1}\,,$$

$$Q_k = 2\, w_{k-1} + x\, w_{k-2} = w_k\,,$$

co dowodzi tezy przejścia indukcyjnego.

Dowód twierdzenia. Stosując wzory (11), (17) oraz lemat 2 otrzymujemy kolejno

$$R_n(x,\gamma_0^{(p)},\gamma_1^{(p)},\ldots,\gamma_p^{(p)},0,\ldots 0) = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^{(p)}\, w_{n-1-i}(-x)^{i+1}}{\sum_{i=0}^{p} \gamma_i^{(p)}\, w_{n-i}(-x)^i} =$$

$$= 1 + x\,\frac{\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^{(p)}\, w_{n-1-i}(-x)^i}{w_{n+p}} = 1 + \frac{x\, w_{n-1+p}}{w_{n+p}} = \frac{P_{n+p}}{Q_{n+p}}\,,$$

co kończy dowód twierdzenia.

IV. Przyjmując we wzorze (8)

$$g(t) = \ln t,\ t_0 = 1$$

oraz kolejno $n = 1,2$ otrzymujemy

$$e^x \approx R_1(x,\alpha_0,\alpha_1) = \frac{(\alpha_1-\alpha_0)\,x - \alpha_0}{\alpha_1\, x - \alpha_0}\,,$$

$$e^x \approx R_2(x,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{x^2(\alpha_2-\alpha_1) + x(-\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_0) + \alpha_0}{x^2\,\alpha_2 + x(-\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_0) + \alpha_0}\,.$$

Ostatnie wzory zawierają przybliżenia Pade'go $\frac{N_p(x)}{D_q(x)}$ funkcji e^x obliczone w punkcie $x_0 = 0$ dla $p \leqslant 2,\ q \leqslant 2$.

Związki między przybliżeniami Padego i funkcjami R_1 i R_2 podaje tabela.

q \ p	0	1	2
0	$R_1(x,0,1) = 1$	$R_1(x,1,0) = 1+x$	$R_2(x,-2,-1,0) = 1+x+\frac{x^2}{2}$
1	$R_1(x,1,1) = \frac{1}{1-x}$	$R_1(x,2,1) = \frac{2+x}{2-x}$	$R_2(x,6,-1,0) = \frac{6+4x+x^2}{6-2x}$
2	$R_2(x,2,1,1) = \frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2}}$	$R_2(x,6,1,1) = \frac{6+2x}{6-4x+x^2}$	$R_2(x,12,0,1) = \frac{12+6x}{12-6x+x^2}$

Przybliżenia Padego dla innych funkcji można także uzyskać stosując metodę podaną w niniejszej pracy.

LITERATURA

1. A.N. Chowański: Priłożenije ciepłnych drobiej i ich obobszczienij k woprosam pribliżiennogo analiza, Moskwa 1956.
2. R. Bartłomiejczyk, St. Łanowy: Algebraiczna charakteryzacja jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych; Matematyka Stosowana, Seria III Roczników PTM, Warszawa 1973.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОПУНКТНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассматривается один простой способ нахождения рациональных приближений функций сильно монотонных, состоящий в том, что определение обратной функции трактуется как нахождение решения уравнения с помощью данного однопунктного итерационного метода.

Этот способ получается, пользуясь формулами, которые находятся в работе [2].

Полученные таким образом рациональные приближения содержат много известных рациональных приближений конкретных функций, которые до сих пор получаются разными методами.

THE APPLICATION OF ONE-STEP ITERATIVE METHODS TO THE CONSTRUCTION OF RATIONAL APPROXIMATIONS OF MONOTONIC FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper presents a simple method of finding the rational approximations of strictly monotonic functions. In this method the evaluation of the inverse function is treated as the solution of the equation with the aid of one - step iterative methods. For this purpose the formulae of one point iterative functions [2] have been used. The rational approximations obtained in this way contain many well-known rational approximations for concrete functions.