ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

P 3359/82

MATEMATYKA-FIZYKA

Z. 38
GLIWICE
1982

P.3359/82

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 657

LESŁAW SOCHA

STABLINOŚĆ I STEROWANIE OTWARTE W STOCHASTYCZNYCH UKŁADACH QUASI – LINIOWYCH

GLIWICE 1982

OPINIODAWCA

Doc. dr hab. Stanisław Sieniutycz

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Jan Bandrowski (redaktor naczelny), *Sławomir Kończak* (redaktor działu), *Wojciech Mikołajków* (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Eugenia Mandrak

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-470X

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 2, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+80 Ark. wyd 8,14 Ark. druk 6,375 Papier druk. kl. V 70x100, 70 g
Oddano do druku 13.11.81 Podpis. do druku 10.12.81 Druk ukończ. w styczniu 1982
Zam. 545/80 Cena zł 15,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

WSTĘP 5

I. STABILNOŚĆ STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW QUASI-LINIOWYCH 9

1. Sformułowanie problemu 9
2. Układy ze sterowaniem zamkniętym 10
3. Układy ze sterowaniem otwartym 18

II. ZAGADNIENIE STEROWANIA OPTYMALNEGO W STOCHASTYCZNYCH UKŁADACH QUASI-LINIOWYCH 25

1. Sformułowanie problemu 25
2. Przekształcenie problemu stochastycznego do problemu deterministycznego 27
3. Twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego 34

III. ZASTOSOWANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO OTWARTEGO DO WYZNACZANIA OPTYMALNYCH PROFILI TEMPERATUR W REAKTORACH W PRZYPADKU REAKCJI RÓWNOLEGŁYCH 37

1. Omówienie modelu stochastycznego reakcji równoległych pierwszego rzędu 38
2. Uwagi ogólne dotyczące wyznaczania optymalnego profilu temperatury 42
3. Układ dwóch reakcji w przypadku działania zakłócenia o charakterze procesu gaussowskiego II rzędu 45
   3a. Zakłócenia niestacjonarne 45
   3b. Zakłócenia stacjonarne 49
4. Układ n reakcji równoległych w przypadku działania zakłócenia o charakterze białego szumu (uwagi ogólne) 52
   4a. Układ dwóch reakcji równoległych (n = 2) 56
   4b. Układ trzech reakcji równoległych (n = 3) 59
5. Uwagi na temat innych rodzajów reakcji oraz kryteriów optymalizacji 65
   5a. Reakcja odwracalna 65
   5b. Kryterium uwzględniające wariancję wektora stanu 71
   5c. Wyznaczanie optymalnych stężeń w reaktorze w przypadku nierównomiernego przepływu produktów 78

Str.

ZAKOŃCZENIE 82

DODATEK 1 85

DODATEK 2 93

LITERATURA 96

STRESZCZENIA 100

WSTĘP

Przedmiotem niniejszej pracy są układy stochastyczne liniowe ze względu na wektor stanu i nieliniowe ze względu na sterowanie nazywane dalej stochastycznymi układami quasi-liniowymi. Układy te są uogólnieniem układów biliniowych, które z kolei stanowią jedną z podstawowych klas modeli matematycznych, analizowanych w ostatnich latach. Układy biliniowe znalazły zastosowanie przy opisie zjawisk dynamicznych w dziedzinach pozornie bardzo odległych od siebie, takich jak: mechanika, ekonomia, immunologia, dyfuzja neutronów, problemy komunikacji, inżynieria chemiczna. Przykłady zastosowań można znaleźć w książce Mohlera [32], jak również w wielu pracach, których np. część została zebrana w pracy [57]. W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem stabilności stochastycznej oraz wyznaczaniem sterowania otwartego optymalnego. Pokażemy również zastosowanie otrzymanych wyników do wyznaczania optymalnych profili temperatur w reaktorach periodycznych lub wielorurowych.

Problem badania stabilności jest jednym z podstawowych w analizie układów dynamicznych. Do najbardziej znanych prac dotyczących badania stabilności deterministycznych układów biliniowych zaliczyć należy [18], [42]. W pierwszej z nich korzysta się z metody hiperstabilności Popova, w drugiej natomiast z metod algebry Liego. W niniejszej pracy będziemy korzystali głównie z kryteriów stabilności deterministycznych układów nieliniowych, podanych przez Jakubowicza [19], i podobnie jak w [48], [49] zastosujemy je do badania stabilności stochastycznej układów quasi-liniowych. W dalszej części pracy zajmiemy się głównie zagadnieniem sterowania optymalnego w stochastycznych układach quasi-liniowych z całkowym quasi-liniowym wskaźnikiem jakości. W odróżnieniu od deterministycznej teorii w przypadku stochastycznych układów istnieją różnice między sterowaniem otwartym i zamkniętym. W przypadku układów liniowych ze średniokwadratowym wskaźnikiem jakości, przy praktycznym wyznaczaniu sterowania zamkniętego, konieczne jest rozwiązywanie równania Riccatiego. Dużo większe problemy pojawiają się w przypadku sterowania stochastycznymi układami nieliniowymi. W ogólnym przypadku zachodzi konieczność rozwiązywania nieliniowego parabolicznego równania cząstkowego Bellmana, co z kolei prowadzi do skomplikowanych obliczeń numerycznych [27], [37]. Z uwagi na te trudności niektórzy autorzy zajęli się badaniem sterowania otwartego. Do najbardziej znanych prac należą prace Kushnera [25], Hollanda [15, 16], Parajewa [36]. Kushner i Parajew podają stochastyczne wersje zasady maksimum, które jednak w praktycznych obliczeniach są mało użyteczne. W zasadzie maksimum

Kushnera zachodzi konieczność rozwiązywania stochastycznych równań różniczkowych dla zmiennych sprzężonych, co poza trywialnymi przypadkami jest niemożliwe. Zasada ta jednak jest użyteczna w dowodach szczególnie egzystencjalnych i została wykorzystana między innymi przez Hollanda [15], który w oparciu o wyniki Fleminga [8] podał przybliżoną wereję wyznaczania otwartego stochastycznego sterowania optymalnego. Przy stosowaniu zasady maksimum Parajewa zachodzi konieczność rozwiązania układu równań różniczkowych z równoczesną minimalizacją pewnego funkcjonału całkowego. Jako rozwiązanie problemu otrzymuje się wówczas gęstość rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania równania stanu i dopiero na tej podstawie wyznacza się momenty różnych rzędów. Metoda ta, jakkolwiek bardzo ogólna, dla naszych celów nie będzie przydatna. Praca Parajewa [36] zawiera jednak szereg innych ciekawych wyników dotyczących sterowania otwartego, z których będziemy korzystać. Większość autorów analizowało tylko układy opisane stochastycznymi równaniami Ito, natomiast w niniejszej pracy będziemy również rozważać układy, w których zakłócenia mają charakter procesów gaussowskich drugiego rzędu o znanej wartości średniej i funkcji korelacji. W dowodach twierdzeń o istnieniu sterowania optymalnego będziemy korzystać z wyników Fleminga i Richela [9] oraz Boyarskiego [1]. Otrzymane w pracy wyniki teoretyczne, zwłaszcza dotyczące sterowania optymalnego, zastosujemy do wyznaczania optymalnych profili temperatur w reaktorach chemicznych typu rurowego lub periodycznych. Ujęcie deterministyczne tej problematyki, zarówno dla prostych, jak i złożonych reakcji chemicznych, było przedmiotem wielu prac, między innymi [17, 40, 41]. Z uwagi na to, że w rzeczywistych układach fizycznych występują przypadkowe zakłócenia, w ostatnich latach wzrosło zainteresowanie zastosowaniami modeli stochastycznych w inżynierii reaktorów chemicznych [29], [30]. Problem zastosowania sterowania otwartego do określenia optymalnych profili temperatur w stochastycznym modelu reakcji równoległych i odwracalnych był przedstawiony w [45], [44]. Podobnie jak w tych pracach będziemy zakładać, że stałe szybkości reakcji podlegają pewnym przypadkowym zaburzeniom, o których z kolei będziemy zakładać, że są bądź białymi szumami, bądź procesami gaussowskimi drugiego rzędu o znanych wartościach średnich i funkcjach korelacji. Rozpatrywać przy tym będziemy tę klasę procesów stochastycznych, które najczęściej występują w problemach fizycznych. Ich interpretację można znaleźć w wielu opracowaniach, np.: [36], [61].

Prezentowana praca składa się ze wstępu, trzech rozdziałów, zakończenia oraz dwóch dodatków. W rozdziale pierwszym podano kryteria stabilności stochastycznej dla układów ze sterowaniem zamkniętym oraz ze sterowaniem otwartym. Otrzymane kryteria dotyczą silnej i słabej stabilności stochastycznej oraz asymptotycznej p-stabilności. Zostały one zilustrowane kilkoma przykładami. Rozdział ten stanowi pewną zamkniętą całość, przy czym niektóre wyniki uzyskane w nim są użyteczne w dalszej analizie stochastycznych układów quasi-liniowych.

W rozdziale drugim podano ogólną metodę wyznaczania otwartego sterowania optymalnego w stochastycznych układach quasi-liniowych z całkowym quasi-liniowym wskaźnikiem jakości. Pokazano, że przekształcając stochastyczny problem sterowania do równoważnego deterministycznego otrzymuje się nowy nieliniowy problem sterowania optymalnego. Następnie podano twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego dla otrzymanego problemu.

Rozdział trzeci jest poświęcony zastosowaniom otrzymanych wyników, głównie z rozdziału drugiego, do wyznaczania optymalnych profili temperatur. Na początku omówiono model stochastyczny reakcji równoległych pierwszego rzędu, zachodzących w reaktorze wielorurowym, a następnie podano pewne uwagi ogólne dotyczące wyznaczania optymalnych profili we wszystkich przypadkach występujących w dalszej części pracy. Szczegółowo przedstawiony został przypadek układu dwóch reakcji równoległych, na które działają zakłócenia gaussowskie stacjonarne i niestacjonarne. Układ n-reakcji równoległych został omówiony dla zakłóceń o charakterze białego szumu. Dokładne wyznaczanie profilu temperatury zostało pokazane na przykładzie układu dwóch i trzech reakcji równoległych. W ostatnim punkcie tego rozdziału omówiono inne reakcje ze szczególnym uwzględnieniem reakcji odwracalnej. Rozważono również możliwość zastosowania innych rodzajów kryteriów, np. uwzględniających wariancję wektora stanu. Przeprowadzono porównanie wyników na przykładzie układu dwóch reakcji równoległych. Rozważono także problem wyznaczania optymalnego profilu temperatury w reaktorze wielorurowym, w którym przepływ produktów jest nierównomierny (przypadkowy).

W zakończeniu dokonano podsumowania otrzymanych wyników oraz nakreślono perspektywiczne kierunki badań w dziedzinie stochastycznych układów quasi-liniowych.

Dodatek 1 zawiera twierdzenie, lemat oraz wnioski wraz z dowodami dotyczące ogólniejszego problemu sterowania optymalnego, którego szczególnymi przypadkami są problemy rozważane w rozdziale drugim.

W Dodatku 2 zacytowano podane przez Kushnera [24, 26] oraz Chasminskiego [5] definicje stabilności stochastycznej i praw wielkich liczb.

I. STABILNOŚĆ STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW QUASI-LINIOWYCH

1. S f o r m u ł o w a n i e p r o b l e m u

W niniejszym rozdziale będziemy zajmowali się badaniem stabilności stochastycznej rozwiązania trywialnego $x \equiv 0$ następujących układów quasi-liniowych

$$\frac{dx}{dt} = \left[A + \eta(t,\omega)\right]x + \sum_{i=1}^{\nu} A_i(u_i)x + \xi(t,\omega)\left[Bx + \sum_{i=1}^{\nu} B_i(u_i)x\right], \quad \sigma = c^T x \tag{I.1}$$

$$dx = \left[Ax + \sum_{i=1}^{\nu} A_i(u_i)x\right]dt + \left[Bx + \sum_{i=1}^{\nu} B_i(u_i)x\right]dw, \quad \sigma = c^T x. \tag{I.2}$$

gdzie:

- A, A_i i B, B_i – są macierzami rzeczywistymi o wymiarach $n \times n$ i $p \times n$,
- c – macierz o wymiarach $n \times m$,
- x – wektor stanu n wymiarowy,
- σ – wektor m wymiarowy,
- u_i – sterowania skalarne $i = 1 \dots \nu$,
- η – macierz stochastyczna o wymiarach $n \times n$,
- ξ – macierz stochastyczna o wymiarach $n \times p$,
- w – proces Wienera.

Przy badaniu stabilności stochastycznej korzystać będziemy z kilkunastu definicji podanych przez Chasminskiego [5], Kushnera [24, 26], które zamieszczono w Dodatku 2.

Rozważymy oddzielnie układy ze sterowaniem zamkniętym i ze sterowaniem otwartym. W przypadku układów ze sterowaniem zamkniętym będzie zachodziła relacja

$$u_i = \psi_i(\sigma), \tag{I.3}$$

gdzie ψ_i są pewnymi nieliniowymi funkcjami $\psi_i : R^m \to R^1$.

W przypadku układów ze sterowaniem otwartym sterowania u_i będą funkcjami czasu

$$u_i = u_i(t). \tag{I.4}$$

2. Układy ze sterowaniem zamkniętym

Na początku wprowadzimy kilka oznaczeń, które pozwolą uprościć zapis układów (I.1) i (I.2).

Niech $M(\sigma)$ i $N(\sigma)$ będą macierzami $n \times n$ i $p \times n$ zdefiniowanymi w sposób następujący:

$$M(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\varphi_i(\sigma)), \tag{I.5}$$

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(\varphi_i(\sigma)), \tag{I.6}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} M_1^T(\sigma)\, x \\ \vdots \\ M_n^T(\sigma)\, x \\ N_1^T(\sigma)\, x \\ \vdots \\ N_p^T(\sigma)\, x \end{bmatrix}, \tag{I.7}$$

gdzie M_k i N_k oznaczają k-ty wiersz macierzy M i N.

Niech b i D będą macierzami o wymiarach $n\times(n+p)$, $p\times(n+p)$ zdefiniowanymi w sposób następujący

$$b = \begin{bmatrix} 1\,0\,\dots\,0\,0\,\dots\,0 \\ 0\,1\,\dots\,0\,0\,\dots\,0 \\ \vdots \\ 0\underbrace{\qquad}_{n}1\,\underbrace{0\,\dots\,0}_{p} \end{bmatrix}\Big\}n, \quad D = \begin{bmatrix} 0\,\dots\,0\,1\,0\,\dots\,0 \\ 0\,\dots\,0\,0\,1\,\dots\,0 \\ \vdots \\ \underbrace{0\,\dots\,0}_{n}\,\underbrace{0\,\dots\,\dots\,1}_{p} \end{bmatrix}\Big\}p \tag{I.8}$$

Wówczas układy (I.1) i (I.2) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\frac{dx}{dt} = \left[A + \eta(t,\omega)\right]x + b\varphi + \xi\left[Bx + D\varphi\right], \qquad \sigma = c^T x, \tag{I.1'}$$

$$dx = \left[Ax + C\varphi\right]dt + \left[Bx + D\varphi\right]dw, \qquad \sigma = c^T x. \tag{I.2'}$$

Korzystając z wyników zamieszczonych w pracach [48], [49], podamy dla układów (I.1') i (I.2') kryteria stabilności stochastycznej, przy czym w przypadku układu (I.1') zakłócenia będą procesami stochastycznymi, spełniającymi prawo wielkich liczb lub gaussowskimi procesami stochastycznymi, natomiast w przypadku układu (I.2') będą miały charakter białego szumu. W dalszym ciągu będziemy korzystali z oznaczeń przyjętych w pracach [48] i [49], tzn.

$$K(s) = c^T(A - sJ)^{-1}b. \tag{I.9}$$

Deterministyczną część układów (I.1') i (I.2') możemy zapisać w postaci

$$\sigma = -K(s)\varphi \qquad (s = \tfrac{d}{dt}) \tag{I.10}$$

lub w postaci skalarnej

$$\sigma_j + \sum_{h=1}^{\varkappa} K_{jh}(s)\varphi_h = 0, \quad j = 1 \dots m. \quad \varkappa = n+p \tag{I.11}$$

Będziemy zakładali, że można zbudować jednorodne formy kwadratowe Q_j względem σ_j i φ_j, które będą spełniały warunki

$$Q_j = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1,\dots,k_1, \quad Q_j \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad j = k_1+1\dots k \tag{I.12}$$

Określając nową formę kwadratową

$$Q(\varphi,\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j Q_j,$$

gdzie

$$\tau_j = \begin{cases} \text{dowolne} & \text{dla} \quad j = 1,\dots,k_1 \\ \tau_j > 0 & \text{dla} \quad j = k_1+1,\dots,k \end{cases}$$

można ją przedstawić w postaci

$$Q(\varphi,\sigma) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{j,h=1}^{\varkappa} \alpha_{jh}\varphi_j\varphi_h^* + 2\sum_{j=1}^{\varkappa}\sum_{h=1}^{m} \beta_{jh}\varphi_j\sigma_h^* + \sum_{j,h=1}^{m} \gamma_{jh}\sigma_j\sigma_h^* \Big). \qquad (I.13)$$

gdzie gwiazdkę oznaczono zespolone sprzężenie.
Wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie

$$Q'(s,\varphi) = Q(\varphi, -K(s)\varphi). \qquad (I.14)$$

Układ (I.1) będziemy zapisywać w postaci

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\varphi + \Theta(x,\varphi)\xi_1(t,\omega), \qquad (I.1f)$$

gdzie:

$$\Theta = [\phi(x,\varphi), \psi(x)], \quad \xi_1(t,\omega) = \begin{bmatrix} \xi^*(t,\omega) \\ \eta^*(t,\omega) \end{bmatrix}. \qquad (I.15)$$

$$\phi(x,\varphi) = \begin{bmatrix} \delta_1, & \delta_2, \dots & \delta_p, & 0, \dots & 0, \dots & 0, \dots & 0 \\ 0, & 0, \dots & 0 & \delta_1, \dots & \delta_p, \dots & 0, \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0, & & 0, & 0, \dots & 0, \dots & \delta_1, \dots & \delta_p \end{bmatrix}, \qquad (I.16)$$

$$\delta_i = B_i^T x + \varphi_{i+n}, \quad i = 1,\dots,p \qquad (I.17)$$

B_i - i-ty wiersz macierzy B.

$$\xi(t,\omega) = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{1p} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{2p} \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix} \qquad (I.18), \qquad \eta^*(t,\omega) = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \vdots \\ \eta_{1n} \\ \eta_{21} \\ \vdots \\ \eta_{2n} \\ \vdots \\ \eta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (I.19)$$

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} x_1, \dots & x_n, & 0, \dots & 0, & 0, \dots & 0, \dots & 0 \\ 0, \dots & 0, & x_1, \dots & x_n, & 0, \dots & 0, \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, \dots & 0, & 0, \dots & 0, & 0, \dots & x_1, \dots & x_n \end{bmatrix} \qquad (I.20)$$

Zauważmy, że normę w przestrzeni euklidesowej $|\Theta(x,\varphi)|$ można łatwo oszacować przy założeniu, że

$$|\varphi_i| \leqslant \mu_i |x| \qquad (I.21)$$

$$|\Theta(x,\varphi)| \leqslant |\phi(\varphi)| + |\psi(x)| \leqslant \Big[\sqrt{n}\Big(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\delta_i| + |x|\Big)\Big] \leqslant \sqrt{n}\Big(|B| + \sum_{i=n+1}^{n+p} \mu_i + 1\Big)|x| \leqslant c_{33}\sqrt{V}, \qquad (I.22)$$

gdzie:

$$V = x^T H x, \quad H = H^T > 0, \qquad (I.23)$$

$$c_{33} = \frac{\sqrt{n}\Big(|B| + \sum_{i=n+1}^{n+p} \mu_i + 1\Big)}{\sqrt{h_1}}. \qquad (I.24)$$

h_1 - najmniejsza wartość własna macierzy H.

Korzystając z wyników [48] podamy twierdzenie dotyczące asymptotycznej zupełnie słabej stabilności według prawdopodobieństwa.

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli spełnione są następujące założenia:

(i) wartości własne macierzy A występującej w układzie (I.1f) spełniają warunek $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < -\alpha_0 \leqslant 0$, $\alpha_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$,

(ii) spełniony jest warunek (12).

Dla pewnych dopuszczalnych τ_j:

(iii) $Q(0,\sigma) \geqslant 0$ dla wszystkich σ

(iv) $Q(\varphi, -K(-\alpha_0 + i\gamma)\varphi) < 0$ dla wszystkich φ i $(-\infty \leqslant \gamma \leqslant +\infty)$,

(v) $\forall_j \ |\varphi_j| \leqslant \mu_j |x|$.

(vi) $\frac{d\varphi}{dx}$ istnieje i jest ograniczona $\left|\frac{d\varphi}{dx}\right| < \mu_d$, $\mu_d = \mathrm{const} > 0$,

(vii) proces $|\xi_1(t,\omega)|$ spełnia prawo wielkich liczb oraz warunek,

$$\sup_{t>0} E|\xi_1(t,\omega)| < \frac{\alpha_0\sqrt{h_1}}{|H|c_{33}}, \tag{I.25}$$

gdzie H i c_{33} zostały określone wzorami (I.23) i (I.24).
Wtedy trywialne rozwiązanie układu (I.1f) jest asymptotycznie zupełnie słabo stabilne według prawdopodobieństwa. Jeśli natomiast proces $|\xi_1(t,\omega)|$ spełnia silne prawo wielkich liczb, to rozwiązanie trywialne układu (I.1f) jest asymptotycznie zupełnie słabo stabilne z prawdopodobieństwem 1.

Dowód twierdzenia został podany w [48], natomiast problem wyznaczania macierzy H omówiono w [19, 20] i w związku z tym nie będziemy się nimi zajmować.

Podobnie jak w [48] podamy twierdzenie dotyczące asymptotycznej p-stabilności, w przypadku gdy ξ i η są macierzami gaussowskimi.

T w i e r d z e n i e 2

Niech będą spełnione założenia twierdzenia 1 (i) - (vi). Proces $\zeta(t,\omega) = \frac{|H|}{h_1}\left[(|B| + \sum_{i=n+1}^{n+p}\mu_i)|\xi| + |\eta|\right]$ będzie gaussowskim procesem stochastycznym, którego parametry spełniają następujące oszacowania:

$$|E\zeta(t,\omega)| \leqslant c^0, \tag{I.26}$$

$$E|\zeta(t,\omega) - E\zeta(t,\omega)|^2 \leqslant c^1, \tag{I.27}$$

$$\int_0^t |K(u,s)|\,du \leqslant c^2, \tag{I.28}$$

gdzie:

$$K(u,s) = \mathrm{cov}(\xi(u,\omega), \xi(s,\omega)), \tag{I.29}$$

c^i - stałe dodatnie.

Wtedy trywialne rozwiązanie układu (I.1) jest asymptotycznie p-stabilne przy

$$p < \frac{\alpha_0 - (c^0 + \sqrt{c^1})}{c^2}, \tag{I.30}$$

jeśli

$$\alpha_0 > (c^0 + \sqrt{c^1}). \tag{I.31}$$

Dowód powyższego twierdzenia przebiega podobnie jak dowody twierdzeń 4a, 4b, 4c [48] i dlatego nie będziemy go przytaczać.

Przejdźmy obecnie do analizy układu (I.2).

W dowodach twierdzeń Jakubowicza pokazuje się istnienie macierzy $H = H^T$ takiej, że dla dowolnego rozwiązania deterministycznej części układu (I.2) spełniony jest warunek

$$\dot{V} + 2\alpha_0 V = -\left[x^T G x + 2x^T g\varphi + \varphi^T(-\alpha_1)\varphi\right] - Q(\varphi,\sigma) \leqslant 0, \tag{I.32}$$

gdzie:

$$-G = H(A + \alpha_0 J) + (A + \alpha_0 J)^T H + c\gamma c^T, \tag{I.33}$$

$$-g = Hb + c\beta^T, \tag{I.34}$$

α_1, β, γ zostały określone we wzorze (I.13).
V zostało określone wzorem (I.23). Jeśli ponadto założymy, że

$$\mathrm{Sp}\left\{(Bx + D\varphi)(Bx + D\varphi)^T H\right\} \leqslant d^2 x^T H x, \tag{I.36}$$

to korzystając z wyników [48, 49] możemy podać twierdzenie dotyczące asymptotycznej silnej stabilności według prawdopodobieństwa.

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli spełnione są założenia tw. 1 (i) - (iv) i ponadto zachodzą warunki:

(v) warunek (I.36)

(vi) $\alpha_o > \frac{1}{2} d^2$,

wówczas rozwiązanie trywialne równania (I.2) jest asymptotycznie silnie stabilne według prawdopodobieństwa.

W dowodzie tego twierdzenia korzysta się z następującej nierówności

$$LV = \dot{V} + Sp\left\{(Bx + D\varphi)(Bx + D\varphi)^T H\right\} \leqslant -2(\alpha_o - \tfrac{1}{2} d^2)V, \qquad (I.37)$$

gdzie L jest operatorem zdefiniowanym następująco

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (Ax + b\varphi)^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} Sp\left\{(Bx + D\varphi)(Bx + D\varphi)^T \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}\right\}. \qquad (I.38)$$

WNIOSEK

Twierdzenie 3 jest słuszne dla szerszej klasy układów, tzn.

$$dx = (Ax + b\varphi)dt + D(x,\varphi)dw, \qquad (I.39)$$

jeśli warunek (I.36) zastąpimy następującym

(v') $$Sp\left\{D(x,\varphi)D^T(x,\varphi)H\right\} \leqslant d^2 x^T H x. \qquad (I.40)$$

Przykład 1

Rozważmy układ opisany równaniem skalarnym

$$dx = (ax + b\varphi_1)dt + (Bx + D\varphi_2)dw, \quad \sigma = cx, \qquad (I.41)$$

gdzie:

a, b, c, B, D są stałymi współczynnikami rzeczywistymi,

$a < -\alpha_o$,

nieliniowości φ_j spełniają warunki $0 \leqslant \varphi_j \sigma \leqslant \mu_j \sigma^2$ $j = 1,2$. (I.42)

Forma Q będzie postaci

$$Q = \mu_1 \sigma^2 - \varphi_1 \sigma, \qquad (I.43)$$

warunek (v') spełniony będzie dla

$$d^2 = (B + \mu_2 cD)^2, \qquad (I.44)$$

warunek (iii) jest tożsamościowo spełniony,
z warunku (iv) wynika, że musi być spełniona następująca nierówność

$$\alpha_o + \mu_1 bc < -a, \qquad (I.45)$$

a zatem warunkiem wystarczającym asymptotycznej silnej stabilności według prawdopodobieństwa jest spełnienie nierówności

$$\tfrac{1}{2}(B + \mu_2 cD)^2 + \mu_1 bc < -a. \qquad (I.46)$$

3. Układy ze sterowaniem otwartym

Podobnie jak w przypadku układów ze sprzężeniem zwrotnym na początku wprowadzimy kilka pomocniczych oznaczeń.
Niech $M(t)$ i $N(t)$ będą macierzami $n \times n$ i $p \times n$, zdefiniowanymi w sposób następujący:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\vartheta} A_i(u_i(t)), \tag{I.47}$$

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\vartheta} B_i(u_i(t)) \tag{I.48}$$

oraz

$$\gamma(t,\omega) = \eta(t,\omega) + \xi(t,\omega)\left[B + N(t)\right], \tag{I.49}$$

wówczas układy (I.1) i (I.2) możemy zapisać w sposób następujący:

$$\frac{dx}{dt} = \left[A + \gamma(t,\omega) + M(t)\right] x, \tag{I.1''}$$

$$dx = \left[A + M(t)\right] x\, dt + \left[B + N(t)\right] x\, dw. \tag{I.2''}$$

Przy badaniu stabilności stochastycznej tych układów można posłużyć się różnymi kryteriami stabilności dla układów liniowych niestacjonarnych, które zamieszczono w pracach Chasminskiego, Kozina, Willemsa, Morozana i innych [5], [22], [58], [31]. My podamy jedynie te, które są odpowiednikami kryteriów otrzymanych w przypadku układów ze sterowaniem zamkniętym. Będziemy przy tym korzystali z wyników Chasminskiego [5].

Kryterium asymptotycznej zupełnej stabilności według prawdopodobieństwa

Układ (I.1'') możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{dx}{dt} = \left[A + M(t)\right] x + \psi(x)\, \gamma^*(t,\omega), \tag{I.50}$$

gdzie $\psi(x)$ zostało określone wzorem (I.20), zaś

$$\gamma^*(t,\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \cdot \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{bmatrix}. \tag{I.51}$$

Twierdzenie 1'

Jeśli istnieje funkcja $V(x) = \left[x^T H x\right]^{\frac{1}{2}}$, której pochodna wzdłuż trajektorii deterministycznej części układu (I.1'') spełnia nierówność

$$\dot{V}(x) \leqslant -\left[x^T G x\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla każdego} \quad t > 0 \quad \text{i} \quad x \in X \subset R^n \tag{I.52}$$

H i G są macierzami dodatnio określonymi $H = H^T$, $G = G^T$.
Ponadto jeśli dla macierzy przypadkowej $\gamma(t,\omega)$ proces stochastyczny $|\gamma^*(t,\omega)|$ spełnia prawo wielkich liczb oraz

$$\sup_{t>0} E\,|\gamma^*(t,\omega)| \leqslant \frac{\sqrt{g_1 h_1}}{|H|\sqrt{n}}, \tag{I.53}$$

gdzie g_1 i h_1 są najmniejszymi wartościami własnymi odpowiednio macierzy G i H,
wtedy trywialne rozwiązanie układu (I.1'') jest asymptotycznie zupełnie słabo stabilne według prawdopodobieństwa. Jeśli natomiast proces $|\gamma^*(t,\omega)|$ spełnia silne prawo wielkich liczb, to trywialne rozwiązanie jest asymptotycznie zupełnie słabo stabilne z prawdopodobieństwem 1.

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia 8.1 [5], korzysta się przy tym z następującego oszacowania.

$$\sup_{t>0} E\,|\gamma^*(t,\omega)| < \frac{c_4}{B c_{23}}, \tag{I.54}$$

gdzie

$$c_4 = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{h_1}}, \quad c_{23} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{h_1}}, \quad B = \frac{|H|}{\sqrt{h_1}}. \tag{I.55}$$

Kryterium asymptotycznej p-stabilności

Oznaczmy przez λ największą z dodatnich liczb, dla których dla dowolnego $x \in R^n$ spełniona jest nierówność

$$x^T[HA + A^TH]x \leq -\lambda x^T Hx. \tag{I.56}$$

Łatwo pokazać, że

$$\lambda < -\frac{\lambda_{max}(D)}{\lambda_{max}(H)}, \quad D = HA + A^TH. \tag{I.57}$$

T w i e r d z e n i e 2'

Niech A będzie macierzą Hurwitza, a H dodatnio określoną macierzą spełniającą warunek (I.56); $\xi(t,\omega) = [\xi_{ij}(t,\omega)]$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ będzie gaussowskim procesem przypadkowym. Załóżmy, że spełnione są następujące nierówności dla procesu $\tilde{\xi}(t,\omega) = H^{\frac{1}{2}}\xi(t,\omega)H^{-\frac{1}{2}}$:

$$|E\,\tilde{\xi}(t,\omega)| \leq c^0, \tag{I.58}$$

$$E\,|\tilde{\xi}(t,\omega) - E\,\tilde{\xi}(t,\omega)|^2 \leq c^1, \tag{I.59}$$

$$\int_0^{t_1} |K(u,s)|\,du \leq c^2, \tag{I.60}$$

gdzie K(u,s) jest macierzą kowariancji procesu $\tilde{\xi}(t,\omega)$ o wymiarach $n^2 \times n^2$

$$K(u,s) = \operatorname{cov}(\tilde{\xi}(u,\omega), \tilde{\xi}(s,\omega)). \tag{I.61}$$

Macierz M(t) jest ograniczona i spełnia zależność

$$|H^{\frac{1}{2}} M(t) H^{-\frac{1}{2}}| \leq c^3 \tag{I.62}$$

c^i - stałe dodatnie.

Wtedy trywialne rozwiązanie układu (I.1'') jest asymptotycznie p-stabilne przy

$$p < \frac{\lambda - 2(c^0 + c^3 + \sqrt{c^1})}{2c^2}, \tag{I.63}$$

jeśli

$$\lambda > 2(c^0 + c^3 + \sqrt{c^1}). \tag{I.64}$$

Dowód tego twierdzenia wynika z dowodu twierdzenia 8.2 [5].

Przykład 2

Rozważmy równanie skalarne

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]x + A[u(t)]x\,\xi(t,\omega), \quad x(0) = x_0, \tag{I.65}$$

gdzie: A(u) jest nieliniową, ciągłą ujemnie określoną funkcją, $\xi(t,\omega)$ jest gaussowskim procesem stochastycznym o wartości średniej z(t) i funkcji korelacji R(s,τ).

Wówczas rozwiązanie tego równania dla realizacji ma następującą postać

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_0^t A[u(\tau)]\,[1 + \xi(\tau,\omega)]\,d\tau\right\}. \tag{I.66}$$

Korzystając z lematu 7.3 [5] możemy napisać

$$Ex(t) = x_0 \exp\left\{\int_0^t A[u(\tau)]\,d\tau\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t A[u(s)]\;A[u(\tau)]\;K(s,\tau)\,ds\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t A[u(\tau)]\,z(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{I.67}$$

gdzie K(s,τ) - funkcja kowariancji procesu $\xi(t,\omega)$, $K(s,\tau) = R(s,\tau) - z(s)z(\tau)$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy funkcja kowariancji spełnia warunek

$$K(s,\tau) = \sum_{j=1}^{l} f_i(s)g_i(\tau), \tag{I.68}$$

f_i i g_i są pewnymi funkcjami nieliniowymi.

wówczas ( )[1]

$$E|x(t)|^p = |x_0|^p \exp\left\{\int_0^t p\,A[u(\tau)]\left[1 + z(\tau) + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(\tau)\int_0^\tau A[u(s)]\,g_i(s)ds + g_i(\tau)\int_0^\tau A[u(s)]\,f_i(s)ds\right]\right]d\tau\right\}. \quad (I.69)$$

stąd wynika, że rozwiązanie trywialne równania (I.65) jest asymptotycznie p-stabilne, jeśli $A[u(s)] < 0$ oraz

$$p < \inf_{t>0} - \frac{2 + 2\,z(t)}{\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,g_i(s)ds + g_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,f_i(s)ds\right]} \quad (I.70)$$

przy założeniu, że wyrażenie w liczniku jest dodatnio określone, a w mianowniku ujemnie.
W przypadku gdy

$$z(t) = 0, \quad K(s,\tau) = \sigma^2\cos\beta(s^2 - \tau^2) \quad (I.71)$$

$$a_2 \leqslant A[u(s)] \leqslant a_1 < 0 \quad (I.72)$$

zachodzi następujące oszacowanie

$$E\,|x(t)|^p \leqslant |x_0|^p \exp\left\{pa_1\int_0^t\left[1 + p\sigma(\cos\beta\tau^2 p_1(\tau) + \sin\beta\tau^2 p_2(\tau))\right]d\tau\right\}, \quad (I.73)$$

gdzie:

$$p_1(t) = \sigma\frac{a_2\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\beta}}\,C(\sqrt{\beta}t), \quad p_2(t) = \sigma\frac{a_2\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\beta}}\,S(\sqrt{\beta}t), \quad (I.74)$$

$$C(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\cos\tau^2 d\tau, \quad S(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\sin\tau^2 d\tau, \quad (I.75)$$

przy czym żądamy, by wyrażenie w nawiasie kwadratowym było dodatnie.

( )[1] Uzasadnienie tego wzoru wynika z rozważań przeprowadzonych w następnym rozdziale.

C(t), S(t) są całkami Fresnela i można je wyznaczyć korzystając z tablic [38] lub obliczając sumy szeregów nieskończonych.
Całkując przez części wyrażenie znajdujące się w wykładniku wyrażenie (I.73), otrzymamy

$$E|x(t)|^p \leqslant |x_0|^p \exp\left\{pa_1\left[t + \frac{p\sigma^2 a_2}{4\beta}(C^2(\sqrt{\beta}t) + S^2(\sqrt{\beta}t))\right]\right\}, \quad (I.76)$$

a zatem warunkiem wystarczającym asymptotycznej p-stabilności jest, by

$$0 < p < \inf_{t>0}\left\{-\frac{t}{\frac{\sigma^2 a_2\pi}{4\beta}(C^2(\sqrt{\beta}t) + S^2(\sqrt{\beta}t))}\right\}. \quad (I.77)$$

Dużo prostszy wynik otrzymuje się w przypadku, gdy zakłócenie ma charakter procesu stacjonarnego o średniej $z(t) = 0$ i o funkcji korelacji

$$R(s,\tau) = \exp\left\{-\alpha|\tau - s|\right\} \quad (I.78)$$

wówczas

$$E|x(t)|^p \leqslant |x_0|^p \exp\left\{pa_1(1 + \frac{p}{\alpha}a_2)t\right\}, \quad (I.79)$$

stąd warunkiem wystarczającym asymptotycznej p-stabilności jest, by

$$0 < p \leqslant -\frac{\alpha}{a_2}, \quad (a_2 < 0). \quad (I.80)$$

Na koniec pozostał nam do rozważenia układ (I.2''). Ma on postać liniowego niestacjonarnego równania Ito, dla którego z kolei w literaturze opracowano kilka różnych postaci kryteriów stabilności. Są to kryteria wykorzystujące metody częstotliwościowe [59] lub oparte na metodzie funkcji Lapunowa [22], [53].

We wszystkich tych metodach korzysta się z następującej nierówności

$$LV = x^T\left[\dot{H}(t) + (A + M(t))^T H(t) + H(t)(A + M(t))\right]x + Sp\left\{\left[(B + N(t))x\right.\right.$$
$$\left.\left.x^T(B + N(t))\right]\,H(t)\right\} \leqslant 0, \quad (I.81)$$

która zapewnia własności nadmartyngałowe funkcji $V(t,x) = x^T H(t)x$.
W szczególnym przypadku, gdy sterowanie jest skalarne, to wówczas można skorzystać z pewnej odmiany kryteriów częstotliwościowych, z tzw. kryteriów kołowych.

Podane w tym rozdziale kryteria stabilności stochastycznej można stosować po prostych modyfikacjach do badania stabilności stochastycznej w

skończonym czasie (def. 11, 12 w Dodatku 2), korzystając przy tym z procedury podanej przez Kushnera [24], jak również Sunacharę i in. [55]. Fakt ten został wykorzystany w następnych rozdziałach pracy.

II. ZAGADNIENIE STEROWANIA OPTYMALNEGO W STOCHASTYCZNYCH UKŁADACH QUASI-LINIOWYCH

1. S f o r m u ł o w a n i e p r o b l e m u

W rozdziale tym będziemy zajmowali się pewnym szczególnym układem quasi-liniowym, tzn. takim, w którym sterowanie otwarte $u(t)$ jest skalarne. Będzie on miał następującą postać:

$$\frac{d\Gamma_A(t,\omega)}{dt} = A[u(t)]\,[1 + K\,\eta(t,\omega)]\,\Gamma_A(t,\omega), \tag{II.1}$$

$$\frac{d\Gamma_B(t,\omega)}{dt} = B[u(t)]\,[1 + K\,\eta(t,\omega)]\,\Gamma_A(t,\omega). \tag{II.2}$$

gdzie

$\Gamma_A: R^1_+ \times \Omega \to R^1$, $\Gamma_B: R^1_+ \times \Omega \to R^1$, $\omega \in \Omega$ $(\Omega, \mathcal{B}, P)$,

$A[\cdot]$, $B[\cdot]$ - są pewnymi funkcjami nieliniowymi kl C^1,

$A: U \to V_1$, $B: U \to V_2$, $(U, V_1, V_2 \subset R^1)$,

$A[\cdot] \neq 0$ dla każdego $u \subset U$, K - stały parametr,

$\eta(t,\omega)$ - jest procesem stochastycznym gaussowskim II rzędu o znanej wartości średniej $z(t)$ oraz funkcji kowariancji $K(s,t)$, którego wszystkie realizacje są całkowalne na skończonym przedziale[1)], $\eta: R^1 \times \Omega \to R^1$,

$u(t)$ - jest jednowymiarowym sterowaniem otwartym, spełniającym następującą nierówność

$$u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}. \tag{II.3}$$

Nie zmniejszając ogólności problemu będziemy zakładali, że chwila początkowa $t_o = 0$.

Warunki początkowe w powyższym układzie przyjmiemy jako deterministyczne

$$\Gamma_A(0) = x_o, \quad \Gamma_B(0) = 0. \tag{II.4}$$

[1)] Interpretację fizykalną rozpatrywanych w pracy zakłóceń można znaleźć np. w książce Sobczyka [43].

Naszym celem jest znalezienie sterowania $u(t)$ ciągłego maksymalizującego w chwili końcowej wielkość I

$$I = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} E\,\Gamma_B(t_f). \tag{II.5}$$

$E(\cdot)$ - wartość oczekiwana.

Rozważany przez nas układ (II.1), (II.2), (II.4) posiada rozwiązanie, które jest absolutnie ciągłym procesem stochastycznym dla każdego $t \geqslant 0$, wynika to z twierdzenia 3.3 s. 28 [5].

2. Przekształcenie problemu stochastycznego do problemu deterministycznego

Rozwiązanie układu (II.1), (II.2) dla realizacji ma następującą postać

$$\Gamma_B(t,\omega) = x_o \int_0^t \exp\left\{\int_0^s A[u(\tilde{\tau})]\,[1+K\eta(\tilde{\tau},\omega)]\,d\tilde{\tau}\right\} B[u(s)]\,[1+K\eta(s,\omega)]\,ds. \tag{II.6}$$

Korzystając z tożsamości

$$\int_0^t L(s)\,\exp\left\{\int_0^s c(\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right\}c(s)ds = L(t)\left[\exp\left\{\int_0^t c(s)ds\right\} - 1\right] -$$

$$- \int_0^t \left[\exp\left\{\int_0^s c(\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right\} - 1\right] L'(s)ds, \tag{II.7}$$

gdzie $L(t)$, $c(t)$ są pewnymi funkcjami kl C^o, ponadto $L(t)$ jest przedziałami różniczkowalna, otrzymujemy następującą zależność

$$E\,\Gamma_B(t_f,\omega) = x_o\left[\frac{B[u(t_f)]}{A[u(t_f)]}\left[E\{D(t_f,\omega)\} - 1\right] -\right.$$

$$\left. - \int_0^{t_f} \left[E\{D(s,\omega)\} - 1\right] \left(\frac{B[u(s)]}{A[u(s)]}\right)' ds\right]. \tag{II.8}$$

gdzie

$$D(t,\omega) = \exp\left\{\int_0^t A[u(s)]\,[1 + K\eta(s,\omega)]\,ds\right\}. \tag{II.9}$$

W dalszej części będziemy opuszczać argument ω, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. W celu oszacowania $E\,\Gamma_B(t_f)$ zachodzi konieczność obliczenia $E\{D(t_f)\}$. Skorzystamy przy tym z następującego lematu.

Lemat [5]

Proces gaussowski drugiego rzędu mierzalny, którego funkcja kowariancji jest ciągła, spełnia następujące oszacowanie

$$E \exp\left\{\int_{t_0}^{t_1} K\eta(t)dt\right\} = \exp\left\{\frac{K^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K(s,\tau)ds d\tau + K\int_{t_0}^{t_1} E\eta(s)ds\right\}. \quad (II.10)$$

Korzystając z powyższego lematu otrzymuje następującą zależność:

$$E \exp\left\{\int_0^t A[u(\tau)]\,[1 + K\eta(\tau)]\,d\tau\right\} = \exp\left\{\int_0^t A[u(\tau)]\,d\tau\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{K^2}{2}\int_0^t\int_0^t A[u(s)]\;A[u(\tau)]\;K(s,\tau)ds d\tau + \int_0^t A[u(s)]\;K\,E\eta(s)ds\right\}. \quad (II.11)$$

Jeśli całka podwójna z funkcji korelacji spełnia następującą zależność

$$\frac{K^2}{2}\int_0^t\int_0^t A[u(s)]\;A[u(\tau)]\;K(s,\tau)ds d\tau = \int_0^t F_1\left[A[u(s)]\right]ds, \quad (II.12)$$

gdzie $F_1[\cdot]$ jest pewną funkcją zależną jedynie od parametrów procesu, wtedy przyjmując

$$F[u(t)] = \frac{F_1\left[A[u(t)]\right]}{A[u(t)]}. \quad (II.13)$$

oraz korzystając ze wzoru (II.7), otrzymamy, że odpowiadający temu problemowi stochastycznemu (II.1) - (II.5) równoważny problem deterministyczny będzie miał postać:

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + F[u(t)] + K\,E\eta(t,\omega)\right]x, \quad x(0) = x_0, \quad (II.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + F[u(t)] + K\,E\eta(t,\omega)\right]x, \quad y(0) = 0, \quad (II.15)$$

$$I = \max_{u_{min} \le u(t) \le u_{max}} y(t_f), \quad (II.16)$$

gdzie:

$$x(t) = E\,\Gamma_A(t), \quad y(t) = E\,\Gamma_B(t). \quad (II.17)$$

Przykładem procesu stochastycznego, którego funkcja kowariancji spełnia warunek (II.12), jest gaussowski stacjonarny biały szum, którego funkcja korelacji ma postać

$$K(s,\tau) = \delta(s-\tau), \quad (II.18)$$

wówczas funkcja $F(\cdot)$ ma postać

$$F[u(t)] = \frac{K^2}{2} A[u(t)]. \quad (II.19)$$

Ponieważ biały szum jest abstrakcją a nie procesem fizycznym, więc równania (II.1), (II.2), w których $\eta(t,\omega)$ byłoby białym szumem, należy rozumieć np. w sposób opisany przez Wonga [62], Papanicolau [35], który wygląda następująco[1]. Rozważa się rodzinę stochastycznych równań różniczkowych (II.1) - (II.2) z ciągiem stacjonarnych procesów gaussowskich szerokopasmowych $\eta_n(t,\omega)$ "zbieżnych" w pewnym odpowiednim sensie do białego szumu gaussowskiego.

$$\frac{d\Gamma_{A_n}}{dt} = A[u(t)]\left[1 + K\,\eta_n(t,\omega)\right]\Gamma_{A_n},$$

$$\frac{d\Gamma_{B_n}}{dt} = B[u(t)]\left[1 + K\,\eta_n(t,\omega)\right]\Gamma_{A_n}$$

"zbieżność" tę należy rozumieć w sposób następujący

$$W_n(t,\cdot) = \int_a^t \eta_n(s,\cdot)ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left[W(t,\cdot) - W(a,\cdot)\right]$$

prawie na pewno, gdzie $\left\{W(t,\cdot),\ a \le t \le T\right\}$ jest procesem ruchu braunowskiego.

[1] Kilka innych aproksymacji (dyskretnych) stochastycznych równań różniczkowych zostało podanych przez McShana [30].

Założymy ponadto, że realizacja tych procesów $\eta_n(t,\omega)$ oraz funkcje $A(\cdot)$ i $B(\cdot)$ spełniają założenia poczynione na początku rozdziału[1]. Wówczas jak udowodnili Wong i Zakai [63] [64] w przypadku jednowymiarowym oraz McShane [30], Papanicolau i Kohler [35] w przypadku wielowymiarowym, Γ_{A_n} i Γ_{B_n} są zbieżne do rozwiązań odpowiadających im stochastycznych równań różniczkowych w sensie Stratonowicza[2], tzn.:

$$d\Gamma_A = A[u(t)]\ \Gamma_A dt + K\, A[u(t)]\ \Gamma_A d\xi, \tag{II.20}$$

$$d\Gamma_B = B[u(t)]\ \Gamma_A dt + K\, B[u(t)]\ \Gamma_A d\xi, \tag{II.21}$$

$d\xi$ - jest różniczką w sensie Stratonowicza.

Przekształcając ten układ do układu równań stochastycznych Ito i uśredniając otrzymamy układ (II.14), (II.15), w którym $E\eta(t,\omega) = z(t) = 0$. Obszerną i szczegółową analizę problemów aproksymacji można znaleźć w [30, 35, 62, 65].

Rozważmy przypadek gdy funkcja kowariancji $K(s,\tau)$ spełnia zależność

$$\frac{K^2}{2}\int_0^t\int_0^t A[u(s)]\,A[u(\tau)]K(s,\tau)ds d\tau = \int_0^t A[u(s)]\sum_{i=1}^{l} Kf_i(s)\int_0^s A[u(\tau)]\,Kg_i(\tau)d\tau ds \tag{II.22}$$

gdzie f_i i g_i są pewnymi funkcjami kl C^1.

Przykładem takiego procesu stochastycznego jest proces stacjonarny o wartości średniej $z(t) = 0$ i o funkcji korelacji

$$R(s,\tau) = \exp\left\{-\alpha|s-\tau|\right\} \tag{II.23}$$

W przypadku gdy spełniona jest zależność (II.22), problem stochastyczny (II.1) (II.5) przekształca się do następującego problemu deterministycznego.

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} f_i(t)\int_0^t A[u(s)]Kg_i(s)ds + KE\eta(t)\right]x, \quad x(0) = x_0 \tag{II.24}$$

[1] Oprócz tych założeń czyni się pewne dodatkowe założenia odnośnie do procesów $W_n(t,\omega)$, zob. [30] [35] [62].

[2] W tym przypadku Papanicolau i Kohler wykazali zbieżność słabą, w innych zaś zależy ona od rodzaju aproksymacji równań stochastycznych.

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} f_i(t)\int_0^t A[u(s)]Kg_i(s)ds + KE\eta(t)\right]x, \quad y(0) = 0 \tag{II.25}$$

$$I = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} y(t_f) \tag{II.26}$$

Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy funkcja kowariancji $K(s,\tau)$ jest bardziej ogólnej postaci

$$K(s,\tau) = \sum_{i=1}^{l} f_i(s)\ g_i(\tau), \tag{II.27}$$

wówczas

$$E\left\{D(t)\right\} = \exp\left\{\int_0^t A[u(s)]\left[1 + KE\eta(s)\right]ds + \right.$$

$$\left. + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\int_0^t A[u(\tau)]\,f_i(\tau)d\tau\int_0^t A[u(s)]\ g_i(s)ds\right\}. \tag{II.28}$$

Korzystając z tożsamości

$$\exp\left\{\int_0^t A[u(s)]ds + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\int_0^t A[u(\tau)]\ f_i(\tau)dt\ .\ \int_0^t A[u(s)]\ g_i(s)ds\right\} - 1 =$$

$$= \int_0^t \exp\left\{\int_0^\tau A[u(s)]ds + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\int_0^\tau A[u(s)]\ f_i(s)ds\int_0^\tau A[u(s)]\ g_i(s)ds\right\}\ .$$

$$.\ A[u(\tau)]\left[1 + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(\tau)\int_0^\tau A[u(s)]\,g_i(s)ds + g_i(\tau)\int_0^\tau A[u(s)]\,f_i(s)ds\right]\right]d\tau \tag{II.29}$$

po przekształceniach otrzymujemy, że problem stochastyczny (II.1) - (II.5) transformuje się do następującego problemu deterministycznego.

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + KE\eta(t) + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,g_i(s)ds + g_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,f_i(s)ds\right]\right]x, \quad x(0) = x_0, \tag{II.30}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + KE\eta(t) + \frac{K^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,g_i(s)ds + g_i(t)\int_0^t A[u(s)]\,f_i(s)ds\right]\right]x, \quad y(0) = 0, \tag{II.31}$$

$$I = \max_{u_{min} \le u(t) \le u_{max}} y(t_f). \tag{II.32}$$

Przykładem procesu stochastycznego, którego funkcja kowariancji spełnia warunek (II.27) jest niestacjonarny proces stochastyczny o funkcji korelacji

$$K(s,\tau) = \sigma^2\cos\beta(s^2 - \tau^2), \quad (\sigma = \text{const}). \tag{II.33}$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$p_i(t) = \int_0^t A[u(s)]\,Kf_i(s)ds, \tag{II.34}$$

$$i = 1,\ldots,l$$

$$q_i(t) = \int_0^t A[u(s)]\,Kg_i(s)ds, \tag{II.35}$$

$$z(t) = E\eta(t), \tag{II.36}$$

otrzymamy równoważne problemy deterministyczne dla układu (II.24)-(II.26)

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} f_i(t)q_i(t) + Kz(t)\right]x, \quad x(0) = x_0 \tag{II.37}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} f_i(t)q_i(t) + Kz(t)\right]x, \quad y(0) = 0 \tag{II.38}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = A[u(t)]\,Kg_i(t), \quad q_i(0) = 0, \quad i = 1,\ldots,l \tag{II.39}$$

$$I = \max_{u_{min} \le u(t) \le u_{max}} y(t_f) \tag{II.40}$$

oraz dla układu (II.30) - (II.32):

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right] + Kz(t)\right]x, \quad x(0) = x_0 \tag{II.41}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right] + Kz(t)\right]x, \quad y(0) = 0 \tag{II.42}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = A[u(t)]\,Kf_i(t), \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1,\ldots,l \tag{II.43}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = A[u(t)]\,Kg_i(t), \quad q_i(0) = 0, \quad i = 1,\ldots,l \tag{II.44}$$

$$I = \max_{u_{min} \le u(t) \le u_{max}} y(t_f). \tag{II.45}$$

3. Twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego

Pokażemy, że w otrzymanych przez nas równoważnych problemach deterministycznych sterowanie optymalne istnieje i jest ciągłe. Na początku zajmiemy się układem (II.14) - (II.16) z założeniem, że $E\eta(t) = 0$. W przypadku gdy $A[u]\left[1 + F(u)\right]$ i $-B[u]\left[1 + F(u)\right]$ są funkcjami wypukłymi dowód wynika bezpośrednio z tw. 4.1 [9]. W przypadku gdy $A[u]\left[1 + F(u)\right]$ jest wklęsła, wówczas potrzebne jest przeprowadzenie dodatkowego dowodu. Problem (II.14) - (II.16) możemy przekształcić do następującej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = G(u)x, \quad x(0) = x_0, \tag{II.46}$$

$$I = \min_{u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}} \int_0^{t_f} L(u)x\,dt, \tag{II.47}$$

gdzie:

$$G(u) = A[u]\left[1 + F(u)\right], \tag{II.48}$$

$$L(u) = -B[u]\left[1 + F(u)\right]. \tag{II.49}$$

Traktując $G[u(t)]$ jako nowe sterowanie $v(t)$, bada się przy jakich założeniach funkcja $L[v(t)] = L[u[v(t)]]$ jest wypukła ze względu na v. Prawdziwe jest wówczas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4

Jeśli funkcje $G: U \to V$, $L: U \to V$ są kl C^2 $(U,V \subset R^1)$ i G^{-1} istnieje dla $u_{min} \leq u \leq u_{max}$ i na tym ograniczeniu spełniony jest jeden z warunków:

a) $G'_u < 0, \quad G''_{uu} < 0, \quad L'_u > 0, \quad L''_{uu} > 0$

b) $G'_u > 0, \quad G''_{uu} > 0, \quad L'_u > 0, \quad L''_{uu} > 0$

c) $G'_u > 0, \quad G''_{uu} > 0, \quad L'_u > 0, \quad L''_{uu} > 0$

d) $G'_u < 0, \quad G''_{uu} > 0, \quad L'_u < 0, \quad L''_{uu} > 0$

Wówczas w problemie (II.1) - (II.5) z funkcją kowariancji (II.18) lub w równoważnym mu problemie (II.20) - (II.21) sterowanie optymalne otwarte istnieje i jest ciągłe.

Otrzymane przez nas warunki wystarczające nie zapewniają jednak sterowania optymalnego przedziałami ciągłego[1].

Rozważymy teraz otrzymane przez nas nieliniowe problemy sterowania optymalnego (II.37) - (II.40) i (II.41) - (II.45). Można je sprowadzić do następującej postaci.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p_1 \\ \vdots \\ p_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[1 + Kz(t) + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{1}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x \\ Kf_1(t) \\ \vdots \\ Kf_1(t) \\ Kg_1(t) \\ \vdots \\ Kg_1(t) \end{bmatrix} v(t). \tag{II.50}$$

$$I = \min_{v_{min} \leq v(t) \leq v_{max}} \int_0^{t_f} L(v)\left[1 + Kz(t) + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{1}\left[f_i(t)q_i(t)+g_i(t)p_i(t)\right]\right]x\,dt. \tag{II.51}$$

gdzie

$$v(t) = A[u(t)], \quad v_{min} = A[u_{min}], \quad v_{max} = A[u_{max}]$$

$$L(v) = -B[A^{-1}(v)], \tag{II.52}$$

A^{-1} - funkcja odwrotna do A.

[1] Szczegółową analizę dotyczącą ciągłości bądź ciągłości przedziałami sterowania optymalnego można znaleźć w [9], s. 74.

Postępując podobnie jak w poprzednim przypadku, tzn. traktując $v(t)$ jako nowe sterowanie, możemy sformułować następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e , 5

Załóżmy, że dla problemu (II.1) - (II.5) w przedziale $[0,t_f]$ spełnione są następujące warunki:

(i) $\eta(t,\omega)$ - jest procesem gaussowskim drugiego rzędu o znanej wartości średniej i funkcji kowariancji $K(s,\tau)$, którego wszystkie trajektorie są całkowalne w skończonym przedziale,

(ii) $A[u]$ jest kl C^1, $A[u] \neq 0$, A^{-1} istnieje w $[u_{min}, u_{max}]$,

(iii) - $B[A^{-1}(\cdot)]$ jest wypukłą funkcją kl C^1 w $[v_{min}, v_{max}]$,

(iv) $u \subset U = [u_{min}, u_{max}]$.

Ponadto, jeśli funkcja kowariancji $K(s,\tau)$ jest ciągła i spełnia warunki (II.22) lub (II.27), wówczas sterowanie optymalne otwarte istnieje i jest ciągłe. To sterowanie jest również optymalne w odpowiednio równoważnych problemach deterministycznych (II.37) - (II.40) lub (II.41) - (II.45).

Dowody twierdzeń 4 i 5 wynikają z bardziej ogólnego twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego oraz lematu i wniosków zamieszczonych wraz z dowodami w Dodatku 1.

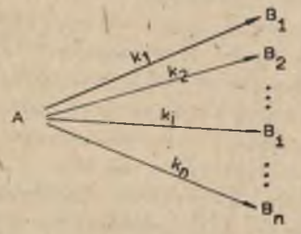
III. ZASTOSOWANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO OTWARTEGO DO WYZNACZANIA OPTYMALNYCH PROFILI TEMPERATUR W REAKTORACH W PRZYPADKU REAKCJI RÓWNOLEGŁYCH

W niniejszym rozdziale zajmiemy się zastosowaniem otrzymanych wcześniej wyników do wyznaczania optymalnych profili temperatur w reakcjach równoległych pierwszego rzędu, a pod koniec rozdziału również w reakcjach odwracalnych pierwszego rzędu. Ograniczenie to wynika z charakteru równań quasi-liniowych. Podobnie jak w [45], [44] będziemy zakładać, że stałe szybkości reakcji (aktywność katalizatora) podlegają pewnym przypadkowym zaburzeniom. Wynikać to może z nierównomiernego rozłożenia katalizatora wzdłuż rury bądź z zanieczyszczeń w surowcu.

Na ogół w rozważaniach teoretycznych dotyczących optymalizacji reaktorów przy użyciu temperatury jako zmiennej sterującej zakładana jest idealna kontrola temperaturowa. Oznacza to, że analizując problem optymalizacyjny nie wnika się w możliwość praktycznej realizacji określonego profilu temperatury i dlatego nie zawsze wyznaczony na drodze rozważań teoretycznych profil optymalny może być urzeczywistniony. Niemniej może on stanowić wzorzec dla doboru konstrukcji reaktora ze względu na wymianę ciepła. Ponieważ naszym celem nie jest sterowanie reaktorem, a znalezienie optymalnego profilu, dlatego stosować będziemy sterowanie otwarte.

1. Omówienie modelu stochastycznego reakcji równoległych pierwszego rzędu

Rozważmy układ n reakcji równoległych pierwszego rzędu zachodzących w idealnym reaktorze rurowym.



Równania kinetyczne w modelu deterministycznym są następujące:

$$
\begin{aligned}
w\frac{dc_A}{dz} &= -(k_1^{\cdot} + \ldots + k_n^{\cdot})c_A,\\
&\vdots\\
w\frac{dc_{B_i}}{dz} &= k_i^{\cdot}c_A,\\
&\vdots\\
w\frac{dc_{B_n}}{dz} &= k_n^{\cdot}c_A,
\end{aligned}
\qquad \text{(III.1)}
$$

gdzie:

- w – prędkość przepływającego gazu,
- c_A, c_{B_i} – stężenia produktów,
- $k_i^{\cdot}$ – stałe szybkości reakcji (funkcje temperatury),
- z – współrzędna długości reaktora.

Równania te wyprowadza się przy założeniach, że ciśnienie oraz gęstość gazu przepływającego przez reaktor są stałe oraz, że problem można traktować jako jednowymiarowy (radialne spadki temperatur są pomijane).

Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe

$$
\Gamma_A = \frac{c_A}{c_{A_o}},\ \Gamma_{B_1} = \frac{c_{B_1}}{c_{A_o}},\ \ldots\ \Gamma_{B_i} = \frac{c_{B_i}}{c_{A_o}},\ \ldots\ \Gamma_{B_n} = \frac{c_{B_n}}{c_{A_o}},\ t = \frac{z}{L} \qquad \text{(III.2)}
$$

c_{A_o} – stężenie początkowe produktu A,

L – długość całego reaktora.

$t \in [0,1]$

oraz oznaczenia

$$
\frac{L}{w}k_1^{\cdot} = k_1,\ \ldots,\ \frac{L}{w}k_n^{\cdot} = k_n \qquad \text{(III.3)}
$$

układ równań kinetycznych (III.1) przyjmie postać:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_A}{dt} &= -(k_1 + \ldots + k_n)\Gamma_A, & \Gamma_A(0) &= 1,\\
&\vdots\\
\frac{d\Gamma_{B_i}}{dt} &= k_i\Gamma_A & \Gamma_{B_i}(0) &= 0,\\
&\vdots\\
\frac{d\Gamma_{B_n}}{dt} &= k_n\Gamma_A & \Gamma_{B_n}(0) &= 0.
\end{aligned}
\qquad \text{(III.4)}
$$

Stałe szybkości $k_1 \ldots k_n$ są funkcjami temperatury według wzoru Arrheniusa

$$
k_i = k_{io}\exp\left\{-\frac{E_i}{RT(t)}\right\}. \qquad \text{(III.5)}
$$

E_i – energie aktywacji, R – stała gazowa, wielkość $\frac{L}{w}$ włączono do stałych k_{iO} zwanych współczynnikami przedwykładniczymi.

Wartość tych współczynników zależy nie tylko od prędkości przepływającego gazu, lecz również od aktywności katalizatora rozłożonego wzdłuż reaktora rurowego. W modelu deterministycznym zakłada się, że są one wielkościami stałymi k_{io} = const, natomiast w modelu stochastycznym zakłada się, że są one losowe. Rozważymy dwa przypadki, w których fizykalna interpretacja problemu wygląda w sposób następujący.

W pierwszym dany jest reaktor wielorurowy, w którym katalizator jest rozłożony nierównomiernie wzdłuż długości rury bądź posiada zanieczyszczenia, przy czym wielkości te są losowe, zatem nierównomierne rozłożenie

bądź zanieczyszczenie katalizatora w pojedynczej rurze może być traktowane jako realizacja procesu stochastycznego. Zakładamy przy tym, że upakowanie katalizatora oddziałuje w sposób jednakowy na wszystkie stałe szybkości reakcji. W przypadku reaktora wielorurowego w sposób naturalny wynikający z konstrukcji (N rur) dany jest zespół N realizacji.

Wielkość współczynnika przedwykładniczego w modelu stochastycznym w omówionym przez nas przypadku będziemy zapisywać następująco

$$k_{io_{stoch}} = k_{io}(1 + K\eta(t,\omega)), \qquad \text{(III.6)}$$

gdzie

K - jest pewnym stałym współczynnikiem liczbowym.

W przypadku drugim zakładamy, że aktywność katalizatora wzdłuż długości rury jest stała i jednakowa w każdej z nich, natomiast prędkość przepływu w poszczególnych rurach reaktora wielorurowego jest zmienną losową $\eta(\omega)$ o znanym rozkładzie. Zakładamy przy tym, że prędkość przepływu nie zmienia się wzdłuż długości w każdej rurze. Przypadek ten rozważono oddzielnie w punkcie III.5c. Podobnie jak w modelu deterministycznym przyjmujemy, że warunki początkowe są deterministyczne

$$\Gamma_A(0) = 1, \quad \Gamma_{B_1}(0) = 0 \quad i = 1,\ldots,n$$

oraz temperatura spełnia ograniczenia

$$T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}.$$

W modelu deterministycznym jako kryterium przyjmuje się maksymalizację stężenia Γ_{B_1} na końcu reaktora. Naturalnym uogólnieniem tego kryterium w modelu stochastycznym wynikającym z bilansu masowego na końcu reaktora jest maksymalizacja średniego stężenia Γ_{B_1} na końcu reaktora. W przypadku pierwszym, gdy w reaktorze wielorurowym prędkość przepływu gazu, pole przekroju oraz długość poszczególnych rur są takie same i ponadto mieszanie jest idealne, wówczas stężenie produktu B_1 na końcu reaktora wyraża się wzorem

$$c_{B_1}(L) = wNFc_{A_o}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Gamma^i_{B_1}(L)\dot{Q}^{-1},$$

gdzie:

F - pole przekroju każdej z rur,

$\Gamma^i_{B_1}(L)$ - stężenie bezwymiarowe w poszczególnych rurach na końcu reaktora,

$\dot{Q}$ - natężenie przepływu czynnika po zmieszaniu $\dot{Q} = wNF$.

Stąd wynika, że średnie bezwymiarowe stężenie produktu B_1 na końcu reaktora wielorurowego wyraża się wzorem

$$\Gamma_{B_1 śr}(L) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Gamma^i_{B_1}(L). \qquad \text{(III.7)}$$

co z kolei uzasadnia przyjęte przez nas kryterium

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} E\Gamma_B(1); \quad (B_1 = B). \qquad \text{(III.8)}$$

Podobnie w drugim przypadku, gdy pole przekroju, długości rur oraz aktywność katalizatora są stałe i jednakowe w poszczególnych rurach i ponadto mieszanie jest idealne, wówczas stężenie produktu B na końcu reaktora wyraża się wzorem

$$c_B(L) = c_{A_o}\dot{Q}^{-1}\,NF\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^i\Gamma^i_B(L) = c_{A_o}\dot{Q}^{-1}\,NFw_{śr}\Gamma_{B_{śr}}(L),$$

gdzie:

$$w_{śr} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^i;$$

w^i - prędkości w poszczególnych rurach,

$\dot{Q} = w_{śr}NF$,

stąd

$$\Gamma_{B_{śr}}(L) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^i\Gamma^i_B(L)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^i}, \qquad \text{(III.9)}$$

co z kolei uzasadnia przyjęcie innego kryterium niż w przypadku pierwszym

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} \frac{1}{Ew(\omega)} E\left\{w(\omega)\,\Gamma_B(1)\right\}. \qquad \text{(III.10)}$$

2. Uwagi ogólne dotyczące wyznaczania optymalnego profilu temperatury

W oparciu o zasadę maksimum podamy pewne uwagi dotyczące wyznaczania optymalnego sterowania. Będziemy się przy tym posługiwać najogólniejszym układem (II.41) - (II.45). Występujące w tym punkcie rozdziału zmienna t oraz wielkość u(t) będziemy traktowali jako czas i sterowanie, natomiast w pozostałych punktach tego rozdziału jako bezwymiarową współrzędną długości oraz profil temperatury.

Hamiltonian oraz równania, które spełniają zmienne sprzężone, będą miały postać:

$$H = (\lambda_A A[u] + \lambda_B B[u])\left[1 + Kz(t) + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l}\left[\lambda_{p_i} A[u]Kf_i(t) + \lambda_{q_i} A[u]Kg_i(t)\right]. \qquad \text{(III.11)}$$

$$\frac{d\lambda_A}{dt} = -(\lambda_A A[u] + \lambda_b B[u])\left[1 + Kz(t) + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right],$$

$$\lambda_A(t_f) = 0, \qquad \text{(III.12)}$$

$$\frac{d\lambda_B}{dt} = 0, \quad \lambda_B(t_f) = 1 \Rightarrow \lambda_B(t) \equiv 1, \qquad \text{(III.13)}$$

$$\frac{d\lambda_{p_i}}{dt} = -\frac{K}{2}(\lambda_A A[u] + B[u])g_i(t)x, \quad \lambda_{p_i}(t_f) = 0, \quad i = 1,\ldots,l, \qquad \text{(III.14)}$$

$$\frac{d\lambda_{q_i}}{dt} = -\frac{K}{2}(\lambda_A A[u] + B[u])f_i(t)x, \quad \lambda_{q_i}(t_f) = 0, \quad i = 1,\ldots,l, \qquad \text{(III.15)}$$

W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że $z(t) = 0$, co nie zmienia ogólności problemu. Założymy również, że $A[u]$ i $B[u]$ są kl. C^2, $x_o > 0$

oraz $B[u] > 0$. Pozwoli to nam podać warunki, jakie muszą być spełnione aby hamiltonian osiągnął wartość maksymalną.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial A}{\partial u}\lambda_A + \frac{\partial B}{\partial u}\right]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x +$$

$$+ \frac{\partial A}{\partial u}K\sum_{i=1}^{l}\left[\lambda_{p_i} f_i(t) + \lambda_{q_i} g_i(t)\right] = 0, \qquad \text{(III.16)}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\lambda_A + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x +$$

$$+ \frac{\partial^2 A}{\partial u^2}K\sum_{i=1}^{l}\left[\lambda_{p_i} f_i(t) + \lambda_{q_i} g_i(t)\right] < 0. \qquad \text{(III.17)}$$

Jeżeli $A[u]$ jest ujemnie określona, wówczas z warunku wystarczającego stabilności stochestycznej w skończonym czasie wynika, że

$$1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right] = G(t) > 0, \ \forall t \in [0,t_f]. \qquad \text{(III.18)}$$

Problem sprawdzalności tego warunku został omówiony w [51].
Znajdziemy teraz równanie na pochodną sterowania względem czasu, $\frac{du}{dt}$.

$$\frac{du}{dt} = \left[(\lambda_A\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2})x\,G(t) + \frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\sum_{i=1}^{l}\left[\lambda_{p_i} Kf_i(t) + \lambda_{q_i} Kg_i(t)\right]\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot\left[G'(t)(\frac{\partial A}{\partial u}\lambda_A + \frac{\partial B}{\partial u})x - \frac{\partial A}{\partial u}x\,G^2(t)(\lambda_A A[u] + B[u]) +\right.$$

$$+ K\frac{\partial A}{\partial u}\sum_{i=1}^{l}\left[\lambda_{p_i} f'(t) - (\lambda_A A[u] + B[u])g_i(t)f_i(t)x + \lambda_{q_i} g'(t)\right] +$$

$$\left. + (\lambda_A\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u})G^2(t)\,A[u]x\right]. \qquad \text{(III.19)}$$

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że można tak dobrać parametry funkcji f_i i g_i, żeby wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym było ujemnie określone, wówczas

$$\frac{du}{dt} > 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad t \in [0, t_f]. \tag{III.20}$$

Zbadajmy również zachowanie hamiltonianu w chwili $t = t_f$.

$$H(t_f) = B[u(t_f)]\ G(t_f)\ x(t_f). \tag{III.21}$$

Ze względu na założenie (III.18) $G(t_f) > 0$. Jeśli $B[\cdot]$ jest funkcją rosnącą, to hamiltonian osiągnie wartość maksymalną dla $u = u_{max}$. Oznacza to, że w chwili końcowej sterowanie optymalne będzie wynosiło

$$u(t) = u_{max}.$$

Konstrukcję sterowania optymalnego można by prowadzić od końca do początku, tzn. od chwili $t = t_f$ do chwili $t = 0$ tak jak to czyniono w pracach [41], [43], gdyby udało się z warunku (III.16) wyznaczyć moment $t = t_p$ "wejścia w krzywą". W ogólnym przypadku jest to jednak niemożliwe, bowiem występujące w nim wielkości $x(t_p)$, $G(t_p)$, $f_i(t_p)$, $g_i(t_p)$ zależą od sterowania optymalnego, które jest nieznane, (z wyjątkiem przypadku, gdy zakłócenia mają charakter białego szumu). Dlatego w praktycznych obliczeniach konieczne jest zastosowanie metod numerycznych[1]. W związku z tym, w ogólnym przypadku sterowanie optymalne otwarte będzie składało się z trzech lub dwóch części.

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{dla} \quad t_p \leq t \leq t_f \\ u(t) & \text{dla} \quad t_k \leq t \leq t_p, \\ u_{min} & \text{dla} \quad 0 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad \text{gdzie } \frac{du}{dt} \text{ zostało określone w (III.19).} \tag{III.22}$$

W przypadku gdy $t_k = 0$ sterowanie optymalne składa się z dwóch części. Dla otrzymania przedstawionego powyżej sterowania optymalnego wymagane było spełnienie kilku silnych ograniczeń, np. (III.16), (III.17), (III.18), co w dużym stopniu ogranicza klasę badanych układów. W przypadku zastosowania go do modeli chemicznych ma jednak uzasadnienie fizykalne. Otrzymane w ten sposób sterowania (profile temperatury) nie różnią się jakościowo od profili otrzymywanych w modelach deterministycznych.

[1] Obszerny przegląd zalecanych metod można znaleźć w [10].

3. Układ dwóch reakcji w przypadku działania zakłócenia o charakterze procesu gaussowskiego II rzędu

Załóżmy, że w układzie (II.1) - (II.5) funkcje $A[\cdot]$ i $B[\cdot]$ mają następującą postać[1]:

$$A[T(t)] = -k_{10} \exp\left\{-\frac{E_1}{RT(t)}\right\} - k_{20} \exp\left\{-\frac{E_2}{RT(t)}\right\} = -(k_1 + k_2), \tag{III.23}$$

$$B[T(t)] = k_{10} \exp\left\{-\frac{E_1}{RT(t)}\right\} = k_1, \tag{III.24}$$

gdzie E_i, k_{10}, R są stałymi parametrami określonymi w punkcie 1 tego rozdziału.

3a. Zakłócenie niestacjonarne

Niech będzie dana funkcja korelacji procesu $\eta(t,\omega)$

$$R(s,\tau) = \sigma^2 \cos\beta(\tau^2 - s^2), \tag{III.25}$$

wówczas funkcja kowariancji przyjmie postać

$$K(s,\tau) = \sigma^2 \cos\beta\tau^2 \cos\beta s^2 + \sigma^2 \sin\beta\tau^2 \sin\beta s^2 - z(s)z(\tau). \tag{III.26}$$

Nie zmniejszając ogólności problemu będziemy zakładać, że wartość średnia procesu

$$E_\eta(t,\omega) = z(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad t_f = 1, \quad x_0 = 1. \tag{III.27}$$

Korzystając z układu (II.41) - (II.45) możemy zapisać równoważny dla układu (II.1) - (II.5) problem deterministyczny:

[1] W pracy nie będziemy zajmować się problemem identyfikacji modelu reakcji oraz zakłóceń, problemy te są rozpatrywane w pracach [13], [34].

$$\frac{dx}{dt} = A[T(t)]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x, \quad x(0) = 1, \tag{III.28}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[T(t)]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i(t)q_i(t) + g_i(t)p_i(t)\right]\right]x, \quad y(0) = 0, \tag{III.29}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = A[T(t)]Kf_i(t), \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1,2, \tag{III.30}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = A[T(t)]Kg_i(t), \quad q_i(0) = 0, \quad i = 1,2, \tag{III.31}$$

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} y(1), \tag{III.32}$$

gdzie:

$$f_1(t) = g_1(t) = \acute{o}\cos\beta t^2, \tag{III.33}$$

$$f_2(t) = g_2(t) = \acute{o}\sin\beta t^2. \tag{III.34}$$

W celu wyznaczenia optymalnego profilu temperatury wprowadzimy hamiltonian oraz równania na zmienne sprzężone. Następnie zbadamy warunki, jakie muszą spełniać parametry układu oraz zakłócenia, aby hamiltonian osiągnął wartość maksymalną.

$$H = -\lambda_A(k_1 + k_2)G(t)x + k_1G(t)x - (k_1 + k_2)K\sum_{i=1}^{2}\lambda_{p_i}f_i(t), \tag{III.35}$$

$$\frac{d\lambda_A}{dt} = \lambda_A(k_1 + k_2)G(t) - k_1G(t), \quad \lambda_A(1) = 0, \tag{III.36}$$

$$\frac{d\lambda_{p_i}}{dt} = K\lambda_A(k_1 + k_2)f_i(t)x - Kk_1f_i(t)x, \quad \lambda_{p_i}(1) = 0, \quad i = 1,2, \tag{III.37}$$

gdzie:

$$G(t) = 1 + K(g_1(t)p_1(t) + g_2(t)p_2(t)). \tag{III.38}$$

Dodatniość powyższej funkcji $G(t)$ może być sprawdzona za pomocą następującej nierówności

$$G(t) \geq 1 + K(g_1(t)p_{1_{max}}(t) + g_2(t)p_{2_{max}}(t)) > 0 \quad t \in [0, 1].$$

gdzie $p_{i_{max}}(t)$ są określone wzorami (I.74), dla
$a_2 = -(k_1(T_{max}) + k_2(T_{max}))K$.
Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami zbadamy kiedy spełnione są następujące warunki:

$$\frac{\partial B}{\partial T} > 0, \tag{III.39}$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0, \tag{III.40}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0. \tag{III.41}$$

Warunek (III.39) jest zawsze spełniony dla dodatnich parametrów układu, tzn. E_1, R, k_{10}.
Warunek (III.30) przyjmuje następującą postać

$$RT^2\frac{\partial H}{\partial T} = \left[-\lambda_A(E_1k_1 + E_2k_2) + E_1k_1\right]G(t)x - (E_1k_1 + E_2k_2)K\sum_{i=1}^{2}\lambda_{p_i}f_i(t) = 0. \tag{III.42}$$

Wyznaczając z niego $K\sum_{i=1}^{2}\lambda_{p_i}f_i(t)$ i wykorzystując przy obliczeniu $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$, otrzymamy

$$R^2T^4\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} = G(t)xE_1E_2k_1k_2\frac{E_1 - E_2}{E_1k_1 + E_2k_2}. \tag{III.43}$$

Wyrażenie to będzie zawsze ujemne dla $E_2 > E_1$.

Zgodnie z wynikami otrzymanymi wcześniej optymalny profil temperatury dla zagadnienia (II.1) - (II.5), (III.25) będzie składał się z trzech lub dwóch części i będzie miał postać (III.22)

$$T(t) = \begin{cases} T_{max} & \text{dla} \quad t_p \leq t \leq 1 \\ T(t) & \text{dla} \quad t_k \leq t \leq t_p, \\ T_{min} & \text{dla} \quad 0 \leq t \leq t_k \end{cases} \tag{III.44}$$

przy czym w środkowym przedziale temperatura będzie spełniała następujące równanie różniczkowe.

$$\frac{dT}{dt} = \left[\frac{1}{RT^2} G(t) \times E_1 E_2 k_1 k_2 \frac{E_2 - E_1}{E_1 k_1 + E_2 k_2}\right]^{-1} \left[\frac{2\beta t}{\cos \beta t^2} \left[-\lambda_A (E_1 k_1 + E_2 k_2) + \right.\right.$$

$$\left. + E_1 k_1 \right] \times \left[\sigma \sin \beta t^2 + K \sigma_2 \sigma^2 (\sin^2 \beta t^2 - \cos^2 \beta t^2)\right] - K\sigma^2 (E_1 k_1 +$$

$$\left. + E_2 k_2) \lambda_{p_2} + G^2(t) k_1 k_2 \times (E_2 - E_1) + K^2 \sigma^2 \times k_1 k_2 (E_2 - E_1)\right]. \qquad \text{(III.45)}$$

Trudno dokonać oszacowania $\frac{dT}{dt}$ w ogólnej postaci i dlatego wyznaczenie optymalnego profilu temperatury może odbywać się jedynie na drodze numerycznej, przy czym analityczna znajomość pochodnej znacznie ułatwia obliczenia. Tak otrzymany optymalny profil temperatury ma następującą interpretację fizyczną. Na początku reaktora, kiedy stężenie substratu A jest największe, należy dać niską temperaturę tak, aby stałe szybkości reakcji nie były zbyt duże, bo w przeciwnym razie nastąpi zbyt szybkie powstawanie niekorzystnego produktu B_2. Następnie, gdy stężenie substratu zaczyna maleć, można podwyższać temperaturę, aż do osiągnięcia temperatury maksymalnej, którą należy utrzymywać do końca reaktora.

Przykład 3

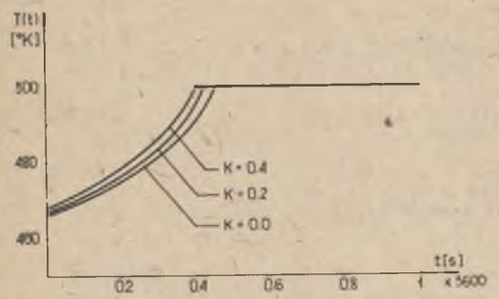
Znajdziemy optymalny profil temperatury oraz stężenie drugiego składnika (B) na końcu reaktora dla układu dwóch reakcji równoległych dla następujących parametrów:

$k_{10} = 1.008 \times 10^5$,
$k_{20} = 2.22 \times 10^5$,
$E_1 = 41900$ J/mol,
$E_2 = 83800$ J/mol,
$R = 8.31$ J/mol deg,
$\Gamma_A(0) = 1$
$\Gamma_B(0) = 0$,
$T_{max} = 500$ K,
$T_{min} = 400$ K.

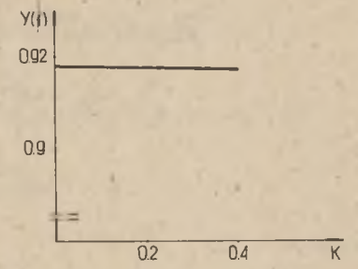
Proces stochastyczny o wartości średniej $E\eta = 0$ posiada funkcję korelacji o postaci

$$R_1(s,\tau) = 9 \cos 0.5(\tau^2 - s^2).$$

Wyznaczony numerycznie optymalny profil temperatury dla różnych wartości K został przedstawiony na rys. 1, natomiast zależność średniego stężenia drugiego składnika na końcu reaktora w funkcji parametru K została zamieszczona na rys. 2.



Rys. 1. Optymalny profil temperatury w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia niestacjonarnego o funkcji korelacji $R(s,\tau) = \sigma^2 \cos\beta(\tau^2 - s^2)$ (wg przykładu 3)



Rys. 2. Stężenie końcowe drugiego składnika w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia niestacjonarnego o funkcji korelacji $R(s,\tau) = \sigma^2 \cos\beta(\tau^2 - s^2)$ (wg przykładu 3)

3. Zakłócenie stacjonarne

Niech będzie dana funkcja korelacji procesu $\eta(t,\omega)$

$$R(s,\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-\alpha |s - \tau|\right\} \qquad \text{(III.46)}$$

Podobnie jak poprzednio dla uproszczenia będziemy zakładać, że wartość średnia procesu

$$E_\eta(t,\omega) = z(t) = 0$$

oraz

$$t_f = 1, \quad x_o = 1, \quad \sigma = 1. \qquad \text{(III.47)}$$

Korzystając z zależności (II.22) możemy napisać

$$\frac{K^2}{2} \int_0^t \int_0^t A[T(s)] A[T(\tau)] K(s,\tau) ds\, d\tau = \int_0^t A[T(s)] Kf(s) \int_0^s A[T(\tau)] Kg(\tau) d\tau ds. \qquad \text{(III.48)}$$

gdzie:

$$f(s) = e^{-\alpha s}, \quad g(\tau) = e^{\alpha \tau}. \qquad \text{(III.49)}$$

Równoważny dla układu (II.1) - (II.5), (III.47) problem deterministyczny ma następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = A[T(t)] \left[1 + Kf(t)q(t)\right] x, \quad x(0) = 1. \qquad \text{(III.50)}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[T(t)]\,[1 + Kf(t)q(t)]\,x, \quad y(0) = 0, \tag{III.51}$$

$$\frac{dq}{dt} = KA[T(t)]g(t), \quad q(0) = 0, \tag{III.52}$$

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} y(1). \tag{III.53}$$

Oznaczmy

$$G(t) = 1 + Kf(t)q(t). \tag{III.54}$$

Hamiltonian oraz równania, które spełniają zmienne sprzężone, będą wyrażały się wzorami (III.35) - (III.37), przy czym $i = 1$.
Warunek optymalności (III.42) będzie wyglądał następująco:

$$RT^2 \frac{\partial H}{\partial T} = \left[-\lambda_A(E_1k_1 + E_2k_2) + E_1k_1\right]G(t)x - K(E_1k_1 + E_2k_2)\lambda_q g(t) = 0. \tag{III.55}$$

Wyznaczając stąd $K\lambda_q g$, otrzymamy, że $R^2T^4 \frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$ podobnie jak w przypadku zakłócenia stacjonarnego spełnia warunek (III.43).
Będziemy również zakładać, że $G(t) > 0$, przy czym dodatność tej funkcji może być sprawdzona tym razem za pomocą nierówności

$$G(t) \geq 1 + Kf(t)q_{max}(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1], \tag{III.56}$$

gdzie

$$q_{max}(t) = -\frac{K}{\alpha}(k_1(T_{max}) + k_2(T_{max}))\exp\{\alpha t\}.$$

Stąd otrzymamy, że optymalny profil temperatury ma postać (III.44) pod warunkiem, że stałe α i K są tak dobrane, że spełniają następujące nierówności:

$$1 + 2Kf(t)q(t) > 0,$$

$$0 \leq \alpha < \frac{\left[K^2f(t)g(t) + \left[1 + Kf(t)q(t)\right]^2 k_1k_2(E_2 - E_1)\right]}{\left[1 + 2Kf(t)q(t)\right]E_1k_1}. \tag{III.57}$$

Wynika to z faktu, że wówczas pochodna $\frac{dT}{dt}$ określona wzorem (III.58) jest dodatnia.

$$\frac{dT}{dt} = \left[\frac{1}{RT^2}G(t)E_1E_2k_1k_2\frac{E_2 - E_1}{E_1k_1 + E_2k_2}\right]^{-1}\left[K^2f(t)g(t)k_1k_2(E_2 - E_1) + k_1k_2G^2(t)(E_2 - E_1) + \alpha\left[1 + 2Kf(t)q(t)\right]\left[\lambda_A(E_1k_1 + E_2k_2) - E_1k_1\right]\right], \tag{III.58}$$

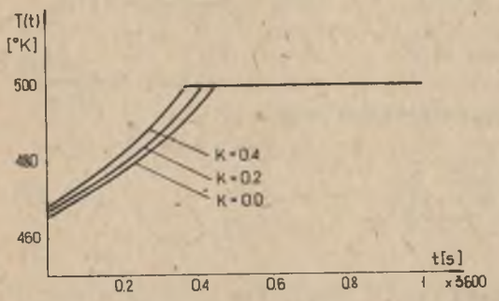
gdzie $G(t)$ jest określona wzorem (III.54).

Przykład 4

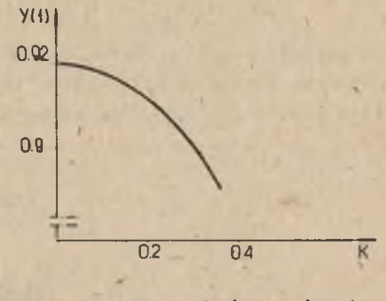
Znajdziemy optymalny profil temperatury oraz stężenie końcowe drugiego składnika na końcu reaktora dla układu dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu dla parametrów podanych w przykładzie 3 oraz procesu stochastycznego $\eta(t,\omega)$ o wartości średniej $E\eta = 0$, który posiada funkcję korelacji o postaci

$$R_2(s,\tau) = \exp\left\{-0.001\,|\tau - s|\right\}$$

Wyznaczony numerycznie optymalny profil dla różnych wartości K został przedstawiony na rys. 3, natomiast zależność średniego stężenia drugiego składnika (B) na końcu reaktora w funkcji parametru K została pokazana na rys. 4.



Rys. 3. Optymalny profil temperatury w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia stacjonarnego o funkcji korelacji $R(s,\tau) = e^{-\alpha|\tau - s|}$ (wg przykładu 4)



Rys. 4. Stężenie końcowe drugiego składnika w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia stacjonarnego o funkcji korelacji $R(s,\tau) = e^{-\alpha|\tau - s|}$ (wg przykładu 4)

4. Układ n reakcji równoległych w przypadku działania zakłócenia o charakterze białego szumu (uwagi ogólne)

Z opisanego w punkcie pierwszym tego rozdziału modelu stochastycznego wynika, że występujące w układzie (II.1) - (II.5) funkcje $A[\cdot]$ i $B[\cdot]$ mają następującą postać

$$A[T(t)] = -\sum_{i=1}^{n} k_i, \quad B[T(t)] = k_1, \tag{III.59}$$

gdzie

$$k_i = k_{i0} \exp\left(-\frac{E_i}{RT(t)}\right), \quad i = 1,\ldots,n \tag{III.60}$$

a zakłócenia mają charakter białego szumu.
Wówczas korzystając z układu (II.14) - (II.16) możemy zapisać równoważny dla układu (II.1) - (II.5) problem deterministyczny:

$$\frac{dx}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} k_i \left[1 - \alpha \sum_{i=1}^{n} k_i\right] x, \quad x(0) = 1, \tag{III.61}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 \left[1 - \alpha \sum_{i=1}^{n} k_i\right] x, \quad y(0) = 0, \tag{III.62}$$

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} y(1), \tag{III.63}$$

gdzie:

$$x(t) = E\Gamma_A(t), \quad y(t) = E\Gamma_B(t) \tag{III.64}$$

$$\alpha = \frac{K^2}{2}. \tag{III.65}$$

W celu wyznaczenia optymalnego profilu temperatury wprowadzimy hamiltonian oraz równanie, które spełnia zmienna sprzężona λ_A.

$$H = -\lambda_A c_n \left[1 - \alpha c_n\right] x + k_1 \left[1 - \alpha c_n\right] x, \tag{III.66}$$

$$\frac{d\lambda_A}{dt} = \lambda_A c_n \left[1 - \alpha c_n\right] - k_1 \left[1 - \alpha c_n\right], \quad \lambda_A(1) = 0, \tag{III.67}$$

gdzie

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{III.68}$$

Podamy teraz kilka uwag, które ułatwią wyznaczenie optymalnego profilu.

UWAGA 1

Z warunku stabilności stochastycznej w skończonym czasie (definicja 12) wynika, że[1)]

$$1 - 2\alpha c_n > 0. \tag{III.69}$$

UWAGA 2

Hamiltonian wzdłuż drogi optymalnej dla $0 \leq t \leq 1$ jest dodatni.

UWAGA 3

Jeśli

$$0 \leq \alpha \leq \frac{E_1}{E_1 c_n + \sum_{i=1}^{n} E_i k_i}, \tag{III.70}$$

to w punkcie $t = 1$ optymalną temperaturą jest $T = T_{max}$.

UWAGA 4

Hamiltonian osiąga maksimum lokalne, gdy $E_1 < E_2, \ldots, E_n$. Nie może natomiast osiągnąć maksimum lokalnego gdy $E_1 > E_2, \ldots, E_n$.

---

1) Nierówność ta jest również warunkiem wystarczającym eksponencjalnej p-stabilności w sensie definicji 7. Może być ona spełniona jedynie dla $T > 0$, co wynika z budowy i własności funkcji $k_i(T)$.

W celu wykazania słuszności tej uwagi obliczamy wyrażenie $RT^2 \frac{\partial H}{\partial T}$ i przyrównajmy je do zera.

$$RT^2 \frac{\partial H}{\partial T} = -\lambda_A \sum_{i=1}^{n} E_i k_i \left[1 - \alpha c_n\right] x + \lambda_A c_n \alpha \sum_{i=1}^{n} E_i k_i x +$$

$$+ E_1 k_1 \left[1 - \alpha c_n\right] x - \alpha k_1 \sum_{i=1}^{n} E_i k_i \, x = 0, \qquad \text{(III.71)}$$

stąd

$$\lambda_A = k_1 \frac{E_1\left[1 - \alpha c_n\right] - \alpha \sum_{i=1}^{n} E_i k_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i k_i \left[1 - 2\alpha c_n\right]}. \qquad \text{(III.72)}$$

Obliczając następnie $R^2T^4 \frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$, otrzymamy

$$R^2T^4 \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} = xk_1 \frac{E_1\left[1 - \alpha c_n\right]\left[1 - 2\alpha c_n\right] \sum_{i=2}^{n} (E_1 - E_i) E_i k_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i k_i \left[1 - 2\alpha c_n\right]} +$$

$$+ xk_1 \frac{2\alpha^2 \left(\sum_{i=1}^{n} E_i k_i\right)^2 \sum_{i=2}^{n} (E_1 - E_i) k_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i k_i \left[1 - 2\alpha c_n\right]}. \qquad \text{(III.73)}$$

Znak drugiej pochodnej zależy od znaku wyrażenia w liczniku, ponieważ mianownik jest dodatni ze względu na (III.69). Stąd jeśli E_1 jest najmniejszą spośród wartości energii aktywacji $E_1, E_2, \ldots, E_n$, to zawsze $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0$. Jeśli E_1 jest największą wartością spośród $E_1, E_2, \ldots, E_n$, to zawsze $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0$.

Jeżeli natomiast E_1 nie jest ani największą ani najmniejszą wielkością spośród $E_1, \ldots, E_n$, to znak drugiej pochodnej $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$ zależy od temperatury

oraz intensywności zakłóceń α i określenie jego wymaga dodatkowej analizy.

UWAGA 5

W przedziale $T_{min} \leqslant T \leqslant T_{max}$ optymalny profil spełnia równanie różniczkowe.

$$\frac{dT}{dt} = RT^2 \frac{\sum_{i=2}^{n} (E_1 - E_i) k_i \left[1 - \alpha c_n\right]^2 \left[1 - 2\alpha c_n\right] \sum_{i=1}^{n} E_i k_i}{E_1\left[1 - \alpha c_n\right]\left[1 - 2\alpha c_n\right] \sum_{i=2}^{n} (E_1 - E_i) k_i E_i + 2\alpha^2 \left(\sum_{i=1}^{n} E_i k_i\right)^2 \sum_{i=2}^{n} (E_1 - E_i) k_i}. \qquad \text{(III.74)}$$

Równanie to otrzymuje się z równania (III.71), dzieląc je przez x, a następnie różniczkując względem zmiennej t i podstawiając wyrażenia (III.67), (III.72).

Wyznaczanie optymalnego profilu temperatury.

Przypadek 1; gdy $E_1 < E_2$, $E_1 < E_3, \ldots, E_1 < E_n$.

Jeśli $\frac{\partial H}{\partial T} = 0$, to $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0$ i $\frac{dT}{dt} > 0$, czyli profil jest krzywą rosnącą lub w szczególnym przypadku izotermą $T = T_{max}$.

Optymalny profil buduje się od końca, tzn. od $t = 1$ do $t = 0$. Jest to możliwe ze względu na fakt, że w warunku optymalności (III.71) nie wykorzystuje się wielkości, do obliczenia których konieczna jest znajomość całego sterowania.

W najogólniejszym przypadku profil składa się z trzech części i opisany jest wzorem (III.44), przy czym w środkowym przedziale spełnia równanie różniczkowe (III.74). Punkt t_p wyznaczamy w sposób następujący; całkujemy równanie (III.67) w granicach od t_p do 1, podstawiając za $k_i = k_{i_{max}} = k_i(T_{max})$, a następnie porównujemy z $\lambda_A(T_{max})$ wyznaczonym z równania (III.72) dla $k_i(T_{max})$. Otrzymamy wówczas

$$t_p = 1 + \frac{1}{c_{n_{max}}\left[1 - \alpha c_{n_{max}}\right]} \ln \frac{\sum_{i=2}^{n} (E_i - E_1) k_{i_{max}} \left[1 - \alpha c_{n_{max}}\right]}{\sum_{i=1}^{n} E_i k_{i_{max}} \left[1 - 2\alpha c_{n_{max}}\right]}. \qquad \text{(III.75)}$$

gdzie

$$c_{n_{max}} = \sum_{i=1}^{n} k_i(T_{max}). \qquad (III.76)$$

Punkt t_k wyznaczamy z warunku $T(t_k) = T_{min}$.

Przypadek 2; gdy $E_1 > E_2, \ldots, E_1 > E_n$.

Optymalnym profilem będzie tutaj izoterma $T = T_{max}$.

Przypadek 3; gdy E_1 nie jest ani największą ani najmniejszą spośród wartości $E_1, \ldots, E_n$.

Przypadek ten wymaga szczegółowej analizy, którą w tej pracy przeprowadzimy dla układu trzech reakcji równoległych.

4a. Układ dwóch reakcji równoległych ($n = 2$)

W tym szczególnym przypadku równoważny problem deterministyczny będzie następującej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = -(k_1 + k_2)\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right]x, \quad x(0) = 1,$$

$$\frac{dv}{dt} = k_1\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right]x, \quad y(0) = 0, \qquad (III.77)$$

$$I = \max_{T_{min} \leq T(t) \leq T_{max}} y(1).$$

Dla tego układu mogą zajść tylko dwa przypadki, tzn. $E_2 < E_1$ lub $E_1 < E_2$. W przypadku pierwszym optymalny profil jest stały $T_{opt}(t) = T_{max}$, natomiast w przypadku drugim, korzystając z ogólnej metody wyznaczania optymalnego profilu opisanej w punkcie drugim tego rozdziału można wykazać [44], że gdy $E_2 > E_1$, to profil ma postać (III.44), przy czym t_p wyraża się następującym wzorem

$$t_p = 1 + \frac{1}{(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\left[1 - \alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]} \cdot$$

$$\cdot \ln \frac{(E_2 - E_1)k_{2_{max}}\left[1 - \alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]}{(E_1 k_{1_{max}} + E_2 k_{2_{max}})\left[1 - 2\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]}. \qquad (III.78)$$

temperatura $T(t)$ w przedziale $[T_{min}, T_{max}]$ spełnia następujące równanie:

$$\frac{dT}{dt} = F(T),$$

$$F(T) = RT^2 \frac{\left[1-\alpha(k_1+k_2)\right]^2\left[1-2\alpha(k_1+k_2)\right]\left[E_1k_1+E_2k_2\right]}{E_1E_2\left[1-2\alpha(k_1+k_2)\right]\left[1-\alpha(k_1+k_2)\right] + 2\alpha^2\left[E_1k_1+E_2k_2\right]^2}. \qquad (III.79)$$

Można również wykazać [44], że w przypadku deterministycznym $\alpha = 0$, optymalny profil temperatury przebiega "bardziej stromo" niż w przypadku stochastycznym, tzn.

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{stoch} < \left.\frac{dT}{dt}\right|_{det}.$$

Wynik ten jest zgodny z intuicją, bowiem zwiększenie działania szumu powoduje zmniejszenie stałych szybkości reakcji, a co zatem idzie konieczność wcześniejszego zwiększania temperatury w celu prowadzenia reakcji optymalnej.

Będziemy zakładać, że współczynnik intensywności szumu α spełnia oszacowanie

$$0 \leq \alpha < \min(a_2, a_3). \qquad (III.80)$$

gdzie:

$$a_2 = \frac{k_{20}E_2(E_2 - E_1)k_{1_{max}}^{\frac{E_2-2E_1}{E_1}}}{2\left(k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}E_1 + k_{20}E_2k_{1_{max}}^{\frac{E_2-E_1}{E_1}}\right)^2 + 2k_{20}E_2(E_2-E_1)k_{1_{max}}^{\frac{E_2-2E_1}{E_1}}(k_{1_{max}}+k_{2_{max}})}, \qquad (III.81)$$

$$a_3 = \frac{1}{2k_{1_{max}} + \frac{E_1 + E_2}{E_1}k_{2_{max}}}. \qquad (III.82)$$

Oszacowanie a_2 wynika z twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego i jest pokazane w Dodatku 1, natomiast a_3 wynika ze wzoru ogólnego (III.70) dla $n = 2$.

Korzystając z analitycznej postaci optymalnego profilu można podać analityczne formuły służące do wyliczenia stężenia końcowego obydwu produktów.

$$x(1) = x(t_p)\exp\left\{-(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\left[1 - \alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right](1 - t_p)\right\}, \quad \text{(III.83)}$$

$$y(1) = y(t_p) + x(t_p)\frac{k_{1_{max}}}{k_{1_{max}} + k_{2_{max}}}\left[1 - \exp\left\{-(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\left[1 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right](1 - t_p)\right\}\right], \quad \text{(III.84)}$$

gdzie:

$$x(t_p) = \frac{(E_1k_{1_{max}} + E_2k_{2_{max}})\left[1 - 2\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]x(t_k)}{k_{1_{max}}k_{2_{max}}\left[1 - \alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]^2 M_{min}}, \quad \text{(III.85)}$$

$$y(t_p) = \int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{E_1E_2\left[1 - \alpha(k_1+k_2)\right]\left[1-2\alpha(k_1+k_2)\right]+2\alpha^2(E_1k_1+E_2k_2)^2}{k_2RT^2\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right]^3 M_{min}}x(t_k)dT+y(t_k), \quad \text{(III.86)}$$

$$M_{min} = \frac{(E_1k_{1_{min}} + E_2k_{2_{min}})\left[1 - 2\alpha(k_{1_{min}} + k_{2_{min}})\right]}{k_{1_{min}}k_{2_{min}}\left[1 - \alpha(k_{1_{min}} + k_{2_{min}})\right]^2}, \quad \text{(III.87)}$$

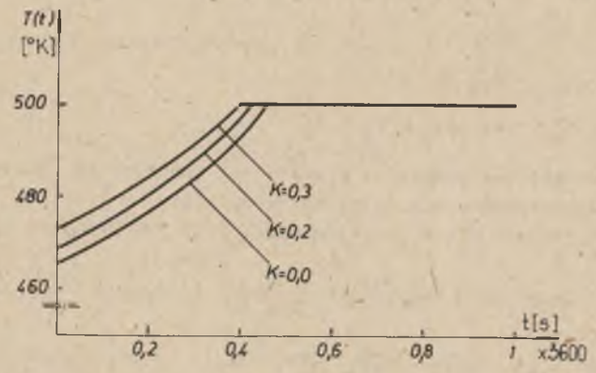
$$x(t_k) = \exp\left\{-(k_{1_{min}} + k_{2_{min}})\left[1 - \alpha(k_{1_{min}} + k_{2_{min}})\right]t_k\right\}, \quad \text{(III.88)}$$

$$y(t_k) = \frac{k_{1_{min}}}{k_{1_{min}} + k_{2_{min}}}\left[1 - x(t_k)\right], \quad \text{(III.89)}$$

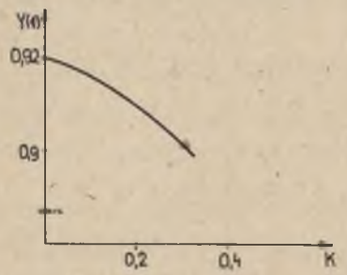
$$k_{i_{min}} = k_i(T_{min}), \quad k_{i_{max}} = k_i(T_{max}).$$

Przykład 5

Dla układu dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu dla parametrów podanych w przykładzie 3 oraz procesu stochastycznego $\eta(t,\omega)$ będącego białym szumem, tzn. $R(s,\tau) = \delta(s - \tau)$ optymalny profil temperatury dla różnych wartości K został przedstawiony na rys. 5, natomiast zależność stężenia końcowego drugiego składnika w funkcji K została zamieszczona na rys. 6.



Rys. 5. Optymalny profil temperatury w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 5)



Rys. 6. Stężenie końcowe drugiego składnika w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 5)

4b. Układ trzech reakcji równoległych $(n = 3)$[1)]

W tym przypadku równoważny problem deterministyczny będzie miał postać

$$\frac{dx}{dt} = -(k_1 + k_2 + k_3)\left[1 - \alpha(k_1 + k_2 + k_3)\right]x, \quad x(0) = 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1\left[1 - \alpha(k_1 + k_2 + k_3)\right]x, \quad y(0) = 0 \quad \text{(III.90)}$$

$$I = \max_{T_{min} \le T(t) \le T_{max}} y(1).$$

[1)] Wyniki otrzymane w tym punkcie są uogólnieniem rezultatów dotyczących modeli deterministycznych zawartych w pracy [41].

Dla tego układu mogą zajść wszystkie trzy wcześniej omawiane przypadki:

1) $E_1 < E_2$, $E_1 < E_3$,

2) $E_1 > E_2$, $E_1 > E_3$,

3) $E_2 < E_1 < E_3$ lub $E_3 < E_1 < E_2$.

Ponieważ pierwsze dwa przypadki zostały już poprzednio szczegółowo omówione, dlatego zajmiemy się teraz tylko ostatnim.
Wyrażenie znajdujące się w liczniku wzoru (III.73) przyjmie postać

$$E_1\left[1 - \alpha(k_1+k_2+k_3)\right]\left[1 - 2\alpha(k_1+k_2+k_3)\right]\left[(E_1 - E_2)E_2k_2 + (E_1 - E_3)E_3k_3\right] +$$

$$2\alpha^2(E_1k_1 + E_2k_2 + E_3k_3)^2\left[(E_1 - E_2)k_2 + (E_1 - E_3)k_3\right]. \quad \text{(III.91)}$$

Wyrażenie powyższe potraktujemy jako funkcję temperatury i oznaczymy jej miejsce zerowe przez T_s.
W podobny sposób wyznaczamy miejsca zerowe następujących wyrażeń:

$$(E_1 - E_2)E_2k_2 + (E_1 - E_3)E_3k_3, \quad \text{(III.92)}$$

oraz

$$(E_1 - E_2)k_2 + (E_1 - E_3)k_3 \quad \text{(III.93)}$$

i oznaczamy je odpowiednio przez T_i i T_v, wówczas:

$$T_i = -\frac{E_2 - E_3}{R}\,\frac{1}{\ln\left[\frac{(E_3 - E_1)E_3k_{30}}{(E_1 - E_2)E_2k_{20}}\right]}, \quad \text{(III.94)}$$

$$T_v = -\frac{E_2 - E_3}{R}\,\frac{1}{\ln\left[\frac{(E_3 - E_1)k_{30}}{(E_1 - E_2)k_{20}}\right]}. \quad \text{(III.95)}$$

Łatwo można wykazać, że gdy $T_v > 0$, to słuszne są następujące nierówności

$$0 < T_i < T_s < T_v, \quad \text{(III.96)}$$

przy czym T_s z uwagi na przestępny charakter równania (III.91) najlepiej wyznaczyć na drodze numerycznej.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że dla $T_s > 0$ mogą zajść następujące przypadki:

$$T_s > 0 \begin{cases} T > T_s \rightarrow \dfrac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0 \\ T < T_s \rightarrow \dfrac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0, \\ T = T_s \rightarrow \dfrac{\partial^2 H}{\partial T^2} = 0 \end{cases} \quad \text{(III.97)}$$

$$T_s < 0 \quad T > 0 > T_s \rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0.$$

Jeżeli temperatura $T_s < 0$, to dla warunków procesu chemicznego ($T > 0$) druga pochodna $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$ będzie dodatnia.
Jeżeli temperatura $T_s > 0$ znajdzie się poza przedziałem $\left[T_{min}, T_{max}\right]$, to wówczas w tym samym przedziale $\left[T_{min}, T_{max}\right]$ druga pochodna $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$ będzie posiadać stały znak dodatni lub ujemny (w zależności czy $T_s > T_{max}$, czy też $T_s < T_{min}$).
Jeżeli temperatura $T_s > 0$ znajdzie się wewnątrz przedziału $\left[T_{min}, T_{max}\right]$, to zgodnie ze wzorem (III.97) przedział ten zostanie podzielony temperaturą T_s na dwie części o różnych znakach drugiej pochodnej $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$. Wykażemy dalej, że podobnie jak w modelu deterministycznym określenie temperatury T_s, przy konstrukcji optymalnego profilu temperatury, nie będzie konieczne.
Zgodnie ze wzorem (III.74) temperatura $T(t)$ w pewnym przedziale zawartym w $\left[T_{min}, T_{max}\right]$ będzie spełniała następujące równanie

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT^2\left[(E_1 - E_2)k_2 + (E_1 - E_3)k_3\right](1 - \alpha c_3)^2(1 - 2\alpha c_3)\sum_{i=1}^{3} E_ik_i}{E_1(1-\alpha c_3)(1-2\alpha c_3)\left[(E_1-E_2)E_2k_2+(E_1-E_3)E_3k_3\right]+2\alpha^2\left(\sum_{i=1}^{3}E_ik_i\right)^2\left[(E_1-E_2)k_2+(E_1-E_3)k_3\right]} \quad \text{(III.98)}$$

a zatem znak tej pochodnej będzie zależał od wyrażeń (III.92) i (III.93).

Można wykazać słuszność następującego lematu.

Lemat

O charakterze optymalnego profilu temperatury dla trzech reakcji równoległych ($E_2 < E_1 < E_3$ lub $E_3 < E_1 < E_2$) decyduje temperatura T_v będąca miejscem zerowym funkcji określonej wzorem (III.93).

Jeżeli:

$T_v > T_{max}$ ⟶ - optymalny profil temperatury jest izotermą $T=T_{max}$,

$T_{min} < T_v < T_{max}$ ⟶ - optymalny profil temperatury jest krzywą rosnącą ograniczoną od dołu temperaturą T_s,

$T_{min} > T_v > 0$ ⟶ - optymalny profil temperatury jest krzywą rosnącą ograniczoną od dołu temperaturą T_{min},

$T_v < 0$ ⟶ - optymalny profil temperatury jest izotermą $T=T_{max}$.

Temperatury T_s i T_i nie mają bezpośredniego wpływu na charakter profilu.

Dowód

Zauważmy, że znak pochodnej $\frac{dT}{dt}$, zależy od znaków wyrażeń (III.92) i (III.93), natomiast znak drugiej pochodnej $\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$ zależy jedynie od znaku wyrażenia (III.91). W związku z tym mogę zajść następujące przypadki.
Dla $T_v > 0$:

$$T_i < T_s < T_v < T \Rightarrow \frac{dT}{dt} > 0 \quad i \quad \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0,$$

$$T_i < T_s < T < T_v \Rightarrow \frac{dT}{dt} < 0 \quad i \quad \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} < 0, \qquad \text{(III.99)}$$

$$T_i < T < T_s < T_v \Rightarrow \frac{dT}{dt} > 0 \quad i \quad \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0, \qquad \text{(III.99)}$$

$$T < T_i < T_s < T_v \Rightarrow \frac{dT}{dt} > 0 \quad i \quad \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0.$$

Pozostaje do rozważenia przypadek, gdy $T_v < 0$. Pokażemy, że wartość temperatury T_s może być zarówno dodatnia jak i ujemna oraz że nie wpływa to na profil temperatury. Mamy bowiem

$$\text{Dla } T_v < 0 \begin{cases} T_s < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0 \quad \forall T > 0 \\ T_s > 0 \begin{cases} 0 < T < T_s \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} > 0. \\ T_s < T \Rightarrow \frac{dT}{dt} < 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(III.100)}$$

Wynika to ze wzorów (III.97) oraz z faktu, że dla $T_v < 0 < T$ wyrażenie

$$k_2(E_1 - E_2) + k_3(E_1 - E_3) > 0. \qquad \text{(III.101)}$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika teza lematu.

UWAGA 6

W dotychczasowych rozważaniach intensywność szumu (ściślej współczynnik α) była ograniczona dwiema nierównościami (III.69) i (III.70). Oznaczając podobnie jak w przypadku dwóch reakcji przez a_2 oszacowanie wynikające z warunku istnienia sterowania optymalnego możemy podać ograniczenie na współczynnik α.

$$0 \leq \alpha \leq \min\left(\frac{E_1}{E_1 c_{n_{max}} + \sum_{i=1}^{n} E_i k_{i_{max}}}, \frac{1}{2c_{n_{max}}}, a_2 \right). \qquad \text{(III.102)}$$

Tak samo jak w układzie dwóch reakcji równoległych można podać wzory analityczne, określające stężenia produktów na końcu reaktora.

Przykład 6

Znajdziemy optymalny profil temperatury w układzie trzech reakcji równoległych pierwszego rzędu dla przypadku $E_2 < E_1 < E_3$ dla następujących parametrów.

$k_{10} = e^{20}$ $\qquad$ $E_1 = 83800$ J/mol

$k_{20} = e^{10}$ $\qquad$ $E_2 = 41900$ J/mol

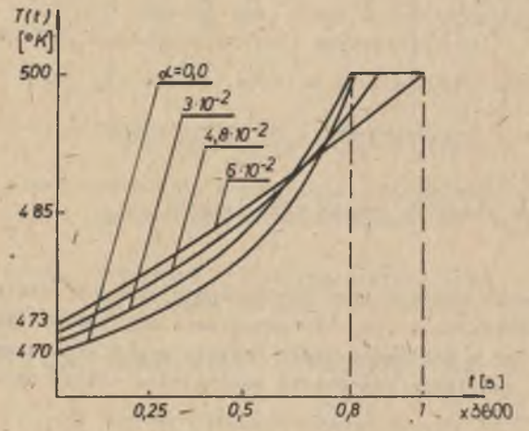
$k_{30} = e^{32}$ $\qquad$ $E_3 = 122700$ J/mol

$R = 8.31$ J/mol ^oK $\qquad$ $T_{max} = 500$ K

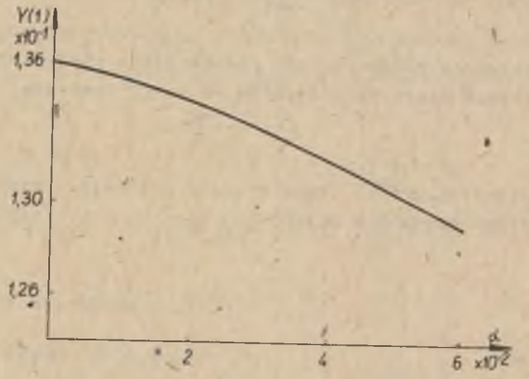
$T_{min} = 400$ K

$$\Gamma_A(0) = 1, \quad \Gamma_B(0) = 0.$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach na rys. 7 i 8 zamieszczono optymalne profile temperatury i stężenie końcowe drugiego składnika w funkcji współczynnika α.



Rys. 7. Optymalny profil temperatury w układzie trzech reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 6)



Rys. 8. Stężenie końcowe drugiego składnika w układzie trzech reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 6)

5. Uwagi na temat innych rodzajów reakcji oraz kryteriów optymalizacji

We wszystkich poprzednich punktach tego rozdziału zajmowaliśmy się reakcjami równoległymi, których modele matematyczne były układami quasi-liniowymi. W przypadku reakcji szeregowych można przeprowadzić podobne rozważania, będą one jednak bardziej złożone, natomiast w przypadku reakcji szeregowo-równoległych dokładna analiza możliwa jest jedynie, gdy zakłócenia mają charakter białego szumu*). Otrzymane wówczas równoważne problemy optymalizacyjne są nieliniowe i bardzo rozbudowane, przez co wyznaczanie optymalnego profilu temperatury mogłoby się odbywać jedynie na drodze numerycznej. Reakcja, dla której w oparciu o wyniki uzyskane w poprzednim rozdziale można otrzymać optymalny profil temperaturowy, jest reakcja odwracalna.

5a. Reakcja odwracalna

Rozważmy prostą reakcję odwracalną pierwszego rzędu typu $A \rightleftharpoons B$. Równanie kinetyczne opisujące zachodzącą przemianę w modelu stochastycznym jest następujące

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left[-(k_1 + k_2)\Gamma + k_2\Gamma_0\right]\left[1 + K\eta(t,\omega)\right], \qquad \text{(III.103)}$$

gdzie:

Γ, Γ_0 - bezwymiarowe stężenia składnika A,

K, k_1, k_2, $\eta(t,\omega)$ - są tak samo określone jak w układzie reakcji równoległych.

Warunek początkowy przyjmiemy jako deterministyczny

$$\Gamma(0) = \Gamma_0 = \text{const}. \qquad \text{(III.104)}$$

oraz ograniczenia na temperaturę $T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}$.

Naszym celem jest znalezienie optymalnego profilu temperatury $T(t)$, tzn. takiego, który minimalizuje średnie stężenie składnika A w punkcie końcowym

*) Uwaga ta dotyczy również reakcji wyższych rzędów.

$$I = \min_{T_{min} \leqslant T(t) < T_{max}} E\Gamma(t_f). \qquad \text{(III.105)}$$

Uzasadnienie przyjętego modelu w przypadku reakcji odwracalnych jest identyczne jak w przypadku modelu reakcji równoległych szczegółowo opisanego w punkcie 1 tego rozdziału, z tą tylko różnicą, że jako kryterium przyjmuje się minimalizację stężenia składnika A na końcu reaktora, co jest równoważne maksymalizacji składnika B na końcu reaktora.

Rozwiązanie równania (III.103) dla realizacji przyjmuje następującą postać

$$\Gamma(t) = \Gamma_o \exp\left\{-\int_0^t \left[k_1[T(s)] + k_2[T(s)]\right]\left[1 + K\eta(s,\omega)\right] ds\right\} +$$

$$+ \Gamma_o \int_0^t k_2[T(\tau)]\left[1 + K\eta(\tau,\omega)\right] \exp\left\{-\int_\tau^t \left[k_1[T(s)] + k_2[T(s)]\right]\left[1 + K\eta(s,\omega)\right] ds\right\} d\tau. \qquad \text{(III.106)}$$

Korzystając z tożsamości

$$\int_{t_o}^t L(\tau)c(\tau)\exp\left\{\int_\tau^t c(s)ds\right\}d\tau = L(0)\left[\exp\left\{\int_{t_o}^t c(\tau)d\tau\right\} - 1\right] + \int_{t_o}^t \left[\exp\left\{\int_s^t c(\tau)d\tau\right\} - 1\right] L(s)ds, \qquad \text{(III.107)}$$

gdzie $c(t)$ i $L(t)$ są pewnymi funkcjami kl C^o, a ponadto $L(t)$ jest przedziałami różniczkowalna,
otrzymujemy następującą zależność

$$E\Gamma(t) = \Gamma_o\left[ED(t,\omega) + \frac{k_2[T(0)]}{k_1[T(0)] + k_2[T(0)]}\left[ED(t,\omega) - 1\right] +\right.$$

$$\left. + \int_0^t \left[ED_t(s,\omega) - 1\right]\left(\frac{k_2[T(s)]}{k_1[T(s)] + k_2[T(s)]}\right)'_s ds\right], \qquad \text{(III.108)}$$

gdzie

$$D_t(s,\omega) = \exp\left\{\int_s^t -(k_1[T(v)] + k_2[T(v)])\left[1 + K\eta(v,\omega)\right] dv\right\},$$

natomiast $D(t,\omega)$ zostało określone wzorem (III.19) dla $A[T] = -(k_1(T) + k_2(T))$, tzn. $D(t,\omega) = D_t(0,\omega)$.

Podobnie jak w przypadku układu dwóch reakcji równoległych korzystając z równości (II.10) oraz przyjmując, że całka podwójna z funkcji kowariancji spełnia zależność (II.12) (przy czym w obu wzorach całki są w granicach od τ do t dla $\forall \tau \in [0,t_f]$), a następnie korzystając ponownie ze wzorów (III.107) i (III.108) otrzymamy, że odpowiadający temu układowi stochastycznemu (III.103) układ deterministyczny będzie miał postać

$$\frac{dx}{dt} = -(k_1 + k_2)\left[1 + F[T(t)] + KE\eta(t)\right]x + k_2\Gamma_o\left[1 + F[T(t)] + KE\eta(t)\right] \qquad \text{(III.109)}$$

$$x(0) = \Gamma_o,$$

gdzie $x(t) = E\Gamma(t)$, a funkcja $F[T(t)]$ została określona wzorem (II.13).

Równanie to można również otrzymać, uśredniając odpowiadające równaniu (III.103) równanie Stratonowicza. Uzasadnienie poprawności otrzymanego wyniku jest identyczne jak w przypadku reakcji równoległych i wynika z twierdzeń Wonga i Zakaja [63], [64].

Zakładając natomiast, że całka podwójna z funkcji kowariancji spełnia zależność (II.22) lub (II.28), (przy czym całkowanie jest w granicach od τ do t dla $\forall\, \tau \in [0,t_f]$) otrzymamy następujące równoważne układy deterministyczne:

$$\frac{dx_1}{dt} = -(k_1 + k_2)\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} f_i(t)q_{i_1}(t) + KE\eta(t)\right]x_1, \quad x_1(0) = \Gamma_o \qquad \text{(III.110)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left[-(k_1 + k_2)x_2 + \Gamma_o k_2\right]\left[1 + K\sum_{i=1}^{l} g_i(t)q_{i_2}(t) + KE\eta(t)\right], \quad x_2(0) = 0$$

$$x(t_f) = x_1(t_f) + x_2(t_f)$$

$$\frac{dq_{i_1}}{dt} = -(k_1 + k_2)Kg_i(t), \quad q_{i_1}(0) = 0,$$

$$i_1, i_2 = 1,\ldots,l \qquad \text{(III.111)}$$

$$\frac{dq_{i_2}}{dt} = (k_1 + k_2)Kf_i(t), \quad q_{i_2}(t_f) = 0,$$

lub

$$\frac{dx_1}{dt} = -(k_1 + k_2)\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_{i_1}(t) + g_i(t)p_{i_1}(t)\right] + KE\eta(t)\right]x_1,$$

$$x_1(0) = \Gamma_o$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left[-(k_1+k_2(x_2 + \Gamma_o k_2\right]\left[1 + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[f_i(t)q_{i_2}(t) + g_i(t)p_{i_2}(t)\right] + KE\eta(t)\right],$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x(t_f) = x_1(t_f) + x_2(t_f) \qquad \text{(III.112)}$$

$$\frac{dp_{i_1}}{dt} = -(k_1+k_2)Kf_i(t),\ p_{i_1}(0) = 0,\ \frac{dp_{i_2}}{dt} = (k_1+k_2)Kf_i(t),\ p_{i_2}(t_f) = 0$$

(III.113)

$$\frac{dq_{i_1}}{dt} = -(k_1+k_2)Kg_i(t),\ q_{i_1}(0) = 0,\ \frac{dq_{i_2}}{dt} = (k_1+k_2)Kg_i(t),\ q_{i_2}(t_f) = 0$$

$$i_1, i_2 = 1,\ldots,l \qquad \text{(III.114)}$$

jako kryterium przyjmiemy we wszystkich problemach

$$I = \min_{T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}} x(t_f).$$

Zajmiemy się nieco bliżej przypadkiem pierwszym, gdy zakłócenie ma charakter białego szumu. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że punkt końcowy $t_f = 1$. Wówczas równoważny problem deterministyczny będzie miał postać:

$$\frac{dx}{dt} = \left[-(k_1 + k_2)x + k_2x_o\right]\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right], \quad x(0) = x_o. \qquad \text{(III.116)}$$

$$I = \min_{T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}} x(1), \qquad \text{(III.117)}$$

$$\alpha = \frac{K^2}{2}. \qquad \text{(III.118)}$$

Podobnie jak dla układu reakcji równoległych można wykazać istnienie optymalnego profilu dla reakcji odwracalnej. W dowodzie korzystamy z twierdzenia zamieszczonego w Dodatku 1 oraz z faktu, że dla temperatury

$$T < \min\left(\frac{E_1}{R}, \frac{E_2}{R}\right) \qquad \text{(III.119)}$$

prawa strona równania (III.116) jest funkcją wypukłą na zbiorze $\left[T_{min}, T_{max}\right]$ dla każdego ustalonego $x \in R^1$.

W celu wyznaczenia optymalnego profilu skorzystamy z wyników zamieszczonych w [45]. Hamiltonian i równanie dla zmiennej sprzężonej λ mają postać:

$$H = \lambda\left\{-(k_1 + k_2)\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right]x + k_2\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right]x_o\right\}, \qquad \text{(III.120)}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(k_1 + k_2)\left[1 - \alpha(k_1 + k_2)\right], \quad \lambda(1) = 1. \qquad \text{(III.121)}$$

Tak jak w układzie reakcji równoległych można wykazać, że optymalny profil temperatury w przypadku gdy $E_1 > E_2$ jest izotermą, tzn. $T = T_{max}$, natomiast w przypadku gdy $E_2 > E_1$ przy wyznaczaniu profilu skorzystamy z następujących faktów.

1^o Z warunku stabilności wynika, że $\left[1 - 2\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right] > 0$ (III.122)

2^o Hamiltonian wzdłuż drogi optymalnej jest ujemny.

3^o Jeśli spełniona jest nierówność

$$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k_{1_{max}} + \frac{E_1 + E_2}{E_1}k_{2_{max}}}, \qquad \text{(III.123)}$$

to w punkcie $t = 0$ optymalną temperaturą jest $T = T_{max}$.

4^o H osiąga minimum lokalne, gdy $E_2 > E_1$ i zachodzi (III.122)

5^o Przy założeniach p. 4^o optymalny profil temperatury jest krzywą malejącą i w przedziale $\left[T_{min}, T_{max}\right]$ spełnia następujące równanie różniczkowe

$$\frac{dT}{dt} = -F(T), \qquad \text{(III.124)}$$

gdzie F(T) jest określone wzorem (III.79).

Z otrzymanych wyników wynika, że w przypadku gdy $E_2 > E_1$, optymalny profil będzie o następującej postaci

$$T(t) = \begin{cases} T_{max} & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_p \\ T(t) & \text{dla} \quad t_p \leqslant t \leqslant t_k, \\ T_{min} & \text{dla} \quad t_k \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$ gdzie $\frac{dT}{dt}$ zostało określone wzorem (III.124),

$$t_p = \frac{1}{(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\left[1-\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]} \ln \frac{(E_2-E_1)k_{2_{max}}\left[1-\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]}{(E_1 k_{1_{max}} + E_2 k_{2_{max}})\left[1-2\alpha(k_{1_{max}} + k_{2_{max}})\right]} \qquad \text{(III.125)}$$

t_k - wyznaczymy z warunku $T(t_k) = T_{min}$.

Przykład 7

Znajdziemy optymalny profil temperatury oraz stężenie składnika A na końcu reaktora dla reakcji odwracalnej dla następujących parametrów:

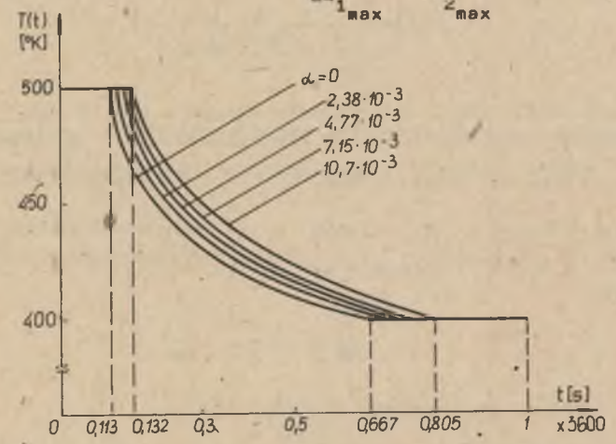
$k_{10} = 45.79\ e^{10}$, $\Gamma(0) = 1$,

$k_{20} = 0.4579\ e^{20}$, $T_{max} = 500$ K,

$E_1 = 41900$ J/mol, $T_{min} = 400$ K,

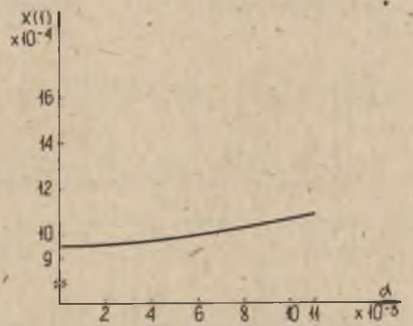
$E_2 = 83800$ J/mol, $R = 8.31$ J/mol ^{o}K.

Współczynnik α, będący miarą intensywności szumu zgodnie ze wzorem (III.123), musi spełniać relację $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k_{1_{max}} + 3k_{2_{max}}}$.



Rys. 9. Optymalny profil temperatury w reakcji odwracalnej pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 7)

Wówczas optymalne profile temperatury oraz stężenie końcowe w zależności od α zostały przedstawione na rys. 9 i rys. 10.



Rys. 10. Stężenie końcowe drugiego składnika w reakcji odwracalnej pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu (wg przykładu 7)

5b. Kryterium uwzględniające wariancję wektora stanu

W dotychczasowych badaniach maksymalizowaliśmy wartość oczekiwaną jednej ze zmiennych stanu w chwili końcowej, co w przypadku reaktorów chemicznych oznaczało maksymalizację wartości średniej bezwymiarowego stężenia jednego z produktów reakcji na końcu reaktora. Z praktycznego punktu widzenia takie kryterium nie zawsze jest wystarczające i często zachodzi konieczność uwzględnienia rozrzutu wokół wartości średniej, tzn. wariancji, dlatego w tym punkcie zajmiemy się nieco bliżej sterowaniem optymalnym układów quasi-liniowych ze wskaźnikiem jakości uwzględniającym wariancję. Będziemy rozważać układy, na które działają zakłócenia zarówno o charakterze białego szumu, jak i kolorowych szumów, przy czym w przypadku tych ostatnich korzystać będziemy z rezultatów podanych przez Parajewa [36].

Rozważymy układ (II.1) - (II.2), w którym proces $\eta(t,\omega)$ jest pewnym szumem kolorowym, tzn. traktowany jest jako sygnał wyjściowy z układu liniowego, na wejściu którego działa biały szum.

$$\frac{d\Gamma_A}{dt} = A\left[u(t)\right]\left[1 + K\eta(t)\right]\Gamma_A(t), \quad \Gamma_A(0) = x_o$$

$$\frac{d\Gamma_B}{dt} = B\left[u(t)\right]\left[1 + K\eta(t)\right]\Gamma_A(t), \quad \Gamma_B(0) = 0 \qquad \text{(III.126)}$$

$$d\eta = D\eta dt + d\xi.$$

Dla uproszczenia rozważań będziemy zakładać, że $E\,\eta(0) = 0$ i

$$E\,\eta^2(0) = L_0, \quad D = \text{const.} \tag{III.127}$$

Naszym celem jest znalezienie sterowania $u(t)$ maksymalizującego w punkcie końcowym wielkość I_2.

$$I_2 = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} E\left[a(E\Gamma_B(t_f))^2 - b\left[\Gamma_B^2(t_f) - (E\Gamma_B(t_f))^2\right]\right], \tag{III.128}$$

gdzie $a > 0$ i $b > 0$ są pewnymi współczynnikami wagowymi.

Podobnie jak poprzednio będziemy oznaczać $x = E\Gamma_A$, $y = E\Gamma_B$ oraz macierze kowariancji γ i korelacji $\mathcal{K}$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix}. \tag{III.129}$$

Korzystając z formuły Ito można pokazać, że drugi moment procesu będzie spełniał następujące równanie

$$\frac{dL}{dt} = 2DL + \sigma^2, \quad L(0) = L_0, \tag{III.130}$$

gdzie σ-gęstość widmowa białego szumu.

W przypadku stacjonarnym rozwiązanie ma postać

$$L(t) = \text{const} = L_0 = -\frac{\sigma^2}{2D}. \tag{III.131}$$

Przy sprowadzaniu problemu stochastycznego do równoważnego deterministycznego skorzystamy z metody zaproponowanej przez Parajewa [36]. Metoda ta polega na tym, że buduje się równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa F.P.K. dla systemu (II.1), (II.2), (III.126). Następnie buduje się funkcję tworzącą $\Psi(t,\lambda,\mu)$, gdzie λ i μ są traktowane jako pewne małe parametry. Funkcja Ψ spełnia pewne równoważne równaniu F.P.K równanie cząstkowe. Następnie, korzystając z faktu, że η jest procesem gaussowskim, rozwija się ją w szereg zespolony i wykorzystując wcześniej otrzymane równanie cząstkowe ze względu na Ψ otrzymuje się następujący układ równań dla wartości średniej i macierzy korelacji $\mathcal{K}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[u(t)] & 0 \\ B[u(t)] & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} A[u(t)] & 0 \\ B[u(t)] & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} - \mu x L(t) \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} - \mu y L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} D\mu \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} D\mu \end{bmatrix} \tag{III.132}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[u(t)] & 0 \\ B[u(t)] & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A[u(t)] & B[u(t)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$- i\begin{bmatrix} A[u(t)] & 0 \\ B[u(t)] & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}_{11}}{\partial \mu} & \frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \mathcal{K}_{21}}{\partial \mu} & \frac{\partial \mathcal{K}_{22}}{\partial \mu} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix} L(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} x\frac{\partial x}{\partial \mu} & x\frac{\partial y}{\partial \mu} \\ y\frac{\partial x}{\partial \mu} & y\frac{\partial y}{\partial \mu} \end{bmatrix}\right] + D_\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}_{11}}{\partial \mu} & \frac{\partial \mathcal{K}_{12}}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \mathcal{K}_{21}}{\partial \mu} & \frac{\partial \mathcal{K}_{22}}{\partial \mu} \end{bmatrix}. \tag{III.133}$$

Zaletą tego układu jest to, że w jego skład nie wchodzą wyższe momenty i że w związku z tym można znaleźć rozwiązanie explicite.

Postępując za Parajewem przy rozwiązywaniu tych równań należy skorzystać z metody równań charakterystycznych [23] dla równań cząstkowych pierwszego rzędu, a następnie z metodyki rozwiązywania równań przedstawionej w [21] Po dłuższych i żmudnych przekształceniach otrzymamy następujący układ równań:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[u(t)] & 0 \\ B[u(t)] & 0 \end{bmatrix}\left[1 + K^2 \int_0^t \begin{bmatrix} A[u(\tau)] & 0 \\ A[u(\tau)] & 0 \end{bmatrix} L(\tau)\,d\tau\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{III.134}$$

$$\frac{d\,sc\mathcal{K}}{dt} = \mathcal{R}(t,t_0)\,sc\mathcal{K} + scQ'(t) + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{R}(t,\tau) - \mathcal{R}(t,t_0)]\,scQ'(\tau)d\tau, \tag{III.135}$$

gdzie

$$\mathrm{sc}\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} \\ \mathcal{K}_{21} \\ \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{sc}\,Q'(t) = -2 \begin{bmatrix} A^2[u(t)] \\ B[u(t)]\,A[u(t)] \\ A[u(t)]\,B[u(t)] \\ B^2[u(t)] \end{bmatrix} \cdot L(t)Kx^2(t) \tag{III.136}$$

$$\mathcal{R}(t,t_o) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2A[u(t)] & 0 & 0 & 0 \\ B[u(t)] & A[u(t)] & 0 & \\ B[u(t)] & 0 & A[u(t)] & 0 \\ 0 & B[u(t)] & B[u(t)] & 0 \end{bmatrix}}_{M(t)} \left[1+K^2 \int_{t_o}^{t} \begin{bmatrix} 2A[u(\tau)] & 0 & 0 & 0 \\ B[u(\tau)] & A[u(\tau)] & 0 & 0 \\ B[u(\tau)] & 0 & A[u(\tau)] & 0 \\ 0 & B[u(\tau)] & B[u(\tau)] & 0 \end{bmatrix} L(\tau)\,d\tau \right] \tag{III.137}$$

Wobec tego równoważny problem sterowania optymalnego będzie miał następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\,[1 + KP(t)]\,x, \quad x(0) = x_o \tag{III.138}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\,[1 + KP(t)]\,x, \quad y(0) = 0 \tag{III.139}$$

$$\frac{dP}{dt} = A[u(t)]\;L(t)K, \qquad P(0) = 0 \tag{III.140}$$

$$\frac{d\,\mathrm{sc}\mathcal{K}}{dt} = M(t)\,[1 + KR(t)]\,\mathrm{sc}\mathcal{K} + \mathrm{sc}Q'(t) - M(t)\,W(t), \mathcal{K}(0) = \mathcal{K}_o, \tag{III.141}$$

$$\frac{dR}{dt} = KM(t)L(t), \quad R(0) = 0 \tag{III.142}$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = KR(t)\mathrm{sc}Q'(t), \quad W(0) = 0 \tag{III.143}$$

$$I_2 = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} (ay^2(t_f) - b(\mathcal{K}_{22}(t_f) - y^2(t_f))). \tag{III.144}$$

Tak postawione zagadnienie jest dosyć trudne do rozwiązania z uwagi na swoją wymiarowość.

Podanie warunków istnienia sterowania optymalnego prowadzi również do bardzo złożonych oszacowań. Dlatego przy rozwiązywaniu tego problemu można wielokrotnie spotkać się z trudnościami natury numerycznej. Można natomiast skorzystać z metod przybliżonych, takich jak np. metoda małego parametru w celu oszacowania wariancji rozwiązania optymalnego, w przypadku

gdy kryterium ma postać jedynie wartości średniej rozwiązania w chwili końcowej.

Na koniec odnotujemy, że otrzymane równania dla wartości średnich pokrywają się w przypadku rozwiązania stacjonarnego z równaniami otrzymanymi w punkcie 3b tego rozdziału.

W dalszej części pracy zajmiemy się przypadkiem, gdy zakłócenia mają charakter białego szumu. Korzystając z układu stochastycznych równań Stratonowicza (II.20) i (II.21) oraz z kryterium I_2 określonego wzorem (III.128), otrzymamy, że równoważny problem sterowania optymalnego będzie miał postać:

$$\frac{dx}{dt} = A[u(t)]\left[1 + \frac{K^2}{2}A[u(t)]\right]x, \quad x(0) = x_o \tag{III.145}$$

$$\frac{dy}{dt} = B[u(t)]\left[1 + \frac{K^2}{2}A[u(t)]\right]x, \quad y(0) = 0, \tag{III.146}$$

$$\frac{d\gamma_{11}}{dt} = 2A[u(t)]\,\gamma_{11} + 2K^2A^2[u(t)]\,\gamma_{11} + K^2A^2[u(t)]\,x^2, \quad \gamma_{11}(0) = 0 \tag{III.147}$$

$$\frac{d\gamma_{12}}{dt} = A[u(t)]\,\gamma_{12} + B[u(t)]\,\gamma_{11} + \frac{3}{2}K^2A[u(t)]\,B[u(t)]\,\gamma_{11} + \frac{K^2}{2}A[u(t)]\,\gamma_{12} + K^2A[u(t)]\,B[u(t)]\,x^2, \quad \gamma_{12}(0) = 0, \tag{III.148}$$

$$\frac{d\gamma_{22}}{dt} = 2B[u(t)]\,\gamma_{12} + K^2B^2[u(t)]\,\gamma_{11} + K^2A[u(t)]\,B[u(t)]\,\gamma_{12} + K^2B^2[u(t)]\,x^2$$

$$\gamma_{22}(0) = 0 \tag{III.149}$$

$$I_2 = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} \left[ay^2(t_f) + b\gamma_{22}(t_f)\right]. \tag{III.140}$$

Problem ten jest jednak problemem nieliniowym i dlatego często wygodniej jest korzystać z nieco przekształconej postaci równań stanu. Jeśli zamiast wielkości γ_{ij} wprowadzimy drugie momenty $\mathcal{K}_{ij}$ zdefiniowane następująco $\mathcal{K}_{11} = E\Gamma_A^2$, $\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21} = E\Gamma_A\Gamma_B$, $\gamma_{22} = E\Gamma_B^2$, to wówczas równoważny problem będzie składał z równań (III.145), (III.146) oraz z następujących równań:

$$\frac{d\mathcal{K}_{11}}{dt} = 2A[u(t)]\;\mathcal{K}_{11} + K^2A^2[u(t)]\;\mathcal{K}_{11}, \quad \mathcal{K}_{11}(0) = x_o^2, \tag{III.151}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_{12}}{dt} = B[u(t)]\;\mathcal{K}_{11} + A[u(t)]\;\mathcal{K}_{12}, \quad \mathcal{K}_{12}(0) = 0, \tag{III.152}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_{22}}{dt} = 2B^2[u(t)]\mathcal{K}_{12} + K^2B^2[u(t)]\mathcal{K}_{11}, \quad \mathcal{K}_{22}(0) = 0 \qquad \text{(III.153)}$$

$$I_2 = \max_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} ay^2(t_f) - b(\mathcal{K}_{22}(t_f) - y^2(t_f)). \qquad \text{(III.154)}$$

Otrzymany problem w przypadku układu dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu dla $t_f = 1$ będzie miał następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = -(k_1 + k_2)[1 - \alpha(k_1 + k_2)]x, \quad x(0) = x_0 \qquad \text{(III.155)}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1[1 - \alpha(k_1 + k_2)]x, \quad y(0) = 0 \qquad \text{(III.156)}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_{11}}{dt} = -2(k_1 + k_2)[1 - 2\alpha(k_1 + k_2)]\mathcal{K}_{11}, \quad \mathcal{K}_{11}(0) = x_0^2, \qquad \text{(III.157)}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_{12}}{dt} = k_1[1 - \alpha(k_1 + k_2)]\mathcal{K}_{11} - (k_1 + k_2)[1 - \alpha(k_1 + k_2)]\mathcal{K}_{12}, \quad \mathcal{K}_{12}(0) = 0 \qquad \text{(III.158)}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_{22}}{dt} = 2k_1[1 - \alpha(k_1 + k_2)]\mathcal{K}_{12} + K^2k_1^2\mathcal{K}_{11}, \quad \mathcal{K}_{22}(0) = 0, \qquad \text{(III.159)}$$

$$I_2 = \max_{T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}} ay^2(1) - b(\mathcal{K}_{22}(1) - y^2(1)). \qquad \text{(III.160)}$$

Podobnie jak w poprzednich punktach tego rozdziału optymalny profil buduje się korzystając z zasady maksimum, przy czym warunkiem koniecznym jego istnienia jest spełnienie następującej nierówności

$$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{(k_{1_{max}} + k_{2_{max}}) + \frac{E_1k_{1_{max}} + E_2k_{2_{max}}}{E_1} + 2\frac{b\mathcal{K}_{11}(1)}{D}k_{1_{max}}},$$

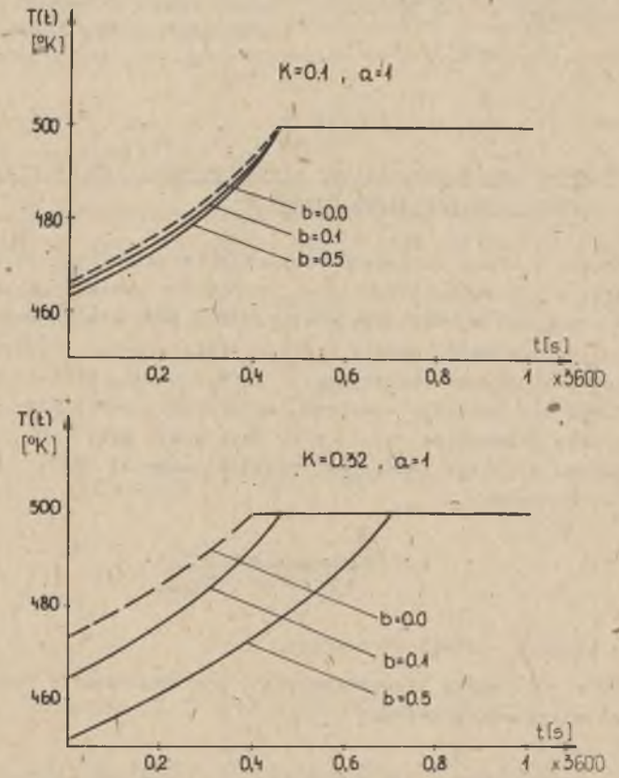
gdzie

$$D = (a + b)\,y(1)\,x(1) - b\mathcal{K}_{12}(1) > 0.$$

Jak widać, zakres zmian współczynnika α w przypadku kryterium, które zawiera wariancję, jest mniejszy niż w przypadku kryterium nie zawierającego wariancji.

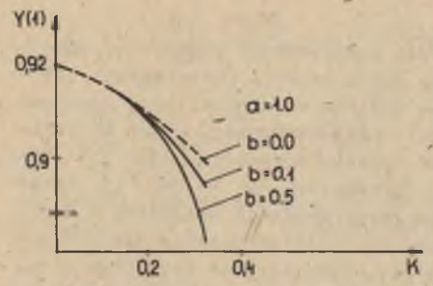
Przykład 8

Znajdziemy optymalny profil temperatury oraz średnie stężenie drugiego składnika na końcu reaktora dla układu dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu, w przypadku gdy kryterium zawiera wariancję, przy czym parametry układu oraz funkcji korelacji procesu stochastycznego są takie same jak w przykładzie 5. Wyznaczony numerycznie optymalny profil dla różnych wartości K oraz a i b został przedstawiony na rys. 11, natomiast zależności średniego stężenia końcowego drugiego składnika w funkcji K oraz b zostały pokazane na rys. 12. Dla porównania zamieszczono również na tych samych rysunkach wykresy odpowiadające kryterium optymalizacyjnemu, nie zawierającemu wariancji. To ostatnie oznaczono linią przerywaną.



Rys. 11. Optymalny profil temperatury w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu z kryterium zawierającym wariancję,rozwiązania (wg przykładu 8)

Z wyników otrzymanych w pracy oraz przykładów wynika, że dla realnych fizykalnie wielkości parametrów reakcji i ograniczonych co do intensywno-



Rys. 12. Stężenie końcowe w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku zakłócenia o charakterze białego szumu z kryterium zawierającym wariancję rozwiązania (wg przykładu 8)

ści zakłóceń optymalne profile temperatur wyglądają podobnie jak w modelach deterministycznych. W pracy nie rozważono przypadków, gdy α przekracza zadane ograniczenia. Zaistniałaby wówczas konieczność analizy układów z ujemnymi szybkościami reakcji, co z punktu widzenia fizykalnego nie ma sensu. Na koniec odnotujmy, że jakkolwiek współczynnik α nie ma bezpośredniej interpretacji fizycznej z uwagi na to, że biały szum jest abstrakcją, tym niemniej jest on bardzo dobrą miarą intensywności zakłóceń (dotyczy to zwłaszcza procesów szeroko pasmowych).

5c. Wyznaczanie optymalnych stężeń w reaktorze w przypadku nierównomiernego przepływu produktów

Dotychczas w pracy zakładano, że zakłóceniom podlega jedynie wpływ katalizatora. W tym punkcie pokażemy, że podobne wyniki uzyskuje się, gdy przepływ produktów w reaktorze wielorurowym jest nierównomierny. Przedmiotem naszych rozważań będzie reaktor wielorurowy, posiadający dostatecznie dużą ilość rur (potrzebną do aproksymacji rozkładu dyskretnego rozkładem ciągłym). Zakładać będziemy, że produkty poruszają się w każdej rurze z różną prędkością $w(\omega)$, przy czym znany jest ich rozkład prawdopodobieństwa, ściślej: znany jest rozkład zmiennej $\eta(\omega)$ występującej w poniższym równaniu.

$$\frac{1}{w(\omega)} = \frac{1}{w_{śr}} + \frac{\eta(\omega)}{w_{śr}}. \qquad \text{(III.161)}$$

$w_{śr} = E\{w(\omega)\}$ - prędkość średnia.

W związku z tym, model probabilistyczny dla dwu reakcji równoległych będzie miał następującą postać:

$$\frac{d\Gamma_A(t,\omega)}{dt} = -\frac{1}{w_{śr}}(k_1^* + k_2^*)\,[1 + K\eta(\omega)]\,\Gamma_A(t,\omega), \qquad \text{(III.162)}$$

$$\frac{d\Gamma_B(t,\omega)}{dt} = \frac{1}{w_{śr}}\,k_1^*\,[1 + K\eta(\omega)]\,\Gamma_A(t,\omega), \qquad \text{(III.163)}$$

z warunkami początkowymi deterministycznymi

$$\Gamma_A(0) = 1, \quad \Gamma_B(0) = 0, \qquad \text{(III.164)}$$

gdzie:

t - bezwymiarowa zmienna $t \in [0, 1]$ (długość reaktora),

$\eta(\omega)$ - zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$,

$$k_i^* = k_{io}^* \exp\left\{-\frac{E_i}{RT(t)}\right\}, \qquad \text{(III.165)}$$

przy czym k_{iO}^* różni się od k_{iO} występujących we wzorach (III.5), tzn. $k_{io}^* = wk_{io}$ (w - prędkość produktów). Pozostałe wielkości mają te same oznaczenia co w poprzednich punktach tego rozdziału. Z opisanego w punkcie 1 tego rozdziału modelu stochastycznego reakcji równoległych wynika, że ograniczenia temperaturowe oraz kryterium mają następującą postać

$$I = \max_{T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}} \frac{1}{w_{śr}} E\{w(\omega)\,\Gamma_B(1,\omega)\}. \qquad \text{(III.166)}$$

Korzystając z metodyki przedstawionej w rozdziałach II i III otrzymamy, że równoważny problem deterministyczny będzie miał następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{w_{śr}}(k_1^* + k_2^*)\left[1 + Km + \frac{K\sigma}{2}p(t)\right]x, \quad x(0) = 1, \qquad \text{(III.167)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{w_{śr}}\,k_1^* x, \quad y(0) = 0, \qquad \text{(III.168)}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{K\sigma}{w_{śr}}(k_1^* + k_2^*), \quad p(0) = 0, \qquad \text{(III.169)}$$

$$I = \max_{T_{min} \leqslant T(t) \leqslant T_{max}} y(1), \qquad \text{(III.170)}$$

gdzie

$$x(t) = E\Gamma_A(t,\omega), \quad y(t) = \frac{1}{w_{śr}} E\{\Gamma_B(t,\omega)\,w(\omega)\}.$$

W rozpatrywanym przez nas reaktorze wielorurowym $m = 0$.

Podobnie jak w poprzednich punktach tego rozdziału można wykazać, że:

a) optymalną temperaturą dla $t_{p_2} \leqslant t \leqslant 1$ jest $T = T_{max}$,

b) istnieje nietrywialny niemalejący optymalny profil temperatury dla $(E_2 > E_1)$ w przedziale $t_{p_1} \leq t \leq t_{p_2}$, będący rozwiązaniem następującego równania różniczkowego

$$\frac{dT}{dt} = RT^2 \frac{1}{w_{śr}} \left[1 + \frac{K\sigma^2}{2} p\right] \frac{E_1 k_1^* + E_2 k_2^*}{E_1 E_2}, \qquad \text{(III.171)}$$

c) w przypadku gdy $E_1 > E_2^*$, to optymalną temperaturą będzie $T(t) = T_{max}$.

Przyjęte w tym punkcie założenie, że zmienna $\eta(\omega)$ jest zmienną gaussowską powoduje, że równoważny układ deterministyczny ma prostą postać nietrudną do rozwiązania. W przypadku gdy założymy, że zmienna losowa $\eta(\omega)$ ma inny rozkład, np. stały lub trójkątny, wówczas równoważny problem deterministyczny jest bardziej złożony (zwiększa się ilość równań stanu).

Przykład 9

W układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu, w przypadku gdy przepływ składników w reaktorze wielorurowym jest przypadkowy, wyznaczono wielkości maksymalnego stężenie drugiego składnika na końcu reaktora w przypadku zastosowania optymalnego profilu temperatury dla następujących danych:

$k_{10} = 9.158\ e^{10}$, $T_{min} = 400$ K,

$k_{20} = 0.4579\ e^{20}$, $T_{max} = 500$ K,

$E_1 = 41900$ J/mol, $R = 8.31$ J/mol ^{o}K,

$E_2 = 83800$ J/mol,

Wyniki obliczeń numerycznych zamieszczono w poniższej tabelce

$\frac{\sigma^2}{2}$	0	0.0025	0.01	0.07525
y(1)	0.9629	0.9626	0.9619	0.9527

W pracy [14] przeprowadzono porównanie przedstawionej metody z metodą wyznaczania optymalnego profilu temperatury i stężeń, w przypadku gdy rozkład prędkości zadany jest histogramem.

Rozważany w tym punkcie problem jest najczęściej spotykanym dotychczas w praktycznych zastosowaniach z uwagi na łatwy pomiar prędkości w poszczególnych rurach, natomiast w przypadku problemu wyznaczania nierównomiernej aktywności katalizatora w literaturze nie spotkano dotychczas wyników badań statystycznych dotyczących rozkładów prawdopodobieństw, czy też charakterystyk probabilistycznych tych zakłóceń, dlatego w pracy przeanalizowano stosunkowo szeroką klasę zakłóceń, a zwłaszcza tych, które występują najczęściej w mechanice, elektrotechnice, teorii regulacji, pozostawiając tym samym problem identyfikacji zakłóceń (aktywności katalizatora) jako otwarty.

ZAKOŃCZENIE

Podsumujemy otrzymane w pracy rezultaty oraz nakreślimy perspektywiczne kierunki w dziedzinie stochastycznych układów quasi-liniowych. W przypadku badania stabilności stochastycznej podano kryteria dla układów ze sprzężeniem zwrotnym oraz ze sterowaniem otwartym. Analizowano układy, na które działają zakłócenia o charakterze białego szumu, gaussowskie procesy stochastyczne drugiego rzędu oraz procesy stochastyczne spełniające prawo wielkich liczb. Otrzymane kryteria dotyczą silnej i słabej stabilności stochastycznej oraz asymptotycznej p-stabilności. Przy ich wyprowadzeniu korzystano z kryteriów podanych przez Jakubowicza [19], które dotyczyły układów deterministycznych z wieloma nieliniowościami. Można by jednak, jak się wydaje, korzystać również z metodyki opracowanej przez Michela i jego współpracowników i przedstawionej np. w [31], dotyczącej badania stabilności stochastycznej złożonych systemów. Stanowi to jednak problem otwarty i powinno być przedmiotem dalszych badań. Na podkreślenie zasługuje również fakt, że w przypadku zakłóceń o charakterze białego szumu często możliwe jest wyznaczanie obszaru stabilności bez konieczności wyznaczania macierzy H służącej do określenia funkcji Lapunowa $V = x^T Hx$.

Udowodnione w pracy twierdzenie (Dodatek) o istnieniu sterowania optymalnego stanowi uogólnienie twierdzenia otrzymanego przez Boyarskiego [1]. Korzystając z wniosków i uwag wynikających z niego wykazano, w przypadku gdy $E_2 > E_1$, istnienie ciągłych optymalnych profili temperatur w reakcjach równoległych i odwracalnych. W przypadku gdy $E_1 > E_2$, wówczas nie są spełnione założenia twierdzenia i optymalny profil może być wtedy funkcją przedziałami ciągłą. Jakkolwiek w pracy zakładano, że zakłóceniom podlega jedynie aktywność katalizatora, to jak pokazano w punkcie 5c podobne wyniki uzyskuje się w przypadku, gdy przepływ produktów w reaktorze wielorurowym jest nierównomierny (przypadkowy).

Z zamieszczonych w pracy przykładów oraz z analizy wrażliwości prowadzonej w pracach [45], [44] wynika, że nieuwzględnienie zakłóceń nawet w małym zakresie może prowadzić do błędów rzędu kilku procent. Wskazuje to z jednej strony na konieczność dalszych badań zwłaszcza doświadczalnych w zakresie pomiarów nierównomiernej aktywności katalizatora oraz prędkości przepływu w poszczególnych rurach reaktora, z drugiej zaś strony na potrzebę stosowania technicznych metod eliminacji tych zakłóceń.

W przypadku reakcji równoległych ze wzrostem intensywności szumu optymalne profile ulegają przesunięciu w lewo, tzn. punkt przełączenia t_k jest coraz mniejszy lub temperatura początkowa T_p jest coraz większa dla co-

raz to większych wartości współczynnika K. Można stąd wyciągnąć, wniosek, że zwiększenie działania szumu powoduje takie same zmiany optymalnych profili temperatur, jak zwiększenie współczynnika ilorazowego $\frac{k_{20}}{k_{10}}$ w przypadku problemu deterministycznego. Zgodnie z oczekiwaniami zwiększenie działania szumu powoduje zmniejszenie maksymalnej średniej wartości stężenia drugiego składnika, która stanowi kryterium optymalizacji. Stwierdzenia te odnoszą się do wszystkich rozważanych w pracy zakłóceń. Poczynione w pracy założenie o deterministycznych warunkach początkowych można osłabić, żądając, by były one zmiennymi losowymi niezależnymi od zakłóceń występujących w układzie $\xi(t,\omega)$.

Jakkolwiek dla otrzymanych w rozdziale pierwszym i drugim wyników pokazano zastosowanie jedynie w analizie reaktorów chemicznych, to jak już było wspomniane we wstępie, istnieje możliwość ich wykorzystania w innych dyscyplinach, takich jak: mechanika, ekonomia, immunologia. Możliwość ta istnieje wszędzie tam, gdzie w rozpatrywanych modelach sterowanie i zakłócenia występują parametrycznie, w szczególności w stochastycznych układach biliniowych. Zachodzi wówczas równość $A_i(u_i) = B_i(u_i) = u_i$.

W analizie układów dynamicznych obok problemów stabilności i sterowania optymalnego do najważniejszych zaliczyć należy zagadnienia sterowalności, obserwowalności, wrażliwości, jak również filtracji czy identyfikacji. Nie były one przedmiotem badań w niniejszej pracy i wydają się być w przypadku stochastycznych układów quasi-liniowych problemami otwartymi wymagającymi dalszych studiów. W odniesieniu do zagadnień sterowalności stochastycznej wygodnie będzie posłużyć się definicją ε-sterowalności zaproponowaną przez badaczy japońskich [54, 55]. Badania można by wówczas rozszerzyć dla zakłóceń, które są procesami Poissona, co było pokazane w [47]. Otrzymane tam wyniki dotyczyły jednak sterowania zamkniętego i dlatego należałoby podać nieco inne definicje i kryteria dla układów ze sterowaniem otwartym. Za pewną próbę rozwiązania tego problemu należy uznać pracę [46]. Do zupełnie nowych dotychczas nierozwiązanych zagadnień dotyczących stochastycznych układów quasi-liniowych zaliczyć należy:

1° Zagadnienia filtracji i sterowania optymalnego zamkniętego.

2° Wyznaczanie sterowania optymalnego otwartego, w przypadku gdy kryterium zawiera czas Markowa, np. w następującym przykładzie:

$$dx = A[u(t)]\,xdt + KA[u(t)]\,xdw, \quad x(0) = x_0,$$

$$dy = B[u(t)]\,xdt + KB[u(t)]\,xdw, \quad y(0) = 0,$$

$y(\tau(\omega)) = a$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, a - stała rzeczywista (wielkość zadana), $\tau(\omega)$ - czas Markowa.

$$I = \min_{u_{min} \leqslant u(t) \leqslant u_{max}} E(\tau(\omega)).$$

3° Analiza stochastycznych układów quasi-liniowych z opóźnieniem.
W przypadku badania sterowania optymalnego otwartego będzie można najprawdopodobniej posłużyć się najnowszymi wynikami otrzymanymi przez Szajcheta w pracy [56] i pozwalającymi na znajdowanie równoważnych problemów deterministycznych, tzn. znajdowania równań różniczkowych, jakie spełniają momenty rozwiązań wyjściowych równań stochastycznych.

4° Analiza stochastycznych układów quasi-liniowych opisanych równaniami cząstkowymi. Pewne wyniki dotyczące układów biliniowych zwłaszcza tych, które opisują modele matematyczne występujące w immunologii uzyskali badacze włoscy [2], [3], [4].

5° Analiza stochastycznych układów quasi-liniowych opisanych równaniami różnicowymi. W tej dziedzinie ukazało się wiele prac dotyczących układów biliniowych. Problemy stabilności stochastycznej zostały przedstawione między innymi w książce Morozana [33]. Zagadnienia sterowalności i sterowania optymalnego dla układów deterministycznych zosteły omówione w książce Mohlera [32] oraz w pracach [6], [7].

6° Zagadnienia estymacji, filtracji i identyfikacji. Podobnie jak w przypadku układów opisanych równaniami cząstkowymi uzyskano już pewne wyniki dla stochastycznych układów biliniowych [11], [60], [61]. W pracach tych znajduje się duży przegląd literaturowy w zdecydowanej większości dotyczącej jednak układów biliniowych. Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt, że w rozpatrywanych przez nas stochastycznych układach quasi-liniowych szumy działają w sposób multiplikatywny (są mnożone przez wektor stanu).
Identyfikacja takich układów jest dopiero w początkowym stadium badań. Pewną ciekawą koncepcję podali Soong i Dowdee w [52]. Polega ona na tym, że układ stochastyczny zmienia się na pewien równoważny deterministyczny i następnie identyfikuje się jego parametry metodami klasycznymi.

DODATEK 1

Podamy twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego dla układu nieliniowego [50]

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{D.1}$$

z funkcjonałem jakości

$$I(u) = \int_0^T c(t,x(t),u(t))dt. \tag{D.2}$$

Niech U będzie zwartym i wypukłym podzbiorem R^m, $\mathcal{U}$ - będzie rodziną wszystkich ograniczonych i mierzalnych funkcji z $[0,T]$ w U.
Będziemy traktować $\mathcal{U}$ jako podzbiór

$$\mathcal{L}_p([0, T], R^m) = \mathcal{L}_p^m,$$

gdzie $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i norma ma postać

$$\|G\|_p = \left(\int_0^T \|G(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|k\| = \sum_{i=1}^m |k_i| \quad \text{- norma w } R^m.$$

DEFINICJA 1

Niech $h: R^m \to R$. Mówimy, że h jest monotonicznie rosnąca (malejąca), jeśli h(x) monotonicznie rośnie (monotonicznie maleje), gdy $\|x\|$ wzrasta.

Lemat 1

Niech $h: R^m \to R$. będzie wypukłą funkcją, która monotonicznie rośnie. Niech $\delta: R^m \to R^m$ będzie wypukła i spełnia warunek, że $\delta_i(y) > 0$ dla

wszystkich $y \in R^m$ $(i = 1,\ldots,m)$. Wówczas funkcja $\bar{h}: R^m \to R$ zdefiniowana następująco $\bar{h}(y) = h(\delta(y))$ jest wypukła.

Lemat 2

Niech $h: R^m \to R$ będzie funkcją wypukłą, która jest monotonicznie malejąca. Niech $\delta: B^m \to P^m$ będzie wklęsła i spełnia warunek, że $\delta_i(y) \geq 0$ dla wszystkich $y \in B^m$ $(i = 1,\ldots,m)$. B^m i P^m są zwartymi i wypukłymi podzbiorami R^m. Wówczas funkcja $\bar{h}: R^m \to R$ zdefiniowana następująco $\bar{h}(y) = h(\delta(y))$ jest wypukła.

Dowód lematu 1 znajduje się w [1], natomiast lemat 2 dowodzi się bardzo podobnie.

Niech $\bar{X} \subset R^n$ będzie przestrzenią stanów i niech funkcja

$$f: [0, T] \times \bar{X} \times U \to R^n$$

będzie funkcją ciągłą ze względu na t i x dla każdego $u \in U$ i spełniającą następujące warunki.

(F 1) Dla wszystkich $t \in [0, T]$, $u \in U$, $x_1, x_2 \in \bar{X}$

$$|f^i(t,x_1,u) - f^i(t,x_2,u)| \leq \lambda \, \mathfrak{N} x_1 - x_2 \mathfrak{N},$$

gdzie λ jest stałą dodatnią,

$$\mathfrak{N} s \mathfrak{N} = \sum_{i=1}^{n} |s_i|$$

i f^i jest i-tą składową wektora f.

(F 2) Istnieje funkcja

$$F: [0, T] \times \bar{X} \to R^{n \times m}$$

i ograniczona mierzalna funkcja $g: U \to R^m$ taka, że dla każdego i=1,...,n

$$f^i(t,x,u_1) - f^i(t,x,u_2) \leq F^i(t,x)[g(u_1) - g(u_2)]$$

F^i - i-ty wiersz F.

$g(U)$ jest zwartym i wypukłym podzbiorem R^n i jeden z dwóch warunków jest spełniony:

a) g^{-1} istnieje na $g(U)$ jest wypukła i $g_j^{-1} \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$,

b) g^{-1} istnieje na $g(U)$ jest wklęsła i $g_j^{-1} \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$.

(F 3) Dla wszystkich $u \in \mathcal{U}$ $i = 1,\ldots,n$

$$F^i(\cdot, x^u(\cdot)) \in \mathcal{L}_q^m,$$

gdzie x^u jest rozwiązaniem (D1) ze sterowaniem u i q jest sprzężonym indeksem do p.

UWAGA 1

Warunek (F 1) zapewnia istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (D1).

UWAGA 2

Niech $V = g(U) \subset R^m$ i niech $\mathcal{Y}$ będzie rodziną wszystkich ograniczonych mierzalnych funkcji na $[0, T]$ o wartościach w V. Niech $\{g \circ u_j\}$ będzie ciągiem w $\mathcal{Y}$, który jest zbieżny słabo w $\mathcal{L}_p^m$ do $v \in \mathcal{Y}$. Ponieważ $v \in \mathcal{Y}$, stąd

$$v(t) \in g(U) \quad \text{p.w.} \quad t \in [0, T].$$

Ponieważ u jest zwarte, z lematu Filipowa [26] wynika istnienie $u \in \mathcal{U}$ takiego, że $v(t) = g(u(t))$ prawie wszędzie na $[0, T]$.

Niech funkcjonał (D2), gdzie $c: R \times \bar{X} \times U \to R$ spełnia następujące warunki

(C1) $c(t, \cdot, \cdot)$ jest ciągła dla wszystkich $t \in [0, T]$

(C2) $c(\cdot, x, u)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a dla wszystkich $x \in \bar{X}$ i $u \in U$.

(C3) istnieje funkcja $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_1([0, T], R)$ taka, że $c(t,x,u) \geq \psi(t)$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, $x \in \bar{X}$ i $u \in U$.

(C4) $c(t,x,u)$ jest wypukła względem u dla każdego ustalonego $(t,x) \in [0, T] \times \bar{X}$.

(C5a) Dla każdego ustalonego $(t,x) \in [0, T] \times \bar{X}$, $c(t,x,u): R^m \to R$ jest monotonicznie rosnącą funkcją.

(C5b) Dla każdego ustalonego $(t,x) \in [0, T] \times \bar{X}$, $c(t,x,u): R^m \to R$ jest monotonicznie malejącą funkcją.

T w i e r d z e n i e

Rozważmy układ (D1) z funkcjonałem (D2), gdzie $f(t,x,u)$ spełnia warunki (F1), (F2a), (F3) lub (F1), (F2b), (F3) i $c(t,x,u)$ spełnia odpowiednio warunki (C1) - (C4), (C5a) lub (C1) - (C4), (C5b). Niech U będzie zwartym podzbiorem R^m i niech $\mathcal{U}$ będzie zbiorem ograniczonych i mierzalnych funkcji odwzorowujących ze zbioru $[0, T]$ w U traktowany jako podzbiór $\mathcal{L}_p^m$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wówczas istnieje u takie, że

$$I(u') = \inf_{u \in \mathcal{U}} I(u).$$

Dowód

W pierwszym przypadku, gdy spełnione są warunki (F1) (F2a),(F3),(C1)-(C4), (C5a) dowód jest podany w [1].
W drugim przypadku, gdy spełnione są warunki (F1), (F2b), (F3), (C1) - (C4), (C5b) korzystając z lematu 2 można wykazać, że

$$\bar{c}(t,x,v) = c(t,x,g^{-1}(v))$$

jest wypukła względem v dla każdego $(t,x) \in [0, T] \times \bar{X}$.
Pozostała część dowodu jest taka sama jak w [1].

UWAGA 3

Te same wyniki można uzyskać jeśli funkcje f i c będą miały postać:

$$f(t,x,u) = f(t,x,w(u)),$$

$$c(t,x,u) = c(t,x,w(u)),$$

gdzie $w: U \to W$, $(W \in R^m)$ jest ciągłą, różnowartościową funkcją u i ponadto f i c spełniają warunki (F1) - (F3), (C1) - (C5), w których u jest zastąpione przez w i U przez $W = w(U)$. Dowód tego wynika z lematu Filipowa i uwagi 2.

Rozważmy pewien szczególny przypadek, gdy funkcje f i c będą o postaci następującej:

$$f(t,x,u) = G(u)x = vx,$$

$$c(t,x,u) = L(u) \cdot l(t,x),$$

gdzie: $G: U \to V \subset R^1$, $L: U \to R^1$, $l: \bar{X} \times [0, T] \to R^1$, $x \in \bar{X} \leqslant R^n$, $U \subset R^1$.

Lemat 3

Jeśli funkcje G, L są kl. C^2 i G^{-1} istnieje na zbiorze V oraz spełniony jest jeden z czterech warunków:

a) $G'_u < 0$, $G''_{uu} < 0$, $L'_u < 0$, $L''_{uu} > 0$

b) $G'_u > 0$, $G''_{uu} > 0$, $L'_u < 0$, $L''_{uu} > 0$

c) $G'_u > 0$, $G''_{uu} < 0$, $L'_u > 0$, $L''_{uu} > 0$

d) $G'_u < 0$, $G''_{uu} > 0$, $L'_u > 0$, $L''_{uu} > 0$

wówczas funkcja $L(u(v)) = L(v)$ jest wypukła względem $v \subset V$.

Dowód

Będziemy rozważać tylko przypadek (a), ponieważ dla pozostałych przypadków dowód jest bardzo podobny.
Z warunków $G'_u < 0$, $G''_{uu} < 0$ i z faktu, że G^{-1} istnieje na V wynika, że druga pochodna $G^{-1}(v) = u(v)$ istnieje i jest ujemna

$$(G^{-1})''_{vv} = u''_{vv} < 0,$$

a to oznacza, że $u(v)$ jest funkcją wklęsłą. Z faktu, że $L'_u < 0$ i $L''_{uu} > 0$ wynika, że $L(u)$ jest funkcją malejącą i wypukłą. Stąd z lematu 2 otrzymujemy, że $L(u(v)) = L(v)$ jest wypukła względem $v \subset V$.

WNIOSEK 1

Twierdzenie jest spełnione dla układu (D3), (D4) jeśli funkcje G i L spełniają założenia lematu 3 i funkcja $l(t,x)$ spełnia warunki (C1)-(C3).

WNIOSEK 2

Twierdzenie jest spełnione dla układu (D3), (D4) jeśli funkcje G i L mają postać $G(u) = G(w(u))$, $L(u) = L(w(u))$, $w: U \to W$ jest funkcją ciągłą, równowartościową i G'_w, G''_{ww}, L'_w, L''_{ww} spełniają jedno z założeń (a) lub (b) lub (c) lub (d) lematu 3, $l(t,x)$ spełnia założenia (C1) - (C3).

Dowód wynika z uwagi 3 i z poprzedniego wniosku.

WNIOSEK 3

Dowody twierdzeń 1 i 2 z rozdziału II wynikają z wniosków 1 i 2. Ciągłość sterowania natomiast wynika z tw. 6.2 [9].

Podamy teraz zastosowanie otrzymanych twierdzeń i wniosków na przykładzie warunków wystarczających istnienia optymalnego profilu temperatury w układzie dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu w przypadku istnienia zakłóceń o charakterze białego szumu.

Przypomnijmy, że wówczas funkcje G i L mają postać:

$$G(w) = -\left[w + k_{20}\frac{w}{k_{10}}^{\frac{E_2}{E_1}}\right]\left[1 - \alpha(w + k_{20}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}})\right],$$

$$L(w) = -w\left[1 - \alpha(w + k_{20}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}})\right],$$

gdzie

$$w[T(t)] = k_1[T(t)],$$

stąd

$$w'_T = \frac{E_1}{RT^2}\, k_{10} \exp\left\{-\frac{E_1}{RT(t)}\right\},$$

$$w''_{TT} = k_{10}\frac{E_1}{RT^4}(\frac{E_1}{R} - T)\exp\left\{-\frac{E_1}{RT(t)}\right\},$$

$$G'_w = -(1 + \frac{k_{20}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}\frac{E_2}{E_1} w^{\frac{E_2-E_1}{E_1}})\left[1 - 2\alpha(w + k_{20}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}})\right],$$

$$G''_{ww} = -\frac{k_{20}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}\frac{E_2(E_2 - E_1)}{E_1^2} w^{\frac{E_2 - 2E_1}{E_1}}\left[1 - 2\alpha(w + k_{20}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}})\right] +$$

$$+ 2\alpha\left[1 + \frac{k_{20}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}\frac{E_2}{E_1} w^{\frac{E_2 - E_1}{E_1}}\right]^2.$$

Jeśli $E_2 > E_1$ i α spełnia nierówność

$$0 \leqslant \alpha < \min(a_1, a_2),$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{1}{1\left[k_{20}(\frac{w_{max}}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}} + w_{max}\right]},$$

$$a_2 = \frac{k_{20}E_2(E_2 - E_1)w_{max}^{\frac{E_2-2E_1}{E_1}}}{2(k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}E_1 + k_{20}E_2 w_{max}^{\frac{E_2-E_1}{E_1}})^2 + 2k_{20}E_2(E_2-E_1)w_{max}^{\frac{E_2-E_1}{E_1}} + k_{20}\frac{w_{max}^{\frac{2(E_2-E_1)}{E_1}}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}},$$

$$w_{max} = w(T_{max}),$$

wówczas $G'_w < 0$ i $G''_{ww} < 0$ dla każdego $T \in [T_{min}, T_{max}]$.

Przenalizujemy teraz funkcję L(w):

$$L'_w = -\left[1 - \alpha(w + k_{20}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}})\right] - \alpha(1 + k_{20}\frac{E_2}{E_1}(\frac{w}{k_{10}})^{\frac{E_2}{E_1}}),$$

$$L''_{ww} = 2\alpha + \alpha\frac{k_{20}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}\frac{E_2}{E_1} w^{\frac{E_2-E_1}{E_1}} + \frac{k_{20}}{k_{10}^{\frac{E_2}{E_1}}}(\frac{E_2}{E_1})^2 w^{\frac{E_2-E_1}{E_1}}.$$

Jeśli α spełnia nierówność

$$0 < \alpha < \frac{1}{2w_{max} + k_{20}\left(\frac{w_{max}}{k_{10}}\right)^{\frac{E_2}{E_1}} + k_{20}\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{w_{max}}{k_{10}}\right)^{\frac{E_2}{E_1}}} = a_3,$$

wówczas $L'_w < 0$, $L''_{ww} > 0$ dla każdego $T \in [T_{min}, T_{max}]$.

Stąd na podstawie wniosku 2 wynika, że jeśli $E_2 > E_1$ i α spełnia nierówności

$$0 < \alpha < \min(a_2, a_3),$$

wówczas optymalny profil temperatury istnieje i jest ciągły.

WNIOSEK 4

W podobny sposób można podać warunki, jakie muszą spełniać parametry szumu, aby istniały optymalne profile w pozostałych reakcjach.

WNIOSEK 5

Otrzymane przez nas warunki są warunkami wystarczającymi istnienia sterowania optymalnego ciągłego, oznacza to, że jeśli jedno z założeń twierdzenia nie jest spełnione, np. $E_1 < E_2$, to wówczas optymalne sterowanie (optymalny profil temperatury) może być funkcją przedziałami ciągłą.

DODATEK 2

Podstawowe definicje

DEFINICJA 1

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy słabo stabilnym według prawdopodobieństwa przy $t > t_0$, jeśli prawdziwe jest zdanie logiczne

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_{r>0}\ |x_0| < r \Rightarrow P\{\omega: |x(t,\omega,x_0,t_0)| > \delta\} < \varepsilon$$

DEFINICJA 2

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 2 nazywamy silnie stabilnym według prawdopodobieństwa przy $t > t_0$, jeśli prawdziwe jest zdanie logiczne

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_{r>0}\ |x_0| < r \Rightarrow P\left\{\omega: \sup_{t>t_0} |x(t,\omega,x_0,t_0)| > \delta\right\} < \varepsilon$$

DEFINICJA 3

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy asymptotycznie słabo stabilnym według prawdopodobieństwa, jeśli jest ono słabo stabilne według prawdopodobieństwa, a ponadto spełniony jest warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{r>0}\ |x_0| < r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} P\left\{|x(t,\omega,x_0,t_0)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

DEFINICJA 4

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 2 nazywamy asymptotycznie silnie stabilnym według prawdopodobieństwa, jeśli jest ono silnie stabilne według prawdopodobieństwa, a ponadto spełniony jest warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{r>0}\ |x_0| < r \Rightarrow \lim_{T\to\infty} P\left\{\sup_{t>T} |x(t,\omega,x_0,t_0)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

DEFINICJA 5

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy p-stabilnym jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{r>0}\ |x_0| < r \Rightarrow E|x(t,\omega,x_0,t_0)|^p < \varepsilon$$

DEFINICJA 6

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy asymptotycznie p-stabilnym, jeśli jest ono p-stabilne i ponadto spełniony jest warunek

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t,\omega,x_0,t_0)|^p = 0.$$

DEFINICJA 7

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy eksponencjalnie p-stabilnym, jeśli istnieją stałe $A > 0$, $\alpha_0 > 0$ takie, że

$$E|x(t,\omega,x_0,t_0)|^p \leqslant A|x_0|^p \exp\left\{-\alpha_0(t - t_0)\right\}.$$

DEFINICJA 8

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy zupełnie słabo stabilnym według prawdopodobieństwa, jeśli jest ono słabo stabilne według prawdopodobieństwa i ponadto zachodzi warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \forall_{x_0\in R^n}\ \exists_{T(\varepsilon,\delta,x_0)}\ \forall_{t>T}\ P\left\{|x(t,\omega,x_0,t_0)| > \varepsilon\right\} < \delta$$

DEFINICJA 9

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy asymptotycznie zupełnie słabo stabilnym według prawdopodobieństwa, jeśli jest ono zupełnie słabo stabilnym według prawdopodobieństwa i ponadto zachodzi warunek

$$\forall_{x_0\in R^n}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \lim_{t\to\infty} P\left\{|x(t,\omega,x_0,t_0)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

DEFINICJA 10

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy stabilnym z prawdopodobieństwem 1 w pewnym sensie, jeśli wszystkie trajektorie, oprócz być może zbioru trajektorii prawdopodobieństwa 0, są stabilne w tyn sensie.

DEFINICJA 11

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy stabilnym stochastycznie względem czwórki $(Q_1, Q_2, 1-\varphi, t_f)$, gdzie ($Q_2$ jest zbiorem otwartym, $Q_1 \subset Q_2$) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$P\left\{\forall_{0<t<t_f} x(t,\omega) \in Q_2 \,|\, x(0) \in Q_1\right\} \geqslant 1 - \varphi.$$

Bardziej użyteczną w praktycznych obliczeniach jest następująca definicja.

DEFINICJA 12

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 lub 2 nazywamy ε-stabilnym stochastycznie z prawdopodobieństwem φ w sensie normy kwadratowej względem zbioru docelowego z normą $\sqrt{\varepsilon}$ w przedziale czasowym $[0, t_f]$, jeśli spełniony jest następujący warunek

$$P\left\{|x(t_f,\omega)|^2 \geqslant \varepsilon \;\; |x(0) = x_0\right\} \leqslant 1 - \varphi.$$

DEFINICJA 13

Mówimy, że proces $\xi(t,\omega)$ dla $t > t_0$ spełnia prawo wielkich liczb, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_{T>0}\ \forall_{t>T}\ P\left\{\left|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} \xi(s,\omega)ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} E\xi(s,\omega)ds\right| > \delta\right\} < \varepsilon$$

DEFINICJA 14

Mówimy, że proces $\xi(t,\omega)$ spełnia silne prawo wielkich liczb, jeżeli

$$P\left\{\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} \xi(s,\omega)ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} E\xi(s,\omega)ds\right)_{t\to\infty} \to 0\right\} = 1.$$

Wzajemne relacje między zacytowanymi przez nas definicjami można znaleźć w pracy [5]. W szczególności jest tam pokazana różnica między słabą i silną stabilnością.

LITERATURA

[1] Boyarsky A.: On the Existence of Optimal Controls for Nonlinear Systems, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.20,No 2, 1976.

[2] Bruni C., Di Pillo G., Koch G.: Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications, IEEE Transactions Automatic Control AC-19, 1974.

[3] Bruni C., Giovenco M.A., Koch G., Strom R.: A dynamical model of humoral immune response, Mathematical Biosciences, vol. 27, 1975.

[4] Bruni C., Giovenco M.A., Koch G., Strom R.: The immune response as a variable structure system, w książce Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology, Springer-Verlag, New York.

[5] Chasminskij R.Z.: Ustojcziwost sistiem diffierencjalnych urawnienij pri słuczajnych wozmuszczeniach ich paramietrow. Nauka, Moskwa 1969.

[6] Ewans M.E., Murthy D.N.P.: Controllability of discrete time inhomogeneous bilinear systems. Automatica, vol. 14, 1978.

[7] Evans M.E., Murthy D.N.P.: Controllability of a class of discrete time bilinear systems, IEEE Transaction Automatic Control vol. 22, Feb. 1977.

[8] Fleming W.H.: Stochastic control for small noise intensities. SIAM Journal on Control, vol. 9, 1971.

[9] Fleming W.N., Richel R.W.: Deterministic and Stochastic Control. Springer-Verlag, New York 1975.

[10] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1977.

[11] Frick P.A., Valavi A.S.: Estimation and Identification of Bilinear Systems. Automatic Control Theory and Application, vol. 6, No 1, 1978.

[12] Friedland S.: Global Principle for Free-Endpoint Problems in Optimal Control and Differential Games. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 24, No 2, 1978.

[13] Froment G.F.: Model Discrimination and Parameter Estimation in Heterogenous Catalisis (Journal Review). AIChE Journal, vol. 21, No 6, 1975.

[14] Grzesik M., Socha L.: Wyznaczanie optymalnych profili temperatur w reaktorze wielorurowym. Inżynieria Chemiczna, vol. 10, No 3, 1980.

[15] Holland Ch.J.: Small Noise Open Loop Control. SIAM Journal on Control, vol. 12, No 3, 1974.

[16] Holland Ch.J.: Gaussian Open Loop Control Problems. SIAM Journal on Control, vol. 13, No 3, 1975.

[17] Horn F.: Optimale Temperatur und Konzentrationsverlaufe. Chemical Engineering Science, vol. 14, No 1, 1961.

[18] Ionescu T., Monopoli R.V.: On the Stabilization of Bilinear Systems via Hyperstability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, No 2, 1975.

[19] Jakubowicz W.A.: Czastotnyje usłowija absolutnoj ustojcziwosti sistiem uprawlenija s nieskolkimi nieliniejnimi ili liniejnymi niestacjonarnymi błokami. Awtomatika i Telemiechanika, T. XXVIII, No 6, 1967.

[20] Jakubowicz W.A.: S-Procedura w nieliniejnoj tieorii regulirowania. Wiestnik Leningradskowo Uniwiersitieta, No 1, 1971.

[21] Kamke E.: Sprawocznik po diffierencjalnych urawnieniam w czastnych proizwodnych pierwogo poriadka. Nauka, Moskwa 1966.

[22] Kozin F., Prodromou S.: Necessary and Sufficient Conditions for Almost Sure Sample Stability of Linear Ito Equations. SIAM Journal Appl. Math., vol. 21, No 3, 1971.

[23] Kurant R.: Urawnienia s czastnymi proizwodnymi. Moskwa, Mir, 1964.

[24] Kushner H.J.: Finite Time Stochastic Stability and the Analysis of Tracking Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 11, No 2, 1966.

[25] Kushner H.J.: On the Stochastic Maximum Principle with "Average" Constrains, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 12, No 1, 1965.

[26] Kushner H.J.: Stochastic Stability and Control. Academic Press, New York, 1967.

[27] Kushner H.J., Kleinman A.J.: Numerical Method for the Solution of the Degenerate Eliptic Equations Arising in Optimal Stochastic Control Theory. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 13, No 4, 1968.

[28] Lee E.B., Markus L.: Foundations of Optimal Control Theory. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

[29] Leung V.P., Padmanabhan L.: Stochastic Optimal Control Theory and its Application to the Control of a Batch Reactor with Unknown Parameters and Process Noise. The Chemical Engineering Journal, vol. 7, No 3, 1974.

[30] McShane E.J.: Stochastic Calculus and Stochastic Models. Academic Press, New York, 1974.

[31] Michel A.N.: Stability Analisis of Stochastic Composite Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 20, No 2, 1975.

[32] Mohler R.: Bilinear Control Processes. Academic Press, New York 1973.

[33] Morozan T.: Stabilitatea sistemelor cu parametri aleatori. Wyd. Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti, 1969.

[34] Otnes R.K., Enochson L.: Digital Time Series Analisis. John Willey & Sons Inc., New York, 1972.

[35] Papanicolau G.C., Kohler W.: Asymptotic Theory of Mixing Stochastic Ordinary Differential Equation. Communcation Pure and Applied Mathematics, vol. 27, 1974.

[36] Parajew Ju.J.: Wwiedienije w statisticzeskuju dinamiku prociesow uprawlenia i filtracji. Sowietskoje Radio, Moskwa, 1976.

[37] Quadrat J.P.: Analyse numérique de l'équation de Bellman stochastique. Rapport de Recherche No 140, IRIA Laboria, October 1975.

[38] Ryżyk I.M., Gradsztein I.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN Warszawa 1964.

[39] Seinfeld J.H.: Optimal Stochastic Control of Nonlinear Systems. AIChE Journal, vol. 16, No 6, 1970.

[40] Skrzypek J.: Optimal Temperature Profiles in Systems of Parallel Reactions in a Tubular Reactor. I. Optimization in a System of two Parallel First Order Reactions. International Chemical Engineering, vol. 14, No 2, 1974.

[41] Skrzypek J.: Optymalne profile temperatury w układzie n reakcji równoległych pierwszego rzędu zachodzących w reaktorze rurowym. Inżynieria Chemiczna, vol. 3, No 3, 1973.

[42] Slemrod M.: Stabilization of Bilinear Control Systems with Applications to Nonconservative Problems in Elasticity. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, No 1, 1978.

[43] Sobczyk K.: Metody dynamiki statycznej. PWN, Warszawa 1973.

[44] Socha L., Skrzypek J.: Zastosowanie sterowania stochastycznego otwartego do określenia optymalnych profilów temperatur w reaktorach chemicznych. Inżynieria Chemiczna, vol. 8, No 3, 1978.
--- Application of Open Loop Control to the Determination of Optimal Temperature Profile in the Chemical Reactor, 8th IFIP Conference on Optimization Techniques, Wurzburg, Sept. 5-9, 1977, Lecture Notes in Control and Information Sciences, No 6, 1978.

[45] Socha L., Skrzypek J.: Application of Open Loop Control to the Determination of Optimal Temperature Profiles for Reversible Reactions w.Simulation of Control, ed. I. Troch, North - Holland, 1978.

[46] Socha L.: Application of Stochastic Controllability for Studying the Influence of Noise in the Stochastic Model of Chemical Reactors. Advances in Measurement and Control, vol. 2, ACTA Press, Anaheim, 1979.

[47] Socha L., Kłamka J.: Sterowalność stochastyczna układów dynamicznych. Podstawy Sterowania, vol. 8, No 2, 1978.

[48] Socha L.: Application of Yakubovich's Criteria to Studies on stochastic Stability of Dynamic Multi-Nonlinearity Systems. Journal of Technical Physics vol. 20, No 4, 1979.

[49] Socha L.: Application of Yakubovich Criterium for Stability of Nonlinear Stochastic Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-25, No 2, 1980.

[50] Socha L.: Some Remarks on the Existence of Optimal Controls for Quasilinear Systems. Journal of Optimization Theory and Applications, w druku.

[51] Socha L: Zastosowanie sterowania otwartego do określenia optymalnych profili temperatur w reaktorach chemicznych w obecności zakłóceń stochastycznych. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, T. 25, 1980.

[52] Soong T.T., Dowdee J.W.: On identification of random systems. Int. Journal System Sci., vol. 6, No 2, 1975.

[53] Stability of Stochastic Dynamical Systems. Proceedings of the International Symposium organised by "The Control Theory Centre". University of Warwick, July 10-14, 1972, Springer Verlag, Berlin.

[54] Sunahara Y., Aihara S., Kishino K.: On the Stochastic Observability and Controllability for Nonlinear Systems. International Journal of Control, vol. 22, No 1, 1975.

[55] Sunahara Y., Kabeuchi T., Asada Y., Aihara S., Kishino K.: On Stochastic Controllability for Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, No 1, 1974.

[56] Szajchet L.E.: Ob urawnieniach opriedielajuszczich momienty rieszienii liniejnych stochasticzeskich diffierencjalnych urawnieni s pasledstwiem. Tieoria Słuczajnych procesow, wyp. 6, 1978.

[57] Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology, ed. Ruberti A., Mohler R., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Varlag, Berlin 1975.

[58] Willems J.C., Blankenship C.L.: Frequency Domain Stability Criteria for Stochastic Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, No 4, 1971.

[59] Willems J.L.: Moment Stability of Linear White Noise and Coloured Noise Systems, in Proceedings of IUTAM Symposium on Stochastic Problems in Dynamics. University of Southhampton, July 19th-23rd 1976.

[60] Wilsky A.S., Marcus S.I.: Estimation for Bilinear Stochastic Systems M.I.T. Electronic System laboratory Report ESI - R-544, presented on U.S. - Italy Seminar on Variable Structure Systems. Portland, Oregon, May 1974.

[61] Willsky A.S., Marcus S.I.: Analysis of Bilinear Noise Models in Circuits and Devices. Journal of The Franklin Institute, vol. 301, No 1 and 2, 1976.

[62] Wong E.: Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych. WNT, Warszawa 1976.

[63] Wong E., Zakai M.: On the relationship between ordinary and stochastic differential equations. Int. Journal Engng. Sci., vol. 3, 1965.

[64] Wong E., Zakai M.: On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. Ann. Math. Stat., vol. 36, 1965.

[65] Wonham W.M.: Random Differential Equations in Control Theory, in Probabilistic Methods in Applied Math., vol. 2, Academic Press, New York, 1970.

STRESZCZENIE

W pracy rozważono stabilność i sterowanie otwarte w układach stochastycznych liniowych ze względu na wektor stanu i nieliniowych ze względu na sterowanie, nazwanych dalej stochastycznymi układami quasi-liniowymi. Korzystając z kryterium Jakubowicza dla układów deterministycznych podano kryteria stabilności stochastycznej dla układów ze sprzężeniem zwrotnym oraz ze sterowaniem otwartym. Podane kryteria dotyczą słabej i silnej stabilności, asymptotycznej stabilności z prawdopodobieństwem jednej oraz asymptotycznej p-stabilności. Zostały one zilustrowane kilkoma przykładami.

Następnie podano ogólną metodę wyznaczania sterowania optymalnego otwartego w stochastycznych układach quasi-liniowych z całkowym quasi-liniowym wskaźnikiem jakości. Przekształcając stochastyczny problem sterowania do równoważnego deterministycznego, otrzymano nowy nieliniowy problem sterowania optymalnego. Dla tego ostatniego otrzymano twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego. Metodę tę zastosowano do wyznaczania optymalnych profili temperatur w reaktorach chemicznych. Szczegółowo przedstawiony został przypadek układu dwóch reakcji równoległych pierwszego rzędu, na które działają zakłócenia gaussowskie stacjonarne i niestacjonarne. Układ n-reakcji równoległych pierwszego rzędu został omówiony dla zakłóceń o charakterze białego szumu. Dokładna konstrukcja profilu została pokazana na przykładzie układu dwóch i trzech reakcji równoległych. Omówiono również reakcję odwracalną oraz zastosowanie kryterium optymalizacji, uwzględniające wariancję rozwiązania. Zamieszczono szereg przykładów ilustrujących otrzymane wyniki.

Р е з ю м е

В работе представляется устойчивость и программное управление в стохастических квазилинейных системах т.е. линейных по вектору состояния и нелинейных по управлению. Используя критерий Якубовича для детерминистических систем, приводится критерий стохастической устойчивости для систем с обратной связью и с программным управлением. Полученные критерии касаются слабой и сильной устойчивости, асимптотической устойчивости с вероятностью один, асимптотической п-устойчивости. Они иллюстритуются несколькими примерами.

Затем приводится общий метод определения программного оптимального управления в стохастических квазилинейных системах с интегральным квазилинейным функционалом. Трансформируя стохастическую проблему к эквивалентной детерминистической, получено новую нелинейную проблему оптимального управления. Для этой последней доказано существование оптимального управления. Этот метод применяется для определения оптимального температурного профиля в химических реакторах. Более подробно представляется случай системы двух параллельных реакций первого порядка, которые находятся под влиянием помех, которые являются стационарными и нестационарными гауссовскими процессами. Система н-параллельных реакций первого порядка обсуждается для помех, которые являются белым шумом. Точная конструкция иллюстрируется на примере системы двух и трёх реакций. Обсуждается также обратимые реакции и проблема оптимализации с критерием учитывающим варианцию решения. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

SUMMARY

The stability and open loop control for the stochastic quasilinear systems i.e. linear systems with respect to vector - state and nonlinear one with respect to control have been considered in the paper. The Yakubovich criterium for the deterministic systems has been used in the investigation of weak and strong stochastic stabilities. The criteria of asymptotic stability with probability one and asymptotic p-stability have been derived.

Next the method of obtaining the optimal control in quasilinear systems which are influenced by disturbances with quasilinear integral performance index is presented. The analysis is carried out for the second order stationary gaussian stochastic processes. First the stochastic problem is changed into an equivalent deterministic problem and next the optimal control using the Maximum Principle is constructed. For the latter problem the theorem of existence of optimal control is proved. This method is applied to the determination of optimal temperature profile in chemical reactors. The case of two parallel first order reactions in which the reaction rate constants are influenced by some random disturbances which in turn are assumed to be the second order gaussian processes with known mean values and correlation functions is presented in detail. The system of n-parallel reactions is considered for the distarbences which are "white noise". The precise construction of optimal temperature profile is done for two and three reactions. Also the reversible reactions and the case when the criterium contains the variance of solution of the system is discused. The obtained results are illustrated by several numerical examples.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3359 | 82 | 38

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 83
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.