ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Matematyka-Fizyka z. 24 Nr kol. 386

Adam CZECH, Ewa SZOCIŃSKA

OGRANICZONOŚĆ ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH ZADAŃ BRZEGOWYCH ORAZ ZAGADNIEŃ POCZĄTKOWYCH

Streszczenie. W pracy tej rozważa się ograniczoność rozwiązań zadań brzegowych przy małych wymuszeniach stochastycznych. Wyniki otrzymane zostały zarówno metodą funkcjonałów Lapunowa, jak i przy pomocy operatora półgrupowego.

1. Wstęp

Rozważmy równanie postaci

$$(L + B(t,\omega))\, u(x,t) = f(t,x,u,\omega) \qquad x \in D \subset R^N \tag{1}$$

$$(L_1 + C(t,\omega))\, u(x,t) = 0 \qquad x \in \partial D, \tag{2}$$

gdzie L jest operatorem różniczkowym zawierającym pochodne czasowe jak i względem zmiennej przestrzennej x; $B(t,\omega)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi, L_1 jest operatorem różniczkowym względem zmiennej przestrzennej x; $C(t,\omega)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi.
Równanie (2) określa warunki brzegowe dla równania (1). Przyjmijmy, że rozwiązania równania (1) z warunkami (2) są określone na zbiorze $\bar{D}\times\{t\geq 0\}$. Podamy ogólne twierdzenia dotyczące układu (1) - (2) oraz szereg twierdzeń dotyczących pewnych specjalnych klas równań (1).

2. Podstawowe definicje i pojęcia

Podamy najpierw podstawowe definicje.

Definicja 1. Mówimy, że rozwiązanie zadania brzegowego (1)-(2) jest ograniczone, jeżeli norma $\|u(x,t,\omega)\|$ jest ograniczona w przedziale czasowym $[0,\infty)$.

Definicja 2. Mówimy, że rozwiązanie zadania brzegowego (1)-(2) jest ograniczone z prawdopodobieństwem 1, jeżeli

$$\lim_{M\to\infty} P\left\{\omega :\ \|u(x,t,\omega)\| > M\right\} = 0 .$$

Definicja 3. Mówimy, że równanie (1)-(2) ma własność konwergencji lub jest konwergentne, jeżeli istnieje rozwiązanie $\bar{u}(x,t,\omega)$ ograniczone w przedziale czasu $[0,\infty)$ i takie, że dla dowolnego rozwiązanie $u(x,t\omega)$ zachodzi

$$\lim_{t\to\infty} \left[u(x,t,\omega) - \bar{u}(x,t,\omega)\right] = 0 \text{ .}$$

Łatwo zauważyć, że $\bar{u}(x,t,\omega)$ jest stanem granicznym układu.

Definicja 4. Mówimy, że równanie (1)-(2) jest konwergentne według średniej, jeżeli istnieje rozwiązanie $\bar{u}(x,t,\omega)$ ograniczone w przedziale czasu $[0,\infty)$ i takie, że

$$\lim_{t\to\infty} E\left[u(x,t,\omega) - \bar{u}(x,t,\omega)\right] = 0 \text{ .}$$

3. Podstawowe twierdzenia

Wykażemy obecnie dwa twierdzenia dla układu (1) - (2) oraz jedno twierdzenie przy założeniu zerowych warunków brzegowych dla pewnej klasy równań (1).

Twierdzenie 1. Jeżeli istnieje funkcja $V(t,u)$ taka, że

(i) $V(t,u) \geqslant W(u)$, gdzie $W(u)\longrightarrow\infty$ przy $\|u\|\longrightarrow\infty$

(ii) dla każdego rozwiązania $u(x,t,\omega)$ funkcja $V(t,u)$ jest nierosnąca względem zmiennej t

(iii) $\sup\limits_{x\in\bar{D}} V(0,\, u(x,0,\omega)) < \infty$

to rozwiązanie równania (1) jest ograniczone.

Dowód: Przypuśćmy, że norma $\|u(x,t,\omega))\|$ nie jest ograniczona dla pewnego t. Można wtedy wybrać pewien ciąg $t_k\longrightarrow t$ i taki, że $\|u(x,t_k,\omega)\|\longrightarrow\infty$. Ale zachodzi wtedy ciąg nierówności

$$W(u(x,t_k,\omega)) \leqslant V(t_k,u(x,t_k,\omega)) \leqslant V(0,u(x,0,\omega)) < \infty$$

co daje sprzeczność. Rozwiązanie jest więc ograniczone dla $t \in [0,\infty)$.

Twierdzenie 2. Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia 1 oraz istnieje $EV(t,u(x,t,\omega))$ oraz $\sup\limits_{t\geqslant 0}\ \sup\limits_{x\in\bar{D}} EV(t,u(x,t,\omega)) < \infty$ i $\inf\limits_{u\in\{u:\|u(x,t,\omega)\|>M\}} V(t,u) \neq 0$, to rozwiązanie równania (1) jest ograniczone z prawdopodobieństwem 1.

Dowód: Korzystając z nierówności Czebyszewa mamy

$$P\left\{\omega:\ \|u(x,t,\omega)\| > M\right\} \leqslant \frac{EV\,(t,u(x,t,\omega))}{\inf\limits_{u\in\left\{u:\|u(x,t,\omega)\| > M\right\}} V(t,u)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sup\limits_{t\geqslant 0}\ \sup\limits_{x\in\bar{D}} EV(t,u(x,t,\omega))}{W(u)} .$$

Przechodząc do granicy przy $M\longrightarrow\infty$ i wykorzystując założenia o funkcji stwierdzimy, że są spełnione warunki definicji 2. Rozwiązanie jest więc ograniczone z prawdopodobieństwem 1.
Rozpatrzmy obecnie klasę układów postaci

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(x,t) \tag{4}$$

z zerowymi warunkami brzegowymi.
L_0 jest operatorem różniczkowym zawierającym pochodne względem zmiennej przestrzennej; $B(t,\omega)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi. Jeżeli $\Phi(t_2,t_1)$ jest operatorem półgrupowym generatorowanym przez L_0, który zawiera pochodne tylko względem zmiennej przestrzennej, to równanie (4) można zapisać w postaci

$$u(x,t) = \Phi(t,0)\,u(x,0) + \int\limits_0^t \Phi(t,s)\,B(s,\omega)\,u(x,s)\,ds . \tag{5}$$

Otrzymujemy wtedy następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 3.</u> Jeżeli

(i) $\sup\limits_{t,s\in[0,\infty)} \|\Phi(t,s)\| \leqslant C$ C - stała dodatnia

(ii) $\sup\limits_{x\in\bar{D}} \|u(x,0)\| < C_1$ C_1 - stała dodatnia

(iii) $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \|B(s,\omega)\|\ ds < \infty$

wtedy rozwiązanie równania (5) jest ograniczone.

Dowód: Przechodząc do normy i wykorzystując założenia (i), (ii) otrzymujemy z (5)

$$\|u(x,t)\| \leqslant CC_1 + C\int_0^t \|B(s,\omega)\| \; \|u(x,s)\| \; ds \tag{6}$$

korzystając z nierówności Gronwalla-Bellmana otrzymujemy

$$\|u(x,t)\| \leqslant CC_1 \exp\left[C\int_0^t \|B(s,\omega)\| \; ds\right] \tag{7}$$

z (iii) otrzymujemy tezę twierdzenia.

4. <u>Twierdzenia o konwergencji i stanach granicznych</u>

Rozpatrzmy zagadnienia brzegowe postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{8'}$$

$$u(x,t)\Big|_{x\in\partial D} = \xi(t) . \tag{9}$$

Dla układu typu (8)-(9) można otrzymać twierdzenie:

<u>Twierdzenie 4.</u> Jeżeli rozwiązanie równania jednorodnego jest asymptotycznie stabilne oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0$, to wtedy rozwiązanie zerowe (8) przy stale działającym zaburzeniu jest stanem granicznym układu (8)-(9).

Dowód: Rozwiązanie (8)-(9) można przedstawić w postaci $u(x,t,\omega) = u_0(x,t) + \xi(t)$, co można sprawdzić przez podstawienie. Przy założeniu, że proces $\xi(t)$ jest średnio-kwadratowo różniczkowalny mamy

$$\lim_{t\to\infty}\left[u_0(x,t) + \xi(t)\right] = 0 ,$$

co daje tezę.

Rozważmy następnie zagadnienie początkowe postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{10}$$

$$u(x,0) = \eta(\omega,x) , \tag{11}$$

gdzie η jest polem losowym $\eta(\omega,0) = 0$.

Twierdzenie 5. Jeżeli rozwiązanie zerowe zadania (10)-(11) jednorodnego jest asymptotycznie stabilne oraz

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0 \qquad \xi(0) = 0 \qquad \frac{\partial \xi(0)}{\partial t} = 0$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t B(t,\omega)\, dt < \infty$

(iii) $\int_0^t B(t,\omega)\, \xi(t)\, dt$ jest ograniczone dla każdego t i

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t B(t,\omega)\, \xi(t)\, dt = 0$$

wtedy równanie (10) jest konwergentne.

Dowód: Rozwiązania równania (10) możemy szukać postaci

$$u(x,t) = u_0(x,t) + C(t,\omega) + \xi(t) , \tag{12}$$

gdzie funkcja $C(t,\omega)$ spełnia równanie (13), a u_0 jest rozwiązaniem zadania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(x,t) \qquad \text{z warunkami (11)}$$

$$\frac{dC}{dt} = B(t,\omega)\, C(t,\omega) + B(t,\omega)\, \xi(t) \tag{13}$$

przy zerowym warunku początkowym $C(0,\omega) = 0$.

Rozwiązanie (13) możemy formalnie zapisać jako

$$C(t,\omega) = e^{\int_0^t B(t,\omega)\,dt}\left[\int_0^t B(t,\omega)\,\xi(t)\,e^{-\int_0^t B(t,\omega)\,dt}\,dt\right]$$

na mocy założeń (ii) oraz (iii) mamy

$$\lim_{t\to\infty} C(t,\omega) = 0 ,$$

a więc

$$\lim_{t\to\infty}\left[u_{\bar{u}}(x,t) + C(t,\omega) + \xi(t)\right] = 0 ,$$

co daje tezę.
Łatwo pokazać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6. Jeżeli rozwiązanie u_0 zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(x,t) && x \in D \\ &Du(x,t) = 0 && x \in \partial D \end{aligned} \tag{14}$$

jest asymptotycznie stabilne, a rozwiązanie $\bar{u}$ zagadnienia brzegowego zerowego

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u(x,t) + F(t,x,\omega) && x \in D \\ &u(x,t,\omega) = 0 && x \in \partial D \end{aligned} \tag{15}$$

jest ograniczone, to równanie

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \left[L_0 + B(t,\omega)\right] u + F(t,x,\omega) && x \in D \\ &Du(x,t) = 0 && x \in \partial D \end{aligned}$$

jest konwergentne.

Natychmiastowy dowód tego twierdzenia pomijamy.

Wniosek 1. Przy założeniu, że rozwiązanie (14) spełnia warunek $\lim_{t\to\infty} E\, u_0(x,t,\omega) = 0$ otrzymujemy wynik, że równanie to jest konwergentne według średniej.

Wniosek 2. Z twierdzenia 6 wynika, że rozwiązanie $\bar{u}$ istnieje co najwyżej jedno.

Uwaga: Rozwiązanie zerowe wszystkich problemów zamieszczonych powyżej traktujemy w sposób formalny i rozumiemy przez to, że układ przy $t\to\infty$ dąży do ustalonego stanu zerowego.

5. Przykład

Podamy obecnie przykład zastosowania twierdzenia 4.

Przykład 1

Rozważmy równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{1}$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = f(x) \tag{a}$$

i stochastycznymi warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = u(l,t) = \xi(t,\omega)\ . \tag{b}$$

Proces $\xi(t,\omega)$ jest średniokwadratowo różniczkowalny taki, że $\lim_{t\to\infty} \xi(t,\omega) = 0$ oraz spełnione są warunki zgodności nałożone na warunki (a) i (b).

Przez podstawienie $u(x,t) = v(x,t) + \xi(t,\omega)$ sprowadzamy zagadnienie (1) do postaci

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

z warunkami

$$v(x,0) = u(x,0) - \xi(0,\omega) = f(x)$$

$$v(0,t) = u(0,t) - \xi(t,\omega) = \xi(t,\omega) - \xi(t,\omega) = 0$$

$$v(l,t) = 0$$

Widać, że v(x,t) jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

z warunkami

$$v(x,0) = f(x)$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 .$$

Rozwiązując to równanie klasyczną metodą Fouriera mamy

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x ,$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx .$$

Rozwiązanie v(x,t) jest asymptotycznie stabilne, gdyż $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$

Istotnie ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$ jest jednostajnie zbieżny, to

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \lim_{t\to\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} = 0 .$$

Spełnione są więc wszystkie założenia twierdzenia 4.
Rozwiązanie zerowe jest więc stanem granicznym równania (1). Istotnie

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 .$$

LITERATURA

1. A. Tylikowski: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Automatyka", nr 20, Gliwice, 1972.
2. B. Skalmierski, A. Tylikowski: Stabilność w mechanice, PTMTiS, Gliwice 1972.
3. P.K.C. Wang, On the Almost Sure Stability of Linear Stochastic Distributed Parametre Dynamical Systems, Trans. ASME E 33, No 1, 1966.
4. A. Czech, B. Janiec: O asymptotycznych własnościach rozwiązań problemu brzegowego dla równania struny, Sympozjon pod hasłem Metody statystyczne w mechanice, Streszczenia referatów, PTMTiS, Gliwice 1973.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Р е з ю м е

В этой работе мы исследуем ограниченность решения граничных задач при случайных возмущениях методом функционалов Ляпунова и при помощи оператора семигруппы.

THE LIMITATIONS OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC BOUNDARY PROBLEMS

S u m m a r y

In this paper we study the limited solution of boundary problems in the case of little stochastic pertrobations by means of Lapunow's funktionals and making use of a semigroup operator.