ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

WALERY SZUŚCIK

WSPÓŁPRACA OBUDOWY Z BETONU NATRYSKOWEGO W WYROBISKACH KORYTARZOWYCH POZIOMYCH KOŁOWYCH I ELIPTYCZNYCH Z OTACZAJĄCYM GÓROTWOREM O CHARAKTERYSTYCE SPRĘŻYSTEJ

GÓRNICTWO

Z. 162
GLIWICE
1987

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 910

WALERY SZUŚCIK

WSPÓŁPRACA OBUDOWY Z BETONU NATRYSKOWEGO W WYROBISKACH KORYTARZOWYCH POZIOMYCH KOŁOWYCH I ELIPTYCZNYCH Z OTACZAJĄCYM GÓROTWOREM O CHARAKTERYSTYCE SPRĘŻYSTEJ

GLIWICE 1987

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0372-9508

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 200+85 Ark. wyd. 6,0 Ark. druk. 6,125 Papier offset. kl. III 70x100, 70 g
Oddano do druku 3.07.87 Podpis. do druku 31.07.87 Druk ukończ. w sierpniu 1987
Zam. 586/87 L-24 Cena zł 120,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

SPIS WAŹNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$A = \lambda \cdot y$ - współczynnik

a, b - półosie wewnętrznej elipsy obudowy betonowej

a+g, b+g - półosie zewnętrznej elipsy

$a_o\ a'_o\ a_1\ a'_1\ a''_1\ a_2\ a'_2\ a_4\ a'_4\ a_6\ a'_6\ a_n\ a'_n$
$b_o\ b_1\ b_2\ b'_2\ b_4\ b'_4\ b_6\ b'_6\ b_n\ b'_n$
$c_o\ c_1\ c'_1\ c''_1\ c_n\ c'_n$
$d_o\ d'_1\ d_n\ d'_n$
- stała funkcji naprężeń AIRY'ego dla górotworu

E - moduł YOUNGA dla górotworu

E_b - moduł YOUNGA dla betonu

g - grubość powłoki betonowej kołowej

H - głębokość

H_{kr} - głębokość krytyczna wyliczona dla górotworu

H^b_{kr} - głębokość krytyczna wyliczona dla betonu natryskowego

H_{dop} - głębokość dopuszczalna wyliczona dla górotworu

H^b_{dop} - głębokość dopuszczalna wyliczona dla betonu natryskowego

k - współczynnik parcia bocznego w górotworze nienaruszonym

k.p - naprężenie normalne poziome w górotworze nienaruszonym

k_r - naprężenie dopuszczalne na rozciąganie dla górotworu

k^b_r - naprężenia dopuszczalne na rozciąganie dla betonu

L_1 - kontur wewnętrzny obudowy betonowej

L_2 - kontur zewnętrzny obudowy betonowej

m - współczynnik będący funkcją p, E i ϑ

n - współczynnik bezpieczeństwa dla górotworu

n_b - współczynnik bezpieczeństwa dla betonu

p - naprężenie pionowe w górotworze nienaruszonym

R - promień wewnętrzny obudowy kołowej

R_1 - promień zewnętrzny obudowy kołowej

Rm_r - wytrzymałość na rozciąganie górotworu

Rm_r^b - wytrzymałość na rozciąganie betonu

u, v, w - współrzędne przemieszczenia w układzie ortokartezjańskim

u_o, v_o, w_o - współrzędne przemieszczenia w górotworze nienaruszonym w układzie ortokartezjańskim

u_r, u_φ - współrzędne przemieszczenia w układzie walcowym dla górotworu

u_r^b, u_φ^b - współrzędne przemieszczenia w układzie walcowym dla betonu

u_{r_o}, u_{φ_o} - współrzędne przemieszczenia w układzie walcowym dla górotworu nienaruszonego

$y = \frac{1+\nu}{1+\nu_b}$ - współczynnik

$z = (\frac{R_1}{R})^2$ - współczynnik

$\alpha\alpha_o\ \alpha_2\ \alpha_2'\ \alpha_4\ \alpha_4'\ \alpha_6\ \alpha_6'\ \alpha_{2n}\ \alpha_{2n}'$
$\beta\beta_o\ \beta_2\ \beta_2'\ \beta_4\ \beta_4'\ \beta_6\ \beta_6'\ \beta_{2n}\ \beta_{2n}'$ - stałe funkcji naprężeń AIRY'ego dla górotworu

$\gamma\gamma_o$, α_b, β_b, γ_b - stałe funkcji naprężeń AIRY'ego dla betonu

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ - wydłużenie jednostkowe w układzie ortokartezjańskim

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ - wydłużenie jednostkowe w układzie walcowym

θ - kąt zawarty między normalną do stycznej elipsy o półosiach a i b a osią pionową

θ_1 - kąt zawarty między normalną do stycznej elipsy o półosiach a+g i b+g a osią pionową

$\varkappa$ - współczynnik niesymetrii wytrzymałości dla górotworu

$\varkappa_b$ - współczynnik niesymetrii wytrzymałości dla betonu

λ - stosunek modułów YOUNGA dla betonu i górotworu

ν - współczynnik POISSONA dla górotworu

ν_b - współczynnik POISSONA dla betonu

ξ - współczynnik odciążenia

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ - naprężenia normalne w górotworze

$\sigma_{xx}^b, \sigma_{yy}^b, \sigma_{zz}^b$ - naprężenia normalne w betonie

$\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$ - naprężenia w górotworze (dla współrzędnych walcowanych)

$\sigma_{rr}^b, \sigma_{r\varphi}^b, \sigma_{\varphi\varphi}^b$ - naprężenia w betonie (dla współrzędnych walcowanych)

σ_{red} - naprężenie zredukowane w górotworze

σ_{red}^b - naprężenie zredukowane w betonie

$\Phi(x,y), \Phi(r,\varphi)$ - funkcja naprężeń AIRY'ego dla górotworu

$\Phi^b(x,y), \Phi^b(r,\varphi)$ - funkcja naprężeń AIRY'ego dla betonu

1. PROBLEMATYKA WSTĘPNA

1.1. OGÓLNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA Z PUNKTU WIDZENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1.1.1. Założenia ogólne

Otwór wyrobiska zakłóca lokalnie pole naprężeń górotworu nienaruszonego. Można przyjąć, że w odległościach znacznie przewyższających rozmiary poprzeczne wyrobiska stan naprężenia nie został naruszony [3], [5], [38].

Na rys. 1.1 pokazano przekrój poprzeczny i osiowy wyrobiska poziomego obudowanego powłoką z betonu natryskowego*). Przyjęto ogólnie, że przekrój poprzeczny walcowej powłoki z betonu natryskowego jest ograniczony dwoma krzywymi zamkniętymi L_1 i L_2, a powłoka nieskończenie długa.

Generalnie przyjęto traktować zarówno gorótwór otaczający powłokę betonową, jak i sam beton powłoki, jako ośrodki jednorodne, izotropowe o stałych E, ν dla skały oraz odpowiednio E_b i ν_b dla betonu**). Przyjęto dalej, że wpływ siły masowej (siły ciężkości) na pole naprężeń jest pomijalnie mały. Zagadnienie potraktowano jako płaskie zagadnienie stanu odkształcenia [5], [7], [8], [38].

Przyjęto zatem dla betonu i górotworu:

$$\varepsilon_{zz} = 0, \qquad w = 0, \tag{1.1}$$

gdzie:

ε_{zz} - współrzędna tensora odkształcenia względem osi z,
w - współrzędna wektora przemieszczenia w kierunku osi z.

Dla górotworu nienaruszonego wykonanym wyrobiskiem korytarzowym (rys. 1.2) można przyjąć:

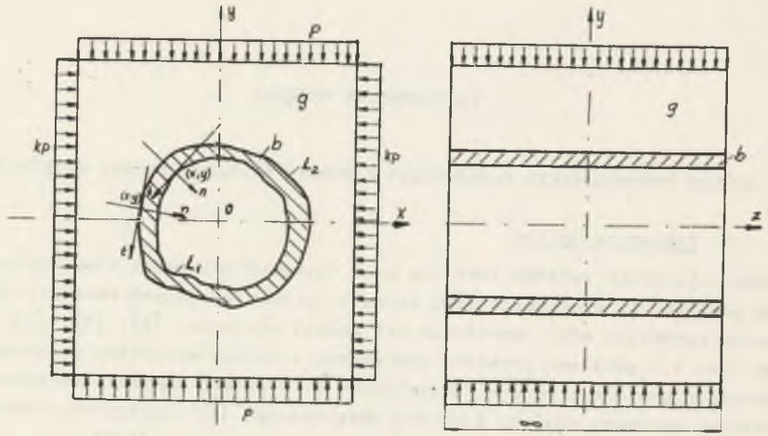
$$\sigma_{xx} = kp \tag{1.2}$$

$$\sigma_{yy} = p \tag{1.3}$$

---

*) Problematykę betonu natryskowego jako tworzywa obudowy natryskowej omówiono w załączniku 1.

**) Górotwór jak i beton, jeżeli chodzi o ich właściwości wytrzymałościowe, potraktowane będą jako izotropowe co do kierunku i anizotropowe co do zwrotu. Szerzej na ten temat w rozdziale 4.



Rys. 1.1. Przekrój poprzeczny i osiowy wyrobiska korytarzowego obudowanego powłoką z betonu natryskowego

Fig. 1.1. Cross - section and axial section of a roadway supported by a coat of shotcrete

$$\sigma_{zz} = kp, \qquad (p < 0) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = 0 \tag{1.5}$$

gdzie:

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ - współrzędne tensora stanu naprężenia dla górotworu nienaruszonego,

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ - współrzędne tensora stanu odkształcenia dla górotworu nienaruszonego.

Otrzymujemy zgodnie z prawem HOOKE'a

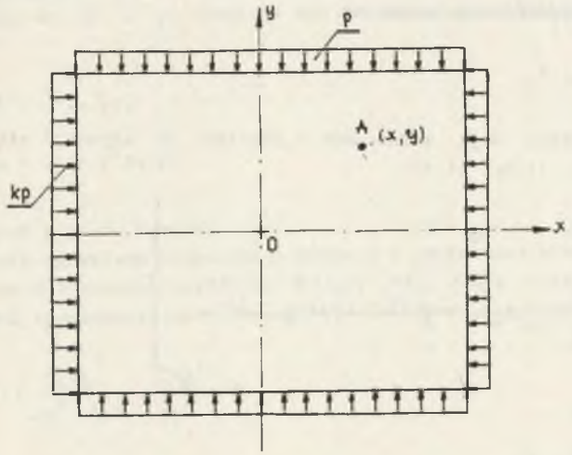
$$\varepsilon_{xx} = 0 = \frac{1}{E} \cdot \left[kp - \vartheta(p + kp)\right] \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[p - \vartheta(kp + kp)\right] \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{1}{E}\left[kp - \vartheta(p + kp)\right] \tag{1.8}$$

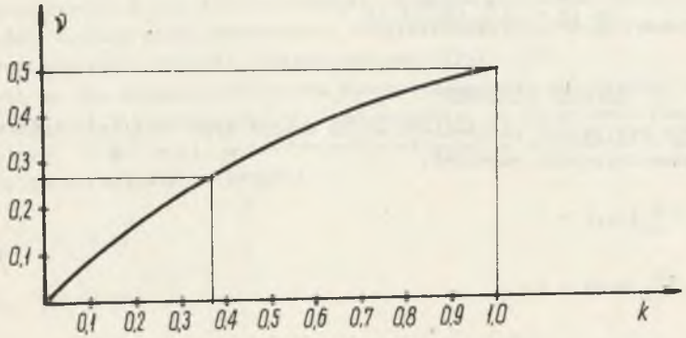
Zgodnie z równaniem (1.6) uzyskuje się:

$$k = \frac{\vartheta}{1 - \vartheta} \tag{1.9}$$



Rys. 1.2. Model górotworu nienaruszonego wyrobiskiem korytarzowym

Fig. 1.2. Model of the rock mass intack by a roadway



Rys. 1.3. Zależność współczynnika Poissona ϑ od współczynnika parcia bocznego

Fig. 1.3. Dependance of Poisson's coordinate ϑ on the lateral pressure coordinate

Wykres zależności pomiędzy ϑ a k przedstawiono na rysunku 1.3.

Z równania (1.7) i (1.9) uzyskuje się:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{p}{E}\left(1 - \frac{2 \cdot \vartheta^2}{1 - \vartheta}\right) = -\frac{p}{E}\,\frac{(1 + \vartheta)(2\vartheta - 1)}{1 - \vartheta}. \tag{1.10}$$

Oznaczając współrzędne wektora przemieszczenia punktu A przed wykonaniem wyrobiska korytarzowego przez

$$u_o,\ v_o,\ w_o$$

(względem układu Oxyz związanego z punktem 0), uzyskuje się po uwzględnieniu (1.6), (1.8), (1.7)

$$\left.\begin{aligned} u_o &= 0, \qquad w_o = 0, \\ v_o &= \int_0^y \varepsilon_{yy}\cdot dy = -\frac{p}{E}\,\frac{(1+\vartheta)(2.\vartheta-1)}{1-\vartheta}\,y, \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

lub krócej

$$v_o = m\ .\ y, \tag{1.12}$$

gdzie:

$$m = -\frac{p}{E}\,\frac{(1+\vartheta)\ .\ (2.\vartheta-1)}{1-\vartheta} \tag{1.13}$$

1.1.2. Warunki brzegowe

Przy przyjętych założeniach można ułożyć (rys. 1.1) następujące warunki brzegowe dotyczące naprężeń:

$$\sigma^b_{nn}(x,y) = 0, \tag{1.14}$$

$$\sigma^b_{tn}(x,y) = 0, \tag{1.15}$$

dla wszystkich punktów konturu L_1,

$$\sigma^b_{nn}(x,y) = \sigma_{nn}(x,y), \tag{1.16}$$

$$\sigma^b_{tn}(x,y) = \sigma_{tn}(x,y), \tag{1.17}$$

dla wszystkich punktów konturu L_2.

$$\sigma_{yy}(x,\infty,z) = p, \tag{1.18}$$

$$\sigma_{xx}(\infty,y,z) = kp = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\ .\ p \qquad (p < 0). \tag{1.19}$$

Oznaczając przez u i v współrzędne wektora przemieszczenia całkowitego względem osi x i y uzyskuje się dwa przemieszczeniowe warunki brzegowe:

$$u(x,y) = u^b(x,y), \tag{1.20}$$

$$v(x,y) - v_o = v^b(x,y) \tag{1.21}$$

dla wszystkich punktów konturu L_2 *).

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia można przyjąć istnienie funkcji naprężeń AIRY'ego $\Phi(x,y)$ [12], [33], która jest funkcją biharmoniczną czyniącą zadość równaniu różniczkowemu biharmonicznemu:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,.\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0. \tag{1.22}$$

Aby wyznaczyć pola tensora naprężeń w obszarze betonu i górotworu, należy wyznaczyć dwie funkcje biharmoniczne $\Phi^b(x,y)$ dla betonu oraz $\Phi(x,y)$ dla górotworu, spełniające warunki brzegowe (1.14) - (1.21).

Nie przytoczono w tym miejscu znanych związków pozwalających wyrazić współrzędne tensora stanu naprężenia, odkształcenia oraz współrzędnych wektora przemieszczenia poprzez funkcję naprężeń [33], [42].

Związki te dla betonu i górotworu pozwalają na ułożenie warunków brzegowych (1.14) - (1.21). Pozwalają one jednocześnie, po określeniu funkcji naprężeń $\Phi(x,y)$ i $\Phi^b(x,y)$, na wyznaczenie naprężeń w górotworze i betonie, to znaczy na określenie zależności:

$$\sigma_{xx} = f_1(x,y), \tag{1.23}$$

$$\sigma_{yy} = f_2(x,y), \tag{1.24}$$

$$\sigma_{xy} = f_3(x,y), \tag{1.25}$$

$$\sigma_{zz} = f_4(x,y), \tag{1.26}$$

dla górotworu oraz

$$\sigma^b_{xx} = g_1(x,y), \tag{1.27}$$

*) Kontur L_2 należy przyjmować jako wycięty w górotworze nienaruszonym, którego punkty uległy przemieszczeniom o współrzędnych $u_o = 0$, v_o, $w_o = 0$.

$$\sigma^b_{yy} = g_2(x,y), \tag{1.28}$$

$$\sigma^b_{xy} = g_3(x,y), \tag{1.29}$$

$$\sigma^b_{zz} = g_4(x,y) \tag{1.30}$$

dla betonu.

Po uzyskaniu rozwiązania w formie określonego pola tensora stanu naprężenia dla betonu i górotworu należy przy dalszym projektowaniu wytrzymałościowym zastosować optymalnie dobraną hipotezę wytężeniową, przy czym przy doborze takiej hipotezy zasadniczą sprawą będzie uwzględnienie tak dla betonu jak i górotworu niesymetrycznych właściwości wytrzymałościowych przy rozciąganiu i ściskaniu.

1.2. UZASADNIENIE PRZYJĘCIA MODELU SPRĘŻYSTEGO, IZOTROPOWEGO

Zasadnicze zastrzeżenia może budzić potraktowanie górotworu jako ośrodka jednorodnego izotropowego, którego właściwości fizyczne są opisane dwoma stałymi E i ν. W rzeczywistości górotwór jest ośrodkiem wyraźnie anizotropowym. Dlatego też uzyskane w pracy wyniki powinny być traktowane jedynie jako przybliżenie rozpatrywanego zagadnienia. Uściślenie uzyskanych wyników należałoby poprzedzić szerokimi badaniami eksperymentalnymi, które by przesądziły ostatecznie o charakterze właściwości różnych rodzajów górotworu. Współczesne prace wskazują na to, że pewne rodzaje górotworu można modelować jako ośrodek transwersalnie izotropowy, co wymaga wyznaczenia pięciu stałych sprężystości [34]. Badania eksperymentalne w tym zakresie są w fazie początkowej. Stałe sprężystości wyznaczono dla nielicznych typów skał. Jest sprawą oczywistą, że przyjęcie modelu ciała transwersalnie izotropowego w znaczny sposób skomplikuje rozwiązanie postawionego zagadnienia.

1.3. ZAŁOŻENIA DOTYCZĄCE SPOSOBU PRZEJMOWANIA OBCIĄŻENIA OD GÓROTWORU NA OBUDOWĘ Z BETONU NATRYSKOWEGO

W punkcie 1.1 niniejszej pracy założono następujący mechanizm przejmowania obciążenia przez powłokę z betonu natryskowego. Zakłada się mianowicie, że kontur L_2 wycina się z górotworu, który uległ odkształceniu pod wpływem obciążenia kp, p, kp, czyli z górotworu już częściowo odkształconego.

Dodatkowe odkształcenia, będące wynikiem wycięcia otworu o konturze L_2, przejmowane są całkowicie przez beton nałożonej powłoki z betonu natryskowego, jeśli założyć idealne działanie usztywniające przodku wyrobiska korytarzowego w czasie wiązania betonu. W przypadku tym jako przemieszczeniowe warunki brzegowe przyjmuje się związki (1.20) i (1.21).

Jeśli przyjąć, że działanie usztywniające przodku jest tylko częściowe, wówczas należy jednocześnie przyjąć częściowe odprężenie górotworu przed całkowitym związaniem betonu. W takim przypadku odkształcenia betonu będą częścią odkształcenia górotworu.

Problem ten rozważono w punkcie 4.2 niniejszej pracy, podając także propozycję rozwiązania teoretycznego tego zagadnienia.

1.4. ROZWIĄZANIA DOTYCHCZASOWE I UWAGI KOŃCOWE PROBLEMATYKI WSTĘPNEJ

W znanych rozwiązaniach współpracy obudowy z górotworem nie uwzględnia się faktu, że wyrobisko korytarzowe wykonywane jest w ciele już obciążonym, a więc także odkształconym.

Równanie (1.21), przy przyjęciu, że górotwór nie jest obciążony i odkształcony, ma postać:

$$v(x,y) = v^b(x,y). \tag{1.31}$$

Przy takim założeniu traktowano obciążenie obudowy wyrobiska kołowego w pracach [19], [37].

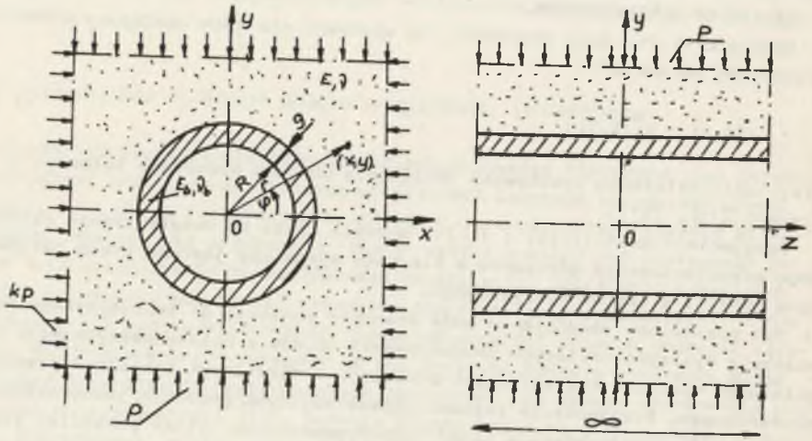
Przyjęcie równań (1.20) i (1.21) pozwala także na uwzględnienie częściowego przemieszczenia górotworu w kierunku wyrobiska jeszcze przed nałożeniem powłoki z betonu natryskowego.

Tak postawione zagadnienie może stanowić podstawę do teoretycznego rozwiązania wytrzymałościowego projektowania obudów z betonu natryskowego kapitalnych wyrobisk korytarzowych poziomych o określonym kształcie przekroju poprzecznego. Przyjmowanie założeń upraszczających powoduje jednocześnie konieczność przeprowadzenia badań eksperymentalnych, które pozwoliły zweryfikować uzyskane wyniki. Dotyczy to zwłaszcza założenia i izotropii ośrodków betonu i górotworu oraz zwłaszcza problemu niepełnego działania usztywniającego przodku wyrobiska korytarzowego.

2. WYROBISKO KORYTARZOWE KOŁOWE

2.1. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Rozważono przypadek wyrobiska kołowego (rys. 2.1) przy założeniach zawartych w punkcie 1.



Rys. 2.1. Przekrój poprzeczny i osiowy wyrobiska korytarzowego kołowego obudowanego powłoką z betonu natryskowego

Fig. 2.1. Cross - section and axial section of a circular roadway supported by a coat from shotcrete

Ze względu na walcowy, kołowy kształt wyrobiska i obudowy rozważa się zagadnienie w walcowym układzie współrzędnych, przyjmując:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{2.2}$$

$$z = z$$

Równanie biharmoniczne (1.22) w biegunowym układzie współrzędnych przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \tag{2.3}$$

W dalszym ciągu wykorzystano rozwiązanie równania (2.3) podane przez J.H. MICHELLa [12], [33], a mianowicie:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_o \ln r + b_o r^2 + c_o r^2 \ln r + d_o r^2 \varphi + a'_o \varphi + \frac{a''_1}{2} r\varphi \sin\varphi + \\ & + (a_1 r + b_1 r^3 + a'_1 r^{-1} + b_1 r \ln r)\cos\varphi + \frac{c''_1}{2} r\varphi\cos\varphi + \\ & + (c_1 r + d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r \ln r)\sin\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{n+2} + \\ & + a'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2})\cos n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(c_n r^n + d_n r^{n+2} + \\ & + c'_n r^{-n} + d'_n e^{-n+2})\sin n\varphi\end{aligned} \tag{2.4}$$

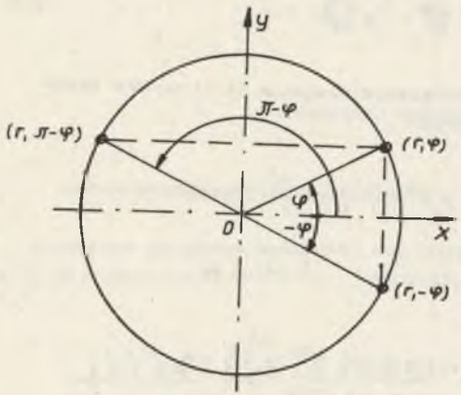
Sformułowane zagadnienie zakłada symetrię względem osi x i y (rys. 2.2), co pozwala na ustalenie dwu warunków dla funkcji naprężeń:

$$\begin{aligned}\Phi(r,\varphi) &= \Phi(r,-\varphi) \\ \Phi(r,\varphi) &= \Phi(r,\pi-\varphi)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Warunki (2.5) są spełnione zarówno dla funkcji $\Phi(r,\varphi)$ dla górotworu, jak i dla funkcji $\Phi^b(r,\varphi)$ dla betonu. Warunki (2.5) zastosowane do rozwiązania (2.4) prowadzą do uproszczonej postaci funkcji naprężeń dla górotworu i obudowy z betonu natryskowego.

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_o \ln r + b_o r^2 + c_o r^2 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n} r^{2n} + b_{2n} r^{2(n+1)} + \\ & + a'_{2n} r^{-2n} + b'_{2n} r^{-2(n-1)})\cos 2n\varphi;\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi^b = {} & \alpha_o \ln r + \beta_o r^2 + \gamma_o r^2 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n} r^{2n} + \beta_{2n} r^{2(n+1)} + \\ & + \alpha'_{2n} r^{-2n} + \beta'_{2n} r^{-2(n-1)})\cos 2n\varphi\end{aligned}$$



Rys. 2.2. Symetria względem osi x i y punktów o tej samej wartości funkcji naprężeń Φ

Fig. 2.2. Symmetry in relation to x and y axis of points of the same value of stresses Φ

Warunki brzegowe - wzory (1.14) - (1.19), dla omawianego przypadku, przyjmują postać:

$$\sigma^b_{rr}(R,\varphi) = 0 \tag{2.8}$$

$$\sigma^b_{r\varphi}(R,\varphi) = 0 \tag{2.9}$$

$$\sigma^b_{rr}(R+g,\varphi) = \sigma_{rr}(R+g,\varphi) \tag{2.10}$$

$$\sigma^b_{r\varphi}(R+g,\varphi) = \sigma_{r\varphi}(R+g,\varphi) \tag{2.11}$$

$$\sigma_{rr}(r=\infty,\varphi) = \frac{p}{2}\left[(1+k) - (1-k)\cos 2\varphi\right] \tag{2.12}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r=\infty,\varphi) = \frac{p}{2}\left[(1+k) + (1-k)\cos 2\varphi\right] \tag{2.13}$$

$$\sigma_{r\varphi}(r=\infty,\varphi) = \frac{p}{2}\cdot(1-k)\sin 2\varphi \tag{2.14}$$

$(p < 0)$

Warunki (2.12), (2.13), (2.14) uzyskano transformując współrzędne $\sigma_{xx} = kp$; $\sigma_{yy} = p$; $\sigma_{xy} = 0$ na współrzędne w układzie biegunowym.

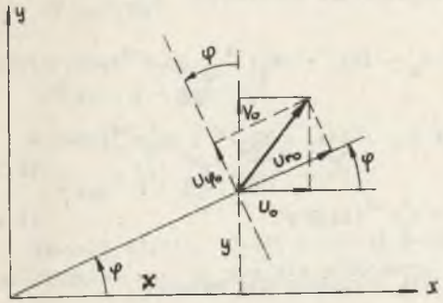
Oznaczmy przez u_o, v_o współrzędne ortokartezjańskie wektora przemieszczenia wstępnego powstałego wskutek działania obciążenia (kp, p, kp) w górotworze bez wyciętego otworu.

Zgodnie z rys. 2.3 współrzędne biegunowe tego wektora będą

$$u_{ro} = u_o\cos\varphi + v_o\sin\varphi$$
$$u_{\varphi o} = -u_o\sin\varphi + v_o\cos\varphi \tag{2.15}$$

Przyjmując $u_o = 0$; $v_o = m.y$ uzyskano:

$$u_{ro} = my\sin\varphi = \frac{1}{2}mr(1-\cos 2\varphi)$$
$$u_{\varphi o} = my\cos\varphi = \frac{1}{2}mr\cdot\sin 2\varphi \tag{2.16}$$



Rys. 2.3. Składowe przemieszczenia powstałego wskutek obciążenia wstępnego (kp, p, kp)

Fig. 2.3. Components of the displacement caused by the preload (kp, p, kp)

gdzie:

$$m = -\frac{p}{E}\cdot\frac{(1+\nu)(2\nu-1)}{1-}.$$

Przemieszczeniowe warunki brzegowe (1.20) i (1.21) przyjmują zatem postać:

$$u_r(R+g,\varphi) - \frac{1}{2}m(R+g)(1-\cos 2\varphi) = u^b_r(R+g,\varphi) \tag{2.17}$$

$$u_\varphi(R+g,\varphi) - \frac{1}{2}m(R+g)\sin 2\varphi = u^b_\varphi(R+g,\varphi) \tag{2.18}$$

Przez u_r, u_φ, u^b_r, u^b_φ oznaczono współrzędne wektora przemieszczenia punktów górotworu i betonu w biegunowym układzie współrzędnych.

W dalszym ciągu opracowania wykazano, że aby zadość uczynić wszystkim warunkom brzegowym (2.8) - (2.14) i (2.17), (2.18), wystarczy w wyrażaniach (2.6) i (2.7) na funkcje naprężeń poprzestać na pierwszych wyrazach występujących w nich szeregów trygonometrycznych.

W ten sposób uzyskuje się dla górotworu i betonu:

$$\Phi = a_o\ln r + b_o r^2 + c_o r^2\ln r + (a_2 r^2 + b_2 r^4 + \frac{a'_2}{r^2} + b'_2)\cos 2\varphi \tag{2.19}$$

$$\Phi^b = \alpha_o\ln r + \beta_o r^2 + \gamma_o r^2\ln r + (\alpha_2 r^2 + \beta_2 r^4 + \frac{\alpha'_2}{r^2} + \beta'_2)\cos 2\varphi \tag{2.20}$$

W dalszym ciągu skorzystano ze znanych w teorii sprężystości związków [12], [33].

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{2.21}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \tag{2.22}$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \tag{2.23}$$

Po zastosowaniu wzoru (2.19) otrzymano dla górotworu:

$$\sigma_{rr} = a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + c_o - 2(a_2 + 3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi \quad (2.24)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + 3c_o + 2(a_2 + 6b_2 r^2 + 3a_2' r^{-4})\cos 2\varphi \quad (2.25)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2(a_2 + 3b_2 r^2 - 3a_2' r^{-4} - b_2' r^{-2})\sin 2\varphi \quad (2.26)$$

natomiast po zastosowaniu wzoru (2.20) otrzymano dla betonu:

$$\sigma_{rr}^{b} = \alpha_o r^{-2} + 2\beta_o + 2\gamma_o \ln r + \gamma_o - 2(\alpha_2 + 3\alpha_2' r^{-4} + 2\beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi \quad (2.27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{b} = -\alpha_o r^{-2} + 2\beta_o + 2\gamma_o \ln r + 3\gamma_o + 2(\alpha_2 + 6\beta_2 r^2 + 3\alpha_2' r^{-4}) \quad (2.28)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{b} = 2(\alpha_2 + 3\beta_2 r^2 - 3\alpha_2' r^{-4} - \beta_2' r^{-2})\sin 2\varphi \quad (2.29)$$

Współrzędne tensora stanu odkształcenia dla górotworu po uwzględnieniu prawa HOOKE'a i po zastosowaniu wzorów (2.24) - (2.26) wyrażają się następująco:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\Big\{(1-\nu^2)\big[a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + c_o + 2(a_2 + 3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi\big] - \nu(1+\nu)\big[-a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + 3c_o + 2(a_2 + 6b_2 r^2 + 3a_2' r^{-4})\cos 2\varphi\big]\Big\} \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}\Big\{(1-\nu^2)\big[-a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + 3c_o + 2 \cdot (a_2 + 6b_2 r^2 + 3a_2' r^{-4})\cos 2\varphi\big] - \nu \cdot (1+\nu)\big[a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + c_o - 2(a_2 + 3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi\big] \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = 2\,\frac{1+\nu}{E}(a_2 + 3b_2 r^2 - 3a_2' r^{-4} - b_2' r^{-2})\sin 2\varphi \quad (2.32)$$

Współrzędne wektora przemieszczenia u_r i u_φ są związane ze współrzędnymi tensora odkształcenia ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{r\varphi}$ następującymi wzorami [12], [33]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) \quad (2.35)$$

Związki (2.33), (2.34) i (2.35) prowadzą do następujących wzorów na współrzędne u_r i u_φ dla górotworu:

$$u_r(r,\varphi) = \frac{1}{E}\Big\{-a_o r^{-1} + 2b_o r + 2c_o r \ln r - c_o r + 2(a_2 r + a_2' r^{-3} - 2b_2' r^{-1})\cos 2\varphi - \nu\big[a_o r^{-1} + 2b_o r + 2c_o r \ln r + c_o r + 2(a_2 r + 2b_2 r^3 - a_2' r^{-3})\cos 2\varphi + 4\nu^2\big[b_o r + c_o r \ln r + (b_2 r^3 + b_2' r^{-1})\cos 2\varphi\big]\Big\} + \alpha \sin\varphi + \gamma \cos\varphi \quad (2.36)$$

$$u_\varphi(r,\varphi) = \frac{1}{E}\Big\{4c_o r\varphi + 2(a_2 r + 3b_2 r^3 + a_2' r^{-3} - b_2' r^{-1})\sin 2\varphi + 2\nu(a_2 r + b_2 r^3 + a_2' r^{-3} + b_2' r^{-1})\sin 2\varphi - 4\nu^2\big[c_o r\varphi + (b_2 r^3 - b_2' r^{-1})\sin 2\varphi\big]\Big\} + \alpha\cos 2\varphi - \gamma \sin\varphi + \beta r \quad (2.37)$$

Podobnie dla betonu:

$$u_r^{b}(r,\varphi) = \frac{1}{E}\Big\{-\alpha_o r^{-1} + 2\beta_o r + 2\gamma_o r \ln r - \gamma_o r - 2(\alpha_2 r - \alpha_2' r^{-3} - 2\beta_2' r^{-1})\cos 2\varphi + \nu\big[\alpha_o r^{-1} + 2\beta_o r + 2\gamma_o r \ln r + \gamma_o r + 2(\alpha_2 r + 2\beta_2 r^3 - \alpha_2' r^{-3})\cos 2\varphi - 4\nu^2\big[\beta_o r + \gamma_o r \ln r + (\beta_o r^3 + \beta_2' r^{-1})\cos 2\varphi\big]\Big\} + \alpha_b \sin\varphi + \gamma_b \cos\varphi \quad (2.38)$$

$$u_\varphi^b(r,\varphi) = \frac{1}{E}\Big\{ 4\gamma_o r\varphi + 2(\alpha_2 r + 3\beta_2 r^3 + \alpha_2' r^{-3} +$$

$$- \beta_2' r^{-1})\sin 2\varphi + 2\vartheta(\alpha_2 r + \beta_2 r^3 + \alpha_2' r^{-3} +$$

$$+ \beta_2' r^{-1})\sin 2\varphi - 4\vartheta^2\left[\gamma_o r\varphi + (\beta_2 r^3 - \beta_2' r^{-1})\sin 2\varphi\right]\Big\} +$$

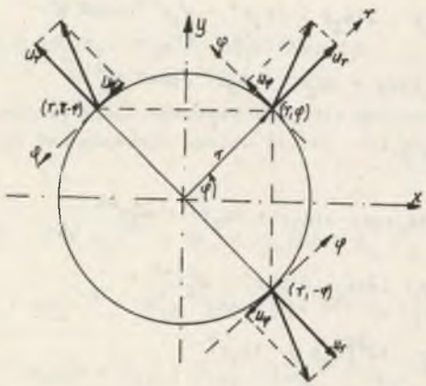
$$+ \alpha_b \cos 2\varphi - \gamma_b \sin\varphi + \beta_b r \qquad (2.39)$$

gdzie:

$\alpha, \beta, \gamma,$

$\alpha_b, \beta_b, \gamma_b$ - są stałymi, które należy określić dla zadanego problemu.

Na rys. 2.4 przedstawiono wektory przemieszczeń w punktach (r,φ); $(r,-\varphi)$; $(r,\pi-\varphi)$ wykorzystując symetrię rozważanego zagadnienia względem osi x oraz y.



Rys. 2.4. Symetria względem osi x i y punktów o tej samej wartości przemieszczeń

Fig. 2.4. Symmetry in relation to x and y axis of points of the same value of displacements

Z przedstawionej symetrii wynikają tożsamości:

$$\left.\begin{aligned} u_r(r,\varphi) &= u_r(r,-\varphi) \\ u_r(r,\varphi) &= u_r(r,\varphi-\pi) \\ u_\varphi(r,\varphi) &= -u_\varphi(r,-\varphi) \\ u_\varphi(r,\varphi) &= -u_\varphi(r,\pi-\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

Analogiczne warunki odnoszą się również do przemieszczeń punktów betonu. Z warunków symetrii (2.40) wynika zerowanie się stałych $\alpha, \beta, \gamma, c_o$.

$$\alpha = \beta = \gamma = c_o = 0 \qquad (2.41)$$

oraz zerowanie się stałych $\alpha_b, \beta_b, \gamma_b, \gamma_o$

$$\alpha_b = \beta_b = \gamma_b = \gamma_o = 0 \qquad (2.42)$$

Ze wzorów (2.25) i (2.26) wynika, że należy przyjąć

$$b_2 = 0, \qquad (2.43)$$

ponieważ założenie $b_2 \neq 0$ prowadzi do nieskończonych wartości naprężeń $\sigma_{\varphi\varphi}$ oraz $\sigma_{r\varphi}$ dla $r = \infty$. Jest to sprzeczne z przyjętymi założeniami zagadnienia.

Warunki brzegowe (2.12), (2.13) i (2.14) dotyczące stanu naprężenia w górotworze nienaruszonym pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie współczynników:

$$b_o = \frac{p}{4}\cdot(1+k) = \frac{p}{4}\cdot\frac{1}{1-\vartheta} \qquad (2.44)$$

$$a_2 = \frac{p}{4}\cdot(1-k) = \frac{p}{4}\cdot\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta} \qquad (2.45)$$

Wzory (2.24) - (2.29) oraz wzory (2.36) - (2.39) po uwzględnieniu (2.41) - (2.45) i po przekształceniach przyjmują postać:

$$\sigma_{rr} = a_o r^{-2} - 2(3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi + \frac{p}{2(1-\vartheta)}\left[1 - (1-2\vartheta)\cos 2\varphi\right] \qquad (2.46)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -a_o r^{-2} + 6a_2' r^{-4}\cos 2\varphi + \frac{p}{2(1-\vartheta)}\left[1 + (1-2\vartheta)\cos 2\varphi\right] \qquad (2.47)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -2(3a_2' r^{-4} + b_2' r^{-2})\sin 2\varphi + \frac{p(1-2\vartheta)}{2(1-\vartheta)}\sin 2\varphi \qquad (2.48)$$

$$\sigma_{rr}^b = \alpha_o r^{-2} + 2\beta_o - 2(\alpha_2 + 3\alpha_2' r^{-4} + 2\beta_r' r^{-2})\cos 2\varphi \qquad (2.49)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^b = -\alpha_o r^2 + 2\beta_o + 2(\alpha_2 + 6\beta_2 r^2 + 3\alpha_2' r^{-4})\cos 2\varphi \qquad (2.50)$$

$$\sigma_{r\varphi}^b = 2(\alpha_2 + 3\beta_2 r^2 - 3\alpha_2' r^{-4} - \beta_2' r^{-2})\sin 2\varphi \qquad (2.51)$$

$$u_r = \frac{2(1+\nu)}{E}\left\{-\frac{a_o}{2}r^{-1} + \left[a_2' r^{-3} + 2(1-\nu)b_2' r^{-1}\right]\cos 2\varphi\right\} +$$

$$+ \frac{p}{2E}\cdot\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\cdot r(1-\cos 2\varphi) \tag{2.52}$$

$$u\varphi = \frac{2(1+\nu)}{E}\left[a_2' r^{-3} - (1-2\nu)r^{-1}b_2'\right]\sin 2\varphi +$$

$$+ \frac{p}{2E}\,\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\, r\,.\,\sin 2\varphi \tag{2.53}$$

$$u_r^b = \frac{2(1+\nu b)}{E_b}\left\{-\frac{\alpha_o r^{-1}}{2} + 2\beta_o r(1-2\nu_b) +\right.$$

$$\left. - \left[\alpha_2 r - \alpha_2' r^{-3} + 2\beta_2\nu_b r^3 - 2\beta_2' r^{-1}(1-\nu_b)\right]\cos 2\varphi\right\} \tag{2.54}$$

$$u_\varphi^b = \frac{2(1+\nu_b)}{E_b}\left[\alpha_2 r + \beta_2 r^3(3-2\nu_b) + \alpha_2' r^{-3} +\right.$$

$$\left. - \beta_2' r^{-1}(1-2\nu_b)\right]\sin 2\varphi \tag{2.55}$$

2.2. LINIOWY UKŁAD RÓWNAŃ, ROZWIĄZUJĄCY POSTAWIONE ZAGADNIENIE

Zastosowanie warunków brzegowych (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.17), (2.18) prowadzi do następującego układu równań liniowych o niewiadomych a_o, a_2', b_2', α_o, α_2, β_2, α_2', β_2', β_o

$$R^{-2}\alpha_o + 2\beta_o = 0 \tag{2.56}$$

$$\alpha_2 + 3R^{-4}\alpha_2' + 2R^{-2}\beta_2' = 0 \tag{2.57}$$

$$\alpha_2 + 3R^2\beta_2 - 3R^{-4}\alpha_2' - R^{-2}\beta_2' = 0 \tag{2.58}$$

$$\alpha_o + 2R_1^2\beta_o - a_o = \frac{pR_1^2}{2(1-\nu)} \tag{2.59}$$

$$\alpha_2 + 3R_1^{-4}\alpha_2' + 2R_1^{-2}\beta_2' - 3R_1^{-4}a_2' - 2R_1^{-2}b_2' = a_2 \tag{2.60}$$

$$\alpha_2 + 3R_1^2\beta_2 - 3R_1^{-4}\alpha_2' - R_1^{-2}\beta_2' + 3R_1^{-4}a_2' + R_1^{-2}b_2' = a_2 \tag{2.61}$$

$$\alpha_o - 2(1-2\nu_b)R_1^2\beta_o - ya_o\lambda = 0 \tag{2.62}$$

$$\alpha_2 + 2\nu_b R_1^2\beta_2 - R_1^{-4}\alpha_2' - 2(1-\nu_b)R_1^{-2}\beta_b' +$$

$$+ \lambda\,.\,yR_1^{-4}a_2' + 2(1-\nu)\lambda yR_1^{-2}b_2' = 0 \tag{2.63}$$

$$\alpha_2 + (3-2\nu_b)R_1^2\beta_2 + R_1^{-4}\alpha_2' - (1-2\nu_b)R_1^{-2}\beta_2' +$$

$$- \lambda yR_1^{-4}a_2' + (1-2\nu)\lambda yR_1^{-2}b_2' = 0 \tag{2.64}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{E_b}{E}; \tag{2.65}$$

$$y = \frac{1+\nu}{1+\nu_b} \tag{2.66}$$

$$a_2 = \frac{p}{4}\,\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \tag{2.67}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań uzyskuje się:

$$\alpha_o = -\frac{1}{2(1-\nu)}\cdot\lambda\cdot y\cdot p\cdot R_1^2\,\frac{1}{(1-2\nu_b)z+(z-1)\lambda.y+1} \tag{2.68}$$

$$\beta_o = \frac{1}{4(1-\nu)}\cdot\lambda\cdot y\cdot p\,\frac{z}{(1-2\nu_b)z+(z-1)\lambda y+1} \tag{2.69}$$

$$a_o = -\frac{p}{2(1-\nu)}\,R_1^2\,\frac{(1-2\nu_b)z+1}{(1-2\nu_b)z+(z-1)\lambda y+1} \tag{2.70}$$

gdzie:

$$z = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \tag{2.71}$$

zaś:

$$\alpha_2 = \frac{W_{x_1}}{W} \tag{2.72}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{R^2}\cdot\frac{W_{x_2}}{W} \tag{2.73}$$

$$\alpha_2' = R_1^4 \cdot \frac{W_{x_3}}{W} \tag{2.74}$$

$$\beta_2' = R_1^2 \cdot \frac{W_{x_4}}{W} \tag{2.75}$$

$$a_2' = R_1^4 \cdot \frac{W_{x_5}}{W} \tag{2.76}$$

$$b_2' = R_1^2 \cdot \frac{W_{x_6}}{W} \tag{2.77}$$

przy czym:

$$W = \left[(z^2 - 1)\lambda y + (3 - 4\vartheta_b)z^2 + 1\right]\left[4(z^3 - 1)(1 - \vartheta)\lambda y + \right.$$
$$+ 3z^2 - 4\vartheta_b z^3 + 1 + (3 - 4\vartheta)(3z^2 - 4z^3 + 1)\lambda y\Big] +$$
$$- 4\left[(z^3 - 1)\lambda y + (3 - 4\vartheta_b)z^3 + 1\right] \cdot$$
$$\cdot \left[(z^2 - 1)(1 - \vartheta)\lambda y + z - \vartheta_b z^2 + 1 - \vartheta_b + \right.$$
$$\left. + (z - z^2)(3 - 4\vartheta)\lambda y\right] \tag{2.78}$$

$$W_{x_1} = -\frac{p}{4} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta} \cdot z \cdot \lambda y\Big\{3z(3 - 4\vartheta)\left[(4\vartheta_b - \lambda y - 3)z^2 + \right.$$
$$\left. + (\lambda y - 1)\right] + 4 \cdot z^3(\lambda y + 3 - 4\vartheta_b) + 4(1 - \lambda y)\Big\} \tag{2.79}$$

$$W_{x_2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta}\lambda y(\lambda y - 1)(3 - 4\vartheta)z(z - 1) \tag{2.80}$$

$$W_{x_3} = \frac{p}{4} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta}\lambda y(3 - 4\vartheta)\left[-z^2(3 - 4\vartheta_b + \lambda y) + (\lambda y - 1)\right] \tag{2.81}$$

$$W_{x_4} = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta} \cdot \lambda y\left[z^3(\lambda y + 3 - 4\vartheta_b) + (1 - \lambda y)\right] \tag{2.82}$$

$$W_{x_5} = -\frac{p}{4} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta}\Big\{4\left[(3 - 4\vartheta_b + \lambda y)z^3 + \right.$$
$$\left. + (1 - \lambda y)\right] \cdot \left[z + (\lambda y - \lambda y\vartheta - \vartheta_b)z^2 + \right.$$
$$\left. + 1 - \vartheta_b + (1 - \vartheta)\lambda y\right] - \left[4(\lambda y - \lambda y\vartheta - \vartheta_b)z^3 + \right.$$

$$\left. + 3z^2 + 4(1 - \vartheta)\lambda y + 1\right] \cdot \left[(3 - 4\vartheta_b + \lambda y)z^2 + (1 - \lambda y)\right]\Big\} \tag{2.83}$$

$$W_{x_6} = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta}\Big\{\left[(3 - 4\vartheta_b + \lambda y)z^3 + (1 - \lambda y)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[(\lambda y - 4\vartheta_b)z^2 + 4z^2 + (4 - 4\vartheta_b - \lambda y)\right] +$$
$$- \left[(3 - 4\vartheta_b + \lambda y)z^2 + (1 - \lambda y)\right] \cdot \left[(\lambda y - 4\vartheta_b)z^3 + \right.$$
$$\left. + 3z^2 + (1 - \lambda y)\right]\Big\} \tag{2.84}$$

Zgodnie z prawem HOOKE'a mamy:

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \vartheta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})\right] \tag{2.85}$$

$$\varepsilon_z^b = 0 = \frac{1}{E_b}\left[\sigma_{zz}^b - \vartheta_b(\sigma_{rr}^b + \sigma_{\varphi\varphi}^b)\right] \tag{2.86}$$

skąd

$$\sigma_{zz} = \vartheta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \tag{2.87}$$

$$\sigma_{zz}^b = \vartheta_b(\sigma_{rr}^b + \sigma_{\varphi\varphi}^b) \tag{2.88}$$

po uwzględnieniu wzorów (2.46), (2.47) oraz (2.49), (2.50) uzyskuje się:

$$\sigma_{zz} = 4\vartheta\left(\frac{p}{4} \cdot \frac{1}{1 - \vartheta} - b_2' \frac{1}{r^2}\cos 2\varphi\right) \tag{2.89}$$

$$\sigma_{zz}^b = 4\vartheta_b\left[\beta_o + \left(3\beta_2 r^2 - \beta_2' \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right] \tag{2.90}$$

2.3. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

2.3.1. Przypadek poziomego wyrobiska kołowego niezbrojonego powłoką betonową

Aby rozważyć ten przypadek należy w rozwiązaniach uzyskanych wcześniej założyć $E_b = 0$, $\lambda = 0$ oraz $R = R_1$ $(g = 0,\ z = 1)$. Wprowadzając te założenia do wzorów (2.68), (2.70) oraz (2.72) - (2.77) uzyskuje się:

$$\alpha_o = \beta_o = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_2' = \beta_2' = 0 \tag{2.91}$$

$$a_o = -\frac{p}{2(1-\vartheta)} R^2 \tag{2.92}$$

$$a_2' = \frac{p}{4}\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta} R^4 \tag{2.93}$$

$$b_2' = -\frac{p}{2}\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta} R^2 \tag{2.94}$$

Po wstawieniu wyznaczonych współczynników (2.91) - (2.94) do wzorów (2.46) - (2.48) otrzymuje się:

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2(1-\vartheta)}\left[(1-\frac{R^2}{r^2}) - (1-2\vartheta)\,.\,(1+3\frac{R^4}{r^4}-4\frac{R^2}{r^2})\cos 2\varphi\right] \tag{2.95}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2(1-\vartheta)}\left[(1+\frac{R^2}{r^2}) + (1-2\vartheta)\,.\,(1+3\frac{R^4}{r^4})\cos 2\varphi\right] \tag{2.96}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{p(1-2\vartheta)}{2(1-\vartheta)}(1-3\frac{R^4}{r^4}+2\frac{R^2}{r^2})\sin 2\varphi \tag{2.97}$$

Naprężenia wzdłuż osi wyrobiska, zgodnie z (2.87) wynoszą:

$$\sigma_{zz} = \vartheta\frac{p}{(1-\vartheta)}\left[1+2(1-2\vartheta)\frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi\right] \tag{2.98}$$

Specyfikując w dalszym ciągu uzyskane wzory (2.95) - (2.98) na przypadek $\vartheta = 0$ (k = 0 - brak obciążenia bocznego) uzyskuje się:

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2}\left[(1-\frac{R^2}{r^2}) - (1+3\frac{R^4}{r^4}-4\frac{R^2}{r^2})\cos 2\varphi\right] \tag{2.99}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2}\left[(1+\frac{R^2}{r^2}) + (1+3\frac{R^4}{r^4})\cos 2\varphi\right] \tag{2.100}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{p}{2}(1-3\frac{R^4}{r^4}+2\frac{R^2}{r^2})\sin 2\varphi \tag{2.101}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{2.102}$$

Wzory (2.99) - (2.102) są zgodne ze wzorami podanymi w [16] na stronie

Przyjmując $\vartheta = \frac{1}{2}$ (k = 1 - równomierne ściskanie uzyskuje się ze wzorów (2.95) - (2.98))

$$\sigma_{rr} = p(1-\frac{R^2}{r^2}) \tag{2.103}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = p(1+\frac{R^2}{r^2}) \tag{2.104}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \tag{2.105}$$

$$\sigma_{zz} = p \tag{2.106}$$

Wzory (2.103) - (2.105) są zgodne ze wzorami podanymi w [38] strona 36.

2.3.2. Przypadek wyrobiska poziomego kołowego wzmocnionego powłoką betonową przy $\vartheta = \frac{1}{2}$ (k = 1 - równomierne ściskanie)

Podstawiając do wzorów (2.68) - (2.70) oraz (2.72) - (2.77) $\vartheta = \frac{1}{2}$ uzyskujemy:

$$\alpha_o = -\frac{\lambda p R_1^2}{\alpha . z - \beta} \tag{2.107}$$

$$\beta_o = +\frac{\frac{1}{2}\lambda p z}{\alpha z - \beta} \tag{2.108}$$

$$\alpha_o' = -\frac{\frac{2}{3}(1+\vartheta_b)pR_1^2\left[(1-2\vartheta_b)z+1\right]}{\alpha z - \beta} \tag{2.109}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{2}{3}(1-2\vartheta_b)(1+\vartheta_b) + \lambda \tag{2.110}$$

$$\beta = \lambda - \frac{2}{3}(1+\vartheta_b) \tag{2.111}$$

natomiast

$$\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_2' = \beta_2' = a_2' = b_2' = 0 \tag{2.112}$$

Ze wzorów (2.46) - (2.48) i (2.89) po przedstawieniu wzorów (2.107) - (2.112) uzyskano dla górotworu:

$$\sigma_{rr} = p\left\{1 - \frac{\frac{2}{3}(1+\nu_b)\left[(1-2\nu_b)z+1\right]}{\alpha z - \beta} \cdot \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right\} \tag{2.113}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = +p\left\{1 + \frac{\frac{2}{3}(1+\nu_b)\left[(1-2\nu_b)z+1\right]}{\alpha z - \beta} \cdot \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right\} \tag{2.114}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \tag{2.115}$$

$$\sigma_{zz} = p \tag{2.116}$$

Natomiast ze wzorów (2.49) - (2.51) po podstawieniu wzorów (2.107) - (2.112) uzyskano dla betonu:

$$\sigma^b_{rr} = \frac{\lambda p}{\alpha z - \beta}\left[z - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right] \tag{2.117}$$

$$\sigma^b_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda p}{\alpha z - \beta}\left[z + \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right] \tag{2.118}$$

$$\sigma^b_{r\varphi} = 0 \tag{2.119}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\lambda p \nu_b}{\alpha z - \beta} \cdot z \tag{2.120}$$

Wzory (2.117) - (2.119) są zgodne ze wzorami Lamego [43], jeżeli w miejsce p wstawić ciśnienie zastępcze:

$$p = \frac{p_2}{1 - z} \cdot \frac{\alpha z - \beta}{\lambda} \tag{2.121}$$

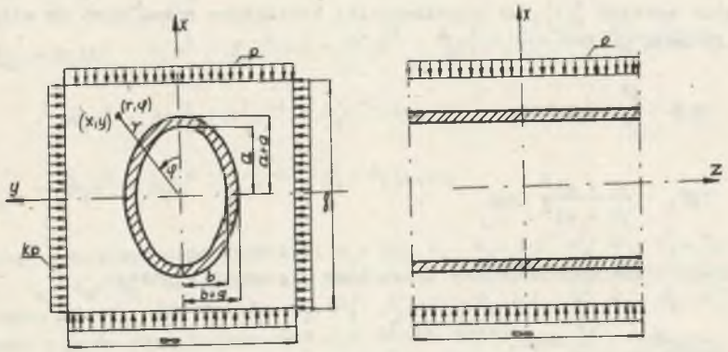
2.4. ZAKOŃCZENIE

1. Rozwiązano konkretny problem teorii sprężystości, który można zastosować przy projektowaniu obudów z betonu natryskowego wyrobisk korytarzowych poziomych.
2. Wykazano, że funkcje naprężeń w postaci (2.19) i (2.20), które w ogólnej postaci rozwiązania MICHELLa uwzględniają jedynie pierwsze wyrazy szeregu trygonometrycznego, są wystarczające do rozwiązania zagadnienia.
3. Uzyskano rozwiązania w postaci zamkniętej.

3. WYROBISKO KORYTARZOWE ELIPTYCZNE

3.1. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA

Rozważono przypadek wyrobiska eliptycznego (rys. 3.1) przy założeniach zawartych w rozdziale 1.



Rys. 3.1. Przekrój poprzeczny i osiowy wyrobiska korytarzowego eliptycznego obudowanego powłoką z betonu natryskowego

Fig. 3.1. Cross - section and axial section of an elliptic roadway supported by a coat from shotcrete

Na rysunku 3.1 pokazano przekrój poprzeczny eliptycznego wyrobiska korytarzowego wzmocnionego obudową, którą stanowi powłoka z betonu natryskowego.

Przyjęto elipsę wewnętrzną o półosiach a, b. Odpowiednio półosie elipsy zewnętrznej wynoszą a + g i b + g. Takie przyjęcie zapewnia stosunkowo równomierne nakładanie warstwy betonowej na górotwór.

Równaniami elips z rysunku 3.1 są:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.1}$$

$$\frac{x^2}{(a+g)^2} + \frac{y^2}{(b+g)^2} = 1. \tag{3.2}$$

Należy zaznaczyć, że elipsy (3.1) i (3.2) nie należą do rodziny elips narzuconej eliptycznym układem współrzędnych [45] strona 179.

W układzie współrzędnych biegunowych (rys. 3.1) uzyskuje się dla tych elips równania:

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot b}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} \tag{3.3}$$

$$r_1(\varphi) = \frac{(a+g)(b+g)}{(b+g)^2\cos^2\varphi + (a+g)^2\sin^2\varphi}. \tag{3.4}$$

Łatwo wykazać [21], że współczynniki kierunkowe normalnych do elips (3.1) i (3.2) mają postać:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{(a+g)^2}{(b+g)^2}\operatorname{tg}\varphi, \tag{3.6}$$

odpowiednie zaś współczynniki kierunkowe stycznych wynoszą:

$$-\operatorname{ctg}\theta = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}\varphi, \tag{3.7}$$

$$-\operatorname{ctg}\theta_1 = -\frac{(b+g)^2}{(a+g)^2}\operatorname{ctg}\varphi. \tag{3.8}$$

Odpowiednie kąty pokazano na rysunku 3.2.

Rys. 3.2. Kąty φ i θ dla elipsy

Fig. 3.2. Angles φ and θ for the ellipse

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do rozwiązania równania biharmonicznego (2.3), gdzie funkcję naprężeń $\Phi = \Phi(r,\varphi)$ należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Ogólne rozwiązanie równania biharmonicznego podał J.H. MICHELL [12], [33], wzór (2.4).

Należy, po sformułowaniu warunków brzegowych, wyznaczyć osobno funkcję naprężeń dla betonu i górotworu. Sformułowane zagadnienia zakłada symetrię geometryczną i symetrię pola naprężeń względem osi x i y, co można wykorzystać jak we wzorach (2.5). Po przeanalizowaniu poszczególnych członów równania MICHELLa uzyskano funkcję naprężeń AIRY'ego w postaci wzorów (2.6) i (2.7). Uproszczenia uzyskano przez odrzucenie wyrażeń zawierających w pierwszej potędze, wyrażeń typu $\sin n\varphi$ (n=1,2,...) oraz wyrażeń typu $\cos(2n-1)\varphi$ (n=1,2,...).

W przypadku wyrobiska kołowego ograniczono się do pierwszego wyrazu szeregu trygonometrycznego (wzory (2.19) i (2.20)). Dla przypadku eliptycznego przyjęto trzy pierwsze wyrazy szeregu, co prowadzi do następującej postaci funkcji naprężeń dla górotworu:

$$\Phi = a_o\ln r + b_o r^2 + c_o r^2\ln r + (a_2 r^2 + b_2 r^4 + a_2' r^{-2} - b_2')\cos 2\varphi + (a_4 r^4 + b_4 r^6 + a_4' r^{-4} + b_4' r^{-2})\cos 4\varphi + (a_6 r^6 + b_6 r^8 + a_6' r^{-6} + b_6' r^{-4})\cos 6\varphi \tag{3.9}$$

oraz dla betonu:

$$\Phi_b = \alpha_o\ln r + \beta_o r^2 + \gamma_o r^2\ln r + (\alpha_2 r^2 + \beta_2 r^4 + \alpha_2' r^{-2} + \beta_2')\cos 2\varphi + (\alpha_4 r^4 + \beta_4 r^6 + \alpha_4' r^{-4} + \beta_4' r^{-2})\cos 4\varphi + (\alpha_6 r^6 + \beta_6 r^8 + \alpha_6' r^{-6} + \beta_6' r^{-4})\cos 6\varphi \tag{3.10}$$

Należy wyznaczyć współczynniki a_o, b_o, c_o, a_2, b_2, a_2', b_2', a_4, b_4, a_4', b_4', a_6, b_6, a_6', b_6' odnoszące się do funkcji naprężeń dla górotworu oraz współczynniki α_o, β_o, γ_o, α_2, β_2, α_2', β_2', α_4, β_4, α_4', β_4', α_6, β_6, α_6', β_6' odnoszące się do funkcji naprężeń dla betonu obudowy.

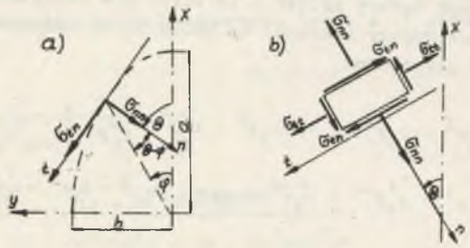
Powyższe współczynniki należy wyznaczyć opierając się na warunkach brzegowych zagadnienia.

3.2. WARUNKI BRZEGOWE SFORMUŁOWANE W SPOSÓB ŚCISŁY

Warunki brzegowe podobnie jak w rozdziale 1 i 2 dzielą się na trzy grupy:

- grupa pierwsza obejmuje warunki odnoszące się do wewnętrznego eliptycznego konturu obudowy,
- grupa druga obejmuje warunki odnoszące się do konturu eliptycznego stykowego obudowy i górotworu,
- grupa trzecia obejmuje warunki wynikające ze znanych wartości naprężeń w górotworze w nieskończonej odległości od wyrobiska.

Warunki brzegowe pierwszej grupy wyrażają fakt, że powierzchnia wewnętrzna powłoki betonowej jest wolna od naprężeń (rys. 3.3a).



Rys. 3.3. Naprężenia na powierzchniach elips skrajnych powłoki z betonu natryskowego

Fig. 3.3. Stresses on the extreme surfaces of ellipses of a coat from shotcrete

Można zapisać je następująco:

$$\sigma^{b}_{nn}\left[r(\varphi),\varphi\right] = 0, \tag{3.11}$$

$$\sigma^{b}_{tn}\left[r(\varphi),\varphi\right] = 0. \tag{3.12}$$

Druga grupa warunków brzegowych zakłada równość naprężeń normalnych i stycznych na elipsie zewnętrznej (styk betonu z górotworem), co wyraża się tożsamościami:

$$\sigma_{nn}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = \sigma^{b}_{nn}\left[r_1(\varphi),\varphi\right], \tag{3.13}$$

$$\sigma_{tn}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = \sigma^{b}_{tn}\left[r_1(\varphi),\varphi\right]. \tag{3.14}$$

Zgodność przemieszczeń na konturze styku betonu z górotworem wyrażają dwie dalsze tożsamości:

$$u_r\left[r_1(\varphi),\varphi\right] - u_{r_o}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = u^{b}_{r}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] \tag{3.15}$$

$$u_\varphi\left[r_1(\varphi),\varphi\right] - u_{\varphi_o}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = u^{b}_{\varphi}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] \tag{3.16}$$

gdzie u_{r_o}, u_{φ_o} są to współrzędne biegunowe wektora przemieszczenia punktu przed wydrążeniem otworu chodnikowego. Tożsamości (3.15), (3.16) na podstawie wzorów (2.16) można wyrazić:

$$u_r\left[r_1(\varphi),\varphi\right] - \frac{1}{2}\, m r_1(\varphi)(1 + \cos 2\varphi) = u^{b}_{r}\left[r_1(\varphi),\varphi\right] \tag{3.17}$$

$$u_\varphi\left[r_1(\varphi),\varphi\right] + \frac{1}{2}\, m r_1(\varphi)\sin 2\varphi = u^{b}_{r}\left[r_1(\varphi),\varphi\right]. \tag{3.18}$$

Wypisując tożsamości (3.17) i (3.18) uwzględniono obrót o kąt 90° układu oxy wprowadzonego na rys. 2.1.

Trzecia grupa warunków brzegowych, zgodnie ze wzorami (2.12), (2.13) (2.14), po zastąpieniu φ przez $\varphi + \frac{\pi}{2}$ sprowadza się do tożsamości:

$$\sigma_{rr}(r = \infty,\varphi) = \frac{p}{2}\left[(1 + k) + (1 - k)\cos 2\varphi\right], \tag{3.19}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r = \infty,\varphi) = \frac{p}{2}\left[(1 + k) - (1 - k)\cos 2\varphi\right]. \tag{3.20}$$

$$\sigma_{r\varphi}(r = \infty,\varphi) = -\frac{p}{2}\left[(1 - k)\sin 2\varphi\right]. \tag{3.21}$$

3.3. WYRAŻENIE NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W WARUNKACH BRZEGOWYCH POPRZEZ ZAŁOŻONE FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

Współrzędne biegunowe tensora stanu naprężenia zgodnie ze wzorami (2.21) do (2.23) po przyjęciu trzech wyrazów szeregu trygonometrycznego wynoszą dla górotworu:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = {} & a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + c_o - 2(a_2 + 3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi + \\ & - 2(6a_4 r^2 + 5b_4 r^4 + 10a_4' r^{-6} + 9b_4' r^{-4})\cos 4\varphi + \\ & - 2(15a_6 r^4 + 14b_6 r^6 + 21a_6' r^{-8} + 20b_6' r^{-6})\cos 6\varphi\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} = {} & -a_o r^{-2} + 2b_o + 2c_o \ln r + 3c_o + 2(a_2 + 6b_2 r^2 + 3a_2' r^{-4})\cos 2\varphi + \\ & + 2(6a_4 r^2 + 15b_4 r^4 + 10a_4' r^{-6} + 3b_4' r^{-4})\cos 4\varphi + \\ & + 2(15a_6 r^4 + 28b_6 r^6 + 21a_6' r^{-8} + 10b_6' r^{-6})\cos 6\varphi\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\varphi} = {} & 2(a_2 + 3b_2 r^2 - 3a_2' r^{-4} - b_2' r^{-2})\sin 2\varphi + 2(6a_4 r^2 + 10b_4 r^4 + \\ & - 10a_4' r^{-6} + 6b_4' r^{-4})\sin 4\varphi + 2(15a_6 r^4 + 21b_6 r^6 - 21a_6'' r^{-8} + \\ & - 15b_6' r^{-6})\sin 6\varphi\end{aligned} \tag{3.24}$$

oraz analogicznie dla betonu obudowy:

$$\sigma^b_{rr} = \alpha_o r^{-2} + 2\beta_o + 2\gamma_o \ln r + \gamma_o - 2(\alpha_2 + 3\alpha_2' r^{-4} + 2\beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi +$$

$$- 2(6\alpha_4 r^2 + 5\beta_4 r^4 + 10\alpha_4' r^{-6} + 9\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi - 2(15\alpha_6 r^4 +$$

$$+ 14\beta_6 r^6 + 21\alpha_6' r^{-8} + 20\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.25}$$

$$\sigma^b_{\varphi\varphi} = -\alpha_o r^{-2} + 2\beta_o + 2\gamma_o \ln r + 3\gamma_o + 2(\alpha_2 + 6\beta_2 r^2 + 3\alpha_2' r^{-4})\cos 2\varphi$$

$$+ 2(6\alpha_4 r^2 + 15\beta_4 r^4 + 10\alpha_4' r^{-6} + 3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi + 2(15\alpha_6 r^4 +$$

$$+ 28\beta_6 r^6 + 21\alpha_6' r^{-8} + 10\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.26}$$

$$\sigma^b_{r\varphi} = 2(\alpha_2 + 3\beta_2 r^2 - 3\alpha_2' r^{-4} - \beta_2' r^{-2})\sin 2\varphi + 2(6\alpha_4 r^2 + 10\beta_4 r^4 +$$

$$- 10\alpha_4' r^{-6} - 6\beta_4' r^{-4})\sin 4\varphi + 2(15\alpha_6 r^4 + 21\beta_6 r^6 - 21\alpha_6' r^{-2} - 15\beta_6' r^{-6})\sin 6\varphi \tag{3.27}$$

Podobnie jak we wzorach (2.30) do (2.39) uzyskuje się po uwzględnieniu trzech wyrazów szeregu trygonometrycznego następujące wzory na przemieszczenia dla górotworu i betonu:

$$u_r = \frac{1+\nu}{E}\Big\{(1-\nu)\big[-a_o r^{-1} + 2b_o r + 2c_o r \ln r - c_o r - 2(a_2 r - a_2' r^{-3} - 2b_2' r^{-1})\cos 2\varphi +$$

$$- 2(2a_4 r^3 + b_4 r^5 - 2a_4' r^{-5} - 3b_4' r^{-3})\cos 4\varphi - 2(3a_6 r^5 + 2b_6 r^7 - 3a_6' r^{-7} +$$

$$- 4b_6' r^{-5})\cos 6\varphi\big] + \nu\big[a_o r^{-1} + 2b_o r + 2c_o r \ln r + c_o r +$$

$$+ 2(a_2 r + 2b_2 r^3 - a_2' r^{-3})\cos 2\varphi + 2(2a_4 r^3 + 3b_4 r^5 - 2a_4' r^{-5} - b_4' r^{-3})\cos 4\varphi +$$

$$+ 2(3a_6 r^5 + 4b_6 r^7 - 3a_6' r^{-7} - 2b_6' r^{-5})\cos 6\varphi\big]\Big\} + \alpha\sin\varphi + \gamma\cos\varphi \tag{3.28}$$

$$u_\varphi = \frac{2(1+\nu)}{E}\Big\{2c_o r\varphi(1-\nu) + \big[a_2 r + 3b_2 r^3 + a_2' r^{-3} - b_2' r^{-1} - 2\nu b_2' r^3 +$$

$$+ 2b_2' \nu r^{-1}\big]\sin 2\varphi + \big[2a_4 r^3 + 4b_4 r^5 + 2a_4' r^{-5} - 2\nu b_4 r^5 + 2\nu b_4' r^{-3}\big]\sin 4\varphi +$$

$$+ 3a_6 r^5 + 5b_6 r^7 + 3a_6' r^{-7} + b_6' r^{-5} - 2\nu b_6 r^7 + 2\nu b_6' r^{-5}\sin 6\varphi\Big\} +$$

$$+ \alpha\cos\varphi - \gamma\sin\varphi + \beta r \tag{3.29}$$

$$u^b_r = \frac{1+\nu_b}{E_b}\Big\{(1-\nu_b)\big[-\alpha_o r^{-1} + 2\beta_o r + 2\gamma_o \ln r - \gamma_o r - 2(\alpha_2 r - \alpha_2' r^{-3} - 2\beta_2' r^{-1})\cos 2\varphi +$$

$$- 2(2\alpha_4 r^3 + \beta_4 r^5 - 2\alpha_4' r^{-5} - 3\beta_4' r^{-3})\cos 4\varphi - 2(3\alpha_6 r^5 + 2\beta_6 r^7 - 3\alpha_6' r^{-7} - 4\beta_6' r^{-5})\cos 6\varphi\big] -$$

$$- \nu_b\big[\alpha_o r^{-1} + 2\beta_o r + 2\gamma_o r \ln r + \gamma_o r + 2(\alpha_2 r + 2\beta_2 r^3 - \alpha_2' r^{-3})\cos 2\varphi +$$

$$+ 2(2\alpha_4 r^3 + 3\beta_4 r^5 - 2\alpha_4' r^{-5} - \beta_4' r^{-3})\cos 4\varphi +$$

$$+ 2(3\alpha_6 r^5 + 4\beta_6 r^7 - 3\alpha_6' r^{-7} - 2\beta_6' r^{-5})\cos 6\varphi\big]\Big\} + \alpha_b\sin\varphi + \gamma_b\cos\varphi \tag{3.30}$$

$$u^b_\varphi = \frac{2(1+\nu_b)}{E_b}\Big\{2\gamma_o r\varphi(1-\nu_b) + \big[\alpha_2 r + 3\beta_2 r^3 + \alpha_2' r^{-3} - \beta_2' r^{-1} - 2\nu_b \beta_2 r^3 +$$

$$+ 2\nu_b \beta_2' r^{-1}\big]\sin 2\varphi + \big[2\alpha_4 r^3 + 4\beta_4 r^5 + 2\alpha_4' r^{-5} - 2\nu_b \beta_4 r^5 +$$

$$+ 2\nu_b \beta_4' r^{-3}\big]\sin 4\varphi + \big[3\alpha_6 r^5 + 5\beta_6 r^7 + 3\alpha_6' r^{-7} + \beta_6' r^{-5} - 2\nu_b \beta_6 r^7 +$$

$$+ 2\nu_b \beta_6' r^{-5}\big]\sin 6\varphi\Big\} + \alpha_b\cos\varphi - \gamma_b\sin\varphi + \beta_b r \tag{3.31}$$

Z symetrii wektorów przemieszczenia (pokazanej na rys. 2.4 i wzór (2.40)) w punktach (r,φ) i $(r,-\varphi)$ oraz (r,φ) i $(r,\pi-\varphi)$ wynika zerowanie się współczynników α, β, γ, γ_o, α_b, β_b, γ_b oraz c_o.

Nadto ze wzorów (3.22), (3.23) i (3.24) wynika zerowanie się współczynników b_2, a_4, b_4, a_6 i b_6 (współczynniki te są wymnożone przez r^2, r^4 lub r^6; w przypadku niezerowania się tych współczynników wartości naprężeń rosną nieskończenie przy $r \to \infty$).

Wzory (3.22) - (3.31) upraszczają się więc do postaci (3.32) - (3.44):

$$\sigma_{rr} = a_o r^{-2} + 2b_o - 2(a_2 + 3a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2})\cos 2\varphi - 2(10a_4' r^{-6} + 9b_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$- 2(21a_6' r^{-8} + 20b_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.32}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -a_o r^{-2} + 2b_o + 2(a_2+3a_2' r^{-4})\cos 2\varphi + 2(10a_4' r^{-6}+3b_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ 2(21a_6' r^{-8}+10b_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.33}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2(a_2-3a_3' r^{-4}-b_2' r^{-2})\sin 2\varphi - 4(5a_4' r^{-6}+3b_4' r^{-4})\sin 4\varphi +$$

$$- 6(7a_6' r^{-8}+5b_6' r^{-6})\sin 6\varphi \tag{3.34}$$

$$\sigma_{rr}^b = \alpha_o r^{-2} + 2\beta_o - 2(\alpha_2+3\alpha_2' r^{-4}+2\beta_b' r^{-2})\cos 2\varphi - 2(6\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4+10\alpha_4' r^{-6} +$$

$$+ 9\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi - 2(15\alpha_6 r^4+14\beta_6 r^6+21\alpha_6' r^{-8}+20\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.35}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^b = -\alpha_o r^{-2} + 2\beta_o + 2(\alpha_2+6\beta_2 r^2+3\alpha_2' r^{-4})\cos 2\varphi + 2(6\alpha_4 r^2+15\beta_4 r^4+10\alpha_4' r^{-6} +$$

$$+ 3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi + 2(15\alpha_6 r^4+28\beta_6 r^6+21\alpha_6' r^{-8}+10\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.36}$$

$$\sigma_{r\varphi}^b = 2(\alpha_2+3\beta_2 r^2-3\alpha_2' r^{-4}-\beta_2' r^{-2})\sin 2\varphi + 4(3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4-5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4})\sin 4\varphi +$$

$$+ 6(5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6-7\alpha_6' r^{-8}-5\beta_6' r^{-6})\sin 6\varphi \tag{3.37}$$

$$u_r = \frac{2(1+\nu)}{E}\Big\{-\frac{a_o}{2}r^{-1} + (1-2\nu)b_o r - \big[a_2 r - a_2' r^{-3} - 2(1-\nu)b_2' r^{-1}\big]\cos 2\varphi +$$

$$+ \big[2a_4' r^{-5} + (3-2\nu)b_4' r^{-3}\big]\cos 4\varphi + \big[3a_6' r^{-7} + 2(2-\nu)b_6' r^{-5}\big]\cos 6\varphi \tag{3.38}$$

$$u_\varphi = \frac{2(1+\nu)}{E}\Big\{\big[a_2 r + a_2' r^{-3} - (1-2\nu)b_2 r^{-1}\big]\sin 2\varphi + 2\big[a_4' r^{-5} + \nu b_4' r^{-3}\big]\sin 4\varphi +$$

$$+ \big[3a_6' r^{-7} + (1+2\nu)b_6' r^{-5}\big]\sin 6\varphi\Big\} \tag{3.39}$$

$$u_r^b = \frac{2(1+\nu_b)}{E_b}\Big\{-\frac{\alpha_o}{2}r^{-1} + (1-2\nu_b)\beta_o r - \big[\alpha_2 r - \alpha_2' r^{-3} - 2(1-\nu_b)\beta_2' r^{-1} + 2\nu_b\beta_2 r^3\big]\cos 2\varphi$$

$$- \big[2\alpha_4 r^3 + (1+2\nu_b)\beta_4 r^5 - 2\alpha_4' r^{-5} - (3-2\nu_b)\beta_4' r^{-3}\big]\cos 4\varphi +$$

$$- \big[3\alpha_6 r^5 + 2(1-\nu_b)\beta_6 r^7 - 3\alpha_6' r^{-7} - 2(2-\nu_b)\beta_6' r^{-5}\big]\cos 6\varphi\Big\} \tag{3.40}$$

$$u_\varphi^b = \frac{2(1+\nu_b)}{E_b}\Big\{\big[\alpha_2 r + (3-2\nu_b)\beta_2 r^3 + \alpha_2' r^{-3} - (1-2\nu_b)\beta_2' r^{-1}\big]\sin 2\varphi +$$

$$+ 2\big[\alpha_4 r^3 + (2-\nu_b)\beta_4 r^5 + \alpha_4' r^{-5} + \nu_b\beta_4' r^{-3}\big]\sin 4\varphi +$$

$$+ \big[3\alpha_6 r^5 + (5-2\nu_b)\beta_6 r^7 + 3\alpha_6' r^{-7} + (1+2\nu_b)\beta_6' r^{-5}\big]\sin 6\varphi\Big\} \tag{3.41}$$

3.4. WYRAŻENIE WSPÓŁRZĘDNYCH σ_{nn}, σ_{tt}, σ_{tn} przez σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$

Zgodnie z rysunkiem 3.3b oraz wzorami transformacyjnymi [17] mamy dla elipsy wewnętrznej:

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}}{2} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\cos 2(\theta-\varphi) + \sigma_{r\varphi}\sin 2(\theta-\varphi) \tag{3.42}$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}}{2} - \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\cos 2(\theta-\varphi) - \sigma_{r\varphi}\sin 2(\theta-\varphi) \tag{3.43}$$

$$\sigma_{tn} = -\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\sin 2(\theta-\varphi) + \sigma_{r\varphi}\cos 2(\theta-\varphi) \tag{3.44}$$

Podobnie dla elipsy zewnętrznej:

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}}{2} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\cos 2(\theta_1-\varphi) + \sigma_{r\varphi}\sin 2(\theta_1-\varphi) \tag{3.45}$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}}{2} - \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\cos 2(\theta_1-\varphi) - \sigma_{r\varphi}\sin 2(\theta_1-\varphi) \tag{3.46}$$

$$\sigma_{tn} = -\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2}\sin 2(\theta_1-\varphi) + \sigma_{r\varphi}\cos 2(\theta_1-\varphi) \tag{3.47}$$

3.5. WARUNKI BRZEGOWE WYRAŻONE W SPOSÓB ŚCISŁY (POSTAĆ KOŃCOWA)

Zgodnie ze wzorami (3.32), (3.33) wyznacza się:

$$\frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}}{2} = 2b_o - 2b_2' r^{-2}\cos 2\varphi - 6b_4' r^{-4}\cos 4\varphi - 10b_6' r^{-6}\cos 6\varphi \tag{3.48}$$

$$\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{2} = a_o r^{-2} - 2(a_2+3a_2'r^{-4}+b_2'r^{-2})\cos 2\varphi - 4(5a_4'r^{-6}+3b_4'r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$- 6(7a_6'r^{-8}+5b_6'r^{-6})\cos 6\varphi \tag{3.49}$$

Na podstawie wzorów (3.45), (3.46), (3.47) po podstawieniu (3.48), (3.49), (3.34) otrzymuje się dla elipsy zewnętrznej i dla górotworu:

$$\sigma_{nn} = 2\Big\{(b_o-b_2'r_1^{-2}\cos 2\varphi-3b_4'r_1^{-4}\cos 4\varphi-5b_6'r_1^{-6}\cos 6\varphi) +$$

$$+ \Big[\frac{a_o}{2} r_1^{-2} - (a_2+3a_2'r_1^{-4}+b_2'r_1^{-2})\cos 2\varphi - 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$- 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\cos 6\varphi\Big]\cos 2(\theta_1-\varphi) + \Big[(a_2-3a_2'r_1^{-4}-b_2'r_1^{-2})\sin 2\varphi +$$

$$- 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\sin 4\varphi - 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\sin 6\varphi\Big]\sin 2(\theta_1-\varphi)\Big\} \tag{3.50}$$

$$\sigma_{tt} = 2\Big\{b_o - 2b_2'r_1^{-2}\cos 2\varphi - 3b_4'r_1^{-4}\cos 4\varphi - 5b_6'r_1^{-6}\cos 6\varphi +$$

$$\Big[\frac{a_o}{2} r_1^{-2} - (a_2+3a_2'r_1^{-4}+b_2'r_1^{-2})\cos 2\varphi - 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$- 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\cos 6\varphi\Big]\cos 2(\theta_1-\varphi) +$$

$$- \Big[(a_2-3a_2'r_1^{-4}-b_2'r_1^{-2})\sin 2\varphi - 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\sin 4\varphi +$$

$$- 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\sin 6\varphi\Big]\sin 2(\theta_1-\varphi)\Big\} \tag{3.51}$$

$$\sigma_{tn} = 2\Big\{\Big[-\frac{a_o}{2} r_1^{-2} + (a_2+3a_2'r_1^{-4}+b_2'r_1^{-2})\cos 2\varphi + 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\cos 6\varphi\Big]\sin 2(\theta_1-\varphi) + \Big[(a_2-3a_2'r_1^{-4}-b_2'r_1^{-2})\sin 2\varphi +$$

$$- 2(5a_4'r_1^{-6}+3b_4'r_1^{-4})\sin 4\varphi - 3(7a_6'r_1^{-8}+5b_6'r_1^{-6})\sin 6\varphi\Big]\cos 2(\theta_1-\varphi)\Big\} \tag{3.52}$$

Podobnie dla betonu obudowy na podstawie wzorów (3.35), (3.36), (3.42), (3.43), (3.44) uzyskuje się:

$$\frac{\sigma_{rr}^b+\sigma_{\varphi\varphi}^b}{2} = 2\Big[\beta_o + (3\beta_2 r^2-\beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4-3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6 r^6-5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi\Big] \tag{3.53}$$

$$\frac{\sigma_{rr}^b-\sigma_{\varphi\varphi}^b}{2} = 2\Big[\frac{\alpha_o}{2} r^{-2} - (\alpha_2+3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\cos 2\varphi +$$

$$- 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}+3\alpha_4' r^2+5\beta_4 r^4)\cos 4\varphi +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6}+5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 6\varphi\Big] \tag{3.54}$$

Dla elipsy wewnętrznej na podstawie wzorów (3.53), (3.54), (3.37), (3.42), (3.43), (3.44) mamy:

$$\sigma_{nn}^b = 2\Big\{\beta_o + (3\beta_2 r^2-\beta_2 r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4-3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6 r^6-5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi + \Big[\frac{\alpha_o}{2} r^{-2} - (\alpha_2+3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\cos 2\varphi +$$

$$- 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}+3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\cos 4\varphi +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-4}+5\beta_6' r^{-6}+5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 6\varphi\Big]\cos 2(\theta-\varphi) +$$

$$+ \Big[(\alpha_2-3\alpha_2' r^{-4}-\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\sin 2\varphi - 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}-3\alpha_4 r^2-5\beta_4 r^4)\sin 4\varphi +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6}-5\alpha_6 r^4-7\beta_6 r^6)\sin 6\varphi\Big]\sin 2(\theta-\varphi)\Big\} \tag{3.55}$$

$$\sigma_{tt}^b = 2\Big\{\beta_o + (3\beta_2 r^2-\beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4-3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6 r^6-5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi - \Big[\frac{\alpha_o}{2} r^{-2} - (\alpha_2+3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\cos 2\varphi +$$

$$- 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}+3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\cos 4\varphi +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-4}+5\beta_6' r^{-6}+5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 6\varphi\Big]\cos 2(\theta-\varphi) +$$

$$- \Big[(\alpha_2-3\alpha_2' r^{-4}-\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\sin 2\varphi - 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}-3\alpha_4 r^2-5\beta_4 r^4)\sin 4\varphi +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6}-5\alpha_6 r^4-7\beta_6 r^6)\sin 6\varphi\Big]\sin 2(\theta-\varphi)\Big\} \tag{3.56}$$

$$\sigma^b_{tn} = -2\Big\{\frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\sin 2(\theta-\varphi) - \Big[(\alpha_2+3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\cos 2\varphi +$$

$$+ 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4}+3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\cos 4\varphi +$$

$$+ 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6}+5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 6\varphi\Big]\sin 2(\theta-\varphi) +$$

$$- \Big[(\alpha_2-3\alpha_2' r^{-4}-\beta_2' r^{-2}+3\beta_2 r^2)\sin 2\varphi - (10\alpha_4' r^{-6}+6\beta_4' r^{-4}-6\alpha_4 r^2 +$$

$$- 10\beta_4 r^4)\sin 4\varphi - 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6}-5\alpha_6 r^4-7\beta_6 r^6)\sin 6\varphi\Big]\cos 2(\theta-\varphi)\Big\} \qquad (3.57)$$

Warunki brzegowe (3.19) do (3.21) podstawione do wzorów (3.32) do (3.34) dają tożsamości:

$$2b_o - 2a_2\cos 2\varphi = \frac{p}{2}\Big[(1+k) + (1-k)\cos 2\varphi\Big] \qquad (3.58)$$

$$2b_o + 2a_2\cos 2\varphi = \frac{p}{2}\Big[(1+k) - (1-k)\cos 2\varphi\Big] \qquad (3.59)$$

$$2a_2\sin 2\varphi = -\frac{p}{2}(1-k)\sin 2\varphi \qquad (3.60)$$

Stąd współczynniki

$$b_o = \frac{p}{4}(1+k) \qquad (3.61)$$

$$a_2 = -\frac{p}{4}(1-k) \qquad (3.62)$$

Po podstawieniu (3.61) i (3.62) do równań (3.50) - (3.52) otrzymano:

$$\sigma_{nn} = 2\Big\{-b_2' r_1^2\cos 2\varphi - 3b_4' r_1^{-4}\cos 4\varphi - 5b_6' r_1^{-6}\cos 6\varphi + \frac{a_o}{2} r_1^{-2}\cos 2(\theta_1-\varphi) +$$

$$- (3a_2' r_1^{-4}+b_2' r_1^{-2})\cos 2(\theta_1-2\varphi) - 2(5a_4' r_1^{-6}+3b_4' r_1^{-4})\cos 2(\theta_1-3\varphi) +$$

$$- 3(7a_6' r_1^{-8}+5b_6' r_1^{-6})\cos 2(\theta_1-4\varphi)\Big\} + \frac{p}{2}\Big[(1+\cos 2\theta_1) + k(1-\cos 2\theta_1)\Big] \qquad (3.63)$$

$$\sigma_{tt} = 2\Big\{-b_2' r_1^{-2}\cos 2\varphi - 3b_4' r_1^{-4}\cos 4\varphi - 5b_6' r_1^{-6}\cos 6\varphi - \frac{a_o}{2} r_1^{-2}\cos 2(\theta_1-\varphi) +$$

$$+ (3a_2' r_1^{-4}+b_2' r_1^{-2})\cos 2(\theta_1-2\varphi) + 2(5a_4' r_1^{-6}+3b_4' r_1^{-4})\cos 2(\theta_1-3\varphi) +$$

$$+ 3(7a_6' r_1^{-8}+5b_6' r_1^{-6})\cos 2(\theta_1-4\varphi)\Big\} + \frac{p}{2}\Big[(1-\cos 2\theta_1) + k(1+\cos 2\theta_1)\Big] \qquad (3.64)$$

$$\sigma_{tn} = 2\Big\{-\frac{a_o}{2} r_1^{-2}\sin 2(\theta_1-\varphi) + (3a_2' r_1^{-4}+b_2' r_1^{-2})\sin 2(\theta_1-2\varphi) +$$

$$+ 2(5a_4' r_1^{-6}+3b_4' r_1^{-4})\sin 2(\theta_1-3\varphi) + 3(7a_6' r_1^{-8}+5b_6' r_1^{-6})\sin 2(\theta_1-4\varphi)\Big\} +$$

$$- \frac{p}{2}(1-k)\sin 2\theta_1 \qquad (3.65)$$

Po przekształceniach trygonometrycznych wzorów (3.55) do (3.57) otrzymano:

$$\sigma^b_{nn} = 2\Big\{\beta_o + (3\beta_2 r^2-\beta_2 r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4-3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6 r^6+5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi + \Big[\frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\cos 2(\theta-\varphi) - (\alpha_2+3\beta_2 r^2)\cos 2\theta - (3\alpha_2' r^{-4} +$$

$$+ \beta_2' r^{-2})\cos 2(\theta-2\varphi) - 2(3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\cos 2(\theta+\varphi) +$$

$$- 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4})\cos 2(\theta-3\varphi) - 3(5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 2(\theta+2\varphi) +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6})\cos 2(\theta-4\varphi)\Big]\Big\} \qquad (3.66$$

$$\sigma^b_{tt} = 2\Big\{\beta_o + (3\beta_2 r^2-\beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4-3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6 r^6-5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi + \Big[\frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\cos 2(\theta-\varphi) - (\alpha_2+3\beta_2 r^2)\cos 2\theta +$$

$$- (3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2})\cos 2(\theta-2\varphi) + 2(3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\cos 2(\theta-\varphi) +$$

$$- 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4})\cos 2(\theta-3\varphi) - 3(5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\cos 2(\theta+2\varphi) +$$

$$- 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6})\cos 2(\theta-4\varphi)\Big]\Big\} \qquad (3.6$$

$$\sigma^b_{tn} = 2\Big\{-\frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\sin 2(\theta-\varphi) + (\alpha_2+3\beta_2 r^2)\sin 2\theta + (3\alpha_2' r^{-4}+\beta_2' r^{-2})\sin 2(\theta-2\varphi) +$$

$$+ 2(3\alpha_4 r^2+5\beta_4 r^4)\sin 2(\theta+\varphi) + 2(5\alpha_4' r^{-6}+3\beta_4' r^{-4})\sin 2(\theta-3\varphi) +$$

$$+ 3(5\alpha_6 r^4+7\beta_6 r^6)\sin 2(\theta+2\varphi) + 3(7\alpha_6' r^{-8}+5\beta_6' r^{-6})\sin 2(\theta-4\varphi)\Big\} \qquad (3.6$$

Po podstawieniu (3.61) i (3.62) do równań (3.38) i (3.39) uzyskano:

$$u_r = \frac{2(1+\nu)r}{E}\Big\{-\frac{a_o}{2}r^{-2} + \left[a_2' r^{-4} + 2(1-\nu)b_2' r^{-2}\right]\cos 2\varphi +$$

$$+ \left[2a_4' r^{-6} + (3-2\nu)b_4' r^{-4}\right]\cos 4\varphi + \left[3a_6' r^{-8} + 2(2-\nu)b_6' r^{-6}\right]\cos 6\varphi +$$

$$+ \frac{p}{4}\left[(1-2\nu)(1+k) + (1-k)\cos 2\varphi\right]\Big\} \tag{3.69}$$

$$u_\varphi = \frac{2(1+\nu)r}{E}\Big\{\left[a_2' r^{-4} - (1-2\nu)b_2' r^{-2}\right]\sin 2\varphi + 2\left[a_4' r^{-6} + \nu b_4' r^{-4}\right]\sin 4\varphi +$$

$$+ \left[3a_6' r^{-8} + (1-2\nu)b_6' r^{-6}\right]\sin 6\varphi - \frac{p}{4}(1-k)\sin 2\varphi\Big\} \tag{3.70}$$

Warunki brzegowe (3.11) - (3.14) po uwzględnieniu (3.63), (3.65), (3.66), (3.68) dają tożsamości:

$$\beta_o + (3\beta_2 r^2 - \beta_2' r^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r^4 - 3\beta_4' r^{-4})\cos 4\varphi + (7\beta_6 r^6 - 5\beta_6' r^{-6})\cos 6\varphi +$$

$$+ \frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\cos 2(\theta-\varphi) - (\alpha_2 + 3\beta_2 r^2)\cos 2\theta - (3\alpha_2' r^{-4} + \beta_2' r^{-2})\cos 2(\theta-2\varphi) +$$

$$- 2(3\alpha_4 r^2 + 5\beta_4 r^4)\cos 2(\theta+\varphi) - 2(5\alpha_4' r^{-6} + 3\beta_4' r^{-4})\cos 2(\theta-3\varphi) +$$

$$- 3(5\alpha_6 r^4 + 7\beta_6 r^6)\cos 2(\theta+2\varphi) - 3(7\alpha_6' r^{-8} + 5\beta_6' r^{-6})\cos 2(\theta-4\varphi) = 0 \tag{3.71}$$

$$-\frac{\alpha_o}{2} r^{-2}\sin 2(\theta-\varphi) + (\alpha_2 + 3\beta_2 r^2)\sin 2\theta + (3\alpha_2' r^{-4} + \beta_2' r^{-2})\sin 2(\theta-2\varphi) +$$

$$+ 2(3\alpha_4 r^2 + 5\beta_4 r^4)\sin 2(\theta+\varphi) + 2(5\alpha_4' r^{-6} + 3\beta_4' r^{-4})\sin 2(\theta-3\varphi) +$$

$$+ 3(5\alpha_6 r^4 + 7\beta_6 r^6)\sin 2(\theta+2\varphi) + 3(7\alpha_6' r^{-8} + 5\beta_6' r^{-6})\sin 2(\theta-4\varphi) = 0 \tag{3.72}$$

$$\beta_o + (3\beta_2 r_1^2 - \beta_2' r_1^{-2} + b_2' r_1^{-2})\cos 2\varphi + (5\beta_4 r_1^4 - 3\beta_4' r_1^{-4} + 3b_4' r_1^{-4})\cos 4\varphi +$$

$$+ (7\beta_6' r_1^{-6} - 5\beta_6' r_1^{-6} + 5b_6' r_1^{-6})\cos 6\varphi + \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o) r_1^{-2}\cos 2(\theta_1-\varphi) +$$

$$- (\alpha_2 + 3\beta_2 r_1^2)\cos 2\theta_1 - (3\alpha_2' r_1^{-4} + \beta_2' r_1^{-2} + 3a_2' r_1^{-4} - b_2' r_1^{-2})\cos 2(\theta_1-2\varphi) +$$

$$- 2(3\alpha_4 r_1^2 + 5\beta_4 r_1^4)\cos 2(\theta_1+\varphi) - 2(5\alpha_4' r_1^{-6} + 3\beta_4' r_1^{-4} - 5a_4' r_1^{-6} - 3b_4' r_1^{-4})\cos 2(\theta_1-3\varphi) +$$

$$- 3(5\alpha_6 r_1^4 + 7\beta_6 r_1^6)\cos 2(\theta_1+2\varphi) - 3(7\alpha_6' r_1^{-8} + 5\beta_6' r_1^{-6} + 7a_6' r_1^{-8} - 5b_6' r_1^{-6})\cos 2(\theta_1-4\varphi) =$$

$$= \frac{p}{4}\left[(1+\cos 2\theta_1) + k(1-\cos 2\theta_1)\right] \tag{3.73}$$

$$- \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o) r_1^{-2}\sin 2(\theta_1-\varphi) + (\alpha_2 + 3\beta_2 r_1^2)\sin 2\theta_1 +$$

$$+ (3\alpha_2' r_1^{-4} + \beta_2' r_1^{-2} - 3a_2' r_1^{-4} - b_2' r_1^{-2})\sin 2(\theta_1-2\varphi) +$$

$$+ 2(3\alpha_4 r_1^2 + 5\beta_4 r_1^4)\sin 2(\theta_1+\varphi) + 2(5\alpha_4' r_1^{-6} + 3\beta_4' r_1^{-4} - 5a_4' r_1^{-6} - 3b_4' r_1^{-4})\sin 2(\theta_1-3\varphi) +$$

$$+ 3(5\alpha_6 r_1^4 + 7\beta_6 r_1^6)\sin 2(\theta_1+2\varphi) + 3(7\alpha_6' r_1^{-8} + 5\beta_6' r_1^{-6} - 7a_6' r_1^{-8} - 5b_6' r_1^{-6})\sin 2(\theta_1-4\varphi) =$$

$$= -\frac{p}{4}(1-k)\sin 2\theta_1 \tag{3.74}$$

Warunki brzegowe (3.17), (3.18) po uwzględnieniu równań (3.40), (3.41), (3.69), (3.70) dają tożsamości:

$$\frac{1}{2}(Aa_o - \alpha_o) r_1^{-2} + (1-2\nu_b)\beta_o - \left[\alpha_2 - \alpha_2' r_1^{-4} - 2(1-\nu_b)\beta_2' r_1^{-2} + 2\nu_b \beta_2 r_1^2 + Aa_2' r_1^{-4} +\right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)Ab_2' r_1^{-2}\right]\cos 2\varphi - \left[2\alpha_4 r_1^2 + (1+2\nu_b)\beta_4 r_1^4 - 2\alpha_4' r_1^{-6} - (3-2\nu_b)\beta_4' r_1^{-4} +\right.$$

$$\left. + 2Aa_4' r_1^{-6} + (3-2\nu)Ab_4' r_1^{-4}\right]\cos 4\varphi - \left[3\alpha_6 r_1^4 + 2(1+\nu_b)\beta_6 r_1^6 +\right.$$

$$\left. - 3\alpha_6' r_1^{-8} - 2(2-\nu_b)\beta_6' r_1^{-6} + 3Aa_6' r_1^{-8} + 2(2-\nu)Ab_6' r_1^{-6}\right]\cos 6\varphi = 0 \tag{3.75}$$

$$\left[\alpha_2 + (3-2\nu_b)\beta_2 r_1^2 + \alpha_2' r_1^{-4} - (1-2\nu_b)\beta_2' r_1^{-2} - Aa_2' r_1^{-4} + (1-2\nu)Ab_2' r_1^{-2}\right]\sin 2\varphi +$$

$$+ 2\left[\alpha_4 r_1^2 + (2-\nu_b)\beta_4 r_1^4 + \alpha_4' r_1^{-6} + \nu_b \beta_4' r_1^{-4} - Aa_4' r_1^{-6} - A\nu b_4 r_1^{-4}\right]\sin 4\varphi +$$

$$+ \left[3\alpha_6 r_1^4 + (5-2\nu_b)\beta_6 r_1^6 + 3\alpha_6' r_1^{-8} + (1+2\nu_b)\beta_6' r_1^{-6} - 3Aa_6' r_1^{-8} - (1+2\nu)Ab_6' r_1^{-6}\right]\sin 6\varphi = 0 \tag{3.76}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E_b}{E} \\ y &= \frac{1+\nu}{1+\nu_b} \\ A &= \lambda \cdot y \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

3.6. PRZYBLIŻONA POSTAĆ WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Warunki brzegowe (3.71) - (3.76) można ogólnie zanotować w postaci:

$$f_i\left[r(\varphi),\ r_1(\varphi),\ \theta(\varphi),\ \theta_1(\varphi),\ \sin\varphi,\ \cos\varphi\right] = 0 \tag{3.78}$$

$i = 1,2,\ldots,6$, gdzie funkcje $r(\varphi)$, $r_1(\varphi)$, $\theta(\varphi)$, $\theta_1(\varphi)$ wyrażono wzorami (3.3) - (3.6).

Z budowy funkcji (3.3) - (3.6) wynika, że funkcje f_i są funkcjami przestępnymi ze względu na $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$.

W związku z powyższym z tożsamości (3.78) nie można w sposób ścisły wyznaczyć współczynników a_o, a_2', a_4', a_6', b_2', b_4', b_6', α_o, α_2, α_2', α_4, α_4', α_6, α_6', β_o, β_2, β_2', β_4', β_6, β_6', β_4.

Zaproponowano więc przybliżony sposób rozwiązania zagadnienia brzegowego. Zażądano, aby tożsamości (3.78) $(i = 1,2,\ldots,6)$ były spełnione nie dla wszystkich wartości $\varphi \in \langle 0;\ \frac{\pi}{2} \rangle$, ale dla wartości $0,\ \frac{\pi}{36},\ \frac{\pi}{18},\ldots,\frac{\pi}{2}$.

Rozważmy wartości kątów 0 i $\frac{\pi}{2}$. Dla tych kądów warunek (3.71) da się zapisać równaniami:

$$\beta_o - 5\beta_4 a^4 - 9\beta_4' a^{-4} + \frac{\alpha_o}{2} a^{-2} - 6\alpha_4 a^2 - 10\alpha_4' a^{-6} +$$

$$- \left[2\beta_2' a^{-2} + 3\alpha_2' a^{-4} + 20\beta_6' a^{-6} + 14\beta_6 a^6 + \alpha_2 + 15\alpha_6 a^4 + 21\alpha_6' a^{-8}\right] = 0 \tag{3.79}$$

$$\beta_o - 5\beta_4 b^4 - 9\beta_4' b^{-4} + \frac{\alpha_o}{2} b^{-2} - 6\alpha_4 b^2 - 10\alpha_4' b^{-6} +$$

$$+ \left[2\beta_2' b^{-2} + 3\alpha_2' b^{-4} + 20\beta_6' b^{-6} + 14\beta_6 b_6 + \alpha_2 + 15\alpha_6 b^4 + 21\alpha_6' b^{-8}\right] = 0 \tag{3.80}$$

Równania (3.79), (3.80) dla przypadku kołowego (a = b) przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right. \tag{3.81}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta_o - 5\beta_4 a^4 - 9\beta_4' a^{-4} + \frac{\alpha_o}{2} a^{-2} - 6\alpha_4 a^2 - 10\alpha_4' a^{-6} \\ y &= 2\beta_2' a^{-2} + 3\alpha_2' a^{-4} + 20\beta_6' a^{-6} + 14\beta_6 a^6 + \alpha_2 + 15\alpha_6 a^4 + 21\alpha_6' a^{-8} \end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

Jeżeli zatem rozwiązanie ma się odnieść również do przypadku kołowego, należy zażądać dodatkowo spełnienia układu (3.81), który, jak łatwo sprawdzić, ma tylko rozwiązanie zerowe $x = 0$, $y = 0$.

Zatem warunek (3.79) można zastąpić dwoma warunkami:

$$x = \beta_o + \frac{\alpha_o}{2} a^{-2} - 5\beta_4 a^4 - 9\beta_4' a^{-4} - 6\alpha_4 a^2 - 10\alpha_4' a^{-6} = 0, \tag{3.83}$$

$$y = \alpha_2 + 3\alpha_2' a^{-4} + 2\beta_2' a^{-2} + 15\alpha_6 a^4 + 21\alpha_6' a^{-8} + 14\beta_6 a^6 + 20\beta_6' a^{-6} = 0. \tag{3.84}$$

Współczynniki równań (3.83) i (3.84) umieszczono jako dwa pierwsze wiersze w tablicy 3.1.

Dla kątów 0 i $\frac{\pi}{2}$ warunek (3.73) da się wyrazić równaniami:

$$\beta_o - 5\beta_4 (a+g)^4 - 9\beta_4' (a+g)^{-4} + 9b_4' (a+g)^{-4} + \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o)(a+g)^{-2} +$$

$$- 6\alpha_4 (a+g)^2 - 10\alpha_4' (a+g)^{-6} + 10a_4' (a+g)^{-6} + \left[2\beta_2' (a+g)^{-2} + 2b_2' (a+g)^{-2} +\right.$$

$$- 14\beta_6 (a+g)^6 - 20\beta_6' (a+g)^{-6} + 20b_6' (a+g)^{-6} - \alpha_2 +$$

$$\left. - 3\alpha_2' (a+g)^{-4} + 3a_2' (a+g)^{-4} - 15\alpha_6 (a+g)^4 - 21\alpha_6' (a+g)^{-8} + 21a_6' (a+g)^{-8}\right] = \frac{p}{2} \tag{3.85}$$

$$\beta_o - 5\beta_4 (b+g)^4 - 9\beta_4' (b+g)^{-4} + 9b_4' (b+g)^{-4} + \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o)(b+g)^{-2} +$$

$$- 6\alpha_4 (b+g)^2 - 10\alpha_4' (b+g)^{-6} + 10a_4' (b+g)^{-6} - \left[-2\beta_2' (b+g)^{-2} + 2b_2' (b+g)^{-2} +\right.$$

$$- 14\beta_6 (b+g)^{-6} + 20b_6' (b+g)^{-6} - \alpha_2 - 3\alpha_2' (b+g)^{-4} + 3a_2' (b+g)^{-4} - 20\beta_6' (b+g)^{-6} +$$

$$\left. - 15\alpha_6 (b+g)^4 - 21\alpha_6' (b+g)^{-8} + 21a_6' (b+g)^{-8}\right] = \frac{p}{2} k \tag{3.86}$$

Równania (3.85) i (3.86) dla przypadku otworu kołowego $a + g = b + g$ i obciążenia symetrycznego $k = 1$ przyjmują postać:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{p}{2} \\ x - y &= \frac{p}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3.87}$$

gdzie:

$$x = \beta_o - 5\beta_4(a+g)^4 - 9\beta_4'(a+g)^{-4} + 9b_4'(a+g)^{-4} + \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o)(a+g)^{-2} +$$

$$- 6\alpha_4(a+g)^2 - 10\alpha_4'(a+g)^{-6} + 10a_4'(a+g)^{-6} \tag{3.88}$$

$$y = -2\beta_2'(a+g)^{-2} + 2b_2'(a+g)^{-2} - 14\beta_6(a+g)^6 - 20\beta_6'(a+g)^{-6} - \alpha_2 - 3\alpha_2'(a+g)^{-4} +$$

$$+ 3a_2'(a+g)^{-4} - 15\alpha_6(a+g)^4 - 21\alpha_6'(a+g)^{-8} + 21a_6'(a+g)^{-8} + 20b_6'(a+b)^{-6} \tag{3.89}$$

Jeżeli rozwiązanie ma się odnosić również do przypadku kołowego i obciążenia symetrycznego, należy zażądać spełnienia układu (3.87). Układ (3.87) jest oznaczony i ma rozwiązanie $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$.

Zatem warunek (3.85) można zastąpić dwoma warunkami:

$$x = \beta_o - 5\beta_4(a+g)^4 - 9\beta_4'(a+g)^{-4} + 9b_4'(a+g)^{-4} + \frac{1}{2}(\alpha_o - a_o)(a+g)^{-2} +$$

$$- 6\alpha_4(a+g)^2 - 10\alpha_4'(a+g)^{-6} + 10a_4'(a+g)^{-6} = \frac{p}{2} \tag{3.90}$$

$$= -2\beta_2'(a+g)^{-2} + 2b_2'(a+g)^{-2} - 14\beta_6(a+g)^6 - 20\beta_6'(a+g)^{-6} + 20b_6'(a+g)^{-6} - \alpha_2 +$$

$$- 3\alpha_2'(a+g)^{-4} + 3a_2'(a+g)^{-4} - 15\alpha_6(a+g)^4 - 21\alpha_6'(a+g)^{-8} + 21a_6'(a+g)^{-8} = 0 \tag{3.91}$$

Współczynniki równań (3.90) i (3.91) umieszczono w tablicy 3.1 w wierszach 3 i 4.

Dla kątów 0 i $\frac{\pi}{2}$ warunek (3.75) da się przedstawić równaniami:

$$\frac{1}{2}(Aa_o - \alpha_o)(a+g)^{-2} + (1-2\nu_b)\beta_o - 2\alpha_4(a+g)^2 - (1+2\nu_b)\beta_4(a+g)^4 + 2\alpha_4'(a+g)^{-6} +$$

$$+ (3-2\nu_b)\beta_4'(a+g)^{-4} - 2Aa_4'(a+g)^{-6} - A(3-2\nu)b_4'(a+g)^{-4} +$$

$$- \Big[\alpha_2 - \alpha_2'(a+g)^{-4} + 2(1-\nu_b)\beta_2'(a+g)^{-2} + 2\nu_b\beta_2(a+g)^2 + Aa_2'(a+g)^{-4} +$$

$$+ 2(1-\nu)Ab_2'(a+g)^{-2} + 3\alpha_6(a+g)^4 + 2(1+\nu_b)\beta_6(a+g)^6 - 3\alpha_6'(a+g)^{-8} +$$

$$- 2(2-\nu_b)\beta_6'(a+g)^{-6} + 3Aa_6'(a+g)^{-8} + 2A(2-\nu)b_6'(a+g)^{-6}\Big] = 0 \tag{3.92}$$

	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
Lp	α_6'	β_6'	β_2	α_4
1	0	0	0	$-6\alpha^2$
2	$\frac{21}{a^8}$	$\frac{20}{a^6}$	0	0
3	0	0	0	$-6(a+g$
4	$\frac{21}{(a+g)^8}$	$\frac{20}{(a+g)^6}$	0	0
5	0	0	0	$-2(a+$
6	$-\frac{3}{(a+g)^8}$	$-\frac{2(2-\nu_b)}{(a+g)^6}$	$2\nu_b(a+g)^2$	0
7	$\frac{21}{b^8}$	$\frac{20}{b^6}$	0	$-6b$
8	$\frac{21}{(b+g)^8}$	$\frac{20}{(b+g)^6}$	0	$-6(b+g$
9	$-\frac{3}{(b+g)^8}$	$-\frac{2(2-\nu_b)}{(b+g)^6}$	$2\nu_b(b+g)^2$	$-2(b+$
10	$-\frac{21\cos 2(\theta-\varphi)}{r^8}$	$-\frac{5(\cos 4\varphi+3\cos 2(\theta-\varphi))}{r^4}$	$3r^2(\cos 2\varphi-\cos 2\theta)$	$-6r^2\cos 2$
11	$\frac{21\sin 2(\theta-\varphi)}{r^8}$	$\frac{15\sin 2(\theta-\varphi)}{r^6}$	$3r^2\sin 2\theta$	$6r^2\sin 2$
12	$-\frac{21\cos 2(\theta_1-\varphi)}{r_1^8}$	$-\frac{5(\cos 4\varphi+3\cos 2(\theta_1-\varphi))}{r_1^4}$	$3r_1^2(\cos 2\varphi-\cos 2\theta_1)$	$-6r_1^2\cos 2$
13	$\frac{21\sin 2(\theta_1-\varphi)}{r_1^8}$	$\frac{15\sin 2(\theta_1-\varphi)}{r_1^6}$	$3r_1^2\sin 2\theta_1$	$6r_1^2\sin 2$
14	$\frac{3\cos 6\varphi}{r_1^8}$	$\frac{2(2-\nu_b)\cos 6\varphi}{r_1^6}$	$-2\nu_b r_1^2\cos 2\varphi$	$-2r_1^2\cos$
15	$\frac{3\sin 6\varphi}{r_1^8}$	$\frac{(1+2\nu_b)\sin 6\varphi}{r_1^6}$	$(3-2\nu_b)r_1^2\sin 2\varphi$	$2r_1^2\sin$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	
L.p.	a_0	a_2'	b_2'	α_0	α_2	α_2'	β_0	β_2'	α_4'	b_4'	α_4'	β_4'	a_6'	b_6'	α_6'	β_6'	β_2	α_4	β_4	α_6	β_6	Wolny wyraz po stronie prawej
1	0	0	0	$\frac{1}{2a^2}$	0	0	1	0	0	0	$-\frac{10}{a^4}$	$-\frac{9}{a^4}$	0	0	0	0	0	$-6a^2$	$-5a^4$	0	0	0
2	0	0	0	0	1	$\frac{3}{a^4}$	0	$\frac{2}{a^4}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{21}{a^6}$	$\frac{20}{a^6}$	0	0	0	$15a^4$	$14a^6$	0
3	$-\frac{1}{2(a+g)^2}$	0	0	$\frac{1}{2(a+g)^2}$	0	0	1	0	$\frac{10}{(a+g)^4}$	$\frac{9}{(a+g)^4}$	$-\frac{10}{(a+g)^4}$	$-\frac{9}{(a+g)^4}$	0	0	0	0	0	$-6(a+g)^2$	$-5(a+g)^4$	0	0	$\frac{f}{2}$
4	0	$-\frac{3}{(a+g)^4}$	$-\frac{2}{(a+g)^2}$	0	1	$\frac{3}{(a+g)^4}$	0	$\frac{2}{(a+g)^2}$	0	0	0	0	$-\frac{21}{(a+g)^6}$	$-\frac{20}{(a+g)^6}$	$\frac{21}{(a+g)^6}$	$\frac{20}{(a+g)^6}$	0	0	0	$15(a+g)^4$	$14(a+g)^6$	0
5	$\frac{\lambda y}{2(a+g)^2}$	0	0	$-\frac{1}{2(a+g)^2}$	0	0	$(1-2\nu)$	0	$-\frac{2\lambda y}{(a+g)^4}$	$-\frac{(3-2\nu)2y}{(a+g)^4}$	$\frac{2}{(a+g)^4}$	$\frac{(3-2\nu)}{(a+g)^4}$	0	0	0	0	0	$-2(a+g)^2$	$-(1+2\nu)(a+g)^4$	0	0	0
6	0	$\frac{\lambda y}{(a+g)^4}$	$\frac{2\lambda y(1-\nu)}{(a+g)^4}$	0	1	$-\frac{1}{(a+g)^4}$	0	$-\frac{2(1-\nu)}{(a+g)^2}$	0	0	0	0	$\frac{3\lambda y}{(a+g)^6}$	$\frac{2\lambda y(2-\nu)}{(a+g)^6}$	$-\frac{3}{(a+g)^6}$	$-\frac{2(2-\nu)}{(a+g)^6}$	$2\nu(a+g)^2$	0	0	$3(a+g)^4$	$2(1+\nu)(a+g)^6$	0
7	0	0	0	$\frac{1}{2b^2}$	1	$\frac{3}{b^4}$	1	$\frac{2}{b^2}$	0	0	$-\frac{10}{b^4}$	$-\frac{9}{b^4}$	0	0	$\frac{21}{b^6}$	$\frac{20}{b^6}$	0	$-6b^2$	$-5b^4$	$15b^4$	$14b^6$	0
8	$-\frac{1}{2(b+g)^2}$	$-\frac{3}{(b+g)^4}$	$-\frac{2}{(b+g)^2}$	$\frac{1}{2(b+g)^2}$	1	$\frac{3}{(b+g)^4}$	1	$\frac{2}{(b+g)^2}$	$\frac{10}{(b+g)^4}$	$\frac{9}{(b+g)^4}$	$-\frac{10}{(b+g)^4}$	$-\frac{9}{(b+g)^4}$	$-\frac{21}{(b+g)^6}$	$-\frac{20}{(b+g)^6}$	$\frac{21}{(b+g)^6}$	$\frac{20}{(b+g)^6}$	0	$-6(b+g)^2$	$-5(b+g)^4$	$15(b+g)^4$	$14(b+g)^6$	$\frac{f}{2}k$
9	$\frac{\lambda y}{2(b+g)^2}$	$\frac{\lambda y}{(b+g)^4}$	$\frac{2\lambda y(1-\nu)}{(b+g)^2}$	$-\frac{1}{2(b+g)^2}$	1	$-\frac{1}{(b+g)^4}$	$(1-2\nu)$	$-\frac{2(1-\nu)}{(b+g)^2}$	$-\frac{2\lambda y}{(b+g)^4}$	$-\frac{\lambda y(3-2\nu)}{(b+g)^4}$	$\frac{2}{(b+g)^4}$	$\frac{3-2\nu}{(b+g)^4}$	$\frac{3\lambda y}{(b+g)^6}$	$\frac{2\lambda y(2-\nu)}{(b+g)^6}$	$-\frac{3}{(b+g)^6}$	$-\frac{2(2-\nu)}{(b+g)^6}$	$2\nu(b+g)^2$	$-2(b+g)^2$	$-(1+2\nu)(b+g)^4$	$3(b+g)^4$	$2(1+\nu)(b+g)^6$	$\lambda y\frac{f}{2}(1-k)$
10	0	0	0	$\frac{\cos 2(\theta-\varphi)}{2r^2}$	$-\cos 2\theta$	$-\frac{5\cos 2(\theta-3\varphi)}{r^4}$	1	$-\frac{\cos 2\varphi+\cos 2(\theta-3\varphi)}{r^2}$	0	0	$-\frac{10\cos 2(\theta-3\varphi)}{r^4}$	$\frac{5(\cos 4\varphi+3\cos 2(\theta-3\varphi))}{r^4}$	0	0	$-\frac{21\cos 2(\theta-4\varphi)}{r^6}$	$-\frac{5(\cos 6\varphi+3\cos 2(\theta-4\varphi))}{r^6}$	$3r^2(\cos 2\varphi-\cos 2\theta)$	$-6r^2\cos 2(\varphi+\theta)$	$5r^4[\cos 4\varphi-2\cos 2(\theta+\varphi)]$	$-15r^4\cos 2(\theta+2\varphi)$	$7r^6[\cos 6\varphi-3\cos 2(\theta+3\varphi)]$	0
11	0	0	0	$-\frac{\sin 2(\theta-\varphi)}{2r^2}$	$\sin 2\theta$	$\frac{3\sin 2(\theta-3\varphi)}{r^4}$	0	$\frac{\sin 2(\theta-3\varphi)}{r^2}$	0	0	$\frac{10\sin 2(\theta-3\varphi)}{r^4}$	$\frac{6\sin 2(\theta-3\varphi)}{r^4}$	0	0	$\frac{21\sin 2(\theta-4\varphi)}{r^6}$	$\frac{15\sin 2(\theta-4\varphi)}{r^6}$	$3r^2\sin 2\theta$	$6r^2\sin 2(\theta+\varphi)$	$10r^4\sin 2(\theta+\varphi)$	$15r^4\sin 2(\theta+3\varphi)$	$21r^6\sin 2(\theta+3\varphi)$	0
12	$-\frac{\cos 2(\theta_1-\varphi)}{2r_1^2}$	$\frac{3\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	$\frac{\cos 2\varphi+\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^2}$	$\frac{\cos 2(\theta_1-\varphi)}{2r_1^2}$	$-\cos 2\theta_1$	$-\frac{3\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	1	$-\frac{\cos 2\varphi+\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^2}$	$\frac{10\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	$\frac{5[\cos 4\varphi+2\cos 2(\theta_1-2\varphi)]}{r_1^4}$	$-\frac{10\cos 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	$-\frac{5[\cos 4\varphi+2\cos 2(\theta_1-2\varphi)]}{r_1^4}$	$\frac{21\cos 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$\frac{5[\cos 6\varphi+3\cos 2(\theta_1-4\varphi)]}{r_1^6}$	$-\frac{21\cos 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$-\frac{5[\cos 6\varphi+3\cos 2(\theta_1-4\varphi)]}{r_1^6}$	$3r_1^2(\cos 2\varphi-\cos 2\theta_1)$	$-6r_1^2\cos 2(\theta_1+\varphi)$	$5r_1^4[\cos 4\varphi-2\cos 2(\theta_1+\varphi)]$	$-15r_1^4\cos 2(\theta_1+2\varphi)$	$7r_1^6[\cos 6\varphi-3\cos 2(\theta_1+2\varphi)]$	$\frac{f}{2}[(1+\cos 2\theta_1)+k(1-\cos 2\theta_1)]$
13	$\frac{\sin 2(\theta_1-\varphi)}{2r_1^2}$	$-\frac{3\sin 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	$-\frac{\sin 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^2}$	$-\frac{\sin 2(\theta_1-\varphi)}{2r_1^2}$	$\sin 2\theta_1$	$\frac{3\sin 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^4}$	0	$\frac{\sin 2(\theta_1-2\varphi)}{r_1^2}$	$-\frac{10\sin 2(\theta_1-3\varphi)}{r_1^4}$	$-\frac{6\sin 2(\theta_1-3\varphi)}{r_1^4}$	$\frac{10\sin 2(\theta_1-3\varphi)}{r_1^4}$	$\frac{6\sin 2(\theta_1-3\varphi)}{r_1^4}$	$-\frac{21\sin 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$-\frac{15\sin 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$\frac{21\sin 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$\frac{15\sin 2(\theta_1-4\varphi)}{r_1^6}$	$3r_1^2\sin 2\theta_1$	$6r_1^2\sin 2(\theta_1+\varphi)$	$10r_1^4\sin 2(\theta_1+\varphi)$	$15r_1^4\sin 2(\theta_1+3\varphi)$	$21r_1^6\sin 2(\theta_1+3\varphi)$	$-\frac{f}{2}(1-k)\sin 2\theta_1$
14	$\frac{\lambda y}{2r_1^2}$	$-\frac{\lambda y\cos 2\varphi}{r_1^4}$	$-\frac{2\lambda y(1-\nu)\cos 2\varphi}{r_1^2}$	$-\frac{1}{2r_1^2}$	$-\cos 2\varphi$	$\frac{\cos 2\varphi}{r_1^4}$	$(1-2\nu)$	$\frac{2(1-\nu)\cos 2\varphi}{r_1^2}$	$-\frac{2\lambda y\cos 4\varphi}{r_1^4}$	$-\frac{\lambda y(5-2\nu)\cos 4\varphi}{r_1^4}$	$\frac{2\cos 4\varphi}{r_1^4}$	$\frac{(3-2\nu)\cos 4\varphi}{r_1^4}$	$-\frac{3\lambda y\cos 6\varphi}{r_1^6}$	$-\frac{2\lambda y(2-\nu)\cos 6\varphi}{r_1^6}$	$\frac{3\cos 6\varphi}{r_1^6}$	$\frac{2(2-\nu)\cos 6\varphi}{r_1^6}$	$-2\nu r_1^2\cos 2\varphi$	$-2r_1^2\cos 4\varphi$	$-(1+2\nu)r_1^4\cos 4\varphi$	$-3r_1^4\cos 6\varphi$	$-2(1+\nu)r_1^6\cos 6\varphi$	0
15	0	$-\frac{\lambda y\sin 2\varphi}{r_1^4}$	$\frac{\lambda y(1-2\nu)\sin 2\varphi}{r_1^2}$	0	$\sin 2\varphi$	$\frac{\sin 2\varphi}{r_1^4}$	0	$-\frac{(1-2\nu)\sin 2\varphi}{r_1^2}$	$-\frac{2\lambda y\sin 4\varphi}{r_1^4}$	$-\frac{2\lambda y(5-2\nu)\sin 4\varphi}{r_1^4}$	$\frac{2\sin 4\varphi}{r_1^4}$	$\frac{2\nu\sin 4\varphi}{r_1^4}$	$-\frac{3\lambda y\sin 6\varphi}{r_1^6}$	$-\frac{\lambda y(4+2\nu)\sin 6\varphi}{r_1^6}$	$\frac{3\sin 6\varphi}{r_1^6}$	$\frac{(1+2\nu)\sin 6\varphi}{r_1^6}$	$(3-2\nu)r_1^2\sin 2\varphi$	$2r_1^2\sin 4\varphi$	$2(2-\nu)r_1^4\sin 4\varphi$	$3r_1^4\sin 6\varphi$	$(5-2\nu)r_1^6\sin 6\varphi$	0

$$\frac{1}{2}(Aa_o-\alpha_o)(b+g)^{-2} + (1-2\vartheta_b)\beta_o - 2\alpha_4(b+g)^2 - (1+2\vartheta_b)\beta_4(b+g)^4 +$$

$$+ 2\alpha_4'(b+g)^{-6} + (3-2\vartheta_b)\beta_4'(b+g)^{-4} - 2Aa_4'(b+g)^{-6} - A(3-2\vartheta)b_4'(b+g)^{-4} +$$

$$+ \Big[\alpha_2 - \alpha_2'(b+g)^{-4} - 2(1-\vartheta_b)\beta_2'(b+g)^{-2} + 2\vartheta_b\beta_2(b+g)^2 + Aa_2'(b+g)^{-4} +$$

$$+ 2(1-\vartheta)Ab_2'(b+g)^{-2} + 3\alpha_6(b+g)^4 + 2(1+\vartheta_b)\beta_6(b+g)^6 - 3\alpha_6'(b+g)^{-8} -$$

$$- 2(2-\vartheta_b)\beta_6'(b+g)^{-6} + 3Aa_6'(b+g)^{-8} + 2A(2-\vartheta)b_6^8(b+g)^{-6}\Big] = 0 \qquad (3.93)$$

Równania (3.92), (3.93) dla przypadku otworu kołowego $a + g = b + g$ przyjmują postać:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.94)$$

gdzie:

$$x = \frac{1}{2}(Aa_o-\alpha_o)(a+g)^{-2} + (1-2\vartheta_b)\beta_o - 2\alpha_4(a+g)^2 - (1+2\vartheta_b)\beta_4(a+g)^4 + 2\alpha_4'(a+g)^{-6} +$$

$$+ (3-2\vartheta_b)\beta_4'(a+g)^{-4} - 2Aa_4'(a+g)^{-6} - A(3-2\vartheta)b_4(a+g)^{-4} \qquad (3.95)$$

$$y = \alpha_2 - \alpha_2'(a+g)^{-4} - 2(1-\vartheta_b)\beta_2'(a+g)^{-2} + 2\vartheta_b\beta_2(a+g)^2 + Aa_2'(a+g)^{-4} +$$

$$+ 2(1-\vartheta)Ab_2'(a+g)^{-2} + 3\alpha_6(a+g)^4 + 2(1+\vartheta_b)\beta_6(a+g)^6 - 3\alpha_6'(a+g)^{-8} +$$

$$- 2(2-\vartheta_b)\beta_6'(a+g)^{-6} + 3Aa_6'(a+g)^{-8} + 2A(2-\vartheta)b_6'(a+g)^{-6} \qquad (3.96)$$

Jeżeli rozważanie ma się odnosić do przypadku kołowego, należy zażądać spełnienia układu (3.94), który posiada tylko zerowe rozwiązanie. Zatem warunek (3.92) można zastąpić równaniami:

$$x = \frac{1}{2}(Aa_o-\alpha_o)(a+g)^{-2} + (1-2\vartheta_b)\beta_o - 2\alpha_4(a+g)^2 - (1+2\vartheta_b)\beta_4(a+g)^4 +$$

$$+ 2\alpha_4'(a+g)^{-6} + (3-2\vartheta_b)\beta_4'(a+b)^{-4} + 2Aa_4'(a+g)^{-6} - A(3-2\vartheta)b_4'(a+g)^{-4} = 0 \qquad (3.97)$$

$$y = \alpha_2 - \alpha_2'(a+g)^{-4} - 2(1-\vartheta_b)\beta_2'(a+g)^{-2} + 2\vartheta_b\beta_2(a+g)^2 + Aa_2'(a+g)^{-4} +$$

$$+ 2(1-\vartheta)Ab_2'(a+g)^{-2} + 3\alpha_6(a+g)^4 + 2(1+\vartheta_b)\beta_6(a+g)^6 - 3\alpha_6'(a+g)^{-8} +$$

$$- 2(2-\vartheta_b)\beta_6'(a+g)^{-6} + 3Aa_6'(a+g)^{-8} + 2A(2-\vartheta)b_6'(a+g)^{-6} = 0 \qquad (3.98)$$

Współczynniki równań (3.97), (3.98) umieszczono w tablicy 3.1 jako wiersze 5 i 6.

Warunki (3.72), (3.74), (3.76) dla kątów $0, \frac{\pi}{2}$ są spełnione dla dowolnych współczynników i nie dostarczają żadnych równań. Współczynniki równań (3.80), (3.81), (3.93) umieszczono w wierszach 7, 8, 9 tablicy 3.1.

Pozostałe równania uzyskano z warunków (3.71) do (3.76) wstawiając kąty $\varphi = \frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{18}, \ldots, \frac{17\pi}{36}$. Uzyskano w ten sposób 102 równania, których współczynniki zestawiono w wierszach 9 do 15 tablicy 3.1. Łącznie tablica 3.1 dostarcza 111 równań o 21 niewiadomych. Przyjmując mniejsze bądź większe przedziały wartości kątów można zwiększyć bądź zmniejszyć liczbę równań uzyskanych z tablicy 3.1.

3.7. ZASTOSOWANIE METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW DO PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZANIA NADOKREŚLONEGO UKŁADU RÓWNAŃ, WYNIKAJĄCYCH Z WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Układ równań, który przedstawiono w tablicy 3.1, jest układem stu jedenastu równań liniowych o dwudziestu jeden niewiadomych a_o, a_2', b_2', α_o, α_2, β_o, α_2', β_2', a_4', b_4', α_4', β_4', α_4, β_4, a_6', b_6', α_6', β_6', α_6, β_6, β_2. Jest to, ogólnie biorąc, układ sprzeczny, nie mający ścisłego rozwiązania.

Metoda najmniejszych kwadratów pozwala na określenie przybliżonego rozwiązania i na ocenę tego przybliżenia [24]. Opis metody dla omawianego przypadku podano w załączniku 2. Wyniki numeryczne odnoszące się do konkretnych przykładów wyrobisk kołowych i eliptycznych podane zostaną w rozdziale piątym.

3.8. ZAKOŃCZENIE

1. Podano rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla wyrobiska poziomego o przekroju eliptycznym, zabezpieczonego powłoką wykonaną z betonu natryskowego.
2. Ułożono wzory na współrzędne tensora stanu naprężenia, tensora stanu odkształcenia i wektora przemieszczenia dla obszaru betonu i obszaru górotworu otaczającego wyrobisko.
3. Sformułowano w sposób ścisły warunki brzegowe.
4. Sformułowano przybliżoną postać warunków brzegowych.
5. Rozwiązano w sposób przybliżony warunki brzegowe i podano ocenę przybliżenia.

4. PROJEKTOWANIE

4.1. PRZYJĘCIE METODY PROJEKTOWANIA

Ze względu na właściwości tak betonu jak i górotworu projektowanie należy prowadzić metodą na dopuszczalne naprężenie [3], [5], [38], [43].

Do oceny wytężenia betonu jak i górotworu należy przyjąć hipotezę wytężeniową. Przyjęto hipotezę wytężeniową niezmienników W.T. Burzyńskiego [4], [15], [42]. Hipotezę tę stosuje się do materiałów, które mają różne wytrzymałości przy rozciąganiu Rm_r i przy ściskaniu Rm_c, a właściwości materiału nie zależą od kierunku.

Przyjęcie tej hipotezy jest w pełni poprawne dla betonu, dla górotworu zaś jest pewnym przybliżeniem tych właściwości przyjętym już w punkcie 1.1.1.

Przyjęto współczynniki niesymetrii wytrzymałości dla betonu:

$$\varkappa_b = \frac{Rm_c^b}{Rm_r^b} \qquad (4.1)$$

oraz dla górotworu:

$$\varkappa = \frac{Rm_c}{Rm_r}. \qquad (4.2)$$

Hipoteza niezmienników zakłada, że o wytężeniu materiału decydują wartości funkcji niezmienników s oraz t:

$$W = W(s,t), \qquad (4.3)$$

gdzie:

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad (4.4)$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + 3(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2)} \qquad (4.5)$$

Niezmienniki (4.4) i (4.5) wyrażone we współrzędnych walcowych wynoszą:

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \tag{4.6}$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{rr} + 3\sigma_{r\varphi}^2} \tag{4.7}$$

Wzory na naprężenia zredukowane według hipotezy W.T. Burzyńskiego w zależności od stosunku $\frac{t}{s}$ kształtują się następująco:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dla} & \sqrt{2} \leqslant \frac{t}{s} < \infty \\ \text{i dla} & -\infty \leqslant \frac{t}{s} < -\sqrt{2} \\ & \sigma_{red} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\,t + 3\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,s \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dla} & 0 \leqslant \frac{t}{s} \leqslant \sqrt{2} \\ & \sigma_{red} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\varkappa}\,t + 3\,\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\cdot s \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dla} & -2 \leqslant \frac{t}{s} \leqslant 0 \\ & \sigma_{red} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\varkappa}\,t \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

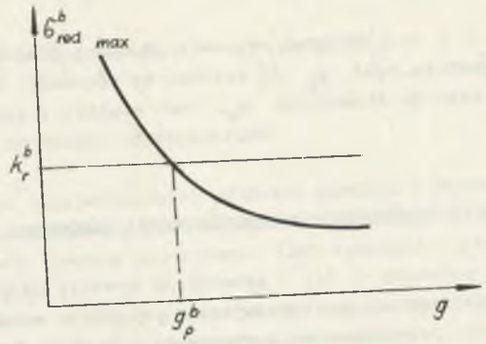
Chcąc zatem badać rozkład naprężeń zredukowanych dla betonu i dla górotworu, należy podstawić wzory na naprężenia do wzorów (4.6) i (4.7), określając wzory na niezmienniki s i t, a następnie uzyskane niezmienniki kolejno do odpowiednich, wzorów (4.8), (4.9) lub (1.10).

Na podstawie uzyskanych z maszyny cyfrowej wyników sporządzić wykresy $\sigma^b_{red_{max}}$ i $\sigma_{red_{max}}$ (dla górotworu) w zależności od przyjętych wartości grubości powłoki betonowej g (rys. 4.1 i rys. 4.2).

Następnie po przyjęciu naprężeń dopuszczalnych dla betonu k^b_r i górotworu k_r:

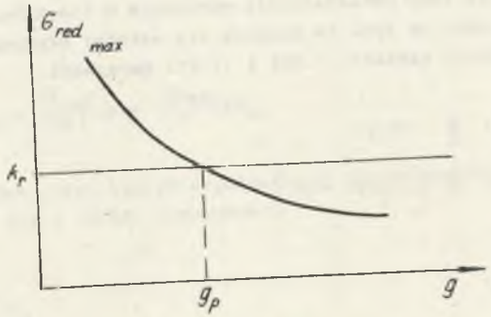
$$k^b_r = \frac{Rm^b_r}{n^b}, \tag{4.11}$$

$$k_r = \frac{Rm_r}{n}, \tag{4.12}$$



Rys. 4.1. Maksymalne naprężenie zredukowane w obudowie kołowej z betonu natryskowego jako funkcja jej grubości

Fig. 4.1. Maximum stress reduced in a circular support from shotcrete as the function of its thickness



Rys. 4.2. Maksymalne naprężenie zredukowane w górotworze jako funkcja grubości obudowy kołowej z betonu natryskowego

Fig. 4.2. Maximum stress reduced in the rock mass as the function of the thickness of a circular support from shotcrete

gdzie:

n^b - współczynnik bezpieczeństwa dla powłoki z betonu natryskowego,

n - współczynnik bezpieczeństwa dla materiału górotworu,

można, wychodząc z założenia metody projektowania na dopuszczalne naprężenie:

$$\sigma^b_{red_{max}} \leqslant k^b_r, \tag{4.13}$$

$$\sigma_{red_{max}} \leqslant k_r, \tag{4.14}$$

z rysunków 4.1 i 4.2 odczytać wartości grubości powłoki betonowej g_p^b ze względu na powłokę, oraz g_p ze względu na górotwór. Grubość powłoki, jaką należy przyjąć do stosowania g_o, jest większa z uzyskanych wartości g_p^b i g_p.

4.2. UWZGLĘDNIENIE CZĘŚCIOWEGO PRZEMIESZCZENIA GÓROTWORU DO WYROBISKA

Rozważania w punktach 1, 2 i 3 prowadzone zostały przy założeniu, że w wyniku idealnego działania usztywniającego przodku w warunkach brzegowych przyjęto jednakowe przemieszczenia górotworu i powłoki betonowej w miejscach ich wspólnego styku.

W rzeczywistości następuje pewne przemieszczenie górotworu w kierunku wyrobiska jeszcze przed nałożeniem powłoki betonowej tak ze względu na nie natychmiastowe nałożenie powłoki betonowej, jak i ze względu na dojrzewanie betonu.

Uwzględnienie tego odkształcenia górotworu w kierunku wyrobiska obliczeniowo może polegać na tym, że zmienia się warunki brzegowe dla wyrobiska o dowolnym kształcie zamiast (1.20) i (1.21) związkami

$$u^b(x,y) = \xi \cdot u(x,y) \tag{4.15}$$

$$v^b(x,y) = \xi \cdot \left[v(x,y) - v_o\right], \tag{4.16}$$

gdzie:

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Ułamek ξ nazwano współczynnikiem odciążenia górotworu. Ustalenie wartości ξ należy poprzedzić odpowiednimi badaniami eksperymentalnymi.

Dla kołowego wyrobiska górniczego warunki brzegowe (2.17) i (2.18) przyjmą postać:

$$u_r^b(R+g,\varphi) = \xi\left[u_r(R+g,\varphi) - \frac{1}{2}\, m(R+g) \cdot (1-\cos 2\varphi)\right] \tag{4.17}$$

$$u_\varphi^b(R+g,\varphi) = \xi\left[u_\varphi(R+g,\varphi) - \frac{1}{2}\, m(R+g)\sin 2\varphi\right] \tag{4.18}$$

Dla eliptycznego wyrobiska górniczego warunki brzegowe (3.15) i (3.16) przyjmą postać:

$$u_r^b\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = \xi\left\{u_r\left[r_1(\varphi),\varphi\right] - u_{r_o}\left[r_1(\varphi),\varphi\right]\right\} \tag{4.19}$$

$$u_\varphi^b\left[r_1(\varphi),\varphi\right] = \xi\left\{u_r\left[r_1(\varphi),\varphi\right] - u_{\varphi_o}\left[r_1(\varphi),\varphi\right]\right\} \tag{4.20}$$

4.3. GŁĘBOKOŚCI KRYTYCZNE (DOPUSZCZALNE)

Problem doboru (projektowania) grubości powłoki z betonu natryskowego może być także potraktowany jako zagadnienie głębokości, na jakiej obudowa względnie górotwór ulegnie zniszczeniu (lub wystąpią w nich naprężenia równe dopuszczalnym).

Głębokości takie nazwijmy głębokościami krytycznymi (dopuszczalnymi).

Głębokości krytyczne można wyznaczyć ze wzorów:

- dla betonu

$$Rm_r^b = \sigma_{red}^b = \left(\frac{\sigma_{red}^b}{p}\right) \cdot p = \left(\frac{\sigma_{red}^b}{p}\right)\gamma H_{kr}^b, \tag{4.21}$$

- dla górotworu

$$Rm_r = \sigma_{red} = \left(\frac{\sigma_{red}}{p}\right)p = \left(\frac{\sigma_{red}}{p}\right)\gamma H_{kr} \tag{4.22}$$

(jest to przypadek, przy którym współczynnik bezpieczeństwa $n = 1$).

Ze wzorów (4.21) i (4.22) otrzymano:

- dla betonu

$$H_{kr}^b = \frac{Rm_r^b}{\left(\frac{\sigma_{red}^b}{p}\right)\gamma}, \tag{4.23}$$

- dla górotworu

$$H_{kr} = \frac{Rm_r}{\left(\frac{\sigma_{red}}{p}\right)\gamma}. \tag{4.24}$$

Jako krytyczną głębokość należy przyjąć mniejszą z uzyskanych ze wzorów (4.23) i (4,24).

Analogicznie (po uwzględnieniu wzoru (4.11)) głębokości dopuszczalne:

- dla betonu

$$H^b_{dop} = \frac{k^b_r}{(\frac{\sigma^b_{red}}{p})\,\gamma} \tag{4.25}$$

- dla górotworu (po uwzględnieniu (4.12))

$$H_{dop} = \frac{k_r}{(\frac{\sigma_{red}}{p})\,\gamma}. \tag{4.26}$$

Jako dopuszczalną głębokość należy przyjąć mniejszą z uzyskanych ze wzorów (4.25) i (4.26).

5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

5.1. OBLICZANIE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ DLA WYROBISKA KOŁOWEGO

Jako parametry geometryczne dla wyrobiska przyjęto promień wewnętrzny obudowy wykonanej z betonu natryskowego $R = 2,5$ m, grubość powłoki przyjęto $g = 0,05$ m; 0,10 m; 0,15 m; 0,25 m.

Dla powłoki betonowej wyznaczono naprężenia dla promieni $r = R$; $r = R + \frac{1}{5}g$; $r = R + \frac{2}{5}g$; $r = R + \frac{3}{5}g$; $r = R + \frac{4}{5}g$; $r = R + g$. Dla górotworu przyjęto promienie $r = R + g$; $r = R + 2g$; $r = R + 3g$; $r = R + 4g$; $r = R + 5g$; $r = R + 25g$; $r = R + 50g$; $r = R + 100g$.

Wartości mechaniczne przyjęto:

$E = 1,07 \cdot 10^6 \frac{N}{cm^2}$ - moduł Younga dla górotworu,

$E_b = 2,03 \cdot 10^6 \frac{N}{cm^2}$ - moduł Younga dla betonu,

$\nu = 0,27$ - ułamek Poissona dla górotworu,

$\nu_b = 0,167$ - ułamek Poissona dla betonu,

$\mathcal{H} = 15,45$ - współczynnik niesymetrii wytrzymałości dla górotworu,

$\mathcal{H}_b = 9,067$ - współczynnik niesymetrii wytrzymałości dla betonu.

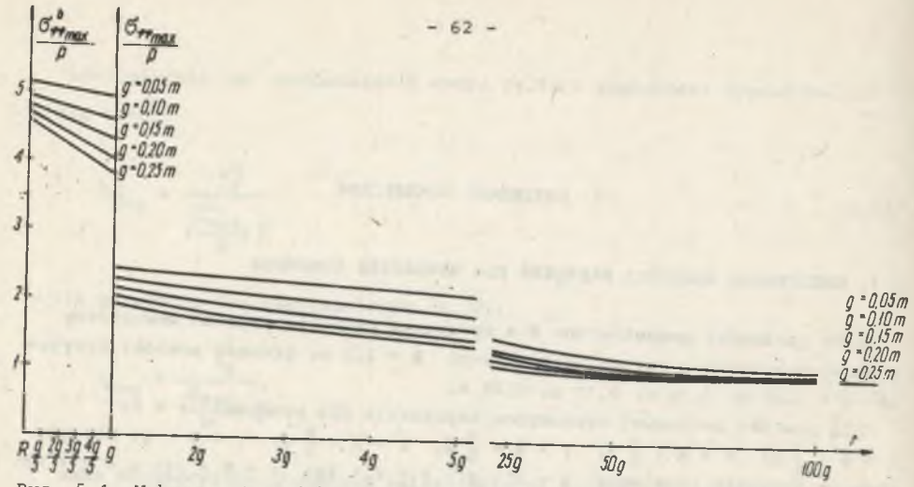
Uzyskane z obliczeń wartości maksymalne naprężeń $\xi = 1$ przedstawiono na rysunkach:

$\frac{\sigma^b_{\varphi\varphi_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{\varphi\varphi_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.1

$\frac{\sigma^b_{rr_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{rr_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.2

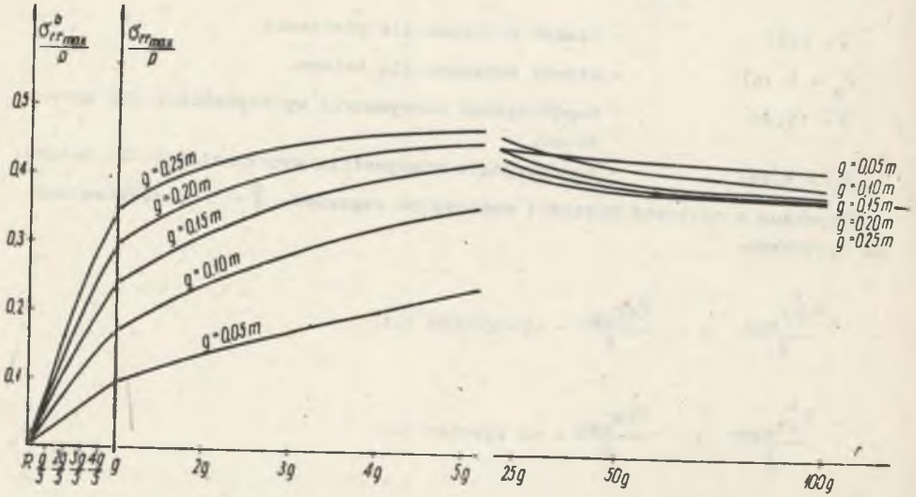
$\frac{\sigma^b_{r\varphi_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{r\varphi_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.3

$\frac{\sigma^b_{zz_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{zz_{max}}}{p} = \frac{\sigma_{3_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.4



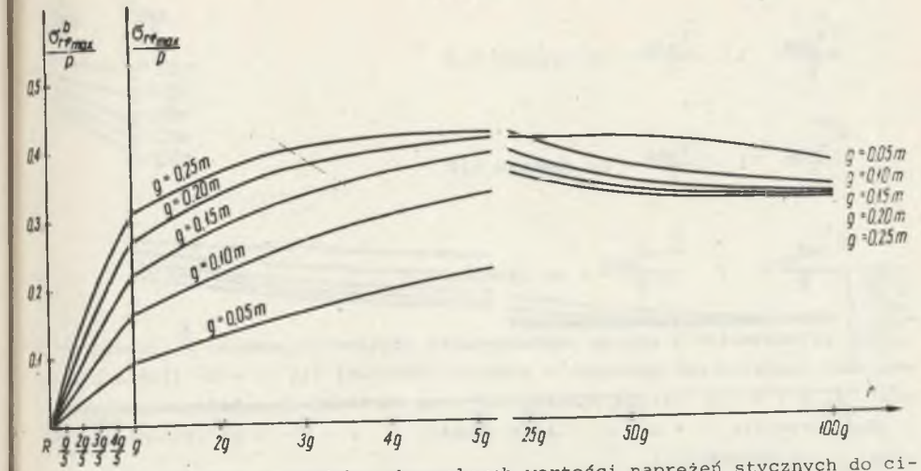
Rys. 5.1. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń obwodowych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.1. Diagrams of ratios of maximum values of circumferential stresses to the vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distanco from it in the rock mass for different thicknesses of a support



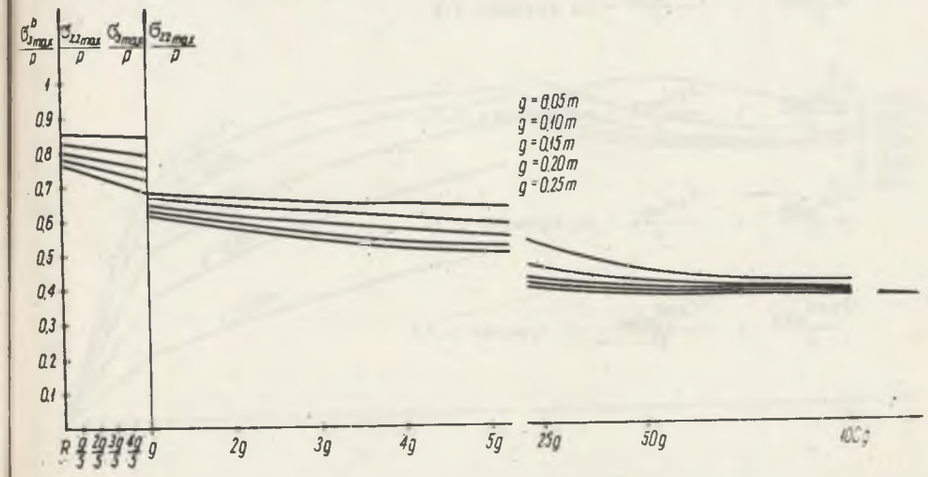
Rys. 5.2. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń promieniowych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.2. Diagrams of ratios of maximum values of radial stresses to vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrets and distance from in the rock mass for different thicknesses of a support



Rys. 5.3. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń stycznych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.3. Diagrams of ratios of maximum values of steady stresses to the vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distance from in the rock mass for different thicknesses of a support



Rys. 5.4. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń głównych (wzdłuż osi wyrobiska) do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.4. Diagrams of ratios of maximum values principal stresses (along the axis of a roadway) to the vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distance from it in the rock mass for different thicknesses of a support

$\frac{\sigma^b_{1_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{1_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.5

$\frac{\sigma^b_{2_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{2_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.6

$\frac{\sigma^b_{red_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{red_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.7

Dla przedstawienia wpływu współczynnika odciążenia powłoki ξ pokazano wartości naprężeń maksymalnych w powłoce betonowej dla r = R (linią ciągłą) i r = R + g (linią przerywaną) oraz wartości naprężeń maksymalnych w górotworze dla r = R + g (linią ciągłą) i r = R + 5 g (linią przerywaną) i tak naprężenia:

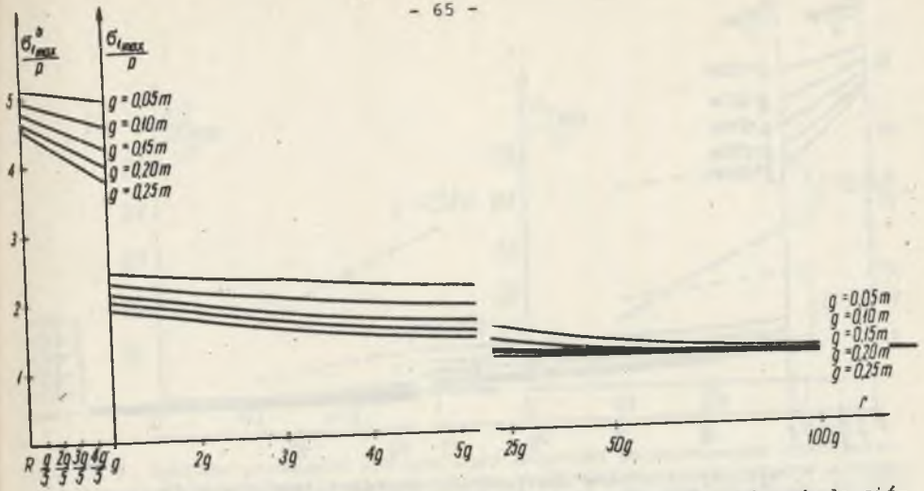
$\frac{\sigma^b_{\varphi\varphi_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{\varphi\varphi_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.8

$\frac{\sigma^b_{rr_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{rr_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.9

$\frac{\sigma^b_{r\varphi_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{r\varphi_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.10

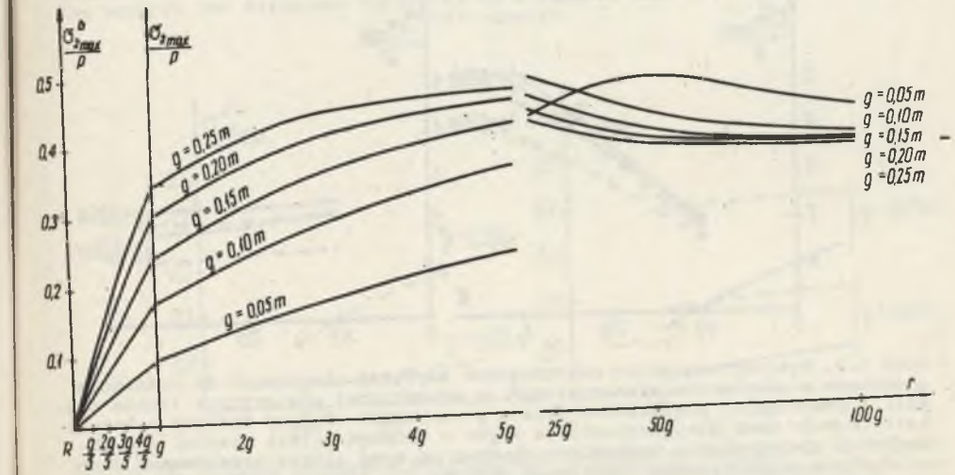
$\frac{\sigma^b_{zz_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{zz_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.11

$\frac{\sigma^b_{red_{max}}}{p}$ i $\frac{\sigma_{red_{max}}}{p}$ - na rysunku 5.12



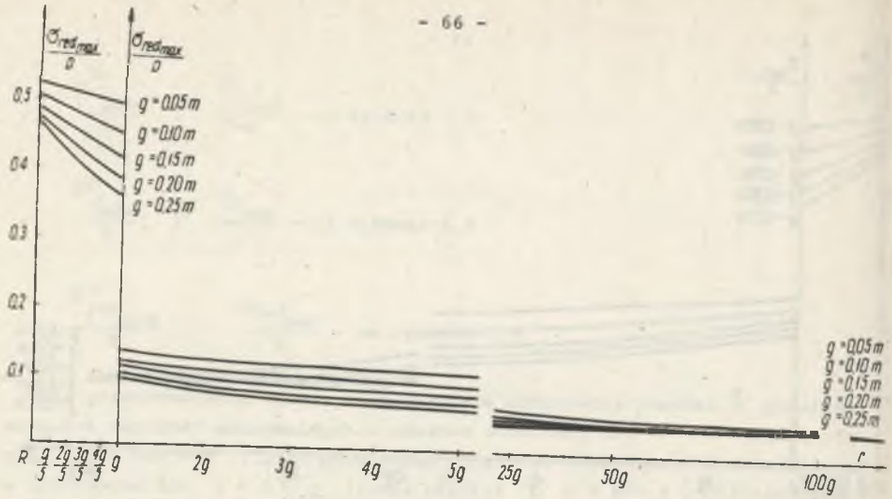
Rys. 5.5. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń głównych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.5. Diagrams of ratios of maximum values of principal stresses to vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distance from it in the rock mass for different thickness of a support



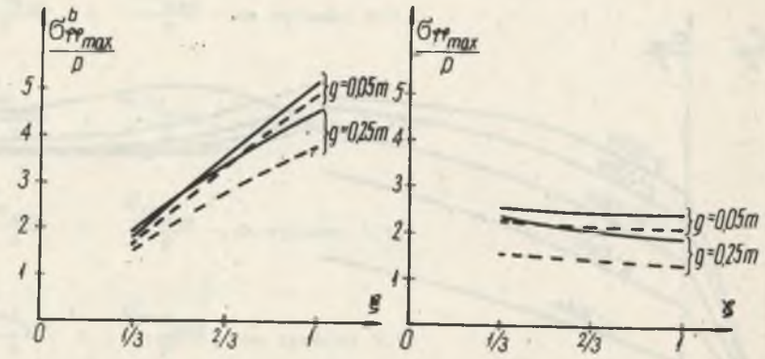
Rys. 5.6. Wykresy stosunków maksymalnych wartości naprężeń głównych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.6. Diagrams of ratios of maximum values of principal stresses to vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distance from it in the rock mass for different thickness of a support



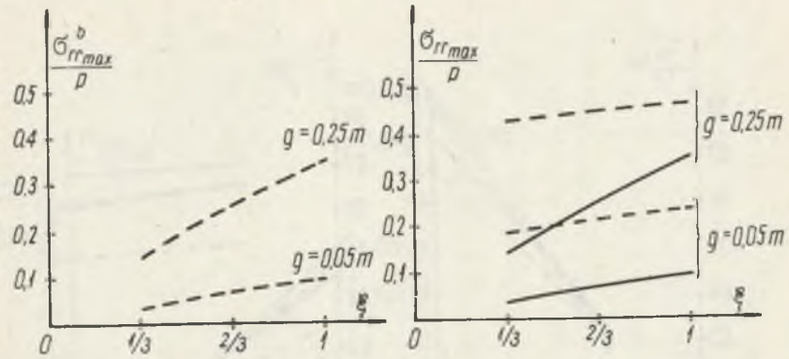
Rys. 5.7. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń zredukowanych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcje miejsca w obudowie kołowej z betonu natryskowego i odległości od niej w górotworze dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.7. Diagrams of ratios of maximum reduced stresses to vertical pressure in the intact rock mass as functions of a place in a circular support from shotcrete and distance from it in the rock mass for different thickness of a support



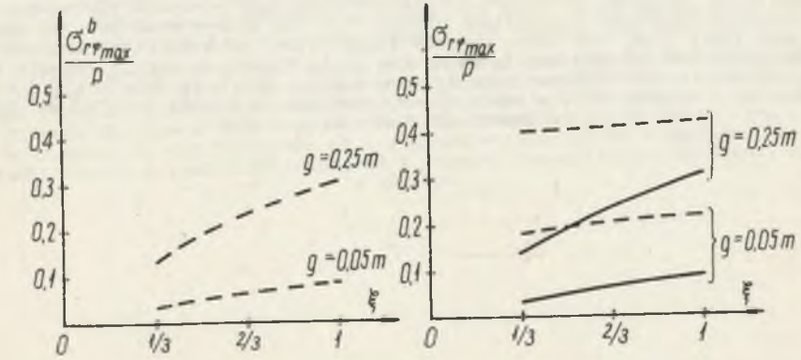
Rys. 5.8. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń obwodowych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym na wewnętrznej powierzchni (linia ciągła) i zewnętrznej powierzchni (linia przerywana) obudowy kołowej z betonu natryskowego oraz dla górotworu na styku z obudową (linia ciągła) i w odległości równej pięciu grubościom obudowy od niej (linia przerywana) jako funkcje współczynnika odciążenia obudowy dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.8. Diagrams of ratios of maximum circumferential stresses to vertical pressure in the intact rock mass on the inner surface (full lime) and outer surface (break line) of a circular support from shotcrete and for the rock mass on the contact surface with the support (full line) and in the distance equal to the thickness of the support from it multiplied by 5 (break line) as functions of load coefficient of a support for different thickness of a support



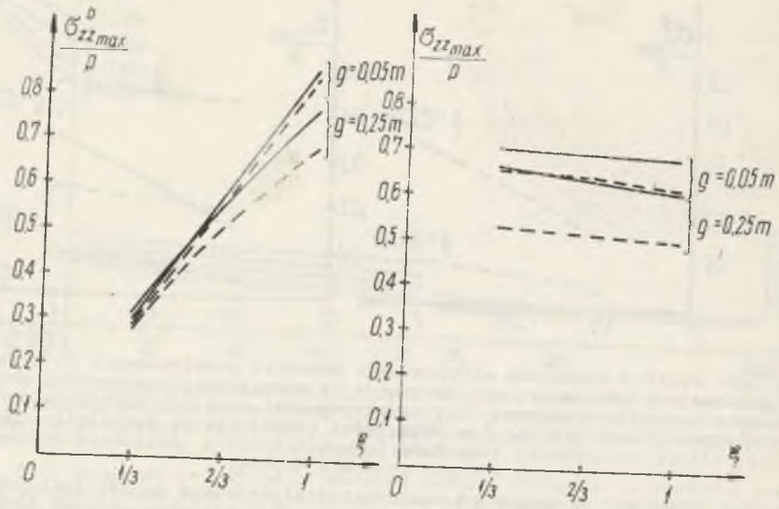
Rys. 5.9. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń promieniowych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym na zewnętrznej powierzchni obudowy kołowej z betonu natryskowego (linia przerywana) oraz dla górotworu na styku z obudową (linia ciągła) i w odległości równej pięciu grubościom obudowy od niej (linia przerywana) jako funkcje wsiółczynnika odciążenia obudowy dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.9. Diagrams of ratios of maximum radial stresses to vertical pressure in the intact rock mass on the outer surface of a circular support from shotcrete (break line) and for the rock mass on the contact surface with the support (full line) and in the distance from it which equal to the thickness of the support multiplied by 5 as functions of a load coefficient of the support for different thickness of a support for different thickness of the support



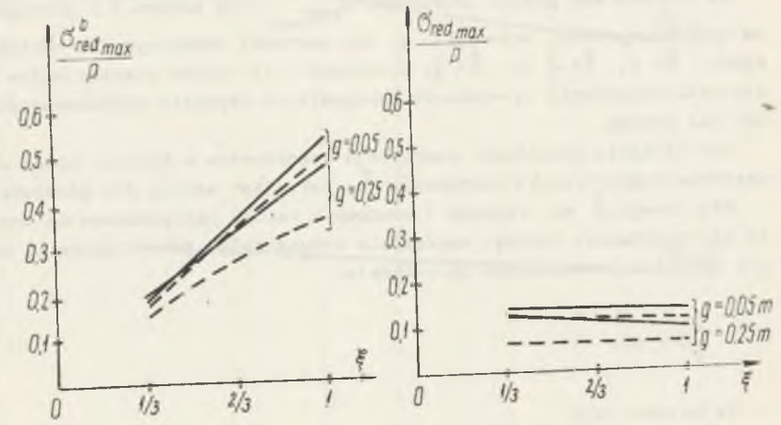
Rys. 5.10. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń promieniowych co ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym na zewnętrznej powierzchni obudowy kołowej z betonu natryskowego (linia przerywana) oraz dla górotworu na styku z obudową (linia ciągła) i w odległości równej pięciu grubościom obudowy od niej (linia przerywana) jako funkcje współczynnika odciążenia obudowy dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.10. Diagrams of ratios of maximum radial stresses to vertical pressure in the intact rock mass on the outer surface of a circular support from shotcrete (break line) and for the rock mass on the contact surface with the support (full line) and in the distance from it which is equal to the thickness of the support multiplied by 5 as functions of a load coefficient of a support



Rys. 5.11. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń głównych (wzdłuż osi wyrobiska) do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym na wewnętrznej powierzchni (linia ciągła) i zewnętrznej powierzchni (linia przerywana) obudowy kołowej z betonu natryskowego oraz dla górotworu na styku z obudową (linia ciągła) i w odległości równej pięciu grubościom obudowy od niej (linia przerywana) jako funkcje współczynnika odciążenia obudowy dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.11. Diagrams of ratios of maximum principal stresses (along the axis of a road-way) to vertical pressure in the intact rock mass on the inner (full line) and outer surface (break line) of a circular support from shotcrete and for the rock mass on the contact surface with a support (full line) and in the distance from it (break line) which is equal to the thickness of a support multiplied by 5 as functions of a load coefficient for different thickness of a support



Rys. 5.12. Wykresy stosunków maksymalnych naprężeń zredukowanych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym na wewnętrznej powierzchni (linia ciągła) i zewnętrznej powierzchni (linia przerywana) obudowy kołowej z betonu natryskowego oraz dla górotworu na styku z obudową (linia ciągła) i w odległości równej pięciu grubościom obudowy od niej (linia przerywana) jako funkcje współczynnika odciążenia obudowy dla różnych grubości obudowy

Fig. 5.12. Diagrams of ratios of maximum reduced stresses to vertical pressure in the intact rock mass on the inner (full line) and outer surface (break line) of a circular support from shotcrete and for the rock mass on the contact surface with a support (full line) and in the distance from it which is equal to the thickness of a support multiplied by 5 (break line) as functions of a load coefficient of a support for different thickness of a support

5.2. WYZNACZANIE GRUBOŚCI POWŁOKI BETONOWEJ DLA WYROBISKA KOŁOWEGO

Na podstawie wyników uzyskanych dla danych przyjętych w punkcie 5.1 uzyskano z maszyny cyfrowej wyniki przedstawione na rysunku 5.13.

Na rysunku tym podano zależność $\sigma_{red_{max}}$ dla betonu B i górotworu G od grubości powłoki betonowej g dla wartości współczynnika odciążenia powłoki $\xi = 1$, $\xi = \frac{2}{3}$ i $\xi = \frac{1}{3}$. Z rysunku 5.13 wynika znaczny wpływ współczynnika odciążenia na wielkość maksymalnych naprężeń zredukowanych, zwłaszcza dla betonu.

Jak należało oczekiwać, naprężenia zredukowane w betonie rosną wraz ze wzrostem współczynnika odciążenia ξ, natomiast maleją dla górotworu.

Dla danego ξ np. równego 1 obudowa z betonu natryskowego ma sens dopiero dla górotworu, którego naprężenie dopuszczalne jest większe od konkretnej wartości, w omawianym przykładzie:

$$\frac{k_r}{p} > 0,1$$

i dla betonu, gdy

$$\frac{k_r^b}{p} > 0,475.$$

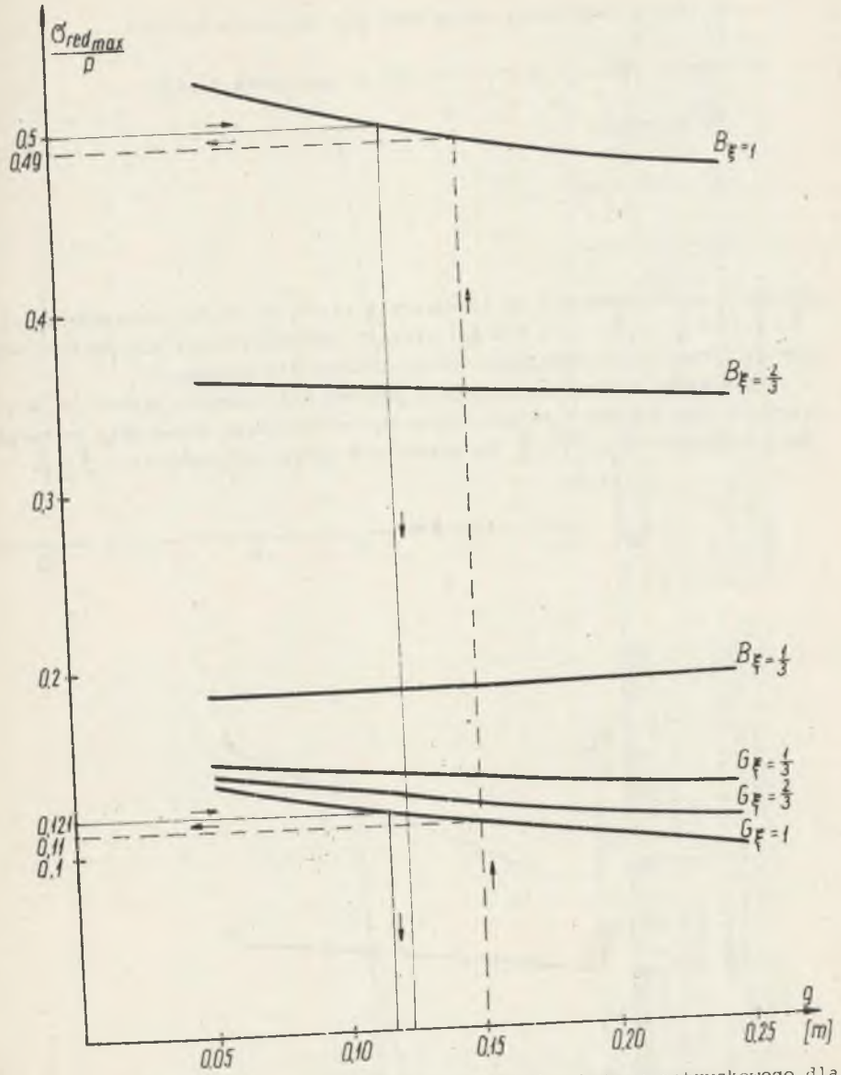
Przedstawiony w punkcie 4.1 sposób projektowania grubości powłoki polega na przeprowadzeniu na rys. 5.13 prostych poziomych (linie ciągłe) na wysokości $\frac{k_r}{p} = 0,121$ i $\frac{k_r^b}{p} = 0,5$ i wyznaczeniu grubości powłoki betonowej jako odciętej punktów przecięcia prostych z krzywymi wykresów, np. dla $\xi = 1$, $g = 11,4$ cm i $g^b = 12,2$ cm. Ostatecznie grubość powłoki, jaką należy przyjąć, wynosi 12,2 cm.

Jeżeli natomiast założyć jako grubość powłoki $g = 0,15$ m, dla przypadku przedstawionego na rys. 5.13 (linią przerywaną) uzyskuje się minimalne wartości naprężeń dopuszczalnych dla górotworu:

$$\frac{k_r}{p} \geqslant 0,11,$$

natomiast dla betonu:

$$\frac{k_r}{p} \geqslant 0,49.$$



Rys. 5.13. Wyznaczanie grubości obudowy kołowej z betonu natryskowego dla konkretnych naprężeń dopuszczalnych górotworu i betonu (linia ciągła) oraz wartości naprężeń dopuszczalnych dla górotworu i betonu dla przyjętej grubości obudowy kołowej z betonu natryskowego

Fig. 5.13. Determining the thickness of a circular support from shotcrete for definite permissible stresses of the rock mass and concrete (full line) and values of permissible stresses for the rock mass and concrete for the accepted assumed thickness of a circular support from shotcrete

5.3. OBLICZANIE GŁĘBOKOŚCI KRYTYCZNEJ DLA WYROBISKA KOŁOWEGO

Zgodnie ze wzorami (4.21) i (4.22) po przyjęciu danych:

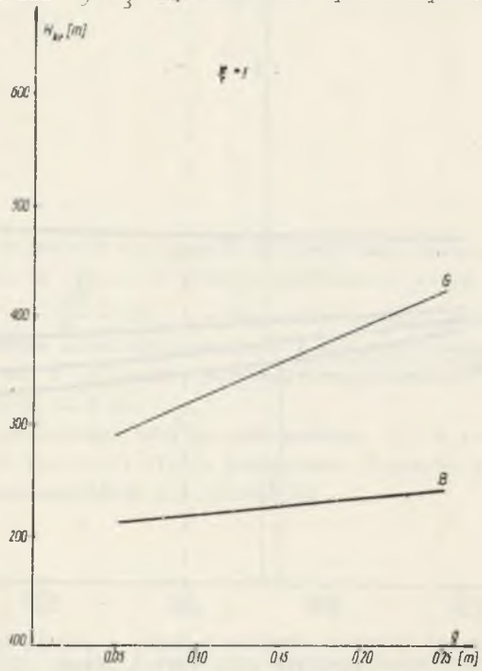
$\gamma = 25\ kN/m^3$

$Rm_r^b = 280\ N/cm^2$

$Rm_r = 100\ N/cm^2$

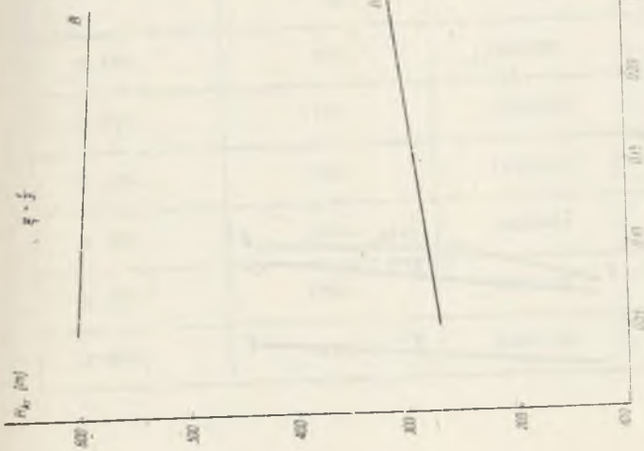
uzyskano wyniki pokazane na rysunkach 5.14, 5.15 i 5.16 odpowiednio dla $\xi = \frac{1}{3}$, $\xi = \frac{2}{3}$ i $\xi = 1$, z tym że literą B oznaczono wynik dla powłoki betonowej, literą G zaś oznaczono wynik uzyskany dla górotworu.

Linią grubą zaznaczono zgodnie z punktem 4.3 wartości głębokości krytycznych. Na rysunku 5.17 zaznaczono wyniki obliczeń głębokości krytycznych. Wyniki uzyskane dla $\xi = \frac{1}{3}$ są niższe niż wyniki uzyskane dla $\xi = \frac{2}{3}$.



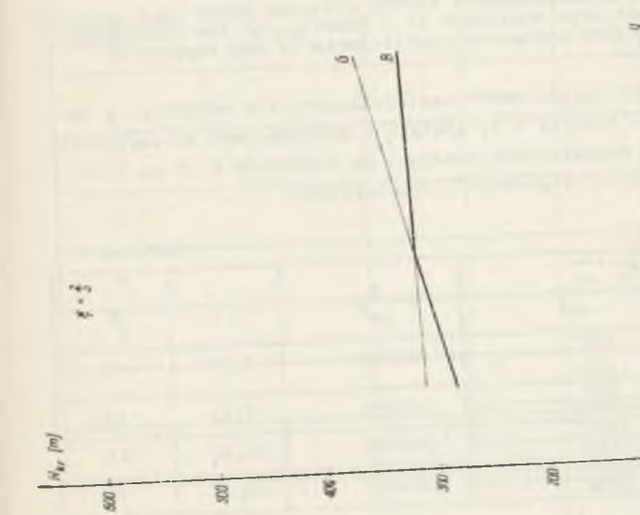
Rys. 5.14. Wykres zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla współczynnika odciążenia obudowy $\xi = 1$

Fig. 5.14. Diagram of the dependence of the critical depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support for the unloading coefficient $\xi = 1$



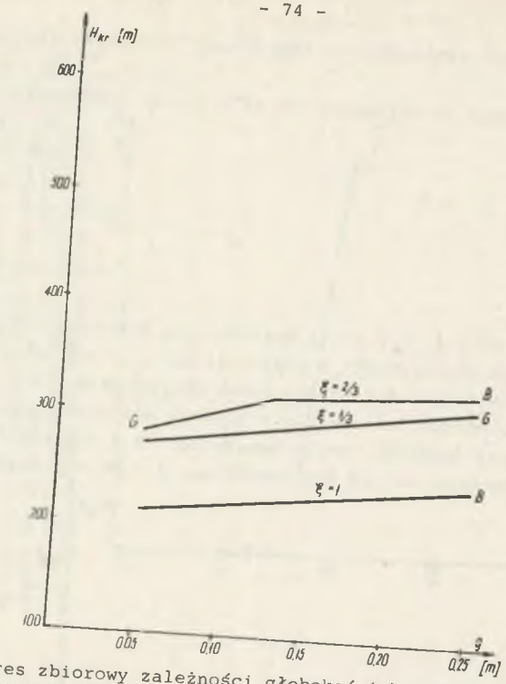
Rys. 5.15. Wykres zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla współczynnika odciążenia obudowy $\xi = 2/3$

Fig. 5.15. Diagram of the dependence of the critical depth of a circular roadway from shotcrete as a function of the thickness of a support for the unloading coefficient $\xi = 2/3$



Rys. 5.16. Wykres zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla współczynnika odciążenia obudowy $\xi = 1/3$

Fig. 5.16. Diagram of the dependence of the critical depth of a circular roadway with support from shotcrete as a function of the thickness of a support for the unloading coefficient $\xi = 1/3$



Rys. 5.17. Wykres zbiorowy zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia obudowy ξ

Fig. 5.17. Common diagram of dependences of the critical depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support for different unloading coefficients of the support ξ

Dla następujących danych wyjściowych zamieszczonych dla górotworu w tablicy 5.1, a dla betonu w tablicy 5.2, ujętych w kombinacjach zestawionych w tablicy 5.3 głębokości dopuszczalne pokazano na rysunkach 5.18 do 5.25, podając tylko wyniki obliczeń głębokości dopuszczalnej.

Tablica 5.1

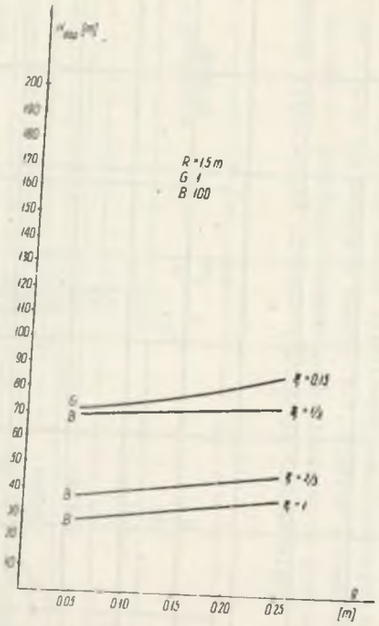
Rodzaj górotworu	$\frac{Rm_c}{n}$ $\frac{N}{cm^2}$	E $\frac{N}{cm^2}$	ν	$\mathcal{H}$
1	400	400000	0,27	10
2	600			
3	600	600000	0,23	12
4	900.			
5	1100	800000	0,20	14
6	1600			
7	1500	1000000	0,20	15
8	2500			

Tablica 5.2

Klasa betonu	$\frac{Rm_c^b}{n}$ $\frac{N}{cm^2}$	E_b $\frac{N}{cm^2}$	ν_b	$\mathcal{H}_b$
B 100	550	1800000	0,167	9,6
B 200	1150	2700000	0,167	12,9
B 300	1700	3250000	0,167	14,9
B 400	2200	3600000	0,167	16,4
B 500	2700	3800000	0,167	17,5
B 800	4800	5800000	0,167	18,0

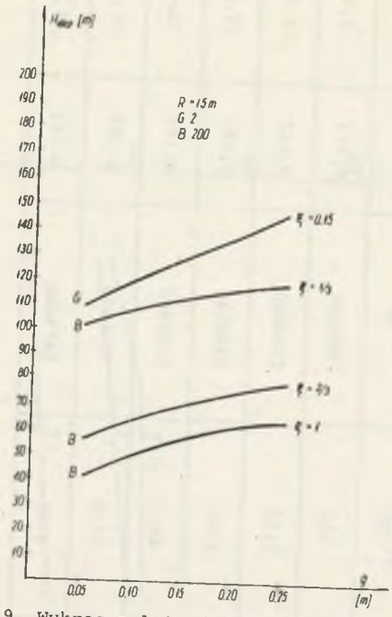
Tablica 5.3

Rodzaj górotworu \ Klasa betonu	B100	B200	B300	B400	B500	B800
1	+					
2		+				
3			+			
4				+		
5					+	
6						+
7						+
8						+



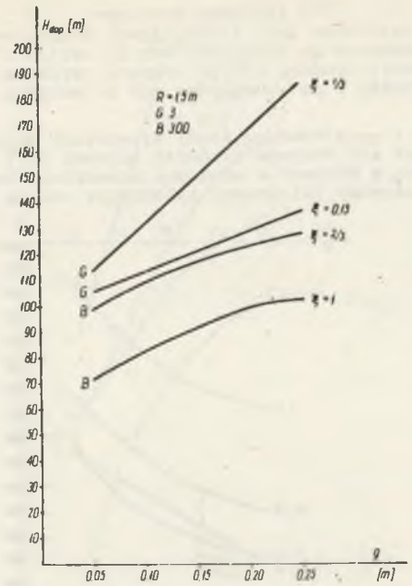
Rys. 5.18. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B100 i górotworze G1)

Fig. 5.18. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support for different unloading coefficients (for concrete B100 and rock mass G1)



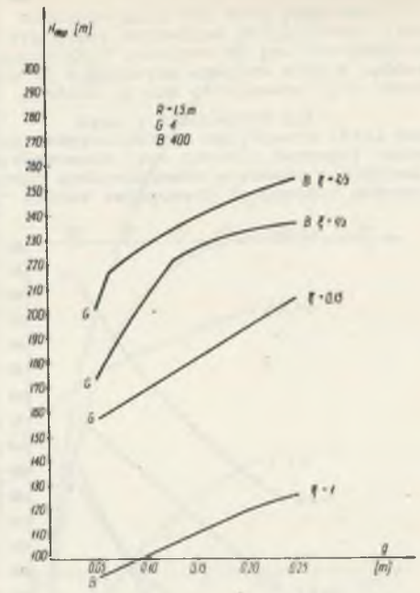
Rys. 5.19. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B200 i górotworze G2)

Fig. 5.19. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support different unloading coefficients (for concrete B200 and rock mass G2)



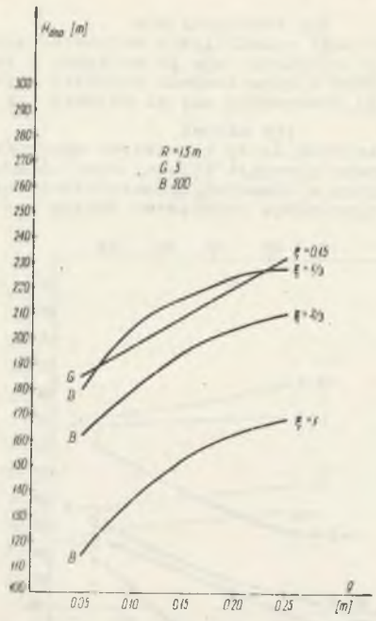
Rys. 5.20. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B300 i górotworze G3)

Fig. 5.20. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support different unloading coefficients (for concrete B 300 and rock mass G3)



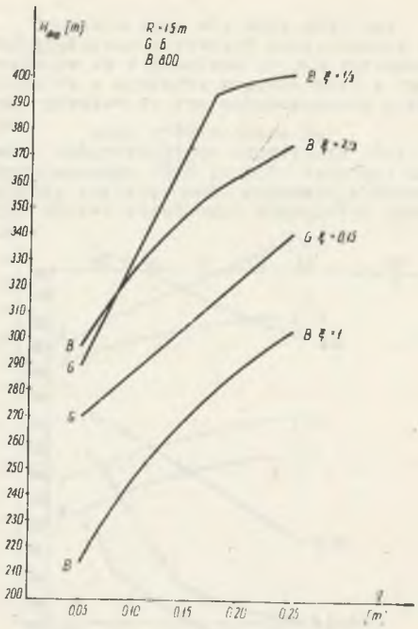
Rys. 5.21. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B400 i górotworze G4)

Fig. 5.21. Diagram of the depencence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support different unloading coefficients (for concrete B400 and rock mass G4)



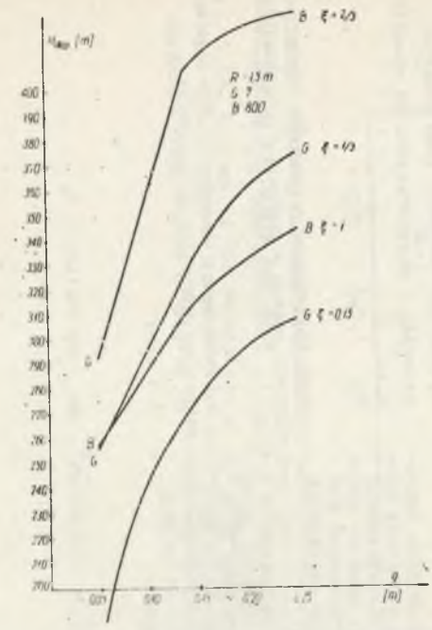
Rys. 5.22. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B500 i górotworze G5)

Fig. 5.22. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support different unloading coefficients (for concrete B500 and rock mass G5)



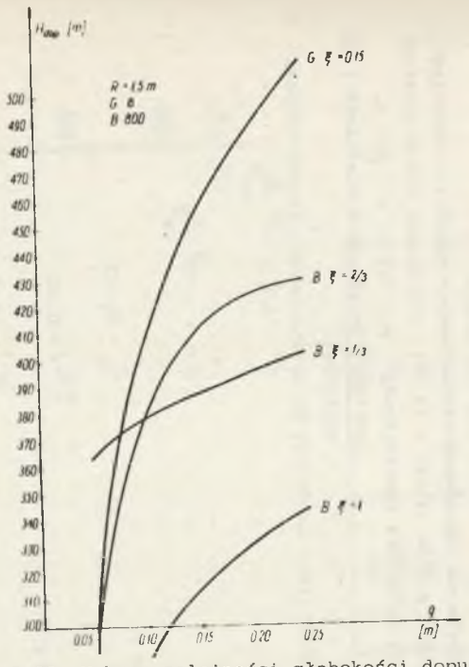
Rys. 5.23. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B800 i górotworze G6)

Fig. 5.23. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support different unloading coefficients (for concrete B800 and rock mass G6)



Rys. 5.24. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B800 i górotworze G7)

Fig. 5.24. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support for different unloading coefficients (for concrete B800 and rock mass G7)

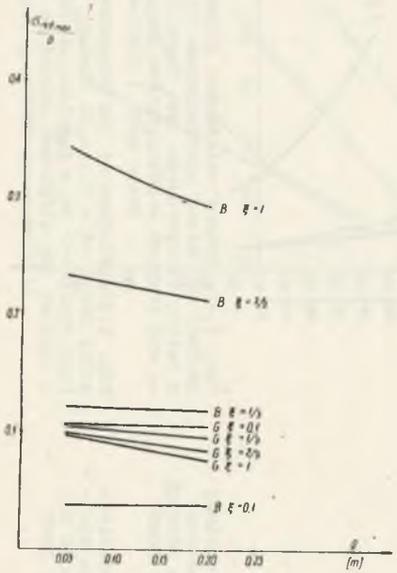


Rys. 5.25. Wykres zależności głębokości dopuszczalnej wyrobiska korytarzowego kołowego z obudową z betonu natryskowego jako funkcji grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia (przy betonie B800 i górotworze G8)

Fig. 5.25. Diagram of the dependence of a permissible depth of a circular roadway with a support from shotcrete as a function of the thickness of a support for different unloading coefficients (for concrete B800 and rock mass G8)

5.4. OBLICZANIE MAKSYMALNYCH NAPRĘŻEŃ ZREDUKOWANYCH DLA WYROBISKA ELIPTYCZNEGO

Korzystając ze wzorów na naprężenia zredukowane z rozdziału czwartego, po podstawieniu do nich wzorów (3.63) - (3.68), otrzymano, dla przyjętych wymiarów wewnętrznych wyrobiska korytarzowego a = 3,5 m, b = 2,0 m, wartości określające właściwości materiałów:



Rys. 5.26. Wykresy stosunków naprężeń zredukowanych do ciśnienia pionowego w górotworze nienaruszonym jako funkcji grubości obudowy eliptycznej z betonu natryskowego dla różnych współczynników odciążenia obudowy

Fig. 5.26. Diagrams of ratios of reduced stresses to vertical stresses in the intact rock mass as a function of the thickness of an elliptic support from shotcrete for different coefficients of unloading of a support

$$E^b = 3,8 \cdot 10^6 \ \frac{N}{cm^2}$$

$$E = 1 \cdot 10^6 \ \frac{N}{cm^2}$$

$$\nu_b = 0,167$$

$$\nu = 0,20$$

$$\mathcal{K}_b = 17,5$$

$$\mathcal{K} = 15$$

oraz przyjmując wartości współczynników odciążenia górotworu $\xi = 1; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$, wyznaczono $\frac{\sigma_{red\ max}}{p}$ jako funkcje grubości i przedstawiono na rysunku 5.26.

5.5. OBLICZANIE GŁĘBOKOŚCI KRYTYCZNYCH DLA WYROBISKA ELIPTYCZNEGO

Zgodnie ze wzorami (4.21) i (4.22) po przyjęciu danych jako w punkcie 5.4 oraz

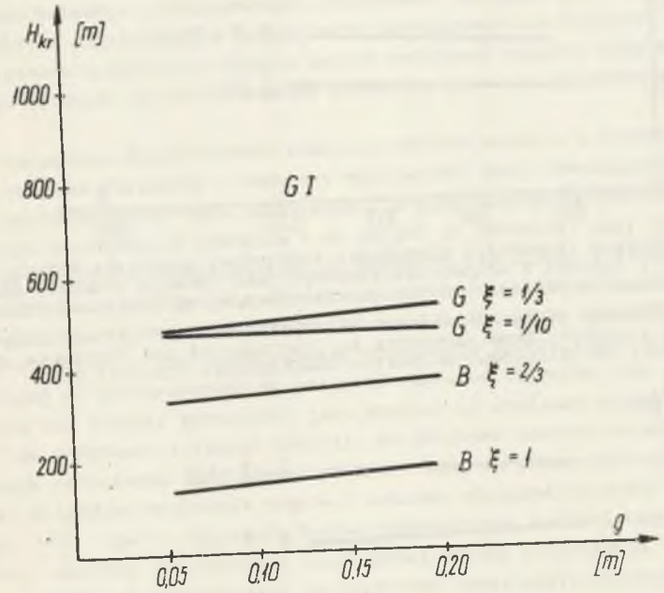
$$\gamma = 20 \ \frac{kN}{m^3}, \quad Rm_c^b = 2700 \ kN/cm^3$$

Rm_c wg tablicy 5.4.

Tablica 5.4

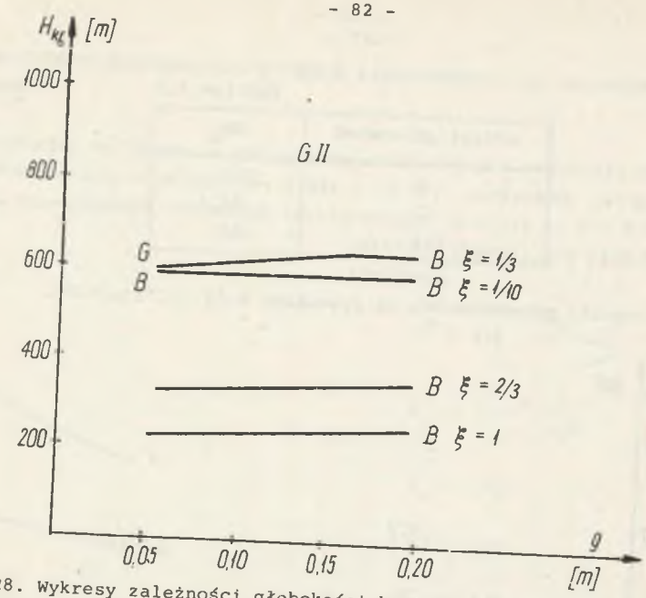
Rodzaj górotworu	Rm_c
I	150
II	187,5
III	250

Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 5.27, 5.28 i 5.29.



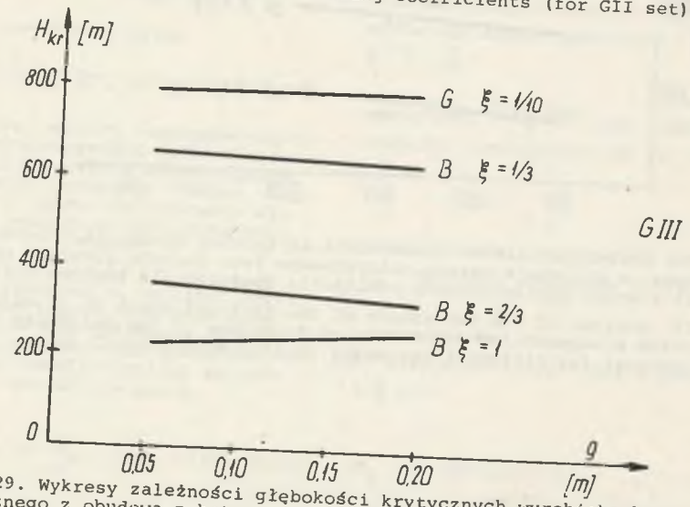
Rys. 5.27. Wykresy zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego eliptycznego z obudową z betonu natryskowego jako funkcje grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia obudowy (dla zestawu GI)

Fig. 5.27. Diagrams of the dependence of the critical depth of an elliptic roadway with a support from shotcrete as functions of the thickness of a support for different unloading coefficients (for GI set)



Rys. 5.28. Wykresy zależności głębokości krytycznej wyrobiska korytarzowego eliptycznego z obudową z betonu natryskowego jako funkcje grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia obudowy (dla zestawu GII)

Fig. 5.28. Diagrams of the dependence of a critical depth of an elliptic roadway with a support from shotcrete as functions of the thickness of a support for different unloading coefficients (for GII set)



Rys. 5.29. Wykresy zależności głębokości krytycznych wyrobiska korytarzowego eliptycznego z obudową z betonu natryskowego jako funkcje grubości obudowy dla różnych współczynników odciążenia obudowy (dla zestawu GIII)

Fig. 5.29. Diagrams of the dependence of a critical depth of an elliptic roadway with a support from shotcrete as function of the thickness of a support for different unloading coefficients (for GIII set)

6. PODSUMOWANIE

W pracy na podstawie teorii sprężystości wyprowadzono wzory na pola naprężeń w górotworze oraz w obudowie z betonu natryskowego wyrobiska korytarzowego kołowego i eliptycznego. Rozważania te poprzedzono ogólną analizą naprężeń i odkształceń w wyrobiskach korytarzowych walcowych.

Uzyskane rozwiązania różnią się od rozwiązań znanych uwzględnieniem faktu, że górotwór przed wykonaniem wyrobiska jest już górotworem odkształconym.

Rozwiązania dotychczasowe traktują również obudowę z betonu natryskowego jako powłokę obciążoną z zewnątrz górotworem, przy równoczesnym traktowaniu jej jak konstrukcji typu budowlanego, a więc mogących przemieścić się na pewnych odcinkach do wewnątrz a na innych na zewnątrz, przy czym obciążenie ich na odcinkach odkształcanych na zewnątrz nie ulega, w wyniku tego przemieszczenia, także zmianom. Tymczasem odcinki powłoki przemieszczające się na zewnątrz mają te przemieszczania ograniczane przez górotwór, a występujące w związku z tym ograniczaniem obciążenia bierne także o większych wartościach od przyjmowanych do obliczeń obciążeń czynnych. Gdy obciążenie bierne (od reakcji górotworu) jest większe od obciążeń czynnych (obliczonych na podstawie licznych teorii), do obliczeń powłoki należy przyjąć te większe obciążenia (obciążenia bierne). Powłokę można podzielić na odcinki, gdzie działają obciążenia czynne i odcinki obciążeń biernych [2], [39], [40], [41]. Wyniki obliczeń obudowy korytarzowej kołowej uzyskano w sposób ścisły, obudowy korytarzowej eliptycznej metodą przybliżoną.

W powyższych rozważaniach uwzględniono także wpływ częściowego przemieszczenia górotworu do wyrobiska korytarzowego po urobieniu zabioru a przed wykonaniem obudowy z betonu natryskowego na długości zabioru i dojrzeniu betonu. Wpływ tego odprężenia został wyrażony współczynnikiem odprężenia ξ. Dla praktyki górniczej istotna będzie znajomość wartości ξ dla konkretnych warunków górniczo-geologicznych. Znajomość wartości ξ wymagać będzie długoletnich badań zespołów badawczych.

Dla projektowania grubości obudowy z betonu natryskowego także przy różnych wartościach współczynnika odprężenia ξ przyjęto hipotezę niezmienników W.T. Burzyńskiego i odpowiadającą stanowi sprężystemu metodę projektowania na dopuszczalne naprężenie.

Hipoteza niezmienników sprawdzona została dla betonów, dla górotworu, którego anizotropowość jest innego rodzaju, została przyjęta z braku precyzyjniejszej. Określono także głębokości krytyczne, na jakich obudowy o kon-

kretnych właściwościach i grubościach przy konkretnych właściwościach górotworu mogą jeszcze pracować.

Pracę zakończono przykładami numerycznymi.

ZAŁĄCZNIK 1

BETON NATRYSKOWY JAKO TWORZYWO OBUDOWY BETONOWEJ

Dla realizacji obudowy z betonu natryskowego rozwiązano problem przygotowania mieszanki betonowej w warunkach podziemnego budownictwa górniczego [1], [5], [13], [26], [29], w tym dobór sposobu i parametrów mieszania [26], [29], podawania i dozowania składników betonu [10], [23], [27], jego transportu w postaci suchej lub mokrej [9], [25], [44] i wreszcie wykonania obudowy [6], [7], [8], [11], [18], [32], [33], [46].

Beton natryskowy w dobrym wykonaniu przewyższa swoimi właściwościami beton lany, gdyż beton natryskowy jest odpowiednio zagęszczany przy uderzaniu masy betonowej o wyrobisko, a następnie o nałożoną już warstwę betonu [14], [18], [20], [27], [28].

Technologia wykonania obudowy z betonu natryskowego została opanowana i wdrożona [16], [22], [30], [31], [35], [36].

ZAŁĄCZNIK 2

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW ZASTOSOWANA DO ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ Z TABLICY 3.1

Omawiany układ równań można zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^{21} a_j x_{rj} = y_r \qquad (r = 1,2,\ldots,111), \tag{3.99}$$

gdzie

$$\left[x_{rj} = X\right] \tag{3.100}$$

jest macierzą prostokątną 111 x 21 współczynników tabl. 3.1

$$\left[y_r = Y\right] \tag{3.101}$$

jest macierzą kolumnową 111 x 1 wolnych wyrazów tabl. 3.1.

Notując ogólnie równanie (3.99) oraz (3.100) i (3.101) mamy:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{rj} = y_r \qquad (r = 1,2,\ldots,N) \quad (N > n) \tag{3.102}$$

gdzie

$$\left[x_{rj} = X\right] \tag{3.103}$$

jest macierzą prostokątną N x n współczynników

$$\left[y_r = Y\right] \tag{3.104}$$

jest macierzą kolumną N x 1 wolnych wyrazów.

O macierzy X zakładamy, że jest rzędu n. Układ równań (3.102) w zapisie macierzowym ma postać:

$$X \,.\, A = Y, \tag{3.105}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

jest macierzą kolumną (n x 1) ocenianych niewiadomych.

Wprowadźmy macierz V wg równania

$$V = X \,.\, A - Y \tag{3.107}$$

Macierz

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

jest macierzą kolumną (N x 1) różnic.

Warunek metody najmniejszych kwadratów wymaga takiego wyznaczenia elementów macierzy A (3.105), aby suma kwadratów elementów macierzy różnic V (3.108) przyjmowała wartość minimalną.

Można to zanotować w postaci warunku:

$$\left[v \,.\, v\right] = \sum_{r=1}^{N} v_r^2 = \min \tag{3.109}$$

Wprowadzając macierz transponowaną V^T macierzy V można warunek (3.109) zanotować w postaci macierzowej

$$V^T \,.\, V = \min \tag{3.110}$$

Warunki konieczne na minimum wyrażenia $V^T \,.\, V$ są następujące:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left[v \,.\, v\right] = 2\left[\frac{\partial v}{\partial a_i} \,.\, v\right] = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3.111}$$

Łatwo wykazać, że zespół warunków (3.111) jest równoważny warunkowi:

$$X^T \,.\, V = 0, \tag{3.112}$$

gdzie X^T jest macierzą transponowaną macierzy X.

Mnożąc lewostronnie przez X^T równania (3.107) mamy kolejno po uwzględnieniu (3.112)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X^T \cdot X \cdot A - X^T \cdot Y \\ X^T \cdot X \cdot A &= X^T \cdot Y \end{aligned}\right\} \qquad (3.113)$$

Oznaczając przez

$$C = X^T \cdot X \qquad (3.114)$$

macierz kwadratową (n x n) widzimy, że macierz A poszukiwanych niewiadomych a_i można wyznaczyć z równania:

$$C \cdot A = X^T \cdot Y. \qquad (3.115)$$

Macierz C n x n jest macierzą nieosobliwą.
Mamy zatem

$$\det C = \det(X^T \cdot X) \neq 0 \qquad (3.116)$$

Wobec powyższego równanie (3.115) można jednoznacznie rozwiązać względem A, mianowicie

$$A = C^{-1} \cdot X^T \cdot Y \qquad (3.117)$$

lub dokładniej

$$A_{n1} = (C_{nn})^{-1} \cdot (X_{Nn})^T \cdot (Y_{N1}). \qquad (3.118)$$

Układ równań (3.115) nazywa się układem równań normalnych.
Macierz C_{nn} jest macierzą symetryczną, ponieważ

$$C^T = (X^T \cdot X)^T = X^T \cdot X = C. \qquad (3.119)$$

Rozpisując macierze X^T_{Nn} i X_{Nn} łatwo stwierdzić, że

$$\begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{bmatrix} = C_{nn} = C \qquad (3.120)$$

gdzie

$$x_\mu = x_{1\mu}, x_{2\mu}, \dots, x_{N\mu} \qquad (\mu = 1,2,\dots,n) \qquad (3.121)$$

to wektory utworzone z kolumn macierzy X_{Nn}.
Zatem macierz C jest macierzą GRAMa wektorów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Układ równań normalnych (3.115) można szczegółowo rozpisać następująco:

$$\left.\begin{aligned} x_1x_1a_1 + x_1x_2a_2 + \dots + x_1x_na_n &= x_1y \\ x_2x_1a_1 + x_2x_2a_2 + \dots + x_2x_na_n &= x_2y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_nx_1a_1 + x_nx_2a_2 + \dots + x_nx_na_n &= x_ny \end{aligned}\right\} \qquad (3.122)$$

Wprowadzono tu wektor $x = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ utworzony z kolumny wolnych wyrazów.
Stosując się do przypadku szczegółowego N = 111, n = 21 jak w tablicy 3.1 otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} x_1x_1a_1 + x_1x_2a_2 + \dots + x_1x_{21}a_{21} &= x_1y \\ x_2x_1a_1 + x_2x_2a_2 + \dots + x_2x_{21}a_{21} &= x_2y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{21}x_1a_1 + x_{21}x_2a_2 + \dots + x_{21}x_{21}a_{21} &= x_{21}y \end{aligned}\right\} \qquad (3.123)$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_{21}$ są kolejnymi kolumnami współczynników tablicy 3.1.
W tablicy 3.1 w układzie (3.123) nieznane współczynniki a_o, a_2', b_2', α_o, α_2, α_2', β_2, β_2', a_4', b_4', β_o, α_4, α_4', β_4, β_4', a_6', b_6', α_6, α_6', β_6, β_6', oznaczono w celu uporządkowania oznaczeń przez $a_1, a_2, \dots, a_{21}$.
W celu oszacowania właściwych wartości współczynników a_i zastosowano przedziały ufności [24]. Po przyjęciu prawdopodobieństwa p_o można wykorzystać tablicę rozkładu t Studenta przy ilości stopni swobody k = N - n. Przedziały ufności dla współczynników a_i są następujące:

$$\left[a_i - \gamma\sqrt{\left\{C^{-1}\right\}_{ii} \frac{[V \cdot V]}{N-n}},\quad a_i + \gamma\sqrt{\left\{C^{-1}\right\}_{ii} \frac{[V \cdot V]}{N-n}}\right], \qquad (3.124)$$

gdzie C^{-1}_{ii} są elementami diagonalnymi macierzy odwrotnej (3.120).
Przedział (3.124) zawiera oceniany współczynnik a_i z prawdopodobieństwem p_o.

LITERATURA

[1] Babotsev G.N., Nikolova A.B.: Chemische Zugabe zur Beschleunigung des Erstarrens und Erhartens von Spitzbeton, Zement-Kalk-Gips. 1968 nr 6.

[2] Bąk J.: Określenie podporności stalowej obudowy kołowej z łuków sztywnych obciążonej siłami skupionymi jako funkcji jej odkształcalności. ZN Pol. Sl. s. Górnictwo z. 85, Gliwice 1977.

[3] Borecki M., Chudek M.: Mechanika górotworu. Wyd. Śląsk, Katowice 1972.

[4] Burzyński W.T.: Studium nad hipotezami wytężenia. ANT, Lwów 1928, także w Dziełach wybranych t. I, PWN, Warszawa 1982.

[5] Chudek M.: Obudowa wyrobisk górniczych. Cz. 1 - Obudowa wyrobisk korytarzowych i komorowych. Wyd. Śląsk, Katowice 1975.

[6] Chudek M., Kosta E.: Badania modelowe nad ustaleniem warunków współpracy z górotworem betonu natryskowego, układanego metodą suchą, stosowanym w budownictwie podziemnym. ZN Pol. Śl., s. Górnictwo, z. 106, Gliwice 1980.

[7] Chudek M., Kosta E.: Badania laboratoryjne i dołowe nad ustaleniem warunków współpracy betonu natryskowego ze skałami karbońskimi. Budownictwo Górniczo-Przemysłowe i Kopalni Rud, nr 5, 1979.

[8] Chudek M., Kosta E.: Wpływ betonu natryskowego układanego metodą mokrą na stateczność obrysu wyłomu wyrobiska korytarzowego w świetle badań modelowych. ZN Pol. Śl., s. Górnictwo, z. 104, Gliwice 1980.

[9] Djuszenko M.G., Rojgorodski A.J.: Untersuchung der Vorgänge beim Druckluftauftragen und bei der Ausbildung der Makrostruktur von Spritzbeton. Bauindustrie 1967 nr 1.

[10] Drögsler O.: Zur Technologie des Spritzbetons. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte 1961 nr 5/6.

[11] Fettweis G.: Spritzbeton im Grubenbetriebe. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte 1961 nr 5/6.

[12] Fung Y.G.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.

[13] Grün W.: Untersuchung von Spritzbeton. Baustoff-Forschung Buchenhof 1968.

[14] Heiwolt G.: Spritzbeton-Erprobungen in der Untertage Versuchsanlage "Reiteralpe" der Bundeswehr. Erzmetall, 1971 nr 2.

[15] Huber M.T.: Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej. IW SIMP, Warszawa 1948.

[16] Iliev M., Abadżijev B.: Drążenie i obudowa wyrobisk kopalnianych w trudnych warunkach górniczo-geologicznych. Udoskonalenie obudów górniczych z betonu natryskowego. SITG, Katowice 20-24 VI 1977.

[17] Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1978.

[18] Kosta E.: Zastosowanie betonu natryskowego jako tworzywa konstrukcyjnego w budownictwie podziemnym kopalń. Praca doktorska. Biblioteka Główna Politechniki Śląskiej, Gliwice 1977.

[19] Kilz J.: Untersuchungen zur Belastung und Beanspruchung kreiszylindrischer Hohlraumauskleidungen. Pr. dr. Biblioteka Bergakademie Freiberg. Freiberg 1985.

[20] Kisling K.: Die neusten Erfahrungen mit Spritzbeton im Kupferbergbau Mitterberg. Erzmetall 1971 nr 11.

[21] Leja F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa 1965.

[22] Lindner K.: Spritzbeton in Felshohlraumbau. Bautechnik Nr 10, 1965.

[23] Lindner K.: Technologie des Spritzbetons. Beton- und Stahlbetonbau 1963 nr 2 i 3.

[24] Linnik J.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji. PWN, Warszawa 1962.

[25] Lubański S.: Badania parametrów poziomego transportu pneumatycznego mokrej masy betonowej dla budownictwa podziemnego. Praca doktorska. Biblioteka Główna Politechniki Śląskiej, Gliwice 1978.

[26] Lubański S., Szuścik W.: Charakterystyka pneumatycznych podajników zbiornikowych stosowanych w budownictwie podziemnym. ZN Politechniki Śląskiej, s. Mechanika. z. 77, Gliwice 1984.

[27] Mateja J.: Wpływ czynników mechanicznych związanych z przygotowaniem, transportem i nanoszeniem masy betonowej na parametry wytrzymałościowe betonu natryskowego wykonanego w warunkach kopalnianych. Praca doktorska. Biblioteka Główna Politechniki Śląskiej, Gliwice 1974.

[28] Mateja J., Lubański S.: Technologia betonu natryskowego i urządzenia do jego wykonania w świetle przeprowadzonych badań. Materiały konferencyjne SITG, Mysłowice, listopad 1976.

[29] Mateja J., Rułka K.: Przegląd urządzeń do wykonywania betonu natryskowego. Budownictwo Górnicze 1972, nr 3.

[30] Mazur J.: Badania możliwości stosowania kotwienia i betonu natryskowego w wyrobiskach górniczych w fliszu karpackim. Budownictwo Górnicze 1971, 2.

[31] Mazur J.: Badania nad doborem właściwej obudowy wstępnej dla podziemnego budownictwa hydrotechnicznego w warunkach fliszu karpackiego. Praca doktorska. Biblioteka AGH, Kraków 1979.

[32] Mostkov V.H., Voller I.L.: Primenenie nabryzg-betona pri provedenii gornych vyrabotkach. Wyd. Nedra, Moskwa 1968.

[33] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.

[34] Radzik B.: Metoda określenia stałych materiałowych materiałów transwersalnie izotropowych w oparciu o tensometryczne badania próbek prostopadłościennych ściskanych jednokierunkowo. ZN Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo, z. 83, Gliwice 1977.

[35] Rułka K., Mazur J.: Badania nad obudową dla podziemnych wyrobisk hydrotechnicznych drążonych w warunkach fliszu karpackiego. Projekty - Problemy 1973, nr 4.

[36] Rotter E.: Spritzbeton und seine praktischen Anwendungen im Untertagebergbau. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte 1961 nr 5/6.

[37] Sawin G.N.: Spannungserhohung am Rande von Lochern. VEB Verlag Technik Berlin 1956.

[38] Sałustowicz A.: Zarys mechaniki górotworu. Wyd. Śląsk, Katowice 1965.

[39] Szuścik W.: Badania wyidealizowanego modelu łuku kołowego obudowy korytarzowej w stanie granicznym. ZN Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo, z. 48, Gliwice 1972.

[40] Szuścik W., Bąk J.: Określenie podporności metalowej obudowy kołowej z łuków sztywnych obciążonej siłami skupionymi. ZN Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo, z. 71, Gliwice 1976.

[41] Szuścik W., Koślacz K.: Projektowanie metodą na dopuszczalny udźwig obudowy kołowej korytarzowej sztywnej w nieodkształcalnym górotworze obciążonej siłą skupioną. ZN Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo, z. 85, Gliwice 1978.

[42] Szuścik W., Kuczyński J.: Wytrzymałość materiałów. Cz. 1, Politechnika Śląska, Gliwice 1979.

[43] Szuścik W., Kuczyński J.: Wytrzymałość materiałów. Cz. 2, Politechnika Śląska, Gliwice 1980.

[44] Szuścik W., Lubański S.: Pneumatischer horizontaler Transport der nassen Betonmischung fur Untertagebau. Proceedings of the second conference on pneumatic conveying. Pecs 15-18 march 1978 Węgry.

[45] Timoschenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa 1962.

[46] Vogt W.: Die Anwendung des Nassspritzverfahren im Streckenausbau der Grube Meggen der Schachtleben AG. Erzmetall 1971, nr 12.

[47] Badania wytrzymałościowe elementów konstrukcyjnych obudów powłokowych wraz z opracowaniem wyników badań. Temat 209.05 zadanie 09, Gliwice 1976-80 (nie publikowane) opracowane pod kierunkiem W. Szuścika.

WSPÓŁPRACA OBUDOWY Z BETONU NATRYSKOWEGO W WYROBISKACH KORYTARZOWYCH POZIOMYCH KOŁOWYCH I ELIPTYCZNYCH Z OTACZAJĄCYM GÓROTWOREM O CHARAKTERYSTYCE SPRĘŻYSTEJ

S t r e s z c z e n i e

W pracy zaproponowano metodę projektowania wytrzymałościowego obudów z betonu natryskowego na podstawie teorii sprężystości. Podano założenia ogólne oraz przyjęto określone zagadnienie brzegowe. Uzasadniono przyjęcie zastosowanego modelu oraz zaproponowano określony opis przejmowania obciążenia przez powłokę betonową.

Postawione zagadnienie brzegowe dla określenia pól naprężeń w górotworze i obudowie z betonu natryskowego wyrobiska korytarzowego poziomego, kołowego. Rozwiązano zagadnienie rozkładu naprężeń w betonie i górotworze podając wzory na współrzędne tensorów naprężeń. Zagadnienie rozwiązano w układzie współrzędnych biegunowych, stosując funkcję naprężeń AIRY'ego. Podano również rozwiązania szczególne.

Postawiono zagadnienie stanu naprężenia w górotworze i obudowie z betonu natryskowego wyrobiska korytarzowego poziomego, eliptycznego. Podano zagadnienie brzegowe płaskiego stanu odkształcenia występującego w górotworze i powłoce z betonu natryskowego, przyjmując izotropię górotworu i betonu. Posłużono się metodą funkcji naprężeń AIRY'ego. Zastosowano walcowy układ współrzędnych oraz ogólne rozwiązanie MICHELLa równania biharmonicznego. Podano rozwiązanie przybliżone sformułowanego zagadnienia brzegowego. Zastosowano metodę najmniejszych kwadratów do rozwiązania nadokreślonego układu równań. Podano również sposób oszacowania przybliżenia.

Zajęto się projektowaniem metodą projektowania na dopuszczalne naprężenie, wykorzystując hipotezę wytężeniową niezmienników W.T. Burzyńskiego.

W pracy uwzględniono częściowe przemieszczenie się górotworu do wyrobiska przed wykonaniem obudowy z betonu natryskowego.

Obudowę z betonu natryskowego, przy powyższych założeniach, potraktowano jako konstrukcję odkształcalną zarówno do jak i na zewnątrz wyrobiska; przy czym odkształcenie na zewnątrz powłoki, ograniczone reakcją górotworu, staje się powodem występowania obciążenia biernego ze strony górotworu, różnego od obciążenia czynnego, jeżeli większego od czynnego, to fizycznie realnego.

W przykładach podano rozkłady naprężeń w powłoce z betonu natryskowego i w górotworze, wyznaczono grubości powłoki, głębokości krytyczne i dopuszczalne dla wyrobiska poziomego o kształcie kołowym i eliptycznym.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРЕПИ ИЗ НАБРЫЗГБЕТОНА В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ШТРЕКАХ С ОКРУЖАЮЩИМ УПРУГИМ ГОРНЫМ МАССИВОМ

Р е з ю м е

В работе представлен метод проектирования крепей из торкретбетона на основании теории упругости. Представлены общие положения и приняты определённые краевые условия. Обоснован выбор применяемой модели и представлено описание перенятие нагрузок бетонной оболочкой.

Представлены краевые задания для определения полей упругости в горном массиве и крепи из торкрет-бетона в круговой горизонтальной узкой выработке. Решено задание распределения напряжений в бетоне и горном массиве, представлены формулы для координат тензоров напряжений. Задание решено в системе полярных координат, с применением функции напряжений Аирего. Дано также подробное решение.

Представлен вопрос состояния напряжений в горном массиве и крепи из торкрет-бетона в горизонтальной эллиптической узкой выработке. Поданы краевые условия плоского состояния напряжений, проявляющихся в горном массиве и оболочке из торкрет-бетона, принимая изотропию бетона и горного массива. Для этого применён был метод функций напряжений Аирего. Применена цилиндрическая система координат и общее решение Мишеля бигармонического уравнения, а также приблизительное решение сформулированных краевых условий. Применён метод наимнейших квадратов для решения системы указанных уравнений. Так же дан способ оценки приближений.

Представлен метод проектирования на допустимые напряжения, используя гипотезы инвариантов напряжённого состояния Бужинского.

В работе принято во внимание частичное перемещение горного массива в сторону выработки перед выполнением крепи из торкрет-бетона.

Крепь из торкрет-бетона рассматривается как конструкция деформирующаяся как внутри так и снаружи выработки, причём, деформации вне оболочки, ограниченные реакцией горного массива, являются поводом проявления реактивных нагрузок со стороны горного массива, отличающихся от активных нагрузок. И если они больше, чем активные нагрузки, то это физически реально.

В примерах даны распределения напряжений в оболочке из торкрет-бетона и в горном массиве, определена толщина оболочки, критическая глубина и допустимая глубина для горизонтальной выработки как круговой так и эллиптической.

CO-OPERATION OF A SHOTCRETE IN CIRCULAR AND ELIPTIC ROADWAYS WITH SURROUNDING ROCK MASS OF ELASTIC CHARACTERISTICS

S u m m a r y

The dissertation proposes a method for strength designing of supports from shotcrete. The method is based on the theory of elasticity. General assumptions are given and specified boundary problems are assumed. The acceptance of the used model is justified and specified description of taking over loads by concrete coat.

The boundary problem for determining fields of stresses in the rock mass and in the support from shotcrete in a horizontal circular roadway are formulated. The problem of the distribution of stresses in the concrete and in the rock mass is solved and formulas for coordinates of stress tensors are given. The problem is solved with the help of the polar coordinates system, and AIRE's function of stress is used. Particular equations are given.

The problem of the state of stresses in the rock mass and in the support from shotcrete in a horizontal, elliptic, roadway is formulated. The boundary problem of the flat state of deformation occurring in the rock mass and in the coat of shotcrete is given and isotropy of the rock mass and concrete is assumed. The method of AIRY's stress functions is used. Cylindrical system of coordinates and general MICHALL's solution of biharmonic equation are used. An approximated solution of the formulated boundary problem is given. The least square method is used for solving overdetermine system of coordinates. A way of assessing the approximation is presented.

A method of designing permissible stresses is dealt with. The method makes use of W.T. Burzyński's effort hypothesis of invariants.

The dissertation takes into account partial displacement of the rock mass towards the roadway before the support from shotcrete is made.

With the above assumptions the support from shotcrete is treated as a deformable construction which undergoes deformations both towards and outside the roadway; at the same time the deformation outside the coat limited by the reaction of the rock mass becomes the cause of the reactive load from the direction of the rock mass; (the reactive load being different from the active load) and if it is larger than the active load it becomes physically real.

In the examples, the distribution of stresses in the coat of shotcrete and in the rock mass are given, the thickness of the coat is determined, critical and permissible depths for a circular and elliptic horizontal readway are determined.

Cena zł 120,—

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 001, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 280
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.