

P.3359/85

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**



40-LECIE
Politechniki Śląskiej

JANUSZ SZOPA

**METODY BADANIA I WRAŻLIWOŚĆ
DYNAMICZNYCH UKŁADÓW STOCHASTYCZNYCH**

MATEMATYKA-FIZYKA

**Z. 45
GLIWICE
1985**



P. 3359/85

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 817

JANUSZ SZOPA

METODY BADANIA I WRAŻLIWOŚĆ DYNAMICZNYCH UKŁADÓW STOCHASTYCZNYCH

OPINIODAWCY:

Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski

Prof. dr hab. Andrzej Tylikowski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), Sławomir Kończak (redaktor działu),

Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Kazimiera Rymarz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-470X

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 6,33 Ark. druk. 6,375 Papier offset. kl. III. 70x100, 70 g
Oddano do druku 5.09.84 Podpis. do druku 7.01.85 Druk ukończ. w marcu 1985
Zam. 1085/84 U-23 Cena zł 95,-

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
I. WPROWADZENIE	5
II. METODA WIELOWYMIAROWEJ IMPULSOWEJ FUNKCJI PRZEJŚCIA (FUNKCJI GREENA)	7
II.1. Wyznaczanie momentów rozwiązania	7
II.2. Zastosowanie metody do badania stochastycznych drgań modeli pojazdów (zawieszek)	9
III. METODA STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH	18
III.1. Teoretyczne podstawy metody (istnienie i jednoznaczność rozwiązania)	18
III.2. Związek pomiędzy układami liniowymi stochastycznymi równań różniczkowych, a układami stochastycznymi równań całkowych	23
III.3. Zastosowanie metody do badania liniowych układów dynamicznych	25
III.4. Zastosowania metody do badania liniowych i nieliniowych układów dynamicznych o parametrach będących procesami stochastycznymi	38
III.5. Numeryczne porównanie metody impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greena) i metody równań całkowych	45
IV. OSZACOWANIE ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW RÓWNAŃ STOCHASTYCZNYCH	47
IV.1. Oszacowanie rozwiązań i ich momentów w nieliniowych układach stochastycznych	47
IV.2. Oszacowanie różnicy odchyłek standardowych rozwiązań w układach liniowych	47
V. WRAŻLIWOŚĆ STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH	56
V.1. Metoda analizy wrażliwości nieliniowych układów stochastycznych za pomocą metod symulacyjnych	56
V.2. Aproksymacja dowolnego rozwiązania lub jego momentów za pomocą szeregu zawierającego funkcje wrażliwości różnych rzędów	60
V.3. Wrażliwość stochastyczna nieliniowego oscylatora	61
V.4. Wrażliwość stochastyczna drgań modelu przekładni zębatej	66
V.5. Wrażliwość stochastyczna drgań modelu pojazdu (zawieszki)	77
VI. PODSUMOWANIE	92
LITERATURA	94

I. WPROWADZENIE

Wstęp I

1. Układy dynamiczne II

2. Układy liniowe III

3. Układy nieliniowe IV

4. Układy stochastyczne V

5. Układy z opóźnieniami VI

6. Układy z impulsami VII

7. Układy z wieloma stopniami swobody VIII

8. Układy z wieloma wymiarami IX

9. Układy z wieloma zmiennymi X

10. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XI

11. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XII

12. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XIII

13. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XIV

14. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XV

15. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XVI

16. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XVII

17. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XVIII

18. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XIX

19. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XX

20. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXI

21. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXII

22. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXIII

23. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXIV

24. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXV

25. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXVI

26. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXVII

27. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXVIII

28. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXIX

29. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXX

30. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXI

31. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXII

32. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXIII

33. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXIV

34. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXV

35. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXVI

36. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXVII

37. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXVIII

38. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XXXIX

39. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XL

40. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLI

41. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLII

42. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLIII

43. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLIV

44. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLV

45. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLVI

46. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLVII

47. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLVIII

48. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi XLIX

49. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi L

50. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LI

51. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LII

52. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LIII

53. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LIV

54. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LV

55. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LVI

56. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LVII

57. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LVIII

58. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LIX

59. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LX

60. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXI

61. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXII

62. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXIII

63. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXIV

64. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXV

65. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXVI

66. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXVII

67. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXVIII

68. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXIX

69. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXX

70. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXI

71. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXII

72. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXIII

73. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXIV

74. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXV

75. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXVI

76. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXVII

77. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXVIII

78. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXIX

79. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXX

80. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXI

81. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXII

82. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXIII

83. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXIV

84. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXV

85. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXVI

86. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXVII

87. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXVIII

88. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXIX

89. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXX

90. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXI

91. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXII

92. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXIII

93. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXIV

94. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXV

95. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXVI

96. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXVII

97. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXVIII

98. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXIX

99. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXX

100. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXI

101. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXII

102. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXIII

103. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXIV

104. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXV

105. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXVI

106. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXVII

107. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXVIII

108. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXIX

109. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXX

110. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXI

111. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXII

112. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXIII

113. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXIV

114. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXV

115. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXVI

116. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXVII

117. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXVIII

118. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXIX

119. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

120. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

121. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

122. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

123. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

124. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

125. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

126. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

127. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

128. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

129. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

130. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

131. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

132. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

133. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

134. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

135. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

136. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

137. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

138. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

139. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

140. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

141. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

142. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

143. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

144. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

145. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

146. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

147. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

148. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

149. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

150. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

151. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

152. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

153. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

154. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

155. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

156. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

157. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

158. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

159. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

160. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

161. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

162. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

163. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

164. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

165. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

166. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

167. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

168. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

169. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

170. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

171. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

172. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

173. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

174. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

175. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

176. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

177. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

178. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

179. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

180. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

181. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

182. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

183. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

184. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

185. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

186. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

187. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

188. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

189. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

190. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

191. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXII

192. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIII

193. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIV

194. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXV

195. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVI

196. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVII

197. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXVIII

198. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXIX

199. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXX

200. Układy z wieloma zmiennymi i wieloma zmiennymi LXXXXXXXI

I. WPROWADZENIE

W naukach technicznych spotykamy problemy, których analiza prowadzi do rozważania stochastycznych układów równań różniczkowych liniowych bądź nieliniowych. Losowe mogą być zarówno warunki początkowe, wymuszenia lub też parametry rozważanego układu dynamicznego.

Jeśli układ równań jest liniowy o stałych współczynnikach, wtedy rozwiązanie można podać w postaci wzoru analitycznego. Trudności już się pojawiają, gdy niektóre ze współczynników są zmienne w czasie. Tak więc ze względu na brak postaci analitycznej rozwiązania często bada się charakterystyki probabilistyczne rozwiązania ("wyjścia"), gdy znane są własności losowości pojawiających się w układzie dynamicznym.

Najbardziej popularną metodą służącą do tego celu jest metoda wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greena) [1, 2, 4, 11, 12, 23, 24, 38-40, 42, 50, 52, 55, 58, 59]. Stosowana jest ona przede wszystkim do układów o stałych współczynnikach, wtedy bowiem funkcja Greena jest znana explicite. Tak samo w wielu pracach przy powyższym założeniu stosuje się metodę analizy kowariancyjnej [18, 28-30, 47].

Przy badaniu charakterystyk probabilistycznych rozwiązania można także stosować metodę równań całkowych [3, 36, 37, 63, 65, 67-69, 71-79, 81, 82, 86].

Metody stosowane w układach liniowych można rozszerzyć do badania układów z małymi nieliniowościami, stosując tak zwaną metodę małego parametru [6, 33, 35, 45, 49, 51, 52, 55].

Pojawia się jednak pytanie o dokładność otrzymanych na tej drodze rozwiązań - jak teorie oszacowań ma się do rezultatów otrzymanych w czasie obliczeń?

Jeśli badać charakterystyki probabilistyczne rozwiązań, to pojawia się problem wpływu na nie zmian parametrów układu dynamicznego. Zagadnienie to prowadzi do stochastycznej teorii wrażliwości.

Praca składa się z sześciu rozdziałów (I - wprowadzenie, VI - podsumowanie) i zajmuje się ww. zagadnieniami.

W rozdziale II przedstawiono najogólniejszy sposób wyznaczania momentów rozwiązania dla układów o wielu stopniach swobody, o zmiennych w czasie współczynnikach, losowych wymuszeniach i losowych warunkach początkowych. Wielowymiarowa impulsowa funkcja przejścia musi być wtedy wyznaczona numerycznie.

W rozdziale III opracowano metodę badania wielowymiarowych liniowych układów stochastycznych za pomocą wielowymiarowego równania całkowego Vol-

terry II rodzaju. Zbadano istnienie i jednoznaczność rozwiązania ww. równania całkowego, a następnie po transformacji układu równań różniczkowych do postaci całkowej podano wzory określające charakterystyki rozwiązań układu równań różniczkowych. Proponowana metoda została rozszerzona za pomocą metody małego parametru do badania nieliniowych układów dynamicznych o parametrach będących procesami stochastycznymi. W dowodzie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania całkowego nie stosowano twierdzenia Banacha (jak to się czyni w literaturze), lecz pewne oszacowania, w których występują zbieżne szeregi. Szeregi te zastosowano następnie do oszacowań dokładności otrzymanej wariancji rozwiązania przy założeniu, że rezolwenta jest zadana z pewną dokładnością. Zostały także porównane ze sobą metoda impulsowej funkcji przejścia i metoda równań całkowych. Okazuje się, że ta druga zużywa parokrotnie mniejszy czas obliczeniowy na komputerze.

Metody przedstawione w rozdz. II i III były wykorzystywane do badania modeli pojazdów o kilku stopniach swobody, poruszających się ze zmienną prędkością po drodze o losowym profilu, drgań przekładni zębatych o losowych parametrach dynamicznych, układów stochastycznych liniowych i nieliniowych o zmiennych masach, losowych warunkach początkowych, wahadeł podwójnych o zmiennej długości, masie i stochastycznym wymuszeniu, układów elektrycznych RLC.

W rozdziale IV badano oszacowania rozwiązań układów równań stochastycznych. W tym celu podano twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nieliniowych stochastycznych układów równań różniczkowych. Następnie wyprowadzono oszacowanie teoretyczne na różnicę odchyłań standardowych rozwiązań układów dynamicznych. Tę samą różnicę badano za pomocą obliczeń numerycznych. Oszacowania teoretyczne okazały się znacznie większe ("za grube") aniżeli wynika to z obliczeń symulacyjnych.

W rozdziale V podano metodę badania wpływu zmian parametrów wielowymiarowego stochastycznego nieliniowego układu dynamicznego na jego charakterystyki probabilistyczne rozwiązań. W tym celu rozważano tak zwane stochastyczne funkcje wrażliwości I i II rzędu i za ich pomocą aproksymowano rozwiązanie i jego momenty przy dowolnej wartości parametru, gdy znane jest rozwiązanie przy ustalonej jego wartości. Metodę zastosowano do badania drgań losowego nieliniowego oscylatora, drgań modelu przekładni zębatej o dwóch stopniach swobody i losowych błędach wykonania oraz drgań modelu pojazdu (zawieszenia) o dwóch stopniach swobody, poruszającego się ze zmienną prędkością po losowej drodze z uwzględnieniem zmiennego tłumienia w oponie.

Przeprowadzone obliczenia wykazały przydatność proponowanej metody nawet przy dużych zmianach wartości parametrów układów dochodzących do kilkudziesięciu procent.

II. METODA WIELOWYMIAROWEJ IMPULSOWEJ FUNKCJI PRZEJŚCIA (FUNKCJI GREENA)

Metoda ta jest najbardziej popularną metodą służącą do analitycznego wyznaczania charakterystyk probabilistycznych rozwiązania stochastycznych liniowych układów dynamicznych [1, 2, 11, 12, 23, 38-40, 42, 50, 52, 55, 58, 59]. Stosowana jest ona przede wszystkim do układów o stałych współczynnikach, bowiem wtedy impulsowa funkcja przejścia (funkcja Greena jest znana explicite. Przeważnie także warunki początkowe zakłada się jako zdefiniowane. W p. II.1 przedstawiono ogólny sposób wyznaczania momentów rozwiązania dla układów o wielu stopniach swobody, o zmiennych w czasie współczynnikach, losowych wymuszeniach i losowych warunkach początkowych.

Impulsowa funkcja przejścia musi być wtedy wyznaczana numerycznie [38-40, 42].

Otrzymane zależności teoretyczne zastosowano w p. II.2 do badania drgań modeli pojazdów (zawieszek) [39, 40, 42] poruszających się ze zmienną prędkością po drodze o losowym profilu oraz w [38] do badania drgań podwójnego wahadła o zmiennej masie i długości oraz wymuszeniu stochastycznym.

II.1. Wyznaczanie momentów rozwiązania

Rozważać będziemy układ stochastycznych liniowych równań różniczkowych opisujących układy dynamiczne o n stopniach swobody ze zmiennymi współczynnikami i losowym wymuszeniem postaci [42]:

$$\underline{B}_2(t) \cdot \ddot{\underline{Z}}(t, \omega) + \underline{B}_1(t) \cdot \dot{\underline{Z}}(t, \omega) + \underline{B}_0(t) \cdot \underline{Z}(t, \omega) = \underline{P}(t, \omega), \quad (2.1)$$

gdzie:

- (i) $t \in [0, \infty)$, $\omega \in \Omega$, $\langle \Omega, \beta, \mu \rangle$ - przestrzeń probabilistyczna,
- (ii) $\underline{B}_2(t) = [b_{2ij}(t)]$, $\underline{B}_1(t) = [b_{1ij}(t)]$, $\underline{B}_0(t) = [b_{0ij}(t)]$ - $n \times n$ wymiarowe macierze (bezwładności, tłumień, sprężystości) ($i, j = 1, 2, \dots, n$), których elementy są nielosowymi, ciągłymi, rzeczywistymi funkcjami argumentu t ,
- (iii) $\underline{Z}(t, \omega) = \text{col} [z_i(t, \omega)]$ - n wymiarowy wektor kolumnowy ($i = 1, 2, \dots, n$), którego współrzędne są rzeczywistymi procesami stochastycznymi,

(iv) $\underline{p}(t, \omega) = \text{col} [\underline{P}_1(t, \omega)]$ - n wymiarowy wektor kolumnowy ($i = 1, 2, \dots, n$), którego współrzędne są rzeczywistymi, ciągłymi procesami stochastycznymi.

Założono znajomość warunków początkowych dla układu (2.1) dla $t=0$ - mogą to być zmienne losowe. Kropka w równaniu (2.1) oznacza pochodną względem t ; ciągłość, pochodne oraz znak równości (a w późniejszych rozważaniach całki) są rozumiane w sensie średniokwadratowym [52, 55].

Procesy stochastyczne $y(t, \omega)$ są rozważane w przestrzeni Banacha \tilde{C}^2 wszystkich mierzalnych funkcji ze skończoną normą postaci:

$$\|y(t, \omega)\|_{\tilde{C}^2} = \sup_{t \in [0, \infty)} \left\{ \int_0^t |y(t, \omega)|^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Ogólne rozwiązanie układu (2.1) może być przedstawione w postaci:

$$\underline{z}(t, \omega) = \underline{z}(t) \cdot \underline{C}(\omega) + \int_0^t \underline{G}(t, u) \cdot \underline{p}(u, \omega) du, \quad (2.3)$$

gdzie:

(v) $\underline{z}(t) = [z_{ik}(t)]$ - $n \times 2n$ wymiarowa macierz normalnego fundamentalnego układu rozwiązań układu (2.1), $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, 2n$,

(vi) $\underline{C}(\omega) = \text{col} [z_1(0, \omega), \dots, z_n(0, \omega), \dot{z}_1(0, \omega), \dots, \dot{z}_n(0, \omega)]$ - $2n$ wymiarowy wektor kolumnowy warunków początkowych układu (2.1),

(vii) $\underline{G}(t, u) = [G_{ij}(t, u)]$ - $n \times n$ wymiarowa macierz funkcji Greena (impulsowych funkcji przejścia), która charakteryzuje odpowiedź na i -tym wyjściu w czasie t pod wpływem działania dystrybucji δ -Diraca na j -tym wejściu w czasie u , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Macierz $\underline{G}(t, u)$ spełnia następujące równanie (dla $0 \leq u \leq t$) [1]:

$$\underline{B}_2(t) \cdot \frac{\partial^2 \underline{G}(t, u)}{\partial t^2} + \underline{B}_1(t) \cdot \frac{\partial \underline{G}(t, u)}{\partial t} + \underline{B}_0(t) \cdot \underline{G}(t, u) = \underline{I} \cdot \delta(t-u), \quad (2.4)$$

gdzie \underline{I} jest macierzą jednostkową.

W celu wyprowadzenia wzorów macierzy momentów rozwiązania $\underline{z}(t, \omega)$ równania różniczkowego (2.1) (np. wartości średnich, funkcji korelacyjnej, wariancji itp.) wykorzystano tw. Fubinięgo [55] (o zamianie kolejności całkowania) i utworzono wektor wartości średnich na podstawie wzoru (2.3):

$$E \underline{z}(t, \omega) = \underline{z}(t) \cdot E \underline{C}(\omega) + \int_0^t \underline{G}(t, u) \cdot E \underline{p}(u, \omega) du, \quad (2.5)$$

a stąd macierz korelacyjna rozwiązania $\underline{z}(t, \omega)$

$$\begin{aligned} K_{\underline{z}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\underline{z}(t_1, \omega) - E \underline{z}(t_1, \omega) \right] \cdot \left[\underline{z}(t_2, \omega) - E \underline{z}(t_2, \omega) \right]^* \right\} = \\ &= \underline{z}(t_1) \cdot K_C \cdot \underline{z}^*(t_2) + \int_0^{t_1} \underline{G}(t_1, u_1) \cdot K_{PC}(u_1) \cdot \underline{z}^*(t_2) du_1 + \\ &+ \int_0^{t_2} \underline{z}(t_1) \cdot K_{CP}(u_2) \cdot \underline{G}^*(t_2, u_2) du_2 + \\ &+ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \underline{G}(t_1, u_1) \cdot K_P(u_1, u_2) \cdot \underline{G}^*(t_2, u_2) du_2 du_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie:

* - symbol transpozycji macierzy,

(viii) K_C - $2n \times 2n$ wymiarowa macierz korelacyjna warunków początkowych,

(ix) $K_{PC}(u_1)$, $K_{CP}(u_2)$ - $n \times 2n$ i $2n \times n$ wymiarowe macierze korelacyjne wzajemnych wyuszeń i warunków początkowych (funkcje jednego argumentu),

(x) $K_P(u_1, u_2)$ - $n \times n$ wymiarowa macierz korelacyjna wymuszeń.

Uwaga 1

W przypadku gdy warunki początkowe i wyuszenia są nieskorelowane wtedy drugi i trzeci składnik sumy we wzorze (2.6) są równe zero. Wariancja może być otrzymana dla $t_1 = t_2 = t$, $K_{\underline{z}}(t, t) = \sigma_{\underline{z}_k}^2(t)$.

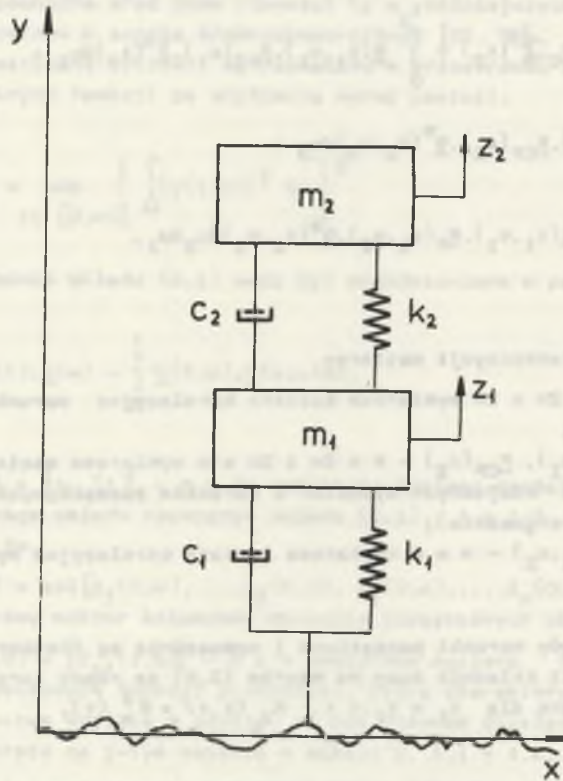
Uwaga 2

W podobny sposób można otrzymać macierze momentów wyższych rzędów rozwiązania $\underline{z}(t, \omega)$.

II.2. Zastosowanie metody do badania stochastycznych drgań modeli pojazdów (zawiesznień)

W pracach [39, 40, 42] badano pionowe drgania modeli pojazdów o dwóch [40, 42] lub pięciu [39] stopniach swobody, wyznaczając powyższą metodą wariancję rozwiązań (przemieszczeń), gdy ruch odbywał się ze zmienną prędkością po drodze o losowym profilu. W pracy [40] podano metodę funkcji Greena przy rozpisaniu powyższych wzorów macierzowych na współrzędne. Metodę funkcji Greena stosowano także do wyznaczenia wariancji rozwiązań podwójnego wahadła ze zmienną w czasie długością i masę znajdującego się pod wpływem wymuszenia stochastycznego [38].

Obecnie zaprezentowane zostaną wyniki otrzymane dla modelu przedstawionego na rys. 2.1 przy danych z [42, 46] (podobnymi modelami zajmowano się w [16, 29, 30, 44, 85]).



Rys. 2.1

Równania drgań pionowych tego modelu są następujące:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1(t, \omega) + (c_1 + c_2) \dot{z}_1(t, \omega) - c_2 \dot{z}_2(t, \omega) + (k_1 + k_2) z_1(t, \omega) - k_2 z_2(t, \omega) = c_1 \dot{y}(t, \omega) + k_1 y(t, \omega) \\ m_2 \ddot{z}_2(t, \omega) + c_2 \dot{z}_2(t, \omega) - c_2 \dot{z}_1(t, \omega) + k_2 z_2(t, \omega) - k_2 z_1(t, \omega) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

gdzie: m_1, m_2 - masy, c_1, c_2 - współczynniki tłumienia, k_1, k_2 - sztywności, $z_1(t, \omega), z_2(t, \omega)$ - przemieszczenia mas i $z_1(0, \omega) = z_2(0, \omega) = y(0, \omega), \dot{z}_1(0, \omega) = \dot{z}_2(0, \omega) = 0$.

Funkcja korelacyjna drogi zależy od jej rodzaju [20, 48, 56, 57]. Do dalszych rozważań założono, że ma ona postać:

$$K_Y(x_1, x_2) = (1 + \beta \cdot |x_1 - x_2|) \cdot \exp(-\beta \cdot |x_1 - x_2|), \quad (2.8)$$

gdzie $\beta > 0, x_1, x_2$ - współrzędne drogi, które są funkcjami czasu. Założono, że warunki początkowe i wymuszenie są nieskorelowane oraz że $x = \frac{1}{2} \cdot A \cdot t^2$ i $A > 0$ (ruch jednostajnie przyspieszony). Stąd

$$K_Y(t_1, t_2) = (1 + D \cdot |t_1^2 - t_2^2|) \cdot \exp(-D \cdot |t_1^2 - t_2^2|), \quad (2.9)$$

gdzie $D = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \beta$.

Funkcja korelacji jest funkcją różniczkowalną na prostej $t_1 = t_2$, tak więc istnieje funkcja korelacji procesu stochastycznego będącego prawą stroną pierwszego równania układu (2.7) i wynosi ona:

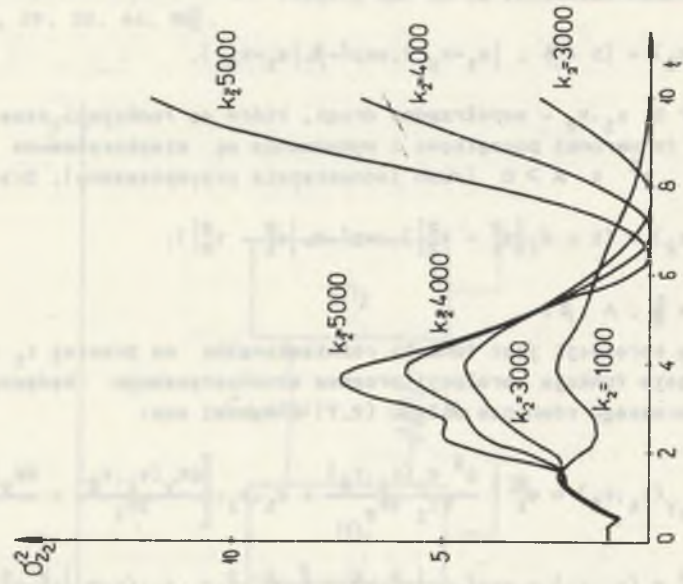
$$\begin{aligned} K_{c_1 \dot{y} + k_1 y}(t_1, t_2) &= \sigma_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_Y(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + c_1 \cdot k_1 \cdot \left[\frac{\partial K_Y(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial K_Y(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] + \\ &+ k_1^2 \cdot K_Y(t_1, t_2) = \exp(-D \cdot |t_1^2 - t_2^2|) \cdot [4D^2 \cdot c_1^2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot (1 - D \cdot |t_1^2 - t_2^2|) + \\ &+ 2D^2 \cdot c_1 \cdot k_1 \cdot (t_1^2 - t_2^2) \cdot (t_2 - t_1) + k_1^2 \cdot (1 + D \cdot |t_1^2 - t_2^2|)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Rysunki 2.2 i 2.3 przedstawiają wykresy wariancji $\sigma_{z_1}^2$ i $\sigma_{z_2}^2$ przy założeniu, że $m_1 = 96$ [kg], $m_2 = 600$ [kg], $c_1 = 0$ [kg/s], $c_2 = 4000$ [kg/s], $k_1 = 300\,000$ [kg/s²], $D = 2$ oraz zmiennym $k_2 = 10\,000, 30\,000, 40\,000, 50\,000$ [kg/s²].

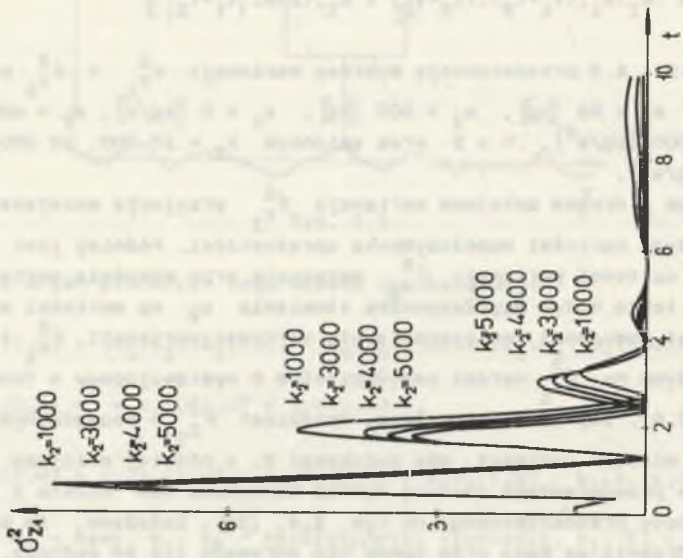
W pierwszym i drugim maksimum wariancja $\sigma_{z_1}^2$ przyjmuje mniejsze wartości dla większych wartości współczynnika sprężystości. Później jest na odwrót. Natomiast wartości wariancji $\sigma_{z_2}^2$ wzrastają przy wzroście wartości k_2 .

Badano także wpływ współczynnika tłumienia c_2 na wartości wariancji. Jego wzrost powodował zmniejszanie się wartości wariancji $\sigma_{z_1}^2$ i $\sigma_{z_2}^2$. Podobnie wpływa na $\sigma_{z_1}^2$ wzrost współczynnika D występującego w funkcji korelacji (2.9). Jej wartości maleją. Natomiast $\sigma_{z_2}^2$ w początkowym okresie przyjmuje większe wartości, gdy zwiększać D , a później mniejsze [42].

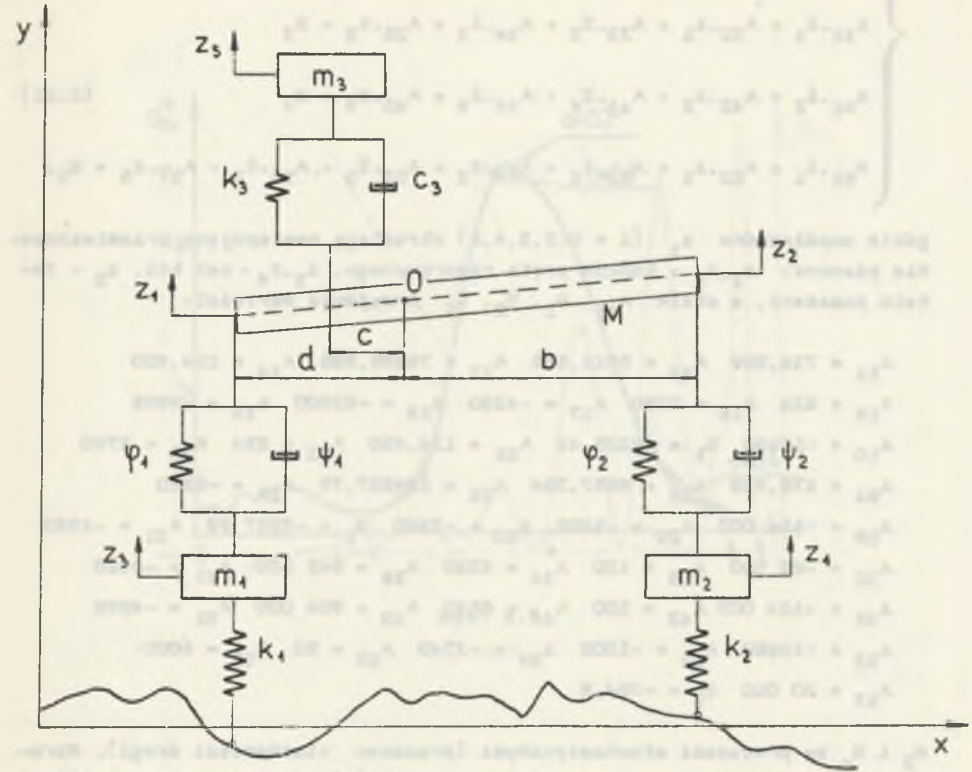
Obecnie przedstawione zostaną wyniki otrzymane dla modelu o 5 stopniach swobody przedstawionego na rys. 2.4, [39]. Założono, że model jest liniowy, drgania są małe oraz opony nie odrywają się od podłoża. Ruch podobnego modelu w przypadku drgań deterministycznych jest rozważany w [61].



Rys. 2.3



Rys. 2.2



Rys. 2.4

Do obliczeń przyjęto następujące dane (częściowo z [61]): $M = 1140$ [kg], $m_1 = 100$ [kg], $m_2 = 200$ [kg], $m_3 = 80$ [kg], $e^2 = 1,82$ [m²] (promień bezwładności masy M względem osi przechodzącej przez jej środek ciężkości i prostopadłej do płaszczyzny wzdłużnej), $k_1 = 580\ 000$ [N/m], $k_2 = 700\ 000$ [N/m], $k_3 = 20\ 000$ [N/m], $\psi_1 = 62\ 500$ [Ns/m], $\psi_2 = 104\ 000$ [Ns/m], $\Psi_1 = 4350$ [Ns/m], $\Psi_2 = 6520$ [Ns/m], $c_3 = 6000$ [Ns/m], $d = 1,15$ [m], $b = 3,35$ [m], $c = 0,4$ [m].

Równania ruchu rozważanego modelu (pojazdu po przekształceniach) przyjmują postać:

$$\left\{ \begin{aligned} &A_{11} \cdot \ddot{z}_1 + A_{12} \cdot \dot{z}_1 + A_{13} \cdot z_1 + A_{14} \cdot \ddot{z}_2 + A_{15} \cdot \dot{z}_2 + A_{16} \cdot z_2 + A_{17} \cdot \dot{z}_3 + \\ &\quad + A_{18} \cdot z_3 + A_{19} \cdot \dot{z}_5 + A_{10} \cdot z_5 = B_1 \\ &A_{21} \cdot \ddot{z}_1 + A_{22} \cdot \dot{z}_1 + A_{23} \cdot z_1 + A_{24} \cdot \ddot{z}_2 + A_{25} \cdot \dot{z}_2 + A_{26} \cdot z_2 + A_{27} \cdot \dot{z}_4 + \\ &\quad + A_{28} \cdot z_4 + A_{29} \cdot \dot{z}_5 + A_{20} \cdot z_5 = B_2 \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} A_{31} \cdot z_1 + A_{32} \cdot z_1 + A_{33} \cdot z_3 + A_{34} \cdot z_3 + A_{35} \cdot z_3 = B_3 \\ A_{41} \cdot z_2 + A_{42} \cdot z_2 + A_{43} \cdot z_4 + A_{44} \cdot z_4 + A_{45} \cdot z_4 = B_4 \\ A_{51} \cdot z_1 + A_{52} \cdot z_1 + A_{53} \cdot z_2 + A_{54} \cdot z_2 + A_{55} \cdot z_5 + A_{56} \cdot z_5 + A_{57} \cdot z_5 = B_5 \end{cases} \quad (2.11)$$

gdzie współrzędne z_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) określają następujące przesieszczenia pionowe: z_1, z_2 - końców pręta resorowanego, z_3, z_4 - osi kół, z_5 - fotelu pasażera, a stałe A_{ij} , B_1 , B_2 , B_5 przyjmują wartości:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 734,269 & A_{12} &= 8516,666 & A_{13} &= 76388,886 & A_{14} &= 114,450 \\ A_{15} &= 834 & A_{16} &= 2710 & A_{17} &= -4350 & A_{18} &= -62500 & A_{19} &= -4998 \\ A_{10} &= -16660 & B_1 &= -8325,42 & A_{21} &= 114,450 & A_{22} &= 834 & A_{23} &= 2780 \\ A_{24} &= 176,938 & A_{25} &= 6687,334 & A_{26} &= 104557,78 & A_{27} &= -6520 \\ A_{28} &= -104\,000 & A_{29} &= -1002 & A_{20} &= -3340 & B_2 &= -2857,98 & A_{31} &= -4350 \\ A_{32} &= -62\,500 & A_{33} &= 100 & A_{34} &= 4350 & A_{35} &= 642\,500 & A_{41} &= -6520 \\ A_{42} &= -104\,000 & A_{43} &= 200 & A_{44} &= 6520 & A_{45} &= 804\,000 & A_{51} &= -4998 \\ A_{52} &= -16660 & A_{53} &= -1002 & A_{54} &= -3340 & A_{55} &= 80 & A_{56} &= 6000 \\ A_{57} &= 20\,000 & B_5 &= -784,8 \end{aligned}$$

B_3 i B_4 są procesami stochastycznymi (procesami nierówności drogi). Wprowadzono pomocnicze oznaczenia $L = d + b$, $l_1(t)$ - położenie w chwili t masy m_1 wzdłuż osi x , $l_2(t) = l_1(t) + L$ - położenie w chwili t masy m_2 wzdłuż osi x oraz założono następującą postać funkcji $l_1(t)$ (model porusza się wprawie ruchem jednostajnie przyspieszonym, a później ze stałą prędkością):

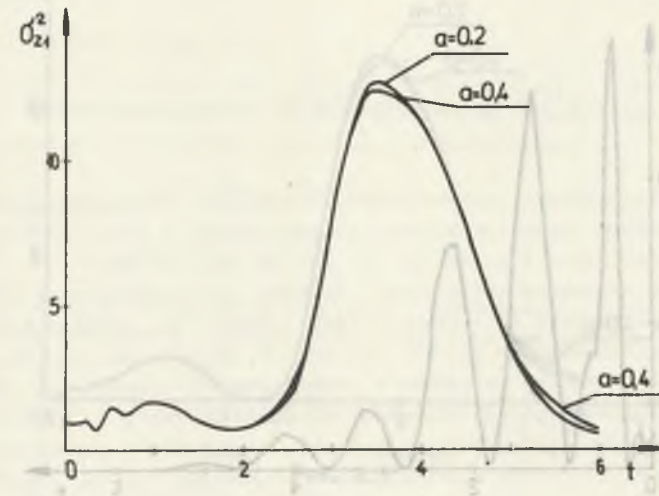
$$l_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 & \text{gdy } 0 \leq t < t_0 \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0) & \text{gdy } t > t_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

gdzie a , t_0 stałe oraz $v_0 = a \cdot t_0$.

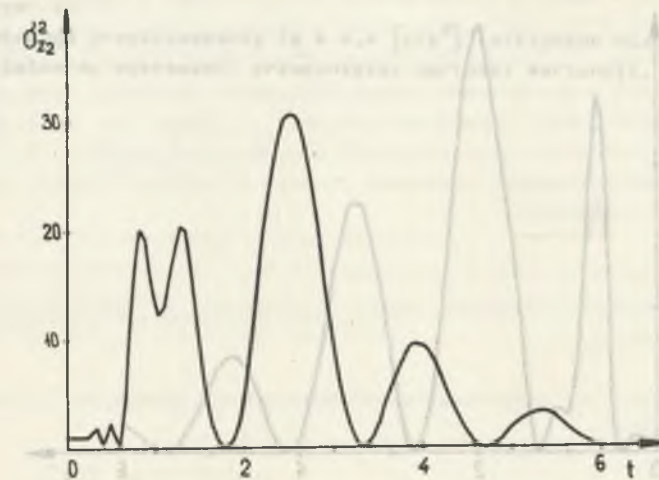
Wtedy przyjmując, że profil drogi jest procesem stochastycznym o funkcji korelacji postaci (2.8) otrzymano dla B_3 , B_4 następujące funkcje korelacji:

$$K_{B_3}(t_1, t_2) = k_1^2 \cdot (1 + \beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2)|) \cdot \exp(-\beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2)|) \quad (2.13)$$

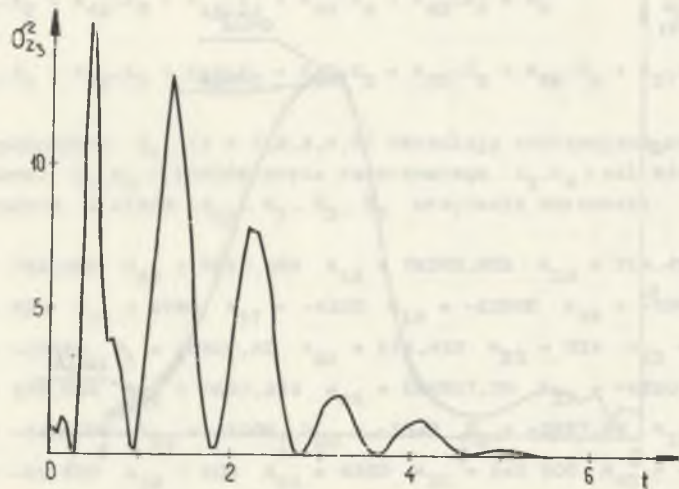
$$K_{B_4}(t_1, t_2) = k_2^2 \cdot (1 + \beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2)|) \cdot \exp(-\beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2)|) \quad (2.14)$$



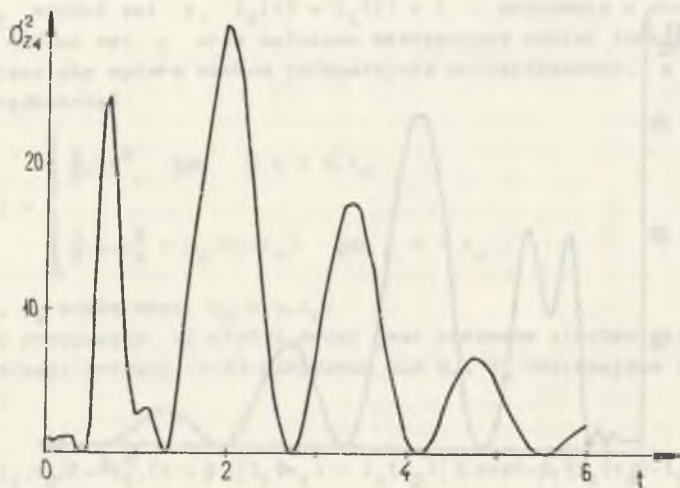
Rys. 2.5



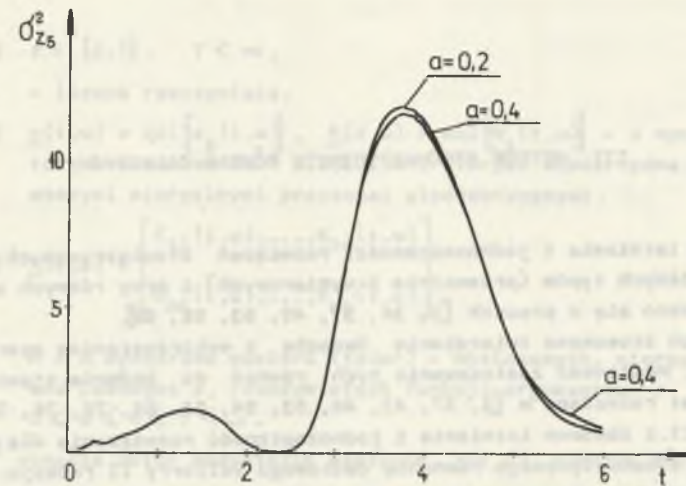
Rys. 2.6



Rys. 2.7



Rys. 2.8



Rys. 2.9

$$K_{B_3 B_4}(t_1, t_2) = k_1 \cdot k_2 \cdot (1 + \beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2) - L|) \cdot \exp(-\beta \cdot |l_1(t_1) - l_1(t_2) - L|) \quad (2.15)$$

Do obliczeń numerycznych przyjęto $t_0 = 5$ [s], $\beta = 0.5$ oraz $a = 0.2$ i 0.4 [m/s²]. Otrzymane wariancje przemieszczeń pionowych przedstawiają rysunki 2.5 - 2.9. Wszystkie wariancje mają tendencję do zanikania przy wzrastającym t .

Dla większego przyśpieszenia ($a = 0.4$ [m/s²]) otrzymano nieznaczne (niezbyt zauważalne na wykresach) przesunięcia wartości wariancji.

III. METODA STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Badaniem istnienia i jednoznaczności rozwiązań stochastycznych równań całkowych różnych typów (przeważnie 1-wymiarowych) i przy różnych założeniach zajmowano się w pracach [3, 36, 37, 49, 53, 81, 82].

W dowodach stosowano twierdzenie Banacha z wykorzystaniem operatorów związków. Możliwość zastosowania tych równań do badania zjawisk fizycznych jest rozważana w [3, 37, 43, 49, 53, 54, 63, 65, 72, 76, 77, 82, 86]. W p. III.1 zbadano istnienie i jednoznaczność rozwiązania dla wielowymiarowego stochastycznego równania całkowego Volterry II rodzaju. Dowód przeprowadzono bez stosowania tw. Banacha, lecz poprzez skonstruowanie pewnych oszacowań, w których występują zbieżne szeregi. W p. III.2 podano związek pomiędzy liniowymi stochastycznymi układami równań różniczkowych a układami stochastycznych równań całkowych. W p. III.3 i p. III.4 zastosowano metodę stochastycznych równań całkowych do badania liniowych i nieliniowych układów dynamicznych o parametrach będących funkcjami czasu bądź procesami stochastycznymi oraz o zdeterminowanych lub losowych warunkach początkowych. Otrzymane w p. III.1 w dowodzie twierdzenia oszacowania zostały wykorzystane w p. III.3 do oszacowania błędów wariancji rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego n-tego rzędu o zmiennych w czasie współczynnikach i losowym wymuszeniu w przypadku, gdy rezolwenta ekłada się ze skończonej ilości wyrazów. Podano potrzebną liczbę składników w rezolwencie, aby zagwarantować zadaną dokładność wariancji rozwiązania ww. równania różniczkowego. Oszacowano też błąd, z jakim jest obliczona wariancja, gdy rezolwenta jest obliczona z zadaną dokładnością. W p. III.5 dokonano porównania metody impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greensa) i metody równań całkowych.

III.1. Teoretyczne podstawy metody (istnienie i jednoznaczność rozwiązania)

Rozważać będziemy układ stochastycznych równań całkowych Volterry II rodzaju o postaci:

$$\underline{x}(t, \omega) = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}(u, \omega) du \quad (3.1)$$

gdzie:

$$(i) \quad t \in [0, T], \quad T < \infty,$$

λ - liczba rzeczywista,

$$(ii) \quad \underline{x}(t, \omega) = \text{col} [x_1(t, \omega)], \quad \underline{h}(t, \omega) = \text{col} [h_1(t, \omega)] - n \text{ wymiarowe wektory kolumnowe, } (i = 1, 2, \dots, n), \text{ których współrzędne są rzeczywistymi mierzalnymi procesami stochastycznymi}$$

$$(iii) \quad \underline{K}(t, u) = \begin{bmatrix} K_{11}(t, u), \dots, K_{1n}(t, u) \\ \vdots \\ K_{n1}(t, u), \dots, K_{nn}(t, u) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$n \times n$ wymiarowa macierz (jąder) - nielosowych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a, rzeczywistych funkcji argumentów t i u oraz $0 \leq u \leq t \leq T < \infty$.

Niech C^2 oznacza zbiór wszystkich wektorów $\underline{x}(t, \omega)$ takich, że:

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_i^2(t, \omega) d\mu} < \infty \quad (3.3)$$

C^2 jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|\underline{x}(t, \omega)\|_{C^2} = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_i^2(t, \omega) d\mu} \quad (3.4)$$

Dla macierzy $\underline{K}(t, u)$ wprowadzono normę w postaci:

$$\|\underline{K}(t, u)\| = \sup_{t, u \in [0, T]} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n K_{ij}^2(t, u)} \quad (3.5)$$

przy założeniu, że wyrażenie to jest skończone.

Tak wprowadzone normy (3.4) i (3.5) posiadają własność zgodności, tzn.

$$\|\underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}(u, \omega)\|_{C^2} \leq \|\underline{K}(t, u)\| \cdot \|\underline{x}(u, \omega)\|_{C^2} \quad (3.6)$$

bowiem jeśli przez $\|\underline{x}(t, \omega)\|_2$ rozumieć normę (3.4) bez supremum, to

$$\begin{aligned} \|\underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}(u, \omega)\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [K_{i1}(t, u) \cdot x_1(u, \omega) + \dots + K_{in}(t, u) \cdot x_n(u, \omega)]^2 du} \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n K_{ij}^2(t, u) \cdot \sum_{j=1}^n x_j^2(u, \omega) d\mu} \leq \|\underline{K}(t, u)\| \cdot \|\underline{x}(u, \omega)\|_2 \end{aligned}$$

Po obustronnym wzięciu supresua zachodzi warunek (3.6).
Niech

$$\begin{aligned} \underline{x}_0(t, \omega) & \stackrel{df}{=} \underline{h}(t, \omega) \\ \underline{x}_1(t, \omega) & \stackrel{df}{=} \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}_0(u, \omega) du \\ & \dots \dots \dots \\ \underline{x}_n(t, \omega) & \stackrel{df}{=} \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}_{n-1}(u, \omega) du \end{aligned} \quad (3.7)$$

(dla $n = 1, 2, \dots$) oraz

$$\underline{x}(t, \omega) \stackrel{df}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \underline{x}_n(t, \omega) \quad (3.8)$$

Można sformułować następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE: $\underline{x}(t, \omega)$ zdefiniowane wg wzoru (3.8) jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu i jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (3.1) w przestrzeni C^2 , jeżeli $\underline{h}(t, \omega) \in C^2$ oraz $\|\underline{K}(t, u)\| \leq B(t) < \infty$ gdzie $B(t)$ - funkcja rzeczywista i niemalejąca.

D o w ó d. Dowód twierdzenia przeprowadzono w trzech etapach.

1) Dowód jednostajnej zbieżności szeregu (3.8) w przestrzeni C^2 . Zachodzi następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \|\underline{x}_0(t, \omega)\|_2 & \leq \|\underline{x}_0(t, \omega)\|_{C^2} = \|\underline{h}(t, \omega)\|_{C^2} \leq A < \infty, \\ \|\underline{x}_1(t, \omega)\|_2 & \leq \int_0^t \|\underline{K}(t, u)\| \cdot \|\underline{x}_0(u, \omega)\|_2 du \leq A \cdot B(t) \cdot t, \\ \|\underline{x}_n(t, \omega)\|_2 & \leq \int_0^t \|\underline{K}(t, u)\| \cdot \|\underline{x}_{n-1}(u, \omega)\|_2 du \leq A \cdot \frac{[B(t) \cdot t]^n}{n!} \end{aligned}$$

z stąd:

$$\|\underline{x}_n(t, \omega)\|_{C^2} \leq A \cdot \frac{[B(t) \cdot t]^n}{n!}$$

oraz

$$\begin{aligned} \|\underline{x}(t, \omega)\|_{C^2} & \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \cdot \|\underline{x}_n(t, \omega)\|_{C^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot \frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^n}{n!} = \\ & = A \cdot e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t} < \infty, \text{ c.b.d.u.} \end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania wynika również, że $\underline{x}(t, \omega) \in C^2$.

2) Dowód, że (3.8), jest rozwiązaniem (3.1). Niech

$$\underline{y}(t, \omega) = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}(u, \omega) du,$$

gdzie $\underline{x}(u, \omega)$ jest zdefiniowane przez (3.8).
Wtedy

$$\begin{aligned} \underline{y}(t, \omega) & = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \underline{x}_n(u, \omega) du = \\ & = \underline{h}(t, \omega) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}_n(u, \omega) du = \\ & = \underline{h}(t, \omega) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \cdot \underline{x}_{n+1}(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \underline{x}_n(t, \omega) = \underline{x}(t, \omega) \text{ c.b.d.u.} \end{aligned}$$

3) Dowód jednoznaczności rozwiązania.

Poprowadzimy go nie wprost, zakładając, że istnieją dwa rozwiązania $\underline{x}(t, \omega)$ i $\underline{\tilde{x}}(t, \omega)$ równania (3.1).

Wtedy:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t, \omega) & = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{x}(u, \omega) du \\ \underline{\tilde{x}}(t, \omega) & = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{\tilde{x}}(u, \omega) du \end{aligned}$$

Dla $\underline{z}(t, \omega) \stackrel{df}{=} \underline{x}(t, \omega) - \underline{\tilde{x}}(t, \omega)$ zachodzi

$$\underline{z}(t, \omega) = \lambda \cdot \int_0^t \underline{K}(t, u) \cdot \underline{z}(u, \omega) du$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \|\underline{z}(t, \omega)\|_2 &\leq |\lambda| \cdot \int_0^t \|\underline{k}(t, u)\| \cdot \|\underline{z}(u, \omega)\|_2 du \leq \\ &\leq |\lambda|^2 \cdot \int_0^t \int_0^u \|\underline{k}(t, u)\| \cdot \|\underline{k}(u, u_1)\| \cdot \|\underline{z}(u_1, \omega)\|_2 du_1 du \leq \dots \\ &\leq |\lambda|^n \cdot \int_0^t \int_0^u \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_{n-2}} \|\underline{k}(t, u)\| \cdot \|\underline{k}(u, u_1)\| \dots \\ &\quad \cdot \|\underline{k}(u_{n-2}, u_{n-1})\| \cdot \|\underline{z}(u_{n-1}, \omega)\|_2 du_{n-1} \dots du_1 du \leq \\ &\leq |\lambda|^n \cdot [B(t)]^n \cdot \int_0^t \dots \int_0^{u_{n-2}} \|\underline{z}(u_{n-1}, \omega)\| du_{n-1} \dots du. \end{aligned}$$

czyli:

$$\|\underline{z}(t, \omega)\|_{C^2} \leq \frac{[|\lambda| \cdot B(t), T]^n}{n!} \cdot \|\underline{z}(t, \omega)\|_{C^2} \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty$$

a więc $\underline{z}(t, \omega) \equiv 0$, zatem $\underline{x}(t, \omega) = \underline{\tilde{x}}(t, \omega)$, co kończy dowód całego twierdzenia.

Na podstawie powyższego twierdzenia można sformułować następujące wnioski:

Wniosek 1: Podstawiając (3.8) do (3.1) i zmieniając kolejność całkowania i sumowania (na podstawie jednostajnej zbieżności) otrzymujemy:

$$\underline{x}(t, \omega) = \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{R}(t, u, \lambda) \cdot \underline{h}(u, \omega) du, \quad (3.9)$$

gdzie rezolwenta

$$\underline{R}(t, u, \lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \underline{K}_{n+1}(t, u) \quad (3.10)$$

oraz

$$\underline{K}_1(t, u) \stackrel{\text{df}}{=} \underline{K}(t, u)$$

$$\underline{K}_{n+1}(t, u) \stackrel{\text{df}}{=} \int_u^t \underline{K}_n(t, s) \cdot \underline{K}(s, u) ds \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Wniosek 2: Rezolwenta (3.10) spełnia następujące równanie:

$$\underline{R}(t, u, \lambda) = \underline{K}(t, u) + \lambda \cdot \int_u^t \underline{R}(t, s, \lambda) \cdot \underline{K}(s, u) ds, \quad (3.12)$$

co widać po pomnożeniu wzoru (3.10) przez $\underline{K}(s, u)$, scałkowaniu w granicach od u do t względem parametru s oraz skorzystaniu z definicji (3.11) dla $n + 2$.

Uwaga 1

W pracach [63, 65] rozważano równanie (3.1) dla przypadku 1 wymiarowego. Wtedy można zamiast przestrzeni C^2 wprowadzić przestrzeń Banacha C^m z normą

$$\|\underline{x}(t, \omega)\|_{C^m} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \int_0^1 |\underline{x}(t, \omega)|^m d\mu \right\}^{\frac{1}{m}}, \quad (3.13)$$

gdzie $m = 1, 2, \dots$

Uwaga 2

Zamiast norm (3.4) i (3.5) można wprowadzić inne, spełniające warunek zgodności (3.6).

III.2. Związek pomiędzy układami liniowych stochastycznych równań różniczkowych a układami stochastycznych równań całkowych

Rozważać będziemy układ stochastycznych równań różniczkowych o postaci:

$$\underline{B}_2(t) \cdot \underline{\dot{z}}(t, \omega) + \underline{B}_1(t) \cdot \underline{z}(t, \omega) + \underline{B}_0(t) \cdot \underline{z}(t, \omega) = \underline{p}(t, \omega) \quad (3.14)$$

przy założeniach wprowadzonych w rozdziale II.

Lemat: Jeśli zachodzą założenia (i) - (iv) z rozdziału II, $\underline{B}_2(t)$ jest macierzą diagonalną $\underline{B}_2(t) = \text{diag} [b_{211}(t), \dots, b_{2nn}(t)]$ oraz $b_{2kk}(t) \neq 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ poza zbiorem o mierze Lebesgue'a równej zero, to układ równań (3.14) można przekształcić do równania (3.1) oraz będą spełnione warunki (ii) oraz (iii) z podrozdziału III.1.

D o w ó d: Niech

$$\underline{B}_2(t) \cdot \underline{\dot{z}}(t, \omega) = \underline{x}(t, \omega), \quad (3.15)$$

wtedy

$$\underline{\dot{z}}(t, \omega) = \int_0^t \underline{B}_2^{-1}(u) \cdot \underline{x}(u, \omega) du + \underline{\dot{z}}(0, \omega), \quad (3.16)$$

gdzie macierz odwrotna do $\underline{B}_2(t)$ ma postać:

$$\underline{B}_2^{-1}(t) = \text{diag} \left[\frac{1}{b_{2kk}(t)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

oraz

$$\underline{z}(t, \omega) = \int_0^t (t-u) \cdot \underline{B}_2^{-1}(u) \cdot \underline{x}(u, \omega) du + t \cdot \underline{\dot{z}}(0, \omega) + \underline{z}(0, \omega) \quad (3.17)$$

Wykorzystując powyższe związki do układu (3.14) otrzymuje się stochastyczne równania całkowe o postaci:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t, \omega) &= \underline{p}(t, \omega) - \underline{B}_1(t) \cdot \underline{\dot{z}}(0, \omega) - \underline{B}_0(t) \cdot [t \cdot \underline{\dot{z}}(0, \omega) + \underline{z}(0, \omega)] - \\ &- \int_0^t [\underline{B}_1(t) + (t-u) \cdot \underline{B}_0(t)] \cdot [\underline{B}_2^{-1}(u) \cdot \underline{x}(u, \omega)] du, \end{aligned} \quad (3.18)$$

tzn. macierze układu (3.1) mają następującą postać:

$$\underline{h}(t, \omega) = \underline{p}(t, \omega) - \underline{B}_1(t) \cdot \underline{\dot{z}}(0, \omega) - \underline{B}_0(t) \cdot [t \cdot \underline{\dot{z}}(0, \omega) + \underline{z}(0, \omega)] \quad (3.19)$$

$$\underline{k}(t, u) = [\underline{B}_1(t) + (t-u) \cdot \underline{B}_0(t)] \cdot \underline{B}_2^{-1}(u) \quad (3.20)$$

(można zmienić kolejność wykonywania mnożenia macierzy we wzorze (3.18) - pod całkę - ze względu na diagonalność macierzy $\underline{B}_2^{-1}(u)$) ponadto $\lambda = -1$. Spełnienie warunków (ii) oraz (iii) wynika z własności funkcji mierzalnych [11, 55].

Uwaga 1

Jeśli jako wyjściowy układ równań przyjąć zamiast (3.14) układ równań 1 rzędu o postaci:

$$\underline{\dot{y}}(t, \omega) = \underline{A}(t) \cdot \underline{y}(t, \omega) + \underline{p}(t, \omega), \quad (3.21)$$

gdzie $\underline{y}(t, \omega) = \text{col} [\underline{y}_1(t, \omega)]$, $\underline{p}(t, \omega) = \text{col} [\underline{p}_1(t, \omega)]$ - $2n$ wymiarowe wektory, $\underline{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ - $2n \times 2n$ wymiarowa macierz, wtedy przy przekształceniu (3.21) do (3.1) otrzymuje się łatwiejszą postać macierzy $\underline{h}(t, \omega)$ i $\underline{k}(t, u)$ ale o dwukrotnie większym wymiarze

$$\underline{h}(t, \omega) = \text{col} \left[\underline{p}_1(t, \omega) - \sum_{j=1}^{2n} y_j(0, \omega) \right] \quad (3.22)$$

$$\underline{k}(t, u) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{12n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2n1}(t) & \dots & a_{2n2n}(t) \end{bmatrix}$$

Widać, że $\underline{k}(t, u) = \underline{k}(t)$. Natomiast w przypadku układu równań drugiego rzędu, przy obliczaniu rezolwenty wg (3.10) i (3.11) i wprowadzeniu oznaczeń pomocniczych w definicji macierzy (3.20) $\underline{k}(t, u) = [c_{ij}(t, u)]$ będzie ten sam rekurencyjny formalizm przy mniejszej ilości równań.

Uwaga 2

W pracach [63, 65] rozwinięto zastosowanie metody równań całkowych do badania równań n -tego rzędu. W [67] przedstawiono możliwość badania stochastycznych układów równań różniczkowych za pomocą sprowadzenia ich najpierw do rozprzęgniętego układu równań różniczkowych. Dla każdego z równań tego układu można stosować analizę wg [63, 65]. W [40] podano procedurę rozprzęgnięcia dla układu dwóch równań drugiego rzędu (układ dynamiczny o dwóch stopniach swobody) do układu dwóch niezależnych równań czwartego rzędu. Metoda rozprzęgnięcia jest szczególnie przydatna, gdy chce się wykorzystać program numeryczny przeznaczony do obliczeń dla jednego równania w przypadku układu kilku równań.

III.3. Zastosowanie metody do badania liniowych układów dynamicznych

W celu wyprowadzenia wzorów na macierz momentów rozwiązania $\underline{z}(t, \omega)$ równania różniczkowego (3.14) (np. wartości średnich, macierzy korelacji, macierzy wariancji itp.) pokazano najpierw ich postać dla rozwiązania równania całkowego (3.1). Stosując twierdzenie Fubinięgo [55] (o zamianie kolejności całkowania) na podstawie (3.9) można utworzyć wektor wartości średnich

$$\underline{E} \underline{x}(t, \omega) = \underline{E} \underline{h}(t, \omega) + \lambda \cdot \int_0^t \underline{R}(t, u, \lambda) \cdot \underline{E} \underline{h}(u, \omega) du, \quad (3.23)$$

• stąd macierz korelacji wektora $\underline{x}(t, \omega)$:

$$\begin{aligned} \underline{K}_x(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\underline{x}(t_1, \omega) - E \underline{x}(t_1, \omega) \right] \cdot \left[\underline{x}(t_2, \omega) - E \underline{x}(t_2, \omega) \right]^* \right\} = \\ &= \underline{K}_h(t_1, t_2) + \lambda \cdot \int_0^{t_1} \underline{R}(t_1, u_1, \lambda) \cdot \underline{K}_h(u_1, t_2) du_1 + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{t_2} \underline{K}_h(t_1, u_2) \cdot \underline{R}^*(t_2, u_2) du_2 + \\ &+ \lambda^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \underline{R}(t_1, u_1, \lambda) \cdot \underline{K}_h(u_1, u_2) \cdot \underline{R}^*(t_2, u_2, \lambda) du_2 du_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie: $\underline{K}_h(t_1, t_2)$ - macierz korelacyjna wektora $\underline{h}(t, \omega)$, * symbol transpozycji macierzy.

W podobny sposób można tworzyć macierze momentów wyższych rzędów.

Dla wyznaczenia wektora wartości średnich procesu $\underline{z}(t, \omega)$ posłużono się zależnością (3.17), z której

$$E \underline{z}(t, \omega) = \int_0^t (t-u) \cdot \underline{B}_2^{-1}(u) \cdot E \underline{x}(u, \omega) du + t \cdot E \dot{\underline{z}}(0, \omega) + E \underline{z}(0, \omega) \quad (3.25)$$

Stąd macierz korelacji wektora $\underline{z}(t, \omega)$:

$$\begin{aligned} \underline{K}_z(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\underline{z}(t_1, \omega) - E \underline{z}(t_1, \omega) \right] \cdot \left[\underline{z}(t_2, \omega) - E \underline{z}(t_2, \omega) \right]^* \right\} = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (t_1 - u_1) \cdot (t_2 - u_2) \cdot \underline{B}_2^{-1}(u_1) \cdot \underline{K}_x(u_1, u_2) \cdot \left[\underline{B}_2^{-1}(u_2) \right]^* du_2 du_1 + \\ &+ t_1 \cdot \int_0^{t_2} (t_2 - u_2) \cdot \underline{K}_{zx}(u_2) \cdot \left[\underline{B}_2^{-1}(u_2) \right]^* du_2 + \\ &+ t_2 \cdot \int_0^{t_1} (t_1 - u_1) \cdot \underline{B}_2^{-1}(u_1) \cdot \underline{K}_{xz}(u_1) du_1 + \\ &+ \int_0^{t_2} (t_2 - u_2) \cdot \underline{K}_{zx}(u_2) \cdot \left[\underline{B}_2^{-1}(u_2) \right]^* du_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^{t_1} (t_1 - u_1) \cdot \underline{B}_2^{-1}(u_1) \cdot \underline{K}_{xz}(u_1) du_1 + \\ &+ t_1 \cdot t_2 \cdot \underline{K}_z + t_1 \cdot \underline{K}_{zz} + t_2 \cdot \underline{K}_{zz} + \underline{K}_z \end{aligned} \quad (3.26)$$

gdzie $\underline{K}_z, \underline{K}_{zx}, \underline{K}_{zz}$ - $n \times n$ wymiarowe macierze korelacyjne warunków początkowych, $\underline{K}_{zx}(t), \underline{K}_{xz}(t)$ - $n \times n$ wymiarowe macierze korelacyjne warunków początkowych i wektora $\underline{x}(t, \omega)$.

W podobny sposób można tworzyć macierze momentów wyższych rzędów. Przy założeniu zdeterminowanych warunków początkowych wzór (3.26) znacznie się redukuje - zostaje tylko składnik z całką podwójną.

W pracach [63, 65] wyprowadzono wzory dla funkcji momentów centralnych rozwiązania układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym n -tego rzędu przy wykorzystaniu równania całkowego Volterra II rodzaju. Równanie różniczkowe miało postać:

$$a_n(t) \cdot \frac{d^n y(t, \omega)}{dt^n} + \dots + a_1(t) \cdot \frac{dy(t, \omega)}{dt} + a_0(t) \cdot y(t, \omega) = P(t, \omega), \quad (3.27)$$

gdzie funkcje $a_i(t)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, procesy $y(t, \omega)$ i $P(t, \omega)$ spełniają założenia podobne jak w rozdziale II oraz warunki początkowe $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ są zdeterminowane.

Moment centralny rzędu $l_1 + \dots + l_r$ ma postać:

$$\begin{aligned} K_{y, l_1 \dots l_r}(t_1, \dots, t_r) &\stackrel{\text{def}}{=} E \left\{ \left[y(t_1, \omega) - E y(t_1, \omega) \right]^{l_1} \dots \left[y(t_r, \omega) - E y(t_r, \omega) \right]^{l_r} \right\} = \\ &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_r} \frac{(t_1 - u_{11})^{l_1 - 1} \dots (t_1 - u_{1l_1})^{l_1 - 1} \dots (t_r - u_{r1})^{l_r - 1} \dots (t_r - u_{rl_r})^{l_r - 1}}{[(l_1 - 1)! \dots (l_r - 1)!] \cdot s_n(u_{11}) \dots s_n(u_{1l_1}) \dots s_n(u_{r1}) \dots s_n(u_{rl_r})} \cdot \\ &\cdot K_x(u_{11}, \dots, u_{1l_1}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{rl_r}) du_{r1} \dots du_{r1} \dots du_{11} \dots du_{11} \end{aligned} \quad (3.28)$$

(dla $r=2, l_1=l_2=1$ jest to funkcja korelacji), gdzie $K_x(u_{11}, \dots, u_{rl_r})$ jest momentem centralnym rzędu $m = l_1 + \dots + l_r$ procesu $x(t, \omega)$ (spełniającego równanie całkowe, na które można zamienić równanie (3.27)), który można wyznaczyć z zależności:

$$\begin{aligned}
 K_x(t_1, \dots, t_n) &= E\left\{[x(t_1, \omega) - E x(t_1, \omega)] \dots [x(t_n, \omega) - E x(t_n, \omega)]\right\} = \\
 &= E\left\{A(t_1, \omega) \dots A(t_n, \omega)\right\} + E\left\{A(t_1, \omega) \dots A(t_{n-1}, \omega) \cdot B(t_n, \omega)\right\} + \dots + \\
 &+ E\left\{B(t_1, \omega) \cdot A(t_2, \omega) \dots A(t_n, \omega)\right\} + E\left\{A(t_1, \omega) \dots A(t_{n-2}, \omega) \cdot B(t_{n-1}, \omega) \cdot \right. \\
 &\left. \cdot B(t_n, \omega)\right\} + \dots + E\left\{B(t_1, \omega) \cdot A(t_2, \omega) \dots A(t_{n-1}, \omega) \cdot B(t_n, \omega)\right\} + \\
 &+ \dots + E\left\{B(t_1, \omega) \dots B(t_n, \omega)\right\}, \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

gdzie pomocniczo oznaczono:

$$\begin{aligned}
 A(t_1, \omega) &\stackrel{\text{df}}{=} h(t_1, \omega) - E h_1(t, \omega) \\
 B(t_1, \omega) &\stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{t_1} R(t_1, u_1, \omega) \cdot [h(u_1, \omega) - E h(u_1, \omega)] du_1 \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Dla równania postaci (3.27):

$$\begin{aligned}
 h(t, \omega) &= P(t, \omega) - \left\{ a_{n-1}(t) \cdot y_0^{(n-1)} + \dots + a_{n-k}(t) \cdot [y_0^{(n-k)} + y_0^{(n-k+1)} \cdot t + \dots + \right. \\
 &\left. + y_0^{(n-1)} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + a_0(t) \cdot [y_0 + y_0^{(1)} \cdot t + \dots + y_0^{(n-1)} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}] \right\} \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

oraz funkcja $K(t, u)$ (służąca do tworzenia rezolwenty)

$$K(t, u) = \left[a_{n-1}(t) + \dots + a_{n-k}(t) \cdot \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + a_0(t) \cdot \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \cdot \frac{1}{a_n(u)} \quad (3.32)$$

W [75] zanalizowano wpływ losowych warunków początkowych na wariancję rozwiązania układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

Metodę równań całkowych stosowano wielokrotnie do wyznaczenia wariancji rozwiązań układów dynamicznych o zmiennej masie, wahadła podwójnego o zmiennej długości, układu RLC ze zmienną pojemnością [63, 65, 67, 76]. Wymuszeniem dla tych układów były procesy stacjonarne i niestacjonarne. Jako przykład zostaną pokazane niektóre wykresy wariancji rozwiązań (przemieszczeń) układu o jednym i dwóch stopniach swobody i zmiennej masie (część wyników zostanie wykorzystana w rozdz. III.5) [63, 67].

w [63] rozważano równanie drgań układu w postaci:

$$a_2(t) \cdot \ddot{y}(t, \omega) + c_1 \cdot \dot{y}(t, \omega) + c_0 \cdot y(t, \omega) = P(t, \omega), \quad (3.33)$$

gdzie:

$$a_2(t) = \begin{cases} 1 - c_2 \cdot t, & t < 1 \\ 1 - c_2, & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

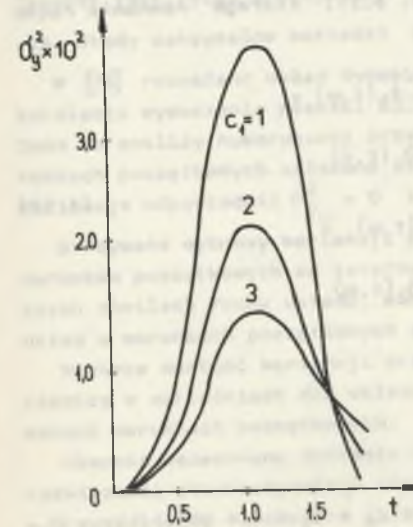
c_0, c_1, c_2 stałe i $c_2 \in (0, 1)$. $a_2(t)$ jest zmienną masą [kg], c_1 - współczynnikiem tłumienia [kg/s], c_0 - współczynnikiem sztywności [kg/s²], P - siłę [N], t - czasem [s], y - przemieszczeniem [m], stąd wariancja przemieszczenia σ_y^2 [m²].

Warunki początkowe były zdeterminowane. Obliczenia przeprowadzono dla funkcji korelacji dwóch typów:

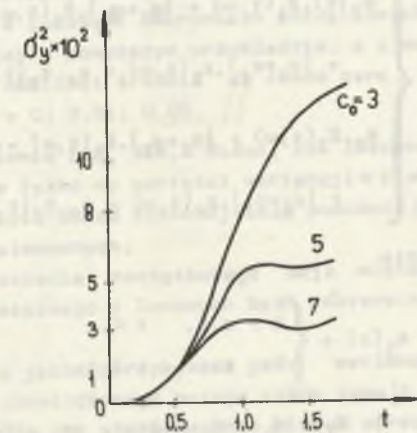
$$K_p(t_1, t_2) = C \cdot e^{-\delta \cdot (t_1^2 + t_2^2)} \quad (3.35)$$

$$K_p(t_1, t_2) = C \cdot e^{-\alpha |t_1 - t_2|} \cdot \cos \beta \cdot (t_1 - t_2), \quad (3.36)$$

gdzie $\delta > 0, \alpha > 0, \beta > 0$. Do dalszych rozważań założono, że $C=1$ (ponieważ C może być wyciągnięte we wzorach (3.24) i (3.28) przed znak całkowania). Wybrane z [63] dwa rysunki wariancji przedstawiono poniżej.



Rys. 3.1



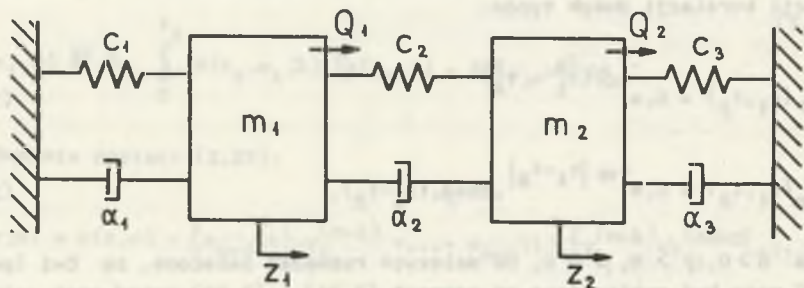
Rys. 3.2

Rysunek 3.1 przedstawia wpływ zmian współczynnika tłumienia c_1 na wartości wariancji σ_y^2 . Założono funkcję korelacji w postaci (3.35) $c_1=1,2,3$; $c_2=0,5$; $c_0=5$; $\delta=1$.

Rysunek 3.2 przedstawia wpływ zmian współczynnika sztywności c_0 na wartości wariancji σ_y^2 . Założono funkcję korelacji w postaci (3.36) $c_0=3,5,7$; $c_2=0,5$; $c_1=1$; $\alpha=\beta=1$.

Według wyników uzyskanych w [63] niezależnie od typu funkcji korelacji procesu $P(t, \omega)$ można sformułować następujące wnioski

- a) zwiększenie współczynnika tłumienia zmniejsza wariancję,
- b) zwiększenie współczynnika sztywności zmniejsza wariancję,
- c) przy szybszej zmianie masy wariancja przyjmuje mniejsze wartości,
- d) zwiększanie współczynników funkcji korelacyjnych zmniejsza wartości wariancji.



Rys. 3.3

W [67] rozważano układ dynamiczny (rys. 3.3), którego równania ruchu mają postać:

$$\begin{cases} m_1(t) \cdot \ddot{z}_1(t, \omega) + (c_1 + c_2) \cdot \dot{z}_1(t, \omega) - c_2 \cdot \dot{z}_2(t, \omega) + \\ + (c_1 + c_2) \cdot z_1(t, \omega) - c_2 \cdot z_2(t, \omega) = Q_1(t, \omega) \\ m_2 \cdot \ddot{z}_2(t, \omega) + (c_2 + c_3) \cdot \dot{z}_2(t, \omega) - c_2 \cdot \dot{z}_1(t, \omega) + \\ + (c_2 + c_3) \cdot z_2(t, \omega) - c_2 \cdot z_1(t, \omega) = Q_2(t, \omega) \end{cases} \quad (3.37)$$

gdzie

$$m_1(t) = \begin{cases} 1 - a \cdot t, & t < 1 \\ 1 - a, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$m_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha = \text{const}, \alpha_2 = 0, c_1 = c_2 = c_3 = c = \text{const}, Q_2 = 0.$$

Obliczenia wariancji przeprowadzono dla funkcji korelacji procesu $Q_1(t, \omega)$ typu (3.35) oraz

$$K_{Q_1}(t_1, t_2) = C \cdot \cos \beta \cdot (t_1 - t_2), \quad (3.38)$$

która wynika z przyjęcia dla procesu $Q_1(t, \omega)$ postaci analitycznej:

$$Q_1(t, \omega) = A(\omega) \cdot \cos[\beta \cdot t + \lambda(\omega)], \quad (3.39)$$

gdzie $A(\omega)$ i $\lambda(\omega)$ - nieskorelowane zmienne losowe i $\lambda(\omega)$ ma rozkład równomierny w przedziale $[0, 2\pi]$.

Przyjęto ponownie $C=1$.

Wybrane z [67] cztery rysunki wykresów wariancji przedstawiono poniżej.

Rysunki 3.4 i 3.5 przedstawiają wpływ zmian współczynnika a występującego we wzorze na zmianę masy na wartości wariancji $\sigma_{z_1}^2$ i $\sigma_{z_2}^2$. Założono funkcję korelacji w postaci (3.35), $a = 0,3; 0,5; 0,7$; $\alpha = 1$; $c = 5$; $\delta = 1$.

Rysunki 3.6 i 3.7 przedstawiają wpływ zmian współczynników sztywności c na wartości wariancji $\sigma_{z_1}^2$ i $\sigma_{z_2}^2$. Założono funkcję korelacji w postaci (3.38), $c = 3,5,7$; $a = 0,5$; $\alpha = 1$; $\beta = 1$.

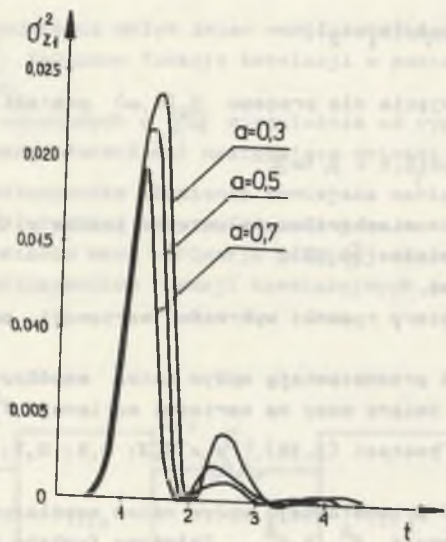
Podobnie jak dla układu dynamicznego (3.33) o zmiennej masie, niezależnie od typu funkcji korelacji procesu $Q_1(t, \omega)$, zwiększanie współczynników tłumienia, współczynników sztywności, szybsza zmiana masy, zwiększanie współczynników funkcji korelacji zmniejszają wartości wariancji. Inaczej jest tylko w przypadku wariancji $\sigma_{z_1}^2$, gdy β ze wzoru (3.38) wzrasta. Wtedy maksymalne wartości $\sigma_{z_1}^2$ też wzrastają.

W [75] rozważano układ dynamiczny opisany równaniem (3.33), o funkcji korelacji wymuszenia postaci (3.35) i o losowych warunkach początkowych. Dane do analizy numerycznej przyjęto jak w powyższym przykładzie, a o warunkach początkowych założono, że ich wartości średnie są równe zero, a wariancje odpowiednio $\sigma_{y_0}^2 = 0$ i $\sigma_{v_0}^2 = 0; 0,01; 0,05$.

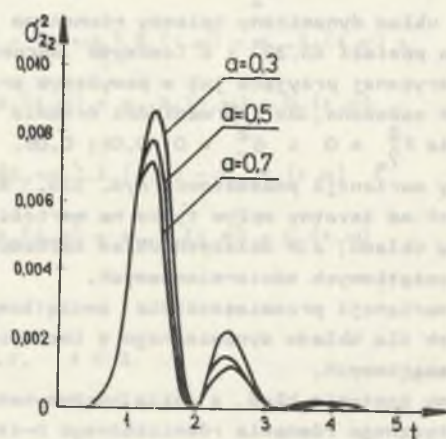
Otrzymane wykresy wariancji przedstawia rys. 3.8. Widać, że losowość warunków początkowych ma istotny wpływ tylko na wartości wariancji w pierwszych chwilach ruchu układu, a w dalszych układ zachowuje się podobnie jak układ o warunkach początkowych zdeterminowanych.

Większa wartość wariancji przemieszczenia początkowego daje większą różnicę w wartościach dla układu dynamicznego o losowych bądź zdeterminowanych warunkach początkowych.

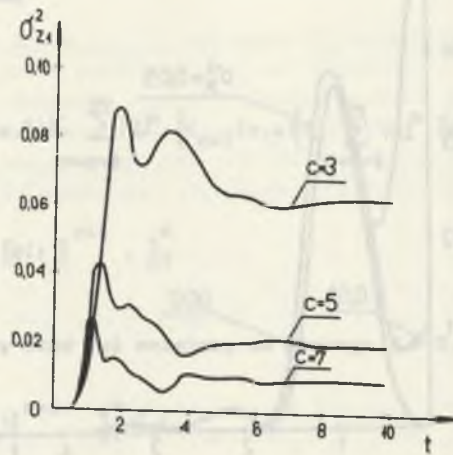
Obecnie oczekiwany zostanie błąd, z jakim otrzymywana jest wariancja rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego n -tego rzędu typu (3.27) w przypadku gdy rezolwenta (3.10) składa się ze skończonej ilości wyrazów.



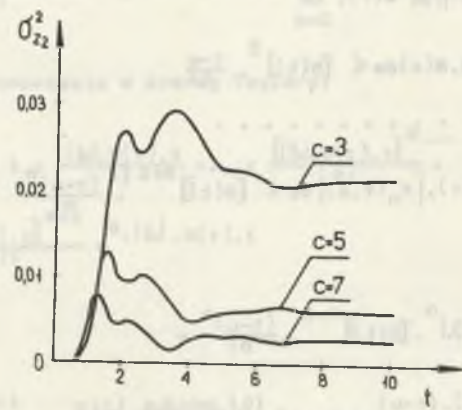
Rys. 3.4



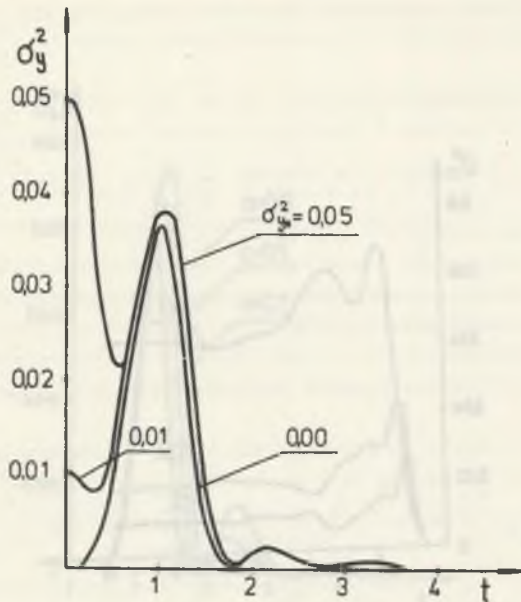
Rys. 3.5



Rys. 3.6



Rys. 3.7



Rys. 3.8

Wprowadza to pewien błąd, który zostanie oszacowany. Rozważanie rezolwenty jako sumy skończonej pozwala na wyrażenie wariancji w postaci wzoru analitycznego, o którym wiemy, z jaką dokładnością został on otrzymany [65]

Na podstawie wzorów (3.10) i (3.11) oraz założenia w twierdzeniu z rozdziału III.1 można następująco oszacować rezolwentę:

$$\begin{aligned}
 |K_1(t,u)| &= |K(t,u)| \leq B(t), \\
 |K_2(t,u)| &\leq \int_u^t B(t) \cdot B(s) ds \leq [B(t)]^2 \cdot \frac{t-u}{1} \\
 &\dots \dots \dots \\
 |K_{n+1}(t,u)| &\leq \int_u^t B(t) \cdot |K_n(t,s)| ds \leq [B(t)]^{n+1} \cdot \frac{(t-u)^n}{n!} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned}
 |R(t,u,\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \cdot [B(t)]^{n+1} \cdot \frac{(t-u)^n}{n!} = \\
 &= B(t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda \cdot B(t) \cdot (t-u)]^n}{n!} \leq B(t) \cdot e^{\lambda \cdot B(t) \cdot (t-u)} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Przyjmując rezolwentę jako sumę skończoną, tzn. jeśli

$$R_m(t,u,\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^m \lambda^n \cdot K_{n+1}(t,u), \quad (3.42)$$

wtedy

$$\begin{aligned}
 |R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda|^n \cdot |K_{n+1}(t,u)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda|^n \cdot [B(t)]^{n+1} \cdot \frac{(t-u)^n}{n!} \leq \\
 &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda|^n \cdot [B(t)]^{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Jeśli zażądać, aby błąd był mniejszy od pewnego $\epsilon > 0$, wtedy z warunku

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda|^n \cdot [B(t)]^{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} < \epsilon \quad (3.44)$$

można znaleźć m , dla którego

$$|R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| < \epsilon \quad (3.45)$$

Według (3.44) jest:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^n}{n!} = e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t} - \sum_{n=0}^m \frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^n}{n!} < \frac{\epsilon}{B(t)} \quad (3.46)$$

Wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora:

$$\begin{aligned}
 e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t} &= 1 + \frac{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t}{1} + \dots + \frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^m}{m!} + \\
 &+ \frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \theta \cdot |\lambda| \cdot B(t) \cdot t \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

$\theta \in (0,1)$.

Stąd wg (3.46)

$$\frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \theta \cdot |\lambda| \cdot B(t) \cdot t < \frac{\epsilon}{B(t)} \quad (3.48)$$

lub też można zażądać, aby zachodziła nierówność:

$$\frac{[|\lambda| \cdot B(t) \cdot t]^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{B(t) \cdot e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t}} \quad (3.49)$$

Na podstawie tej nierówności dla zadanego ε i t można dobrać m (potrzebną ilość wyrazów w rozwinięciu) tak, aby spełniony został związek (3.45).

Obecnie oszacujemy różnicę pomiędzy funkcją korelacji procesu $x(t, \omega)$ liczoną (wg 3.24) dla rezolwenty będącej szeregiem nieskończonym lub skończonym, przy spełnieniu warunku (3.45). Oznaczając przez $K_{x,m}(t_1, t_2)$ funkcję korelacji procesu $x(t, \omega)$ liczoną dla rezolwenty $R_m(t, u, \lambda)$, zachodzi wg (3.24):

$$\begin{aligned} K_{x,m}(t_1, t_2) &= K_h(t_1, t_2) + \lambda \cdot \int_0^{t_1} R_m(t_1, u_1, \lambda) \cdot K_h(t_2, u_1) du_1 + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{t_2} R_m(t_2, u_2, \lambda) \cdot K_h(t_1, u_2) du_2 + \lambda^2 \cdot \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_m(t_1, u_1, \lambda) \cdot \\ &\cdot R_m(t_2, u_2, \lambda) \cdot K_h(u_1, u_2) du_2 du_1 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Stąd dostajemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} |K_x(t_1, t_2) - K_{x,m}(t_1, t_2)| &\leq |\lambda| \cdot \int_0^{t_1} |R(t_1, u_1, \lambda) - R_m(t_1, u_1, \lambda)| \cdot \\ &\cdot |K_h(t_2, u_1)| du_1 + |\lambda| \cdot \int_0^{t_2} |R(t_2, u_2, \lambda) - R_m(t_2, u_2, \lambda)| \cdot |K_h(t_1, u_2)| du_2 + \\ &+ \lambda^2 \cdot \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |R(t_1, u_1, \lambda) \cdot R(t_2, u_2, \lambda) - R_m(t_1, u_1, \lambda) \cdot R_m(t_2, u_2, \lambda)| \cdot \\ &\cdot |K_h(u_1, u_2)| du_2 du_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Przy spełnieniu warunku (3.45) moduł pod całką podwójną można oszacować dodając i odejmując $R(t_1, u_1, \lambda) \cdot R_m(t_2, u_2, \lambda)$ i korzystając z faktu, że

$$|R_m(t_2, u_2, \lambda)| \leq B(t_2) \cdot e^{|\lambda| \cdot B(t_2) \cdot t_2}$$

na podstawie (3.41).

Mamy więc:

$$|R(t_1, u_1, \lambda) \cdot R(t_2, u_2, \lambda) - R_m(t_1, u_1, \lambda) \cdot R_m(t_2, u_2, \lambda)| \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot B(t) \cdot e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t} \quad (3.52)$$

co przy wykorzystaniu założenia, że $B(t)$ jest funkcją niemalejącą, daje nierówność:

$$\begin{aligned} |K_x(t_1, t_2) - K_{x,m}(t_1, t_2)| &\leq |\lambda| \cdot \varepsilon \cdot \left\{ \int_0^{t_1} |K_h(t_2, u_1)| du_1 + \int_0^{t_2} |K_h(t_1, u_2)| du_2 + \right. \\ &\left. + 2 \cdot |\lambda| \cdot B(t) \cdot e^{|\lambda| \cdot B(t) \cdot t} \cdot \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |K_h(u_1, u_2)| du_2 du_1 \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

i $t = \max(t_1, t_2)$.

Jeśli $\sigma_{Y,m}^2(t)$ oznacza wariancję liczoną dla rezolwenty złożonej ze skończonej ilości wyrazów, to wg (3.28)

$$\sigma_{Y,m}^2(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1} \cdot (t-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2 \cdot a_n(u_1) \cdot a_n(u_2)} \cdot K_{x,m}(u_1, u_2) du_2 du_1 \quad (3.54)$$

Uwzględniając (3.53), $\lambda = -1$ oraz wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} G(t_2, t_1) &\stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{t_1} |K_h(t_2, u_1)| du_1 \\ H(t_1, t_2) &\stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |K_h(u_1, u_2)| du_2 du_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

otrzymujemy następujące oszacowania różnicy dla wariancji liczonej dla rezolwenty będącej sumą skończoną lub nieskończoną:

$$\begin{aligned} |\sigma_Y^2(t) - \sigma_{Y,m}^2(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{[(n-1)!]^2} \left\{ \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1} \cdot (t-u_2)^{n-1}}{|a_n(u_1) \cdot a_n(u_2)|} \cdot [G(u_2, u_1) + \right. \\ &+ G(u_1, u_2)] du_2 du_1 + 2 \cdot B(t) \cdot e^{B(t) \cdot t} \cdot \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1} \cdot (t-u_2)^{n-1}}{|a_n(u_1) \cdot a_n(u_2)|} \cdot \\ &\cdot H(u_1, u_2) du_2 du_1 \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Można zastanowić się także nad następującym zagadnieniem: ile trzeba wziąć wyrazów rezolwenty, ażeby dla zadanego $\alpha(t) > 0$ było

$$|\hat{\sigma}_y^2(t) - \hat{\sigma}_{y,m}^2(t)| \leq \alpha(t) \quad (3.57)$$

Według (3.56) prawa strona nierówności musi być mniejsza od $\alpha(t)$, a stąd

$$\varepsilon \leq \frac{[(n-1)!]^2 \cdot \alpha(t)}{W(t)} \quad (3.58)$$

gdzie $W(t)$ jest wyrażeniem występującym w nawiasie po prawej stronie nierówności (3.56).

Uwzględniając oznaczenia (3.49) jest:

$$\frac{[B(t), t]^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{B(t) \cdot e^{B(t) \cdot t}} \leq \frac{[(n-1)!]^2 \cdot \alpha(t)}{B(t) \cdot e^{B(t) \cdot t} \cdot W(t)} \quad (3.59)$$

Na podstawie tej nierówności można obliczyć m - ilość wyrazów w rezolwencie potrzebną do zagwarantowania odpowiedniej dokładności. Można też oszacować błąd, z jakim jest obliczona wariancja $\hat{\sigma}_y^2(t)$, gdy rezolwenta $R(t, u, \omega)$ jest obliczona z dokładnością $\varepsilon > 0$.

Interpretując $R_m(t, u, \omega)$ i $\hat{\sigma}_{y,m}^2(t)$ jako wartości przybliżone (niekończącnie jako sumy skończone) i wprowadzając do (3.57) znak równości jest

$$\alpha(t) = \frac{\varepsilon \cdot W(t)}{[(n-1)!]^2} \quad (3.60)$$

Jeśli $\alpha(t)$ jest małe w stosunku do $\hat{\sigma}_{y,m}^2(t)$ (a więc także do $\hat{\sigma}_y^2(t)$), wtedy stosunek $\frac{\alpha(t)}{\hat{\sigma}_{y,m}^2(t)}$ może być przyjęty jako błąd względny metody.

W pracach [66, 77] obliczono wariancję rozwiązania dla układów dynamicznych przy wykorzystaniu jednego wyrazu rezolwenty. Otrzymano wzory analityczne i za pomocą powyższych oznaczeń podano błąd, z jakim jest obliczona wariancja.

III.4. Zastosowanie metody do badania liniowych i nieliniowych układów dynamicznych o parametrach będących procesami stochastycznymi

Metodę równań całkowych można także stosować do badania układów nieliniowych postaci [69, 74]:

$$\begin{aligned} & [a_n(t) + \varepsilon \cdot \alpha_n(t, \omega)] \cdot y^{(n)}(t, \omega) + \dots + [a_1(t) + \varepsilon \cdot \alpha_1(t, \omega)] \cdot \dot{y}(t, \omega) + \\ & + [a_0(t) + \varepsilon \cdot \alpha_0(t, \omega)] \cdot y(t, \omega) = P(t, \omega) + \varepsilon \cdot \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N b_{i_1 \dots i_n}(t, \omega) \cdot \\ & \cdot [y(t, \omega)]^{i_1} \cdot [\dot{y}(t, \omega)]^{i_2} \dots [y^{(n-1)}(t, \omega)]^{i_n}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie o funkcjach $a_i(t)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, procesach stochastycznych $P(t, \omega)$, $\alpha_i(t, \omega)$, $b_{i_1 \dots i_n}(t, \omega)$ dla $i_j = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ uczyniono założenie jak w rozdziale II. ε - mały parametr.

Rozwiązanie równania (3.61) poszukiwano metodą małego parametru [6, 33, 35, 45, 49, 51, 52, 55] ograniczając się do członów małego rzędu pierwejgo. Przyjęto

$$y(t, \omega) = y_0(t, \omega) + \varepsilon \cdot y_1(t, \omega) \quad (3.62)$$

Wstawiając (3.62) do równania (3.61) otrzymano układ równań:

$$\begin{aligned} & a_n(t) \cdot y_0^{(n)}(t, \omega) + \dots + a_0(t) \cdot y_0(t, \omega) = P(t, \omega) \\ & a_n(t) \cdot y_1^{(n)}(t, \omega) + \dots + a_0(t) \cdot y_1(t, \omega) = - \sum_{j=0}^n \alpha_j(t, \omega) \cdot y_0^{(j)}(t, \omega) + \\ & + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N b_{i_1 \dots i_n}(t, \omega) \cdot [y_0(t, \omega)]^{i_1} \cdot [\dot{y}_0(t, \omega)]^{i_2} \dots [y_0^{(n-1)}(t, \omega)]^{i_n} \end{aligned} \quad (3.63)$$

W pierwszym przybliżeniu funkcje korelacyjne procesu $y(t, \omega)$ ma postać

$$K_y(t_1, t_2) = K_{y_0}(t_1, t_2) + \varepsilon \cdot [K_{y_0 y_1}(t_1, t_2) + K_{y_1 y_0}(t_1, t_2)] \quad (3.64)$$

Funkcja korelacji $K_y(t_1, t_2)$ jest dana wzorem (3.28) przy zamianie oznaczeń x na x_0 oraz y na y_0 . Natomiast $K_{x_0}(t_1, t_2)$ - wzorem (3.24) $K_{y_0 y_1}(t_1, t_2)$ jako funkcja korelacji wzajemnej spełnia warunek $K_{y_0 y_1}(t_1, t_2) = K_{y_1 y_0}(t_2, t_1)$. W celu jej wyznaczenia przyjęto oznaczenie

$$Q(t, \omega) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=0}^n \alpha_j(t, \omega) \cdot y_0^{(j)}(t, \omega) + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N b_{i_1 \dots i_n}(t, \omega) \cdot [y_0(t, \omega)]^{i_1} \cdot [\dot{y}_0(t, \omega)]^{i_2} \dots [y_0^{(n-1)}(t, \omega)]^{i_n} \quad (3.65)$$

Wtedy według wzoru (3.17) dla równania typu (3.27) (por. [74]) i przy założeniu, że warunki początkowe dla równania (3.61) są zerowe (skąd wynika że $h(t, \omega) = P(t, \omega)$ wg (3.31) jest:

$$K_{y_1 y_0}(t_1, t_2) \stackrel{\text{df}}{=} E \left\{ [y_1(t_1, \omega) - E y_1(t_1, \omega)] \cdot [y_0(t_2, \omega) - E y_0(t_2, \omega)] \right\} = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_1 - u_1)^{n-1} \cdot (t_2 - u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2 \cdot a_n(u_1) \cdot a_n(u_2)} \cdot K_{x_1 x_0}(u_1, u_2) du_2 du_1 \quad (3.66)$$

gdzie z kolei przy wykorzystaniu (3.9)

$$K_{x_1 x_0}(t_1, t_2) = K_{QP}(t_1, t_2) - \int_0^{t_1} R(t_1, u_1) \cdot K_{QP}(u_1, t_2) du_1 - \int_0^{t_2} R(t_2, u_2) \cdot K_{QP}(t_1, u_2) du_2 + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R(t_1, u_1) \cdot R(t_2, u_2) \cdot K_{QP}(u_1, u_2) du_2 du_1 \quad (3.67)$$

Funkcja korelacji wzajemnej $K_{QP}(t_1, t_2)$ przy wykorzystaniu (3.65) dana jest wzorem:

$$K_{QP}(t_1, t_2) = E [Q(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] - E Q(t_1, \omega) \cdot E P(t_2, \omega) = - \sum_{j=0}^n E [\alpha_j(t_1, \omega) \cdot y_0^{(j)}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N E \left\{ b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot [y_0(t_1, \omega)]^{i_1} \cdot [\dot{y}_0(t_1, \omega)]^{i_2} \dots [y_0^{(n-1)}(t_1, \omega)]^{i_n} \cdot P(t_2, \omega) \right\} - E P(t_2, \omega) \cdot \left\{ - \sum_{j=0}^n E [\alpha_j(t_1, \omega) \cdot \right.$$

$$\cdot y_0^{(j)}(t_1, \omega)] + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N E \left\{ b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot [y_0(t_1, \omega)]^{i_1} \cdot [\dot{y}_0(t_1, \omega)]^{i_2} \dots [y_0^{(n-1)}(t_1, \omega)]^{i_n} \right\} \quad (3.68)$$

Wykorzystując analogon wzorów (3.15) - (3.17) dla równania typu (3.27) (por. [74]) można napisać, że:

$$K_{QP}(t_1, t_2) = - \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - u)^{n-j-1}}{(n-j-1)! \cdot a_n(u)} \left\{ E [\alpha_j(t_1, \omega) \cdot P(u, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] - \int_0^u R(u, s) \cdot E [\alpha_j(t_1, \omega) \cdot P(s, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] ds \right\} du - \frac{1}{a_n(t_1)} \cdot \left\{ E [\alpha_n(t_1, \omega) \cdot P(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] - \int_0^{t_1} R(t_1, u) \cdot E [\alpha_n(t_1, \omega) \cdot P(u, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] du \right\} + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n \geq 2}}^N \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - u_{11})^{n-1} \dots (t_1 - u_{1i_1})^{n-1}}{[(n-1)!]^{i_1} \cdot [(n-2)!]^{i_2} \dots [1!]^{i_{n-1}}} \cdot \frac{(t_1 - u_{21})^{n-2} \dots (t_1 - u_{2i_2})^{n-2} \dots (t_1 - u_{n-1,1}) \dots (t_1 - u_{n-1,i_{n-1}})}{a_n(u_{11}) \dots a_n(u_{1i_1}) \cdot a_n(u_{21}) \dots a_n(u_{2i_2}) \dots a_n(u_{n-1,1}) \dots a_n(u_{n-1,i_{n-1}})} \cdot \left\{ E [P(u_{11}, \omega) \dots P(u_{1i_1}, \omega) \cdot P(u_{21}, \omega) \dots P(u_{2i_2}, \omega) \dots P(u_{n-1,1}, \omega) \dots P(u_{n-1,i_{n-1}}, \omega)] \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega) \right\} - \int_0^{u_{11}} R(u_{11}, s_{11}) E [P(s_{11}, \omega) \cdot P(u_{12}, \omega) \dots \dots P(u_{n-1,1}, \omega) \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega)] ds_{11} - \dots - \int_0^{u_{n-1,1}} R(u_{n-1,1}, s_{n-1,1}) E [P(u_{11}, \omega) \dots P(u_{n-1,1}, \omega) \cdot P(s_{n-1,1}, \omega)] ds_{n-1,1}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega) \Big] d\theta_{n1_n} + \int_0^{u_{11}} \int_0^{u_{12}} R(u_{11}, \theta_{11}) \cdot R(u_{12}, \theta_{12}) \cdot \\
 & \cdot E \left[P(\theta_{11}, \omega) \cdot P(\theta_{12}, \omega) \cdot P(u_{13}, \omega) \dots P(u_{n1_n}, \omega) \cdot \right. \\
 & \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega) \Big] d\theta_{12} d\theta_{11} + \dots + \\
 & + \int_0^{u_{n1_n-1}} \int_0^{u_{n1_n}} R(u_{n1_n-1}, \theta_{n1_n-1}) R(u_{n1_n}, \theta_{n1_n}) E \left[P(u_{11}, \omega) \dots P(u_{n1_n-2}, \omega) \cdot \right. \\
 & \cdot P(\theta_{n1_n-1}, \omega) \cdot P(\theta_{n1_n}, \omega) \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot P(t_2, \omega) \Big] d\theta_{n1_n} d\theta_{n1_n-1} + \\
 & + \dots + (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \cdot \underbrace{\int_0^{u_{11}} \dots \int_0^{u_{n1_n}}}_{i_1 + \dots + i_n} R(u_{11}, \theta_{11}) \dots R(u_{n1_n}, \theta_{n1_n}) \cdot \\
 & \cdot E \left[P(\theta_{11}, \omega) \dots P(\theta_{n1_n}, \omega) \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \cdot \right. \\
 & \cdot P(t_2, \omega) \Big] d\theta_{n1_n} \dots d\theta_{11} \Big\} du_{n1_n} \dots du_{11} - EP(t_2, \omega) \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{t_1} \frac{(t_1-u)^{n-j-1}}{(n-j-1)! \cdot a_n(u)} \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ E[\alpha_j(t_1, \omega) \cdot P(u, \omega)] - \int_0^u R(u, \theta) \cdot E[\alpha_j(t_1, \omega) \cdot P(\theta, \omega)] d\theta \right\} du - \right. \\
 & \cdot \left. \frac{1}{a_n(t_1)} \left\{ E[\alpha_n(t_1, \omega) \cdot P(t_1, \omega)] - \int_0^{t_1} R(t_1, u) \cdot E[\alpha_n(t_1, \omega) \cdot P(u, \omega)] du \right\} + \right. \\
 & + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=0 \\ i_1 + \dots + i_n > 2}}^N \underbrace{\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1}}_{i_1 + \dots + i_n} \frac{(t_1-u_{11})^{n-1} \dots (t_1-u_{n-1, i_{n-1}})}{[(n-1)!]^{i_1} \dots [1]^{i_{n-1}} a_n(u_{11}) \dots a_n(u_{n-1, i_{n-1}})} \left\{ E \left[P(u_{11}, \omega) \right. \right. \\
 & \left. \left. \dots P(u_{n1_n}, \omega) b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \right] - \int_0^{u_{11}} R(u_{11}, \theta_{11}) E \left[P(\theta_{11}, \omega) \dots P(u_{n1_n}, \omega) \cdot \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \Big] d\theta_{11} \dots + (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \underbrace{\int_0^{u_{11}} \dots \int_0^{u_{n1_n}}}_{i_1 + \dots + i_n} R(u_{11}, \theta_{11}) \dots \\
 & \dots R(u_{n1_n}, \theta_{n1_n}) E \left[P(\theta_{11}, \omega) \dots P(\theta_{n1_n}, \omega) \cdot b_{i_1 \dots i_n}(t_1, \omega) \right] \\
 & d\theta_{n1_n} \dots d\theta_{11} \Big\} du_{n1_n} \dots du_{11} \Big\} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

W podobny sposób można wyznaczyć momenty centralne rzędu r dla rozwiązania $y(t, \omega)$ równania (3.61). W pracy [69, 70] oraz rozdz. IV.1 podano twierdzenie, które może służyć do oszacowania różnicy między wariancją rozwiązania liniowego (3.27) i nieliniowego (3.61).

Przedstawioną metodę zastosowano do badania układu liniowego [68] oraz nieliniowego [74], gdy współczynniki równania oraz wymuszenia były procesami stochastycznymi. Przykładowo zostanie pokazany wykres wariancji rozwiązania (przemieszczenia) dla układu dynamicznego o jednym stopniu swobody, o losowo zmiennej masie i nieliniowej charakterystyce siły sprężystości, którego ruch jest opisany równaniem [74]:

$$\begin{aligned}
 & [a_2(t) + \varepsilon \cdot \alpha_2(\omega)] \cdot \ddot{y}(t, \omega) + a_1 \cdot \dot{y}(t, \omega) + a_0 \cdot y(t, \omega) + \\
 & + \varepsilon \cdot b_0 \cdot [y(t, \omega)]^3 = P(t, \omega) \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Dla dalszych rozważań założono, że:

$$a_2(t) = \begin{cases} 1-c_2 \cdot t, & t < 1 \\ 1-c_2, & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.71)$$

oraz c_2, a_1, a_0, b_0 - stałe i $c_2 \in (0; 1)$; $a_2(t), \alpha_2(\omega)$ [kg] - masa, a_1 [kg/s] - współczynnik tłumienia, a_0 [kg/s²] - stała sprężysta, $P(t, \omega)$ [N] - siła, t [s] - czas, y [m] - przemieszczenie, ε - stężeń wariancja σ_y^2 [m²]. O $\alpha_2(\omega)$ założono, że jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0; 0,2]$, $P(t, \omega) = C \cdot \cos(\frac{1}{2}t + \varphi(\omega))$, gdzie $\varphi(\omega)$ jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0; 2\pi]$. Ponadto założono, że zmienne losowe $\alpha_2(\omega)$ oraz $\varphi(\omega)$ są niezależne.

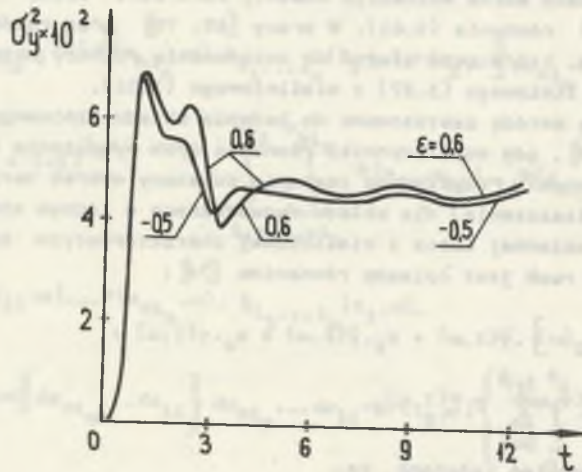
Funkcja korelacji procesu $P(t, \omega)$ występująca we wzorze (3.24) przyjmie postać:

$$K_P(t_1, t_2) = \frac{C^2}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \quad (3.72)$$

Występująca we wzorze (3.69) wartość średnia z iloczynu procesów $\alpha_j(t, \omega)$ oraz $P(t, \omega)$ przyjma postać:

$$E[\alpha_2(\omega) \cdot P(t_2, \omega) \cdot P(t_3, \omega)] = 0,05C^2 \cdot \cos^2(t_2 - t_3) \quad (3.73)$$

Do dalszych rozważań ustalono parametr C , przyjmując $C = \sqrt{2}$. Rysunek 3.9 przedstawia wariancję σ_y^2 dla różnych wartości ϵ . Na rysunku zaznaczono tylko wykresy dla $\epsilon = -0,5$ oraz $\epsilon = 0,6$. Zbadano także inne wartości ϵ z przedziału $(-0,5; 0,6)$ przy ustalonym $c_2 = 0,5$, $a_1 = 1$, $a_0 = 5$, $b_0 = 1$, $f = 1$.



Rys. 3.9

Wartości wariancji znajdowały się między skrajnymi krzywymi. Większym wartościom ϵ odpowiadają większe wartości wariancji. Badano także wpływ współczynnika b_0 na wartości wariancji. Ze wzrostem b_0 zmniejszają się wartości wariancji. Zależność ta zgadza się jakościowo z faktem, że dla układów dynamicznych o stałych współczynnikach i wymuszeniu typu bieżącego szumu w przypadku nieliniowej sztywnej charakterystyki siły sprężystości wariancja przemieszczenia jest mniejsza od wariancji w przypadku liniowym [45].

Badano także wpływ szybkości zmian masy (współczynnik c_2) na wartości wariancji. Szybszym zmianom masy (większe c_2) odpowiadają mniejsze wartości wariancji. Wynik jakościowo jest zgodny z rezultatami uzyskanymi dla układów liniowych, których zmienne współczynniki nie są procesami stochastycznymi ($\epsilon = 0$) ([63, 83] i rozdz. III.3). Na uwagę zasługuje fakt, że parametr ϵ aż tak bardzo nie wpływa na zmianę wartości wariancji (można to

zauważyć również w [68]). Zagadnieniu wpływu małego parametru na rozwiązanie oraz jego charakterystyki probabilistyczne jest poświęcony rozdz. IV.

Wykorzystując powyższą metodę analizowano wariancję drgań modeli przekładni zębatych o losowym wymuszeniu oraz losowych zmianach sztywności [71, 78, 79].

Uwaga 1

Nie trzeba ograniczać się z zastosowaniem metody równań całkowych oraz metody małego parametru tylko do jednego równania. Można ją stosować także do układów równań np. postaci

$$\begin{aligned} & [B_2(t) + \epsilon \cdot \alpha_2(t, \omega)] \cdot \dot{z}(t, \omega) + [B_1(t) + \epsilon \cdot \alpha_1(t, \omega)] \cdot \ddot{z}(t, \omega) + \\ & + [B_0(t) + \epsilon \cdot \alpha_0(t, \omega)] \cdot z(t, \omega) = p(t, \omega) \end{aligned}$$

Uwaga 2

Nie trzeba się także ograniczać tylko do członów małych rzędów I jak przyjęto w (3.62). Podobnie, założenie, że warunki początkowe są zerowe, nie jest konieczne. Jeśli założyć występowanie członów małych wyższych rzędów lub niezerowych warunków początkowych, wtedy wzory (a szczególnie (3.69)) stają się znacznie bardziej skomplikowane. Dlatego też zrezygnowano z tej ogólności.

W przypadku konieczności rozważania członów małych wyższych rzędów lub niezerowych warunków początkowych konkretnie rozważanego układu dynamicznego jest bardziej wygodne wyprowadzenie - dla poszukiwanej charakterystyki probabilistycznej rozwiązania - szczegółowego wzoru niż ogólnej zależności na momenty rzędu r .

III.5. Numeryczne porównanie metody impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greens) i metody równań całkowych

Porównano czas obliczeń wariancji rozwiązania (przemieszczenia) układu dynamicznego o zmiennej masie i losowym wymuszeniu opisanego równaniem (3.33), stosując metodę impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greens) oraz metodę równań całkowych. Obliczenia przeprowadzono na komputerze PDP-11/34 w tych samych warunkach (komputer nie był obciążony innymi użytkownikami). Dane przyjęto jak dla rys. 3.1 przy $c_1 = 1$. Uzyskano bardzo dobrą zbliżność wyników przy stosowaniu obu metod, co widać w poniższej tabeli:

Wartości wariancji w [m ²]		
Czas w [s]	Wg met. imp. f. prz.	Wg met. równ. całk.
0,2	0,000357	0,000358
0,4	0,004568	0,004562
0,6	0,016213	0,016160
0,8	0,030482	0,030372
1,0	0,035594	0,035562

Natomiast czas obliczeń dla wartości wariancji do 1 sekundy wynosił przy stosowaniu metody impulsowej funkcji przejścia 64,24 sekund, a przy stosowaniu metody równań całkowych 24,76 sekund. Główny zysk czasowy wynika z faktu, że impulsowa funkcja przejścia jest funkcją szybciej zmienną (por. np. funkcję Greena dla oscylatora harmonicznego [52]) niż rezolwenta. To z kolei powoduje, że przy założonej dokładności obliczeń krok zmiennej niezależnej dla metody funkcji Greena musi być mniejszy od kroku stosowanego w metodzie równań całkowych.

IV. OSZACOWANIE ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW RÓWNAŃ STOCHASTYCZNYCH

Dla nieliniowych stochastycznych układów równań różniczkowych rozwiązanie lub jego momenty są otrzymywane przy stosowaniu metod przybliżonych. Ważnym problemem jest oszacowanie ich dokładności. W p. IV.1 podano twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nieliniowych stochastycznych układów równań różniczkowych.

Następnie w p. IV.2 oszacowano różnicę pomiędzy odchyleniami standardowymi dwóch zmiennych losowych. Otrzymane oszacowania wykorzystano do badania różnicy odchyłań standardowych rozwiązań dwóch układów dynamicznych.

IV.1. Oszacowania rozwiązań i ich momentów w nieliniowych układach stochastycznych

Rozważać będziemy układ nieliniowych stochastycznych równań różniczkowych postaci:

$$\frac{d \underline{y}(t, \varepsilon, \omega)}{dt} = \underline{Y}(t, \underline{y}, \varepsilon, \omega), \quad (4.1)$$

gdzie:

- (i) $t \in [-T, T]$, $T < \infty$, ε - mały parametr, $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$,
- (ii) $\underline{y}(t, \varepsilon, \omega) = \text{col} [\underline{y}_1(t, \varepsilon, \omega)]$ - n-wymiarowy wektor kolumnowy współrzędnych, $i = 1, 2, \dots, n$; $\underline{y}(0, \varepsilon, \omega) = \underline{y}_0$ - wektor warunków początkowych dla $t=0$ oraz $|\underline{y}_1(t, \varepsilon, \omega) - \underline{y}_1(0, \varepsilon, \omega)| \leq b < \infty$ dla prawie wszystkich realizacji
- (iii) $\underline{Y}(t, \underline{y}, \varepsilon, \omega) = \text{col} [\underline{Y}_1(t, \underline{y}, \varepsilon, \omega)]$ - n-wymiarowy wektor kolumnowy funkcji procesów stochastycznych, którego prawie wszystkie realizacje są zdefiniowane i ciągłe ze względu na $t, \underline{y}, \varepsilon$, czyli dla powyżej określonego obszaru zmiennych $t, \underline{y}, \varepsilon \bigwedge_{M > 0} \bigvee_{i=1, 2, \dots, n} |\underline{Y}_1(t, \underline{y}, \varepsilon, \omega)| \leq M$

dla prawie wszystkich realizacji. Ponadto założono, że dla prawie wszystkich realizacji jest spełniony warunek Lipschitza ze względu za zmienną \underline{y} i stałą $\lambda > 0$, tzn.

$$\|\underline{Y}(t, \underline{y}', \varepsilon, \omega) - \underline{Y}(t, \underline{y}'', \varepsilon, \omega)\| \leq \lambda \cdot \|\underline{y}' - \underline{y}''\|, \quad (4.2)$$

gdzie $\| \cdot \|$ jest normą Euklidesa w przestrzeni R^n . Zachodzi następujące twierdzenie [69]:

TWIERDZENIE

Przy powyższych założeniach układ równań (4.1) ma dla prawie wszystkich realizacji jedyne rozwiązanie (proces stochastyczny) $\underline{y}(t, \delta, \omega)$, które dla $t=0$ spełnia losowe warunki początkowe \underline{y}_0 . To rozwiązanie jest dla prawie wszystkich realizacji zdefiniowane i ma ciągłą pochodną jako funkcję zmiennej t w przedziale $t \in [-T_0, T_0]$, gdzie $T_0 = \min(T, \frac{b}{M})$. Rozwiązanie to jest dla prawie wszystkich realizacji ciągle jako funkcja parametru ε w przedziale $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, jednostajnie względem t (dla $t \in [-T_0, T_0]$). Jeśli $\underline{y}(t, \varepsilon^*, \omega)$ i $\underline{y}(t, \varepsilon^{**}, \omega)$ są rozwiązaniami układu (4.1), wtedy dla prawie wszystkich realizacji

$$\bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_{\delta > 0} |\varepsilon^* - \varepsilon^{**}| < \delta \Rightarrow \|\underline{y}(t, \varepsilon^*, \omega) - \underline{y}(t, \varepsilon^{**}, \omega)\| < \eta \quad (4.3)$$

Dowód twierdzenia jest podobny jak w przypadku deterministycznym [14, 60] a dla warunku (4.3) jak w [9].

Uwaga 1

W przypadku liniowym prawie każda realizacja rozwiązania jest zdefiniowana i ciągła w całym przedziale $t \in [-T, T]$.

Wniosek 1

Wprost z dowodu twierdzenia wynika dla prawie wszystkich realizacji oszacowanie:

$$\|\underline{y}(t, \varepsilon^*, \omega) - \underline{y}(t, \varepsilon^{**}, \omega)\| \leq \frac{\eta}{\lambda_0} \cdot [\exp(\lambda_0 t) - 1] \stackrel{df}{=} \eta \quad (4.4)$$

jeśli dla prawie wszystkich realizacji jest spełnione

$$\|\underline{y}(\bar{t}, \underline{y}(\bar{t}, \varepsilon^{**}, \omega), \varepsilon^*, \omega) - \underline{y}(\bar{t}, \underline{y}(\bar{t}, \varepsilon^{**}, \omega), \varepsilon^{**}, \omega)\| < \eta \quad (4.5)$$

gdzie $\bar{t} \in [0, t]$.

Wzór (4.4) daje oszacowanie różnicy rozwiązań ("odległości"). Można oszacować też różnicę odchyłań standardowych. Zachodzi następujący lemat:

Lemat

Niech zmienne losowe $A(\omega)$ i $B(\omega)$ przyjmują z prawdopodobieństwem 1 skończone wartości ($|A(\omega)| < \infty, |B(\omega)| < \infty$) oraz niech istnieje $\delta > 0$ takie, że $|A(\omega) - B(\omega)| \leq \delta$ z prawdopodobieństwem 1. Wtedy odchylenia standardowe spełniają nierówność:

$$|\sigma_A - \sigma_B| \leq \delta.$$

D o w ó d

Z prawdopodobieństwem 1 zachodzi:

$$|A(\omega) - B(\omega)| = |A(\omega) - EA(\omega) - (B(\omega) - EB(\omega)) + E(A(\omega) - B(\omega))| \leq \delta \quad (4.6)$$

Podnosząc nierówność (4.6) do kwadratu oraz uśredniając ją otrzymano:

$$\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + [E(A(\omega) - B(\omega))]^2 - 2K_{AB} \leq \delta^2, \quad (4.7)$$

gdzie K_{AB} - kowariancja zmiennych $A(\omega)$ i $B(\omega)$.

Stąd

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B &\leq \delta^2 \\ (\sigma_A - \sigma_B)^2 &\leq \delta^2 \\ |\sigma_A - \sigma_B| &< \delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wniosek 2

W szczególności oszacowanie pomiędzy i-tymi współrzędnymi wektora kolumnowego \underline{y} jest następujące:

$$|y_1(t, \varepsilon^*, \omega) - y_1(t, \varepsilon^{**}, \omega)| \leq \|\underline{y}(t, \varepsilon^*, \omega) - \underline{y}(t, \varepsilon^{**}, \omega)\| \leq \eta \quad (4.9)$$

a także

$$|\sigma_{y_1}(t, \varepsilon^*, \omega) - \sigma_{y_1}(t, \varepsilon^{**}, \omega)| \leq \eta \quad (4.10)$$

Uwaga 2

Jeśli $n=2$, wtedy układ (4.1) przedstawia drgania nieliniowego oscylatora harmonicznego oraz dla $i=1$ (4.9) jest oszacowaniem przemieszczeń i ich odchyłań standardowych obliczonych dla ε^* i ε^{**} .

Uwaga 3

Według (4.9) i (4.10) można dla układu dynamicznego opisanego za pomocą (4.1) oszacować różnicę pomiędzy rozwiązaniami i ich odchyleniami standardowymi dla przypadku liniowego i nieliniowego bądź układu o parametrach zdeterminowanych i losowych. Można także zyskać na czasie obliczeń komputerowych. Znając bowiem rozwiązanie i jego odchylenie standardowe przy danym ε^* oraz η można otrzymać informację o rozwiązaniu i jego odchyleniu standardowym przy ε^{**} .

Uwaga 3 będzie rozwinięta w następnym punkcie.

IV.2. Oszacowanie różnicy odchyień standardowych rozwiązań w układach liniowych

Dla układów liniowych można podać bardziej szczegółową postać oszacowań pomiędzy dwoma rozwiązaniami oraz ich odchyleniami standardowymi wyznaczonymi dla ε^* i ε^{**} . Rozważać będziemy liniowe stochastyczne równanie różniczkowe postaci:

$$a_n(t) \cdot y^{(n)}(t, \omega) + [a_{n-1}(t) + \varepsilon \cdot \alpha_{n-1}(t, \omega)] \cdot y^{(n-1)}(t, \omega) + \dots + [a_0(t) + \varepsilon \cdot \alpha_0(t, \omega)] \cdot y(t, \omega) = P(t, \omega), \quad (4.11)$$

przy tych samych założeniach co w rozdziale II.1 i IV.1. Ponadto niech $t \in [0, T]$ i $\inf_{t \in [0, T]} |a_n(t)| > 0$

Równanie (4.11) może być sprowadzone do układu równań (4.1) poprzez podstawienie $y(t, \omega) = y_1(t, \omega)$. Układ ten przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t, \omega) &= y_2(t, \omega) \\ &\dots \\ \dot{y}_{n-1}(t, \omega) &= y_n(t, \omega) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\dot{y}_n(t, \omega) = -\frac{1}{a_n(t)} \cdot \left\{ [a_{n-1}(t) + \varepsilon \cdot \alpha_{n-1}(t, \omega)] \cdot y_n(t, \omega) + \dots + [a_0(t) + \varepsilon \cdot \alpha_0(t, \omega)] \cdot y_1(t, \omega) \right\} + \frac{P(t, \omega)}{a_n(t)}$$

Dla wyznaczenia stałych λ i \mathcal{K} z (4.2) i (4.5) wykorzystano zależność:

$$(c_1 + \dots + c_n)^2 \leq n \cdot (c_1^2 + \dots + c_n^2) \quad (4.13)$$

oraz symbol $\text{ess sup} |z(\omega)|$, który dla zmiennej losowej $z(\omega)$ oznacza największe dolne ograniczenie zbioru wartości β , dla których $P\{\omega: |z(\omega)| > \beta\} = 0$. Dla prawie każdej realizacji zachodzi:

$$\begin{aligned} \|\underline{y}(t, \underline{y}', \varepsilon, \omega) - \underline{y}(t, \underline{y}'', \varepsilon, \omega)\| &\leq \sqrt{[y_2'(t, \omega) - y_2''(t, \omega)]^2 + \dots +} \\ &+ [y_n'(t, \omega) - y_n''(t, \omega)]^2 + \frac{n}{\inf_{z \in [0, t]} |a_n^2(z)|} \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} [a_1(z) + \varepsilon \cdot \alpha_1(z, \omega)]^2} \\ &\cdot \left\{ [y_n'(t, \omega) - y_n''(t, \omega)]^2 + \dots + [y_1'(t, \omega) - y_1''(t, \omega)]^2 \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\frac{n}{\inf_{z \in [0, t]} |a_n^2(z)|} \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} [a_1(z) + \varepsilon \cdot \alpha_1(z, \omega)]^2 + 1} \cdot \|\underline{y}(t, \omega) - \underline{y}''(t, \omega)\| \quad (4.14)$$

Stała λ nie musi być traktowana jako wartość zadana dla całego przedziału zmiennej t , można ją skonstruować jako niemalejącą funkcję zmiennej t postaci:

$$\lambda(t) \geq \sqrt{\frac{n}{\inf_{z \in [0, t]} |a_n^2(z)|} \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} [a_1(z) + \varepsilon \cdot \alpha_1(z, \omega)]^2 + 1} \quad (4.15)$$

Dla prawie każdej realizacji zachodzi następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \|\underline{y}(z, \underline{y}(z, \varepsilon^{**}, \omega), \varepsilon^*, \omega) - \underline{y}(z, \varepsilon^{**}, \omega), \varepsilon^{**}, \omega)\| &= \\ &= \frac{|\varepsilon^* - \varepsilon^{**}|}{|a_n(t)|} \cdot \sqrt{[\alpha_{n-1}(t, \omega) \cdot y_n(t, \omega) + \dots + \alpha_0(t, \omega) \cdot y_1(t, \omega)]^2} \leq \\ &\leq \frac{|\varepsilon^* - \varepsilon^{**}|}{\inf_{z \in [0, t]} |a_n(z)|} \cdot \sqrt{n \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} \alpha_1^2(z, \omega) \cdot \|\underline{y}(t, \omega)\|} \quad (4.16) \\ &z \in [0, t] \quad i=0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Stąd \mathcal{K} jako niemalejąca funkcja czasu musi spełniać zależność:

$$\mathcal{K}(t) \geq \frac{|\varepsilon^* - \varepsilon^{**}|}{\inf_{z \in [0, t]} |a_n(z)|} \cdot \sqrt{n \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} \alpha_1^2(z, \omega) \cdot \text{ess sup}_{z \in [0, t]} \|\underline{y}(z, \omega)\|} \quad (4.17)$$

Jeśli rozważać λ i \mathcal{K} jako stałe, wtedy do prawych stron wzorów (4.15) i (4.17) należy podstawić $t=T$, tzn. przyjąć $\lambda = \lambda(T)$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T)$, λ i \mathcal{K} będą wtedy oszacowane dla całego przedziału $t \in [0, T]$.

Powyższe oszacowania zostaną wykorzystane do analizy drgań liniowego stochastycznego oscylatora harmonicznego opisanego równaniem:

$$\frac{d^2 y(t, \omega)}{dt^2} + [2n + \varepsilon \cdot N(t, \omega)] \cdot \frac{dy(t, \omega)}{dt} + [k^2 + \varepsilon \cdot K(t, \omega)] \cdot y(t, \omega) = P(t, \omega), \quad (4.18)$$

gdzie: n, k - stałe; $N(t, \omega), K(t, \omega)$ - procesy stochastyczne, których prawie każde realizacje spełniają nierówności:

$$|N(t, \omega)| \leq C_1, \quad |K(t, \omega)| \leq C_2 \quad \text{oraz} \quad k^2 > 2n + |\varepsilon| \cdot C_1$$

Dla równania (4.18) wyznaczono odchylenie standardowe dla $\varepsilon = 0$ (równanie ze stałymi współczynnikami) i $\varepsilon \neq 0$. Oszacowano błąd pomiędzy nimi wykorzystując wzory (4.4), (4.9), (4.10), (4.15) i (4.17). Otrzymane na drodze oszacowań teoretycznych wyniki porównano z wynikami otrzymanymi przy użyciu metod symulacyjnych. Dla $\varepsilon = 0$ rozwiązanie równania (4.18) można przedstawić w postaci [33, 50] przy ($k > n$):

$$y(t, \omega) = \exp(-n \cdot t) \cdot \left[y(0, \omega) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{\dot{y}(0, \omega) + y(0, \omega) \cdot n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \exp(-n(t-\tau)) \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot (t-\tau)) \cdot P(\tau, \omega) d\tau \quad (4.19)$$

gdzie $y(0, \omega), \dot{y}(0, \omega)$ - losowe warunki początkowe. Do dalszych obliczeń przyjęto proces $P(t, \omega)$ w postaci:

$$P(t, \omega) = A(\omega) \cdot \exp(-\alpha \cdot t), \quad (4.20)$$

gdzie $\alpha > 0$ i $A(\omega)$ - zmienna losowa o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0, A]$. Stąd

$$y(t, \omega) = \exp(-nt) \cdot \left[y(0, \omega) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{\dot{y}(0, \omega) + y(0, \omega) \cdot n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + \frac{A(\omega)}{\sqrt{k^2 - n^2} \cdot (k^2 + \alpha^2 - 2 \cdot n \cdot \alpha)} \cdot \left\{ \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) - \exp(-nt) \cdot \left[(n - \alpha) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] \right\} \quad (4.21)$$

$$\dot{y}(t, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \exp(-nt) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \cdot [n \cdot \dot{y}(0, \omega) + k^2 \cdot y(0, \omega)] + \exp(-nt) \cdot \dot{y}(0, \omega) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{A(\omega)}{\sqrt{k^2 - n^2} \cdot (k^2 + \alpha^2 - 2 \cdot n \cdot \alpha)}$$

$$\left\{ -\alpha \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) + \exp(-nt) \cdot \left[(k^2 - n \cdot \alpha) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \alpha \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] \right\} \quad (4.22)$$

Stała λ (wg (4.15)) przyjmie postać:

$$\lambda = \sqrt{2 \cdot [k^2 + |\varepsilon| \cdot C_2]^2 + 1}, \quad (4.23)$$

a funkcja $\chi(t)$ (wg (4.17))

$$\chi(t) \geq |\varepsilon| \cdot \sqrt{2} \cdot \max\{C_1, C_2\} \operatorname{ess\,sup}_{z \in [0, t]} \|\chi(z, \omega)\|, \quad (4.24)$$

gdzie

$$\|\chi(t, \omega)\| = \sqrt{y^2(t, \omega) + \dot{y}^2(t, \omega)} \quad (4.25)$$

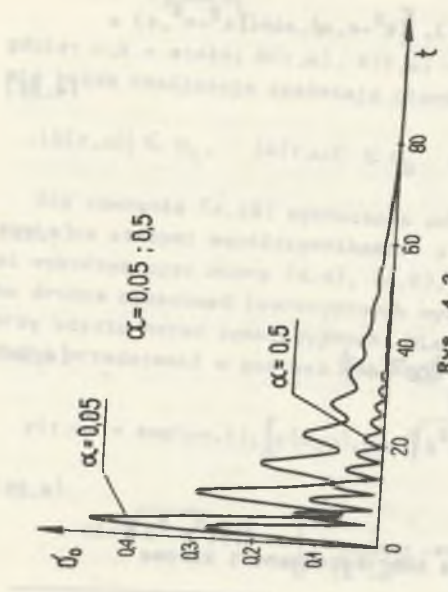
W przypadku gdy warunki początkowe są zdeterminowane i zerowe

$$\operatorname{ess\,sup}_{z \in [0, t]} \|\chi(z, \omega)\| \leq \frac{A}{\sqrt{k^2 - n^2} \cdot (k^2 + \alpha^2 - 2 \cdot n \cdot \alpha)} \cdot \operatorname{ess\,sup}_{z \in [0, t]} \left\{ \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \exp(-\alpha \cdot z) - \exp(-nz) \cdot \left[(n - \alpha) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot z) + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot z) \right] \right\}^2 + \left\{ -\alpha \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + \exp(-nz) \cdot \left[(k^2 - n \cdot \alpha) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot z) + \alpha \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot z) \right] \right\}^2 \quad (4.26)$$

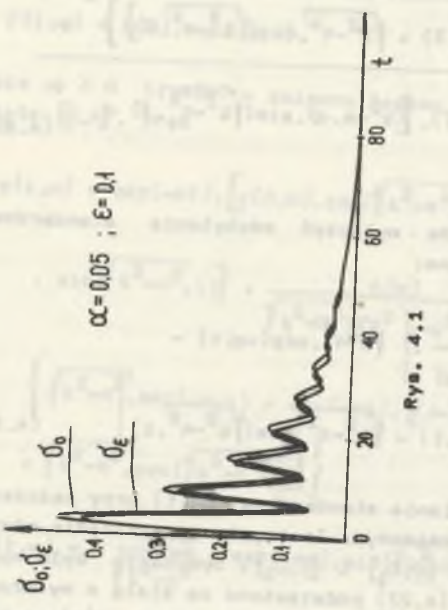
Dla równania (4.18), gdy $\varepsilon = 0$, można wyliczyć odchylenie standardowe $\sigma_0(t)$. Ponieważ $\sigma_A = \frac{A}{\sqrt{12}}$, wynosi ono:

$$\sigma_0(t) = \frac{A}{\sqrt{12} \cdot (k^2 - n^2) \cdot (k^2 + \alpha^2 - 2 \cdot n \cdot \alpha)} \cdot \left| \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) - \exp(-nt) \cdot \left[(n - \alpha) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] \right| \quad (4.27)$$

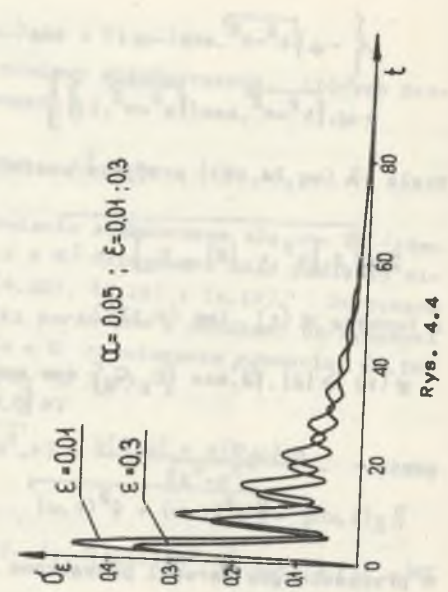
Dla przypadku $\varepsilon \neq 0$ obliczono odchylenie standardowe $\sigma_\varepsilon(t)$ przy założeniu że procesy $N(t, \omega)$ i $K(t, \omega)$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym odpowiednio w przedziałach $[0, C_1]$ i $[0, C_2]$. Symulacja była wykonywana w ten sposób, że we wzorze (4.27) podstawiono za stałą n wyrażenie $n + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot N(\omega)$, a za k^2 wyrażenie $k^2 + \varepsilon \cdot K(\omega)$, gdzie $N(\omega)$ i $K(\omega)$ były losowo wybranymi liczbami z przedziałów $[0, C_1]$ i $[0, C_2]$.



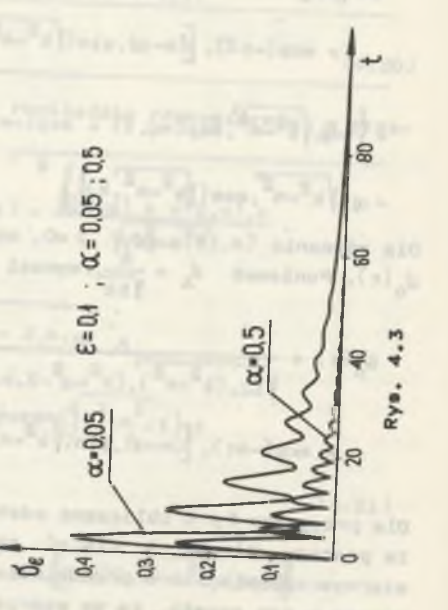
Rys. 4.1



Rys. 4.2



Rys. 4.3



Rys. 4.4

Do obliczeń numerycznych założono, że $n = C_1 = 0,1$; $k = C_2 = 1$; $A = 1$.
 Rysunek 4.1 przedstawia różnicę pomiędzy $\sigma_0(t)$ i $\sigma_\epsilon(t)$ dla $\alpha = 0,05$ i $\epsilon = 0, 0,1$. Różnica nie jest tak wielka, jak to wynika z wartości funkcji $\eta(t)$ - oszacowania różnicy (4.10) - danej wzorem (4.4). W poniższej tabelce są zaprezentowane wartości funkcji $\eta(t)$.

t	$\eta(t)$
0,5	0,054136
1,0	0,340762
1,5	1,336004
2,0	4,196598
3,0	31,26965
5,0	1267,882
10,0	13148528

Widać, że oszacowanie różnicy dane przez wzór (4.4) jest znacznie większe ("grubsze") niż różnica pomiędzy odchyleniami standardowymi widoczną na rys. 4.1. Wpływ parametru α na wartości odchylenia standardowego jest widoczny na rys. 4.2 dla $\sigma_0(t)$ i rys. 4.3 dla $\sigma_\epsilon(t)$. Założono, że $\epsilon = 0,1$ i $\alpha = 0,05; 0,5$. Dla większych α maksymalne wartości odchylenia standardowego są mniejsze. Wpływ parametru ϵ na wartości $\sigma_\epsilon(t)$ przed stawiono na rys. 4.4. Założono, że $\epsilon = 0,01; 0,3$ (obliczenia przeprowadzono także dla $\epsilon = 0,05; 0,1$) i $\alpha = 0,05$ (także dla $\alpha = 0,5$). Jeżeli ϵ przyjmuje większe wartości, wtedy maksymalne wartości $\sigma_\epsilon(t)$ są mniejsze. Także okres pomiędzy kolejnymi maksymalnymi wartościami jest mniejszy dla większych α lub ϵ . Inne przykłady wpływu parametru ϵ na wartości wariancji można znaleźć w [70].

Na podstawie badań teoretycznych i numerycznych przeprowadzonych w rozdziałach III i IV można sformułować wniosek:

Wniosek

Wpływ małego parametru ϵ na charakterystyki probabilistyczne rozwiązań nie jest tak wielki, jak to wynika z oszacowań teoretycznych.

V. WRAZLIWOŚĆ STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Jeśli badać charakterystyki probabilistyczne układu dynamicznego pojawia się pytanie, jaki wpływ mają na nie zmiany parametrów układu. W literaturze bada się to zagadnienie przede wszystkim w przypadku zdeterminowanym [10, 15, 80, 84], rozważając tak zwane funkcje wrażliwości. W p. V.1 zostaną skonstruowane równania stochastyczne dla funkcji wrażliwości pierwszego i drugiego rzędu. W p. V.2 zostaną one zastosowane do aproksymacji dowolnego rozwiązania lub jego momentów. Aproksymacja ta skraca czas obliczeń komputerowych w przypadku wyznaczenia rozwiązań lub jego charakterystyk probabilistycznych dla kilku wartości parametrów układu. Proponowana metoda aproksymacji jest wykorzystywana w p. V.3 do badania stochastycznych drgań nieliniowego oscylatora harmonicznego, w p. V.4 - drgań modelu przekładni zębatej, a w p. V.5 - drgań modelu pojazdu (zawieszenia).

V.1. Metoda analizy wrażliwości nieliniowych układów stochastycznych za pomocą metod symulacyjnych

Rozważać będziemy układ nieliniowych stochastycznych równań różniczkowych postaci [64]:

$$\begin{cases} f_1(y_1^{(n)}, \dots, y_q^{(n)}, t, \alpha, \omega) = 0 \\ \dots \\ f_q(y_1^{(n)}, \dots, y_q^{(n)}, t, \alpha, \omega) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

gdzie:

- q - ilość zmiennych, ilość równań;
- t - czas;
- ω - zdarzenie elementarne;
- α - stały parametr, ze względu na który jest badana wrażliwość rozwiązania. Założono znajomość warunków początkowych.

Powyższe równania rozumiane są jako równania dla realizacji procesów stochastycznych będących ich rozwiązaniami. Zakładamy, że poniższe założenia są spełnione dla prawie wszystkich realizacji, dzięki czemu można układ równań (5.1) rozwiązywać za pomocą metod symulacyjnych, bowiem dla

każdego ω układ równań (5.1) jest układem zdeterminowanym. Rozwiązując go otrzymuje się 1 realizację procesu $y_1(t, \omega)$. Ich zbiór daje proces stochastyczny będący rozwiązaniem układu (5.1). O funkcjach f_1, \dots, f_q założono, że są różniczkowalne częstotkowo odpowiednią ilość razy (zależy to od rzędu rozważanej stochastycznej funkcji wrażliwości) względem $y_1^{(j)}$ oraz α_j gdzie $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 0, 1, \dots, n$ oraz że realizacje $y(t, \alpha, \omega)$ są różniczkowalne względem α . Różniczkując układ równań (5.1) względem α (dla $\alpha = \alpha_0$) otrzymano:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f_q}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (5.2)$$

będą przy podetawieniu $\epsilon_1 \frac{df}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}$ (jest to stochastyczna funkcja wrażliwości I-go rzędu)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \epsilon_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \epsilon_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \epsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \epsilon_q = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \epsilon_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \epsilon_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_1} \cdot \epsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \cdot \epsilon_q = - \frac{\partial f_q}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (5.3)$$

Analogicznie można postąpić, gdy w układzie dynamicznym występuje r parametrów $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, względem których badamy wrażliwość rozwiązania. Wtedy układ równań ma postać:

$$\begin{cases} f_1(y_1^{(n)}, \dots, y_q^{(n)}, t, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \omega) = 0 \\ \dots \\ f_q(y_1^{(n)}, \dots, y_q^{(n)}, t, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \omega) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Różniczkując po $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ wszystkie równania od 1, ..., q w punktach $\alpha_{10}, \dots, \alpha_{r0}$ otrzymano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_a}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial f_a}{\partial \alpha_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_r} = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_r} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_a}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_1^{(n)}}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \frac{\partial y_q^{(n)}}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_r} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial \alpha_r} = - \frac{\partial f_a}{\partial \alpha_r} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Jeśli przyjąć $\delta_{ij} = \left. \frac{df}{d\alpha_j} \right|_{\alpha_j = \alpha_{j0}}$ dla $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, r$ wtedy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1-szy segment} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_{11}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_{q1}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \delta_{11} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \delta_{q1} = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_a}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_{11}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_{q1}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_1} \cdot \delta_{11} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q} \cdot \delta_{q1} = - \frac{\partial f_a}{\partial \alpha_1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \dots \dots \dots \\ \text{r-ty segment} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_{1r}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_{qr}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \delta_{1r} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \delta_{qr} = - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_r} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_a}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_{1r}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_{qr}^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_1} \cdot \delta_{1r} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q} \cdot \delta_{qr} = - \frac{\partial f_a}{\partial \alpha_r} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Dla q niewiadomych i r parametrów otrzymuje się $q \cdot r$ funkcji wrażliwości δ_{ij} oraz $q \cdot r$ równań na te funkcje (5.6). Badając wpływ jednego parametru otrzymuje się mniejszy układ równań (5.3), dlatego też, jeśli można, to lepiej badać wpływ poszczególnych parametrów i otrzymywać na nie osobno układy równań. Chyba, że wszystkie zależą się na raz. W powyższym układzie r -segmentowym tylko prawe strony są różne pomiędzy segmentami i można go rozwiązać osobno r razy, korzystając z procedury dla układu (5.3).

Dotychczasowa analiza dotyczyła wykorzystania stochastycznych funkcji wrażliwości I rzędu (rozpatrywano pierwszą pochodną rozwiązań względem parametru). Można tę analizę rozszerzyć na stochastyczne funkcje wrażliwości drugiego i wyższych rzędów. Różniczkując układ (5.3) jeszcze raz względem α (dla $\alpha = \alpha_0$) otrzymano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \varphi_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \varphi_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \varphi_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \cdot \varphi_q = \\ = - \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha \partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha \partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha \partial y_1} \cdot \delta_1 + \dots + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha \partial y_q} \cdot \delta_q \right] \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_a}{\partial y_1^{(n)}} \cdot \varphi_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q^{(n)}} \cdot \varphi_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_1} \cdot \varphi_1 + \dots + \frac{\partial f_a}{\partial y_q} \cdot \varphi_q = \\ = - \left[\frac{\partial^2 f_a}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f_a}{\partial \alpha \partial y_1^{(n)}} \cdot \delta_1^{(n)} + \dots + \frac{\partial^2 f_a}{\partial \alpha \partial y_q^{(n)}} \cdot \delta_q^{(n)} + \dots + \frac{\partial^2 f_a}{\partial \alpha \partial y_1} \cdot \delta_1 + \dots + \frac{\partial^2 f_a}{\partial \alpha \partial y_q} \cdot \delta_q \right] \end{array} \right. \quad (5.7)$$

gdzie

$$\varphi_1 = \left. \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_0} = \left. \frac{\partial^2 y_1}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_0} \quad (5.8)$$

Równania, które spełniają stochastyczne funkcje wrażliwości II rzędu mają lewe strony takie same jak równania dla stochastycznych funkcji wrażliwości I rzędu, prawe strony zawierają wyrażenia z δ_1 , które są znane na podstawie równania (5.3). Aby otrzymać równania, które spełniają stochastyczne funkcje wrażliwości II rzędu w przypadku r parametrów, należałoby układ (5.5) zróżniczkować względem $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ w punkcie $\alpha_{10}, \dots, \alpha_{r0}$ oraz wprowadzić oznaczenia pomocnicze:

$$\delta_{ijl} = \left. \frac{df}{d\alpha_l} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \alpha_l} \right|_{\alpha_l = \alpha_{l0}} = \left. \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_j = \alpha_{j0}} \quad \alpha_l = \alpha_{l0}$$

dla $i = 1, \dots, q$ oraz $j, l = 1, 2, \dots, r$. Będziemy wtedy mieli r układów r segmentowych, podobnie jak w (5.6), bowiem jest $q \cdot r^2$ zmiennych δ_{ijl} i tyle samo równań. Praktyczniej jest

więc zmieniać tylko 1 parametr, ale można też przy większej ilości parametrów korzystać z procedur numerycznych wykorzystywanych w przypadku 1 parametru. Powyższe postępowanie można rozszerzyć na przypadek stochastycznych funkcji wrażliwości wyższych rzędów. W przypadku 1 parametru lewe strony układów są zawsze te same, tylko po prawych występują wyrażenia zawierające kombinacje stochastycznych funkcji wrażliwości niższych rzędów (dla wielu parametrów segmenty są podobne). Ponadto w przypadku 1 bądź wielu parametrów układy równań na stochastyczne funkcje wrażliwości są liniowe, o zerowych warunkach początkowych.

V.2. Aproksymacja dowolnego rozwiązania lub jego momentów ze pomocą szeregu zawierającego funkcje wrażliwości różnych rzędów

W tym rozdziale zostanie pokazane zastosowanie stochastycznych funkcji wrażliwości do badania rozwiązania układu dynamicznego dla dowolnej wartości parametru α , gdy znane jest rozwiązanie dla $\alpha = \alpha_0$. Założymy, że badana jest wrażliwość ze względu na 1 parametr (5.1), a więc obowiązują przy obliczeniu stochastycznych funkcji wrażliwości układy równań (5.3), (5.7) itp. I-te rozwiązanie dla dowolnego α można przedstawić za pomocą rozwiązania w punkcie $\alpha = \alpha_0$ oraz stochastycznej funkcji wrażliwości wg wzoru (podobnego jak szereg Taylora)

$$y_1(t, \alpha, \omega) = y_1(t, \alpha_0, \omega) + \sigma_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot \Delta\alpha + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot (\Delta\alpha)^2 + \dots \tag{5.9}$$

dla $i = 1, 2, \dots, q$; $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$.
Można więc badać różnice pomiędzy rozwiązaniem (dla dowolnego α) oraz skończonymi sumami wyrażeń branych z prawej strony wzoru (5.9):

$$\begin{aligned} R_{01}(t, \alpha_0, \alpha, \omega) &= y_1(t, \alpha, \omega) - y_1(t, \alpha_0, \omega) \\ R_{11}(t, \alpha_0, \alpha, \omega) &= y_1(t, \alpha, \omega) - [y_1(t, \alpha_0, \omega) + \sigma_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot \Delta\alpha] \\ R_{21}(t, \alpha_0, \alpha, \omega) &= y_1(t, \alpha, \omega) - [y_1(t, \alpha_0, \omega) + \sigma_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot \Delta\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot (\Delta\alpha)^2] \\ &\dots \\ R_{p1}(t, \alpha_0, \alpha, \omega) &= y_1(t, \alpha, \omega) - [y_1(t, \alpha_0, \omega) + \sigma_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot \Delta\alpha + \\ &+ \dots + \frac{1}{p!} \cdot \varphi_1(t, \alpha_0, \omega) \cdot (\Delta\alpha)^p] \end{aligned} \tag{5.10}$$

gdzie przez φ_1 oznaczono funkcję wrażliwości rzędu p.

Można więc nie rozwiązując układu (5.1) dla każdego α z osobna znaleźć dobre przybliżenie, gdy znamy jego rozwiązanie dla jakiegoś α_0 i policzone w tym punkcie funkcje wrażliwości pierwszego bądź jeszcze wyższych rzędów. Wtedy wyrażenia występujące w nawiasach prawej strony wzoru (5.10) są przybliżeniem rozwiązania $y_1(t, \alpha, \omega)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, q$. Jest to szczególnie wygodna podejście; bowiem wystarczy znać 1 rozwiązanie układu wyjściowego nieliniowego typu (5.1) przy $\alpha = \alpha_0$ oraz rozwiązania układów liniowych typu (5.3), (5.7) itp. Z nich można skonstruować dobre przybliżenie dla dowolnego α . Jeśli interesuje nas uzyskanie wyników dla kilku α (a tym bardziej wielu α), wtedy zyskuje się znacznie na czasie obliczeń numerycznych stosując powyższą aproksymację. Przeprowadzone badania numeryczne dla różnych układów dynamicznych wskazywały na dużą dokładność rozwiązań przybliżonych przy aproksymacji rozwiązań dokładnych i wykorzystaniu tylko funkcji wrażliwości 1 bądź 1 i 2 rzędu.

Podobna przybliżenia można czynić dla układów o r parametrach, bardziej skomplikowana jest wtedy tylko suma (5.9) (analogicznie jak wielowymiarowy szereg Taylora), która przyjmie postać:

$$\begin{aligned} y_1(t, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \omega) &= y_1(t, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{r0}, \omega) + \\ &+ \sum_{j=1}^r \sigma_{1j}(t, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{r0}, \omega) \cdot [\alpha_j - \alpha_{j0}] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^r \varphi_{1jl}(t, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{r0}, \omega) \cdot [\alpha_j - \alpha_{j0}] \cdot [\alpha_l - \alpha_{l0}] + \dots \end{aligned} \tag{5.11}$$

Różnica występujące w (5.10) są procesami stochastycznymi. Ich realizacje otrzymuje się przy wykorzystaniu symulacji losowych parametrów układu dynamicznego oraz rozwiązywaniu odpowiednich układów równań różniczkowych typu (5.1), (5.3), (5.7). Mając realizacje procesów można na ich podstawie badać momenty takie, jak: wartości średnie, wariancja itd., która stanowi charakterystyki probabilistyczne rozwiązań. Tak więc zbieżność szeregu R_{p1} do zera może być badana jako zbieżność jego realizacji (które są funkcjami) do zera przy $p \rightarrow \infty$ bądź też jako zbieżność jego momentów które są funkcjami zdeterminowanymi do zera.

Same obliczenia momentów, gdy znane są realizacje procesów stochastycznych, są robione w maszynie cyfrowej, nie obciążając znacząco czasu obliczeń.

V.3. Wrażliwość stochastyczna nieliniowego oscylatora

Rozważać będziemy drgania nieliniowego oscylatora poddanego wymuszeniu stochastycznemu, którego ruch opisany jest równaniem:

$$\ddot{y}(t, \omega) + a_1 \dot{y}(t, \omega) + a_2 y(t, \omega) \cdot [1 + \alpha \cdot y^2(t, \omega)] = A(\omega) \cdot \cos(k \cdot t + \varphi(\omega)), \quad (5.12)$$

gdzie a_1, a_2, α, k - stałe, $A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ - zmienne losowe o rozkładzie równomiernym odpowiednio w przedziałach $[0, A]$ i $[0, 2\pi]$. Założono zerowe warunki początkowe. Badana będzie wrażliwość wartości średniej oraz wariancji rozwiązania na zmianę parametru α , a także zbieżność wartości średniej i wariancji różnic R_0, R_1, R_2 podanych wzorem (5.10) ($i=1$ więc je opuszczono). Ustalając wartość parametru $\alpha = \alpha_0$ dla równania (5.12) uzyskano wg wzorów (5.3) i (5.7) równania na stochastyczną funkcję wrażliwości I i II rzędu w postaci:

$$\ddot{\sigma}(t, \alpha_0, \omega) + a_1 \dot{\sigma}(t, \alpha_0, \omega) + a_2 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_0 \cdot y^2(t, \omega)) \cdot \sigma(t, \alpha_0, \omega) = -a_2 \cdot y^3(t, \omega) \quad (5.13)$$

$$\dot{\vartheta}(t, \alpha_0, \omega) + a_1 \vartheta(t, \alpha_0, \omega) + a_2 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_0 \cdot y^2(t, \omega)) \cdot \vartheta(t, \alpha_0, \omega) = -3a_2 \cdot y^2(t, \omega) \cdot \sigma(t, \alpha_0, \omega) \quad (5.14)$$

Występujący w równaniach (5.13) i (5.14) proces stochastyczny $y(t, \omega)$ jest rozwiązaniem równania (5.12) przy $\alpha = \alpha_0$. Do obliczeń numerycznych przyjęto $a_1 = 1, a_2 = 10, \alpha_0 = 5, A = 5, k = 2$ oraz $\alpha = 5,5$.

Rysunki 5.1 i 5.2 przedstawiają odpowiednio wartości średnie i wariancje rozwiązań równania (5.12). Zmiana wartości parametru wynosi tutaj 10% ($\alpha_0 = 5, \alpha = 5,5, \Delta\alpha = 0,5$).

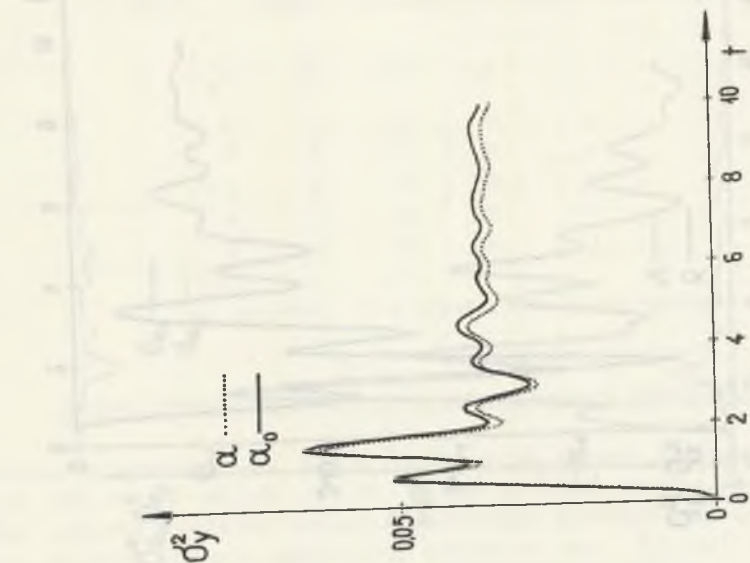
Rysunki 5.3 i 5.4 przedstawiają odpowiednio wartości średnie i wariancje stochastycznych funkcji wrażliwości I i II rzędu. Dla $\vartheta(t, \alpha_0, \omega)$ funkcje te przyjmują mniejsze wartości niż dla funkcji $\sigma(t, \alpha_0, \omega)$.

Rysunki 5.5 i 5.6 przedstawiają odpowiednio wartości średnie i wariancje różnic R_1 i R_2 wg (5.10). Wartości te wyraźnie maleją przy stosowaniu kolejnej różnicy. Na rysunkach nie zaznaczono wartości średnich i wariancji dla R_0 , bowiem są za duże różnice w wartościach pomiędzy R_0 i R_2 co wpływałoby na ich nieczytelność. Na podstawie otrzymanych wyników można więc stwierdzić dobrą zbieżność przybliżeń (już nawet pierwszego) do rozwiązania $y(t, \omega)$ przy powyższych danych liczbowych.

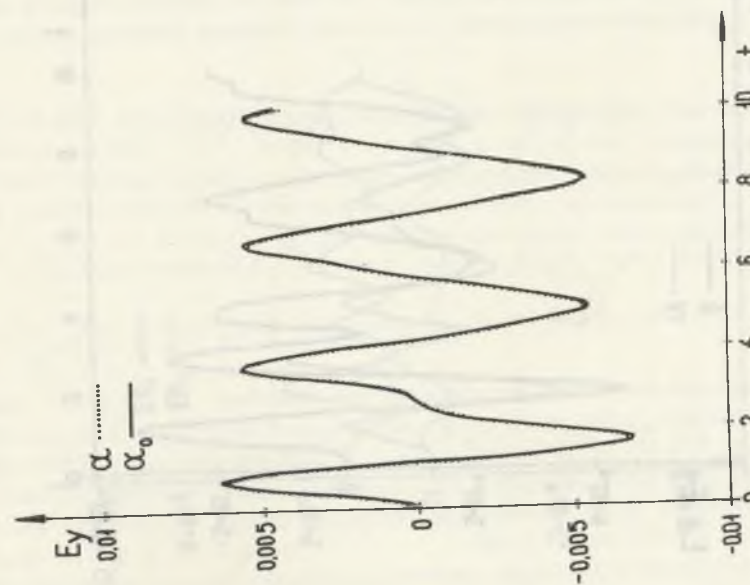
$$y(t, \alpha, \omega) \approx y(t, \alpha_0, \omega) + \sigma(t, \alpha_0, \omega) \cdot \Delta\alpha + \frac{1}{2} \cdot \vartheta(t, \alpha_0, \omega) \cdot (\Delta\alpha)^2 \quad (5.15)$$

Badano także wpływ parametrów równania (5.12) na wartości średnie i wariancje rozwiązania $y(t, \omega)$ oraz stochastycznej funkcji wrażliwości I rzędu.

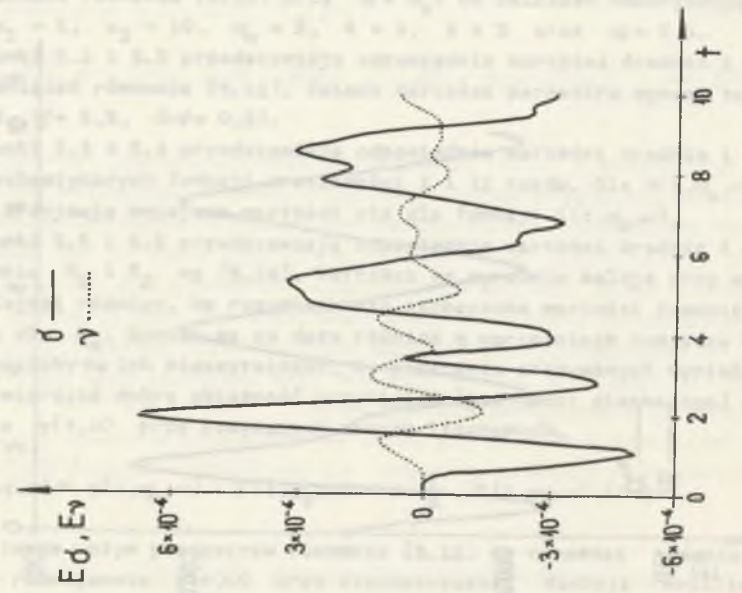
Gdy zwiększono α, a_2 lub a_1 , wtedy malały wartości średnie i wariancje $Ey, E\sigma, \sigma_y^2, \sigma_\sigma^2$.



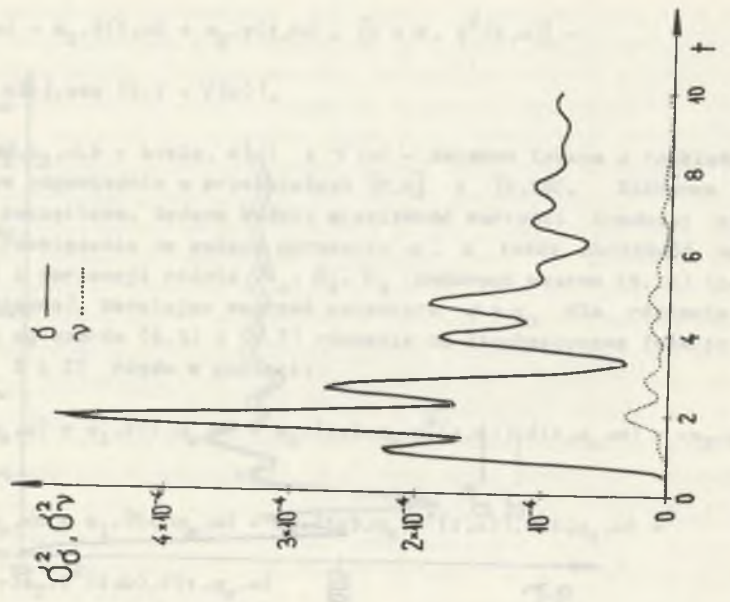
Rys. 5.2



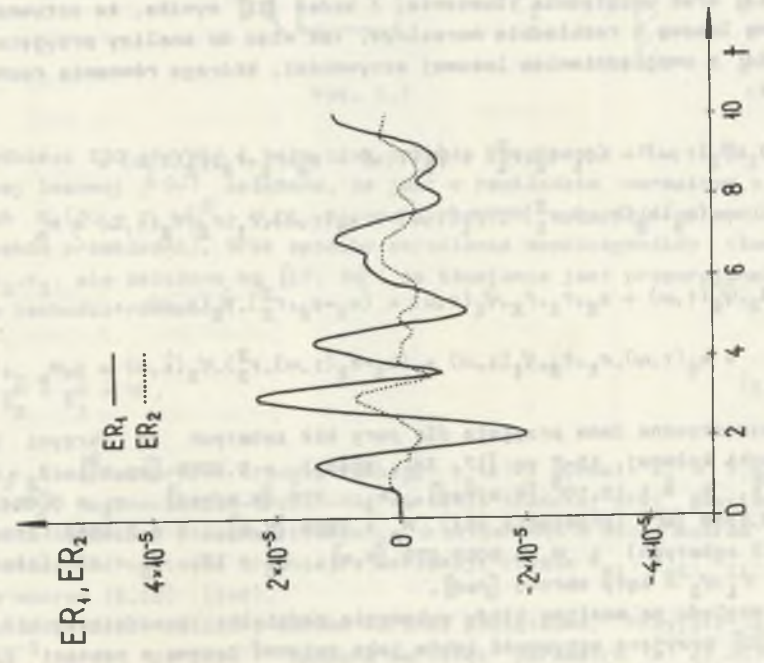
Rys. 5.1



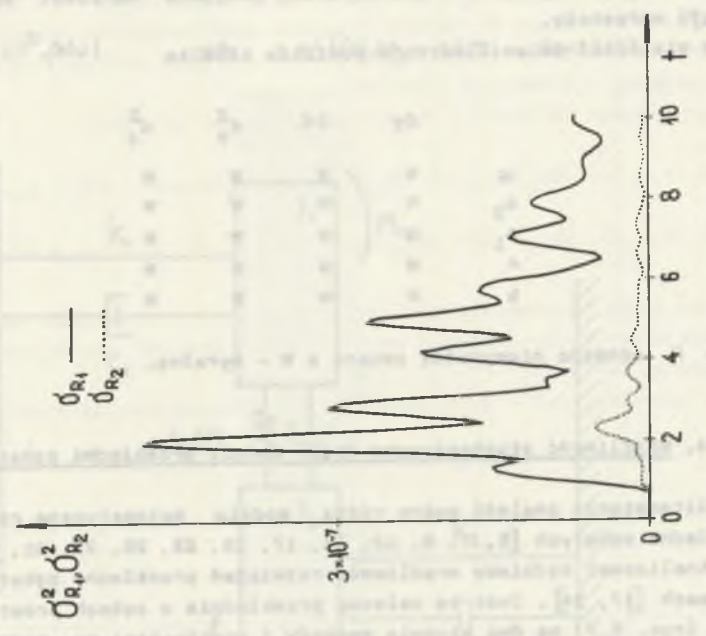
Rys. 5.3



Rys. 5.4



Rys. 5.5



Rys. 5.6

Natomiast gdy zwiększono A lub k, wtedy powyższe wartości średnie i wariancje wzrastały.

Wpływ wielkości zmian ilustruje poniższa tabelka

	Ey	Eδ	σ _y ²	σ _δ ²
α	N	W	W	W
a ₂	W	W	W	W
a ₁	N	W	W	W
A	W	W	W	W
k	W	W	W	W

gdzie N oznacza niewyraźną zmianę a W - wyraźną.

V.4. Wrażliwość stochastyczna drgań modelu przekładni zębatej

W literaturze znaleźć można różne modele matematyczne rzeczywistych przekładni zębatych [5, 7, 8, 12, 13, 17, 19, 22, 26, 27, 31, 32, 34, 41, 62]. Analizować będziemy wrażliwość rozwiązań przekładni zębatej badanej w prasach [17, 34]. Jest to walcowa przekładnia o zębach proatych, której model (rys. 5.7) ma dwa stopnie swobody i oparty jest na rozważaniach z [12, 13] oraz uwzględnia tłumienie. Z badań [21] wynika, że sztywność jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Tak więc do analizy przyjęto model [17, 34] z uwzględnieniem losowej sztywności, którego równania ruchu mają postać:

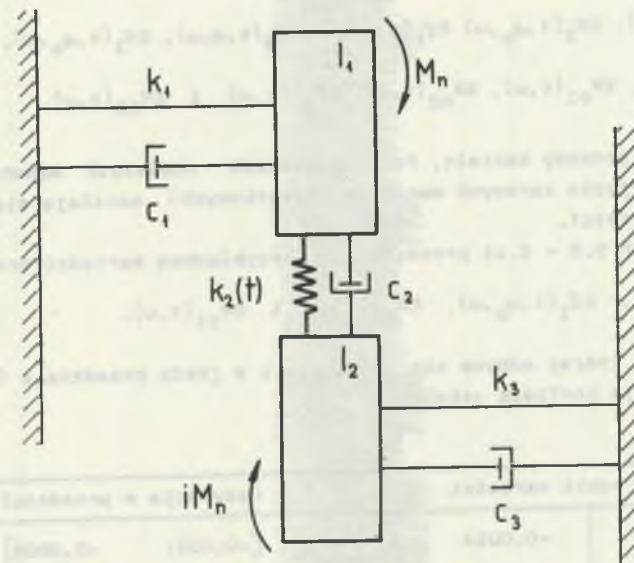
$$\left\{ \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1(t, \omega) + (c_1 + c_2 \cdot r_1^2) \cdot \dot{\varphi}_1(t, \omega) + c_2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \dot{\varphi}_2(t, \omega) + \\ + (k_1 + k_2(t, \omega) \cdot r_1^2) \cdot \varphi_1(t, \omega) + k_2(t, \omega) \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \varphi_2(t, \omega) = M_n \\ J_2 \ddot{\varphi}_2(t, \omega) + c_2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \dot{\varphi}_1(t, \omega) + (c_3 + c_2 \cdot r_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2(t, \omega) + \\ + k_2(t, \omega) \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \varphi_1(t, \omega) + (k_3 + k_2(t, \omega) \cdot r_2^2) \cdot \varphi_2(t, \omega) = i \cdot M_n \end{aligned} \right. \quad (5.16)$$

Deterministyczne dane przyjęto dla pary kół zębatych ze skrzyni biegów ładowarki kołowej t5-P wg [17, 34]. Stąd J₁ = 0,0058 [kg·m²], J₂ = 0,2228 [kg·m²], k₁ = 1,12·10⁵ [N·m/rad], k₃ = 920 [N·m/rad], r₁ = 0,054 [m], r₂ = 0,1348 [m] (promienie kół), M_n = 2256 [N·m], i = 2,6667 (przełożenie kół zębatych) i M_n = 6016,075 [N·m], z₁ = 18, z₂ = 48 (ilość zębów), φ₁, φ₂ - kąty obrotu [rad].

Ze względu na możliwe błędy wykonania podziałki zasadniczej kół zębatych [21] przyjęto sztywność zębów jako zmienną losową o postaci (liczba przyporu ε = 1,44):

$$k_2(t) = \begin{cases} 5,6 \cdot 10^8 \cdot \beta(\omega) & \text{gdy } t \in [n \cdot T; (0,56 + n) \cdot T) \\ 10^9 \cdot \beta(\omega) & \text{gdy } t \in [(0,56 + n) \cdot T; (n+1) \cdot T) \end{cases} \quad (5.17)$$

n = 0, 1, 2, ...



Rys. 5.7

Przy prędkości 330 obr/min i koła czas trwania zazębienia T = 0,01 [s]. O zmiennej losowej β(ω) założono, że jest o rozkładzie normalnym o parametrach E(β) = 1, σ_β² = 0,01. Ma ona okres 288 wartości (co wynika z ilości zębów przekładni). Brak sposobu określenia współczynników tłumienia c₁, c₂, c₃, ale założono wg [17, 34], że tłumienie jest proporcjonalne, tzn., że zachodzi równość:

$$\frac{c_1}{k_1} = \frac{c_2}{k_2} = \frac{c_3}{k_3} = \alpha, \quad (5.18)$$

gdzie k₂ oznacza wartość średnią funkcji k₂(t) i wynosi k₂ = 7,8·10⁸ [N·m/rad·m²]. Badana będzie wrażliwość wartości średniej oraz wariancji rozwiązania na zmianę stosunku tłumienia i sztywności α danej wzorem (5.18) a także zbliżność wartości średniej i wariancji różnic R₀₁, R₀₂, R₁₁, R₁₂ podanych wzorem (5.10) (i=2).

Dla układu (5.16) założono zerowe warunki początkowe. Przyjęto α₀ = 4,95·10⁻⁵ oraz α = 6·10⁻⁵ (zmiana wartości parametru o 21,2%). Do

obliczeń numerycznych wprowadzono transformację czasu $\tilde{t} = 10 \cdot t$ (w celu zmniejszenia różnicy w rzędach wartości współczynników układu równań (5.16)) Tak więc zaznaczona na wykresach na osi poziomej wartość czasu jest 10 razy większa niż wartość rzeczywista czasu.

Przeprowadzono obliczenia numeryczne wartości średnich:

$$E\varphi_1(t, \alpha_0, \omega), E\varphi_2(t, \alpha_0, \omega), E\psi_1(t, \alpha, \omega), E\psi_2(t, \alpha, \omega), E\sigma_1(t, \alpha_0, \omega),$$

$$E\sigma_2(t, \alpha_0, \omega), ER_{01}(t, \omega), ER_{02}(t, \omega), ER_{11}(t, \omega) \text{ i } ER_{12}(t, \omega).$$

Wykresy miały podobny kształt. Po początkowych większych wahanich (za względu na przyjęcie zerowych warunków początkowych) ustalają się one wokół pewnej wartości.

Na rysunkach 5.8 - 5.11 przedstawiono przykładowo wartości średnie

$$E\varphi_1(t, \alpha_0, \omega), E\sigma_1(t, \alpha_0, \omega), ER_{01}(t, \omega) \text{ i } ER_{11}(t, \omega).$$

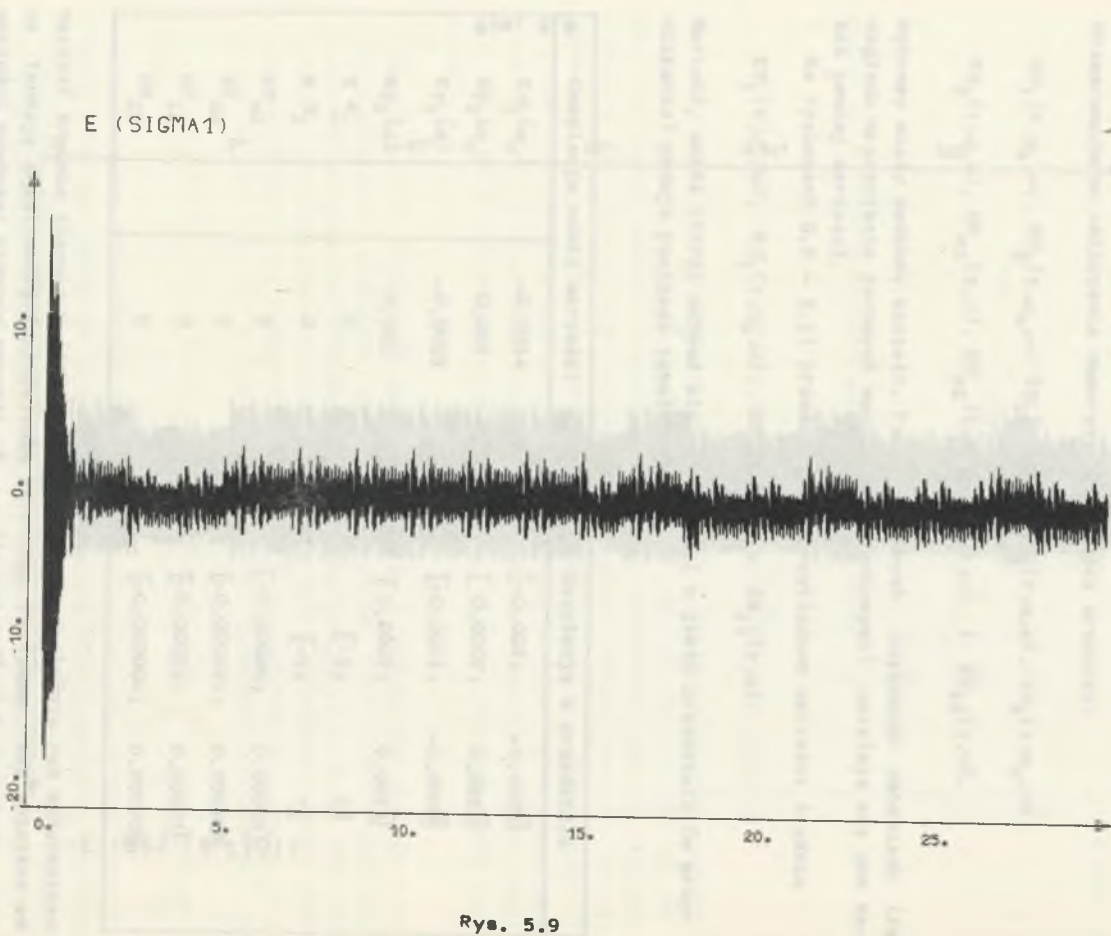
Wartość, wokół której odbywa się oscylacja i w jakim przedziale (w przybliżeniu) podaje poniższa tabelka.

Oscylacja wokół wartości		Oscylacja w przedziale
$E\varphi_1(\alpha_0)$	-0,0014	[-0,002; -0,0008]
$E\varphi_2(\alpha_0)$	0,001	[0,0007; 0,0013]
$E\psi_1(\alpha)$	-0,0015	[-0,0021; -0,0009]
$E\psi_2(\alpha)$	0,001	[0,0007; 0,0013]
$E\sigma_1$	0	[-2; 2]
$E\sigma_2$	0	[-1; 1]
ER_{01}	0	[-0,00006; 0,00006]
ER_{02}	0	[-0,000025; 0,000025]
ER_{11}	0	[-0,00003; 0,00003]
ER_{12}	0	[-0,000008; 0,000008]

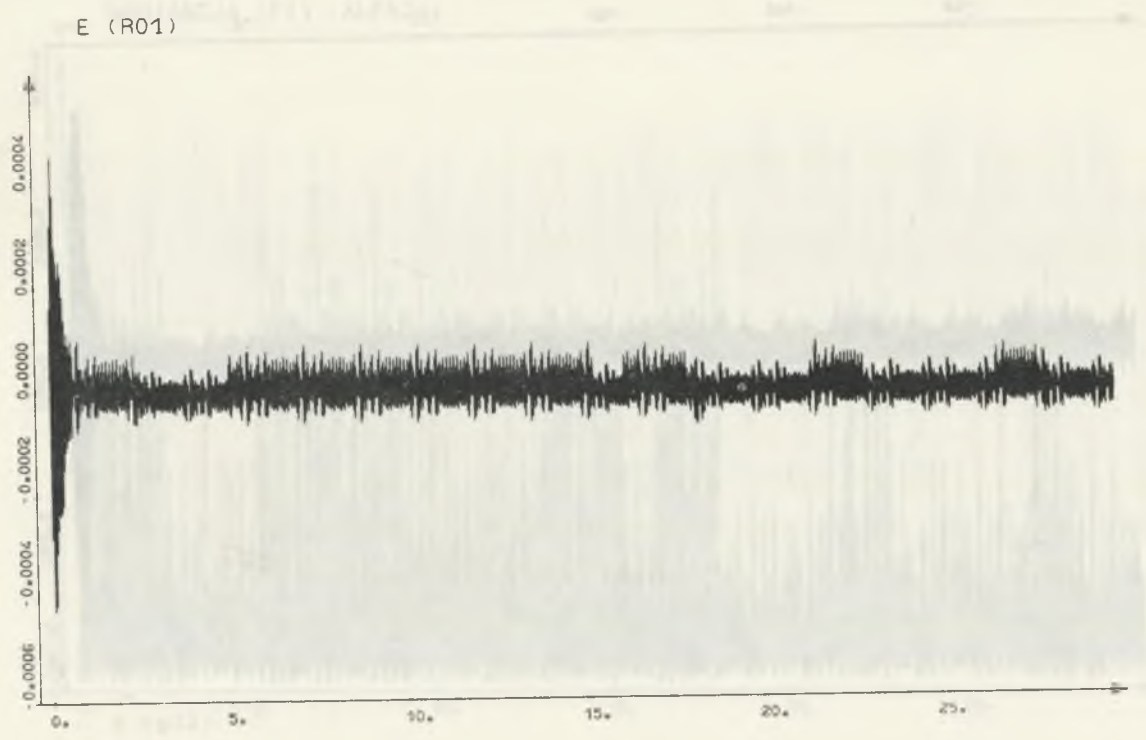
Wartość średnia pierwszej różnicy R_{11} (która uwzględnia już stochastyczną funkcję wrażliwości I rzędu) dla kąta φ_1 jest dwa razy mniejsza od wartości średniej różnicy zerowej R_{01} - dla kąta φ_2 aż trzy razy. Tak więc stosowanie w aproksymacji tylko stochastycznej funkcji wrażliwości I rzędu przy zmianach parametru o powyżej 20% daje dobre przybliżenie wartości średnich.



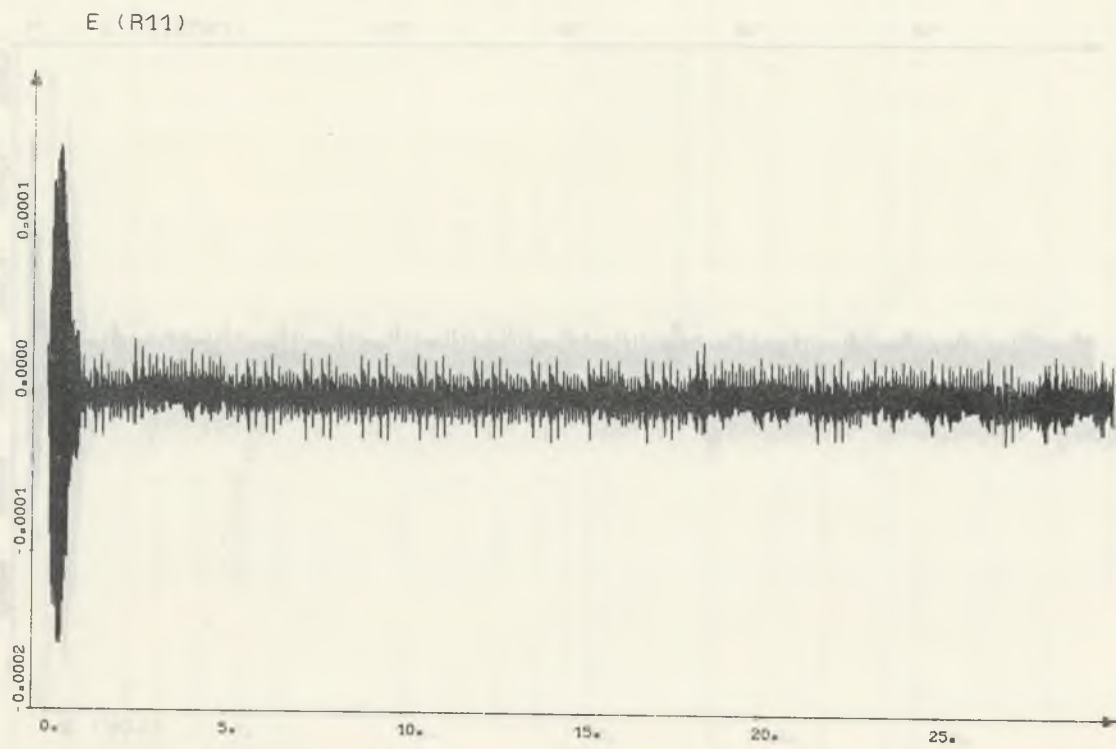
Rys. 5.8



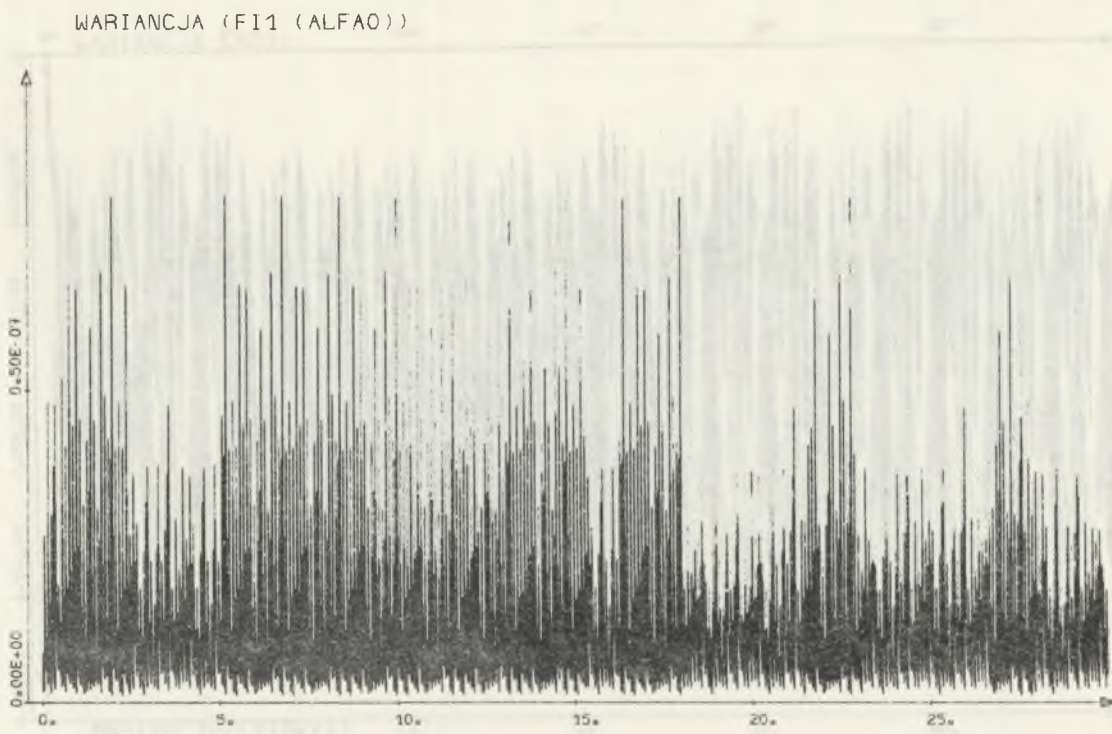
Rys. 5.9



Rys. 5. 10

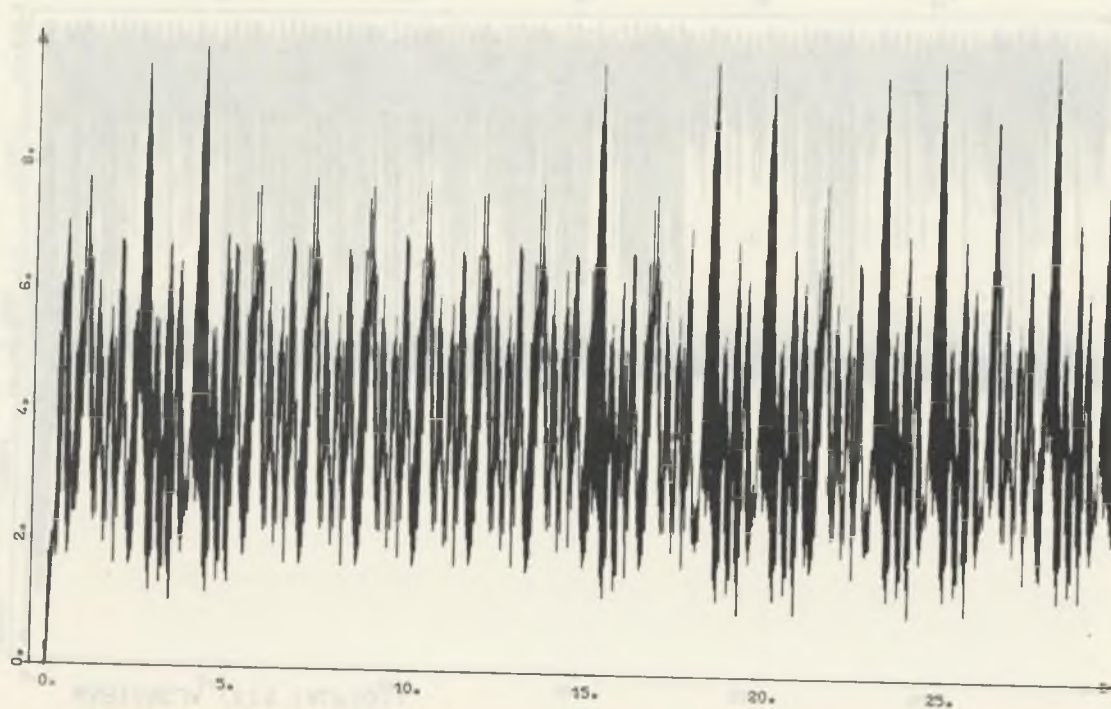


Rys. 5.11



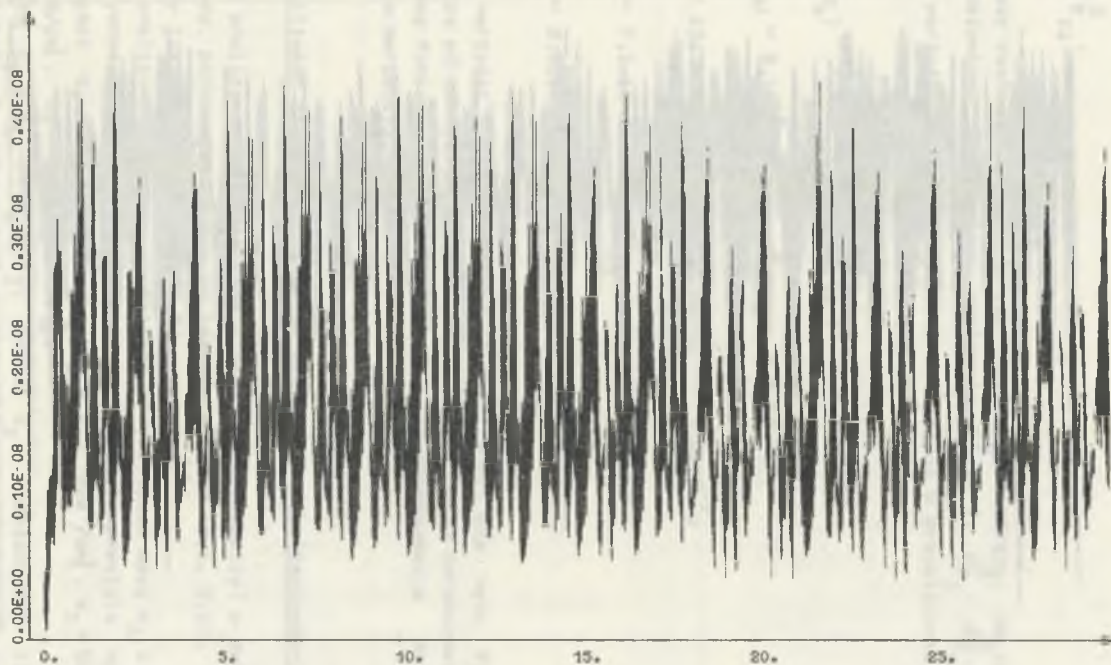
Rys. 5.12

WARIANCJA (SIGMA1)

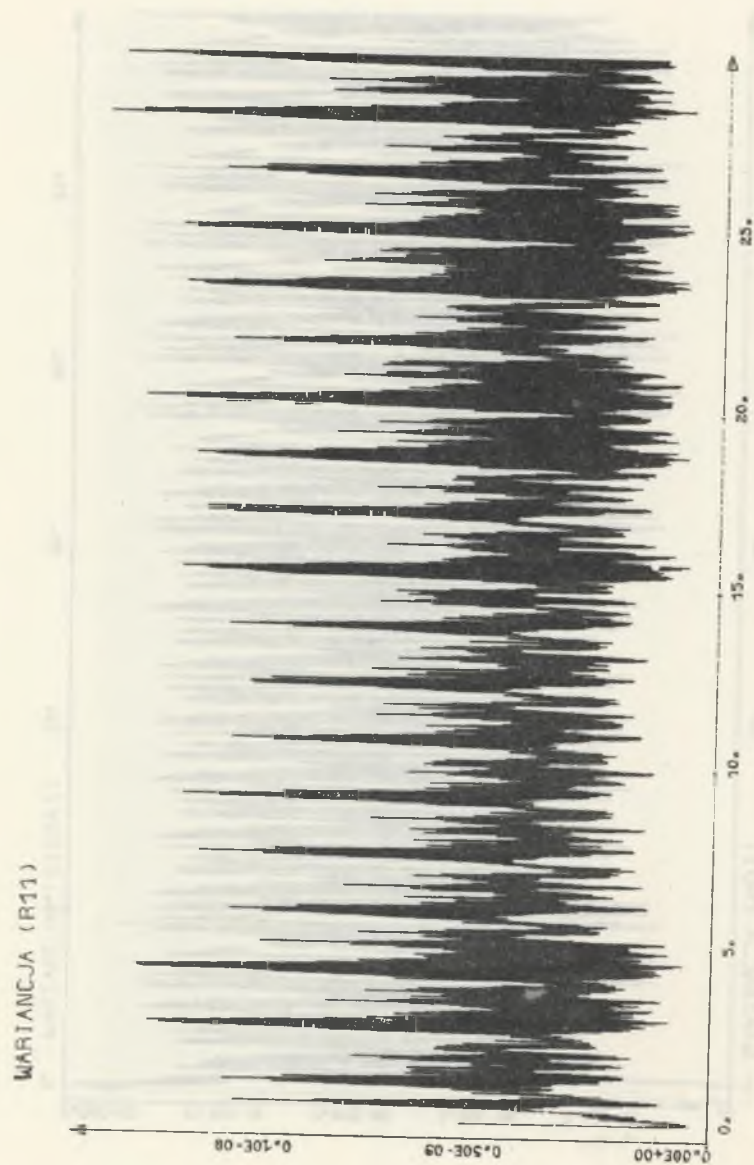


Rys. 5.13

WARIANCJA (R01)



Rys. 5.14



Rys. 5.15

Przeprowadzono także obliczenia numeryczne wariacji

$$\sigma_{\varphi_1(\alpha_0)}^2, \sigma_{\varphi_2(\alpha_0)}^2, \sigma_{\varphi_1(\alpha)}^2, \sigma_{\varphi_2(\alpha)}^2, \sigma_{\delta_1}^2, \sigma_{\delta_2}^2, \sigma_{R_{01}}^2, \sigma_{R_{02}}^2, \sigma_{R_{11}}^2, \sigma_{R_{12}}^2$$

Wykresy miały kształt szybkozmiennych nieujemnych funkcji. Na rys. 5.12-5.15 przedstawiono przykładowo wariacje $\sigma_{\varphi_1(\alpha_0)}^2, \sigma_{\delta_1}^2, \sigma_{R_{01}}^2, \sigma_{R_{11}}^2$. Maksymalne wartości, jakie osiągały wariacje, są w przybliżeniu następujące:

$$\max \sigma_{\varphi_1(\alpha_0)}^2 \sim 1,2 \cdot 10^7; \quad \max \sigma_{\varphi_2(\alpha_0)}^2 \sim 2,8 \cdot 10^{-8};$$

$$\max \sigma_{\varphi_1(\alpha)}^2 \sim 8 \cdot 10^{-8}; \quad \max \sigma_{\varphi_2(\alpha)}^2 \sim 2,2 \cdot 10^{-8};$$

$$\max \sigma_{\delta_1}^2 \sim 10; \quad \max \sigma_{\delta_2}^2 \sim 1,8; \quad \max \sigma_{R_{01}}^2 \sim 4,2 \cdot 10^{-9};$$

$$\max \sigma_{R_{02}}^2 \sim 7,5 \cdot 10^{-10}; \quad \max \sigma_{R_{11}}^2 \sim 1,4 \cdot 10^{-9};$$

$$\max \sigma_{R_{12}}^2 \sim 2,5 \cdot 10^{-10}.$$

Maksymalne wartości wariacji pierwszej różnicy R_{11} dla kąta φ_1 są trzy razy mniejsze od maksymalnych wartości wariacji przy aproksymacji tylko stochastyczną funkcją wrażliwości I rzędu. Ta aproksymacja daje dobre przybliżenie wariacji.

V.5. Wrażliwość stochastyczna drgań modelu pojazdu (zawieszenia)

W p. 2.2 analizowano drganie modelu pojazdu (zawieszenia) o dwóch stopniach swobody, poruszającego się po losowym podłożu (rys. 2.1), którego ruch opisany jest układem równań (2.7).

Obecnie analizować będziemy wrażliwość przyśpieszeń masy m_1 i m_2 przy zmianie sztywności zawieszenia k_2 . Dane do obliczeń przyjęto wg [25]. W szczególności $m_1 = 0,16$ [kg s²/cm], $m_2 = 1,3$ [kg s²/cm], $k_1 = 567$ [kg/cm], $k_2 = 162$ [kg/cm], $c_2 = 6,28$ [kg.s/cm].

Według [25] $\tilde{c}_1 = c_1 \cdot \omega = c_1 \cdot \frac{v}{l}$, gdzie: c_1 - współczynnik tłumienia, v - prędkość koła, l - długość śladu opony jest dla dużego zakresu zmian prędkości wartością stałą oraz $\frac{c_1 \cdot \omega}{k_1} \sim 0,1$.

Ruch pojazdu przyjęto początkowo jako jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem $a = 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$ do chwili $t = 5 \text{ [s]}$, a następnie ze stałą prędkością. Stąd prędkość ma postać:

$$v(t) = \begin{cases} 200 \cdot t & \text{gdy } t \leq 5 \\ 1000 & \text{gdy } t > 5 \end{cases} \text{ [cm/s]} \quad (5.19)$$

Założono długość śladu opony $l = 14 \text{ [cm]}$ oraz że \bar{c}_1 jest wartością stałą dla $t \geq \frac{1}{100}$. Stąd ponieważ $\omega = \frac{v}{l}$ oraz $\frac{c_1 \cdot \omega}{k_1} \sim 0,1$, otrzymano dla c_1 wzór:

$$c_1(t) = \begin{cases} 126,34 & \text{gdy } 0 < t < \frac{1}{100} \\ \frac{1,2634}{t} & \text{gdy } \frac{1}{100} \leq t < 5 \\ 0,2527 & \text{gdy } t > 5 \end{cases} \quad (5.20)$$

O równaniach ruchu założono, że spełniają te same warunki początkowe co w p. 2.2. Równania drogi założono w postaci kombinacji cosinoid o losowej amplitudzie, częstotliwości i fazie:

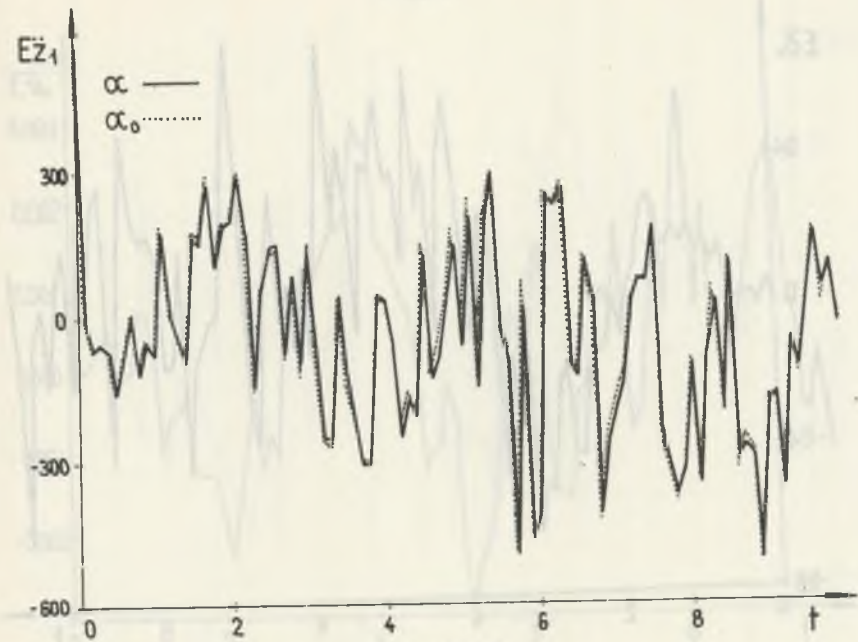
$$y(t, \omega) = \sum_{i=1}^N A_i(\omega) \cdot \cos(\Omega_i(\omega) \cdot x(t) + \varphi(\omega)), \quad (5.21)$$

gdzie przyjęto $N=7$, a także równomierne rozkłady zmiennych losowych $A_i(\omega)$ oraz $\varphi(\omega)$. Dla $i = 1, 2, \dots, 7$ $A_i(\omega)$ przyjmują wartości z przedziału $[0, 1] \text{ [cm]}$, $\varphi(\omega) - z [0, 2\pi]$. Zmienna $\Omega_i(\omega)$ wyraża się poprzez długość fali drogi $L_i(\omega)$ wzorem $\Omega_i = \frac{2\pi}{L_i}$. Przyjęto równomierne rozkłady długości fal $L_i(\omega) \text{ [cm]}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) odpowiednio w przedziałach $[10^4, 6 \cdot 10^3]$; $[6 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3]$; $[2 \cdot 10^3, 10^3]$; $[10^3, 6 \cdot 10^2]$; $[600, 400]$; $[400, 200]$; $[200, 0]$. $x(t)$ - droga $[cm]$ wg (5.19) przyjmie postać:

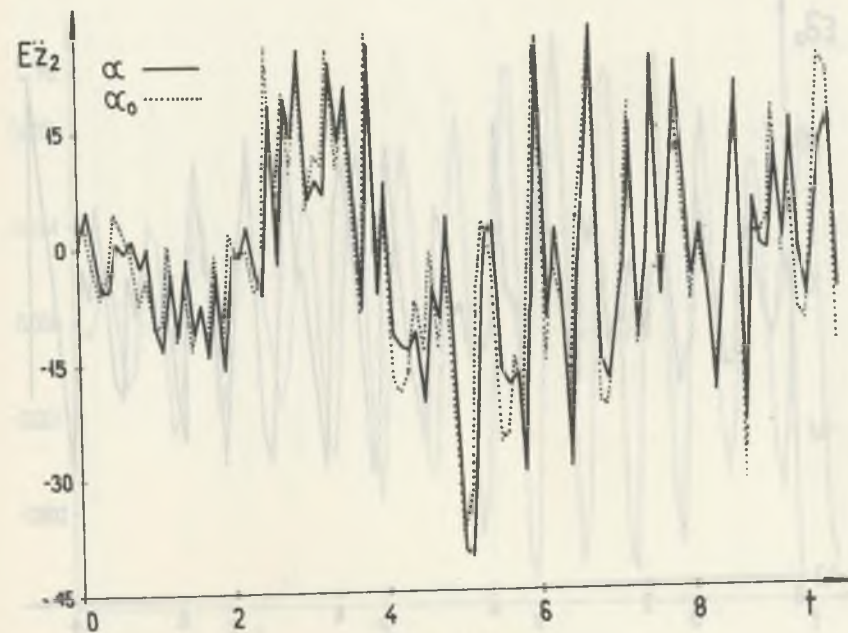
$$x(t) = \begin{cases} 100 \cdot t^2 & \text{gdy } t \leq 5 \\ 1000 \cdot (t - 2,5) & \text{gdy } t > 5 \end{cases} \text{ [cm]} \quad (5.22)$$

Wrażliwość przyspieszeń mas m_1 i m_2 badano przy założeniu $\alpha_0 = k_2 = 162 \text{ [kg/cm]}$ oraz $\alpha = 112 \text{ [kg/cm]}$ ($\Delta\alpha = -50$ i zmiana wartości parametru wynosi 30,86%). Rysunek 5.16 przedstawia wartości średnie przyspieszeń $E\ddot{z}_1(t, \alpha_0, \omega)$ i $E\ddot{z}_1(t, \alpha, \omega)$ a rys. 5.17 $E\ddot{z}_2(t, \alpha_0, \omega)$ i $E\ddot{z}_2(t, \alpha, \omega)$. Na rysunkach 5.18 - 5.27 przedstawiono odpowiednio wykresy wartości średnich $E\ddot{\sigma}_1^j, E\ddot{\sigma}_2^j, E\ddot{\sigma}_1^j, E\ddot{\sigma}_2^j, ER_{01}, ER_{02}, ER_{11}, ER_{12}, ER_{21}, ER_{22}$.

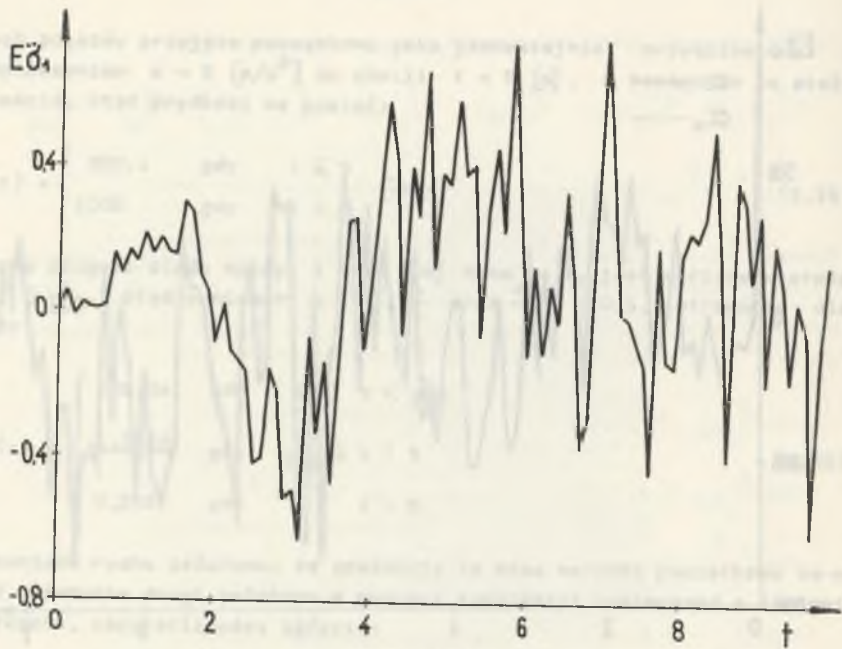
Rząd wartości średnich przyspieszeń $\ddot{z}_1, \ddot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1$ ($i = 1, 2$) bardzo szybko maleje. Wartości średnie różnic R_{j1} ($j = 0, 1, 2$) maleje, gdy j rośnie



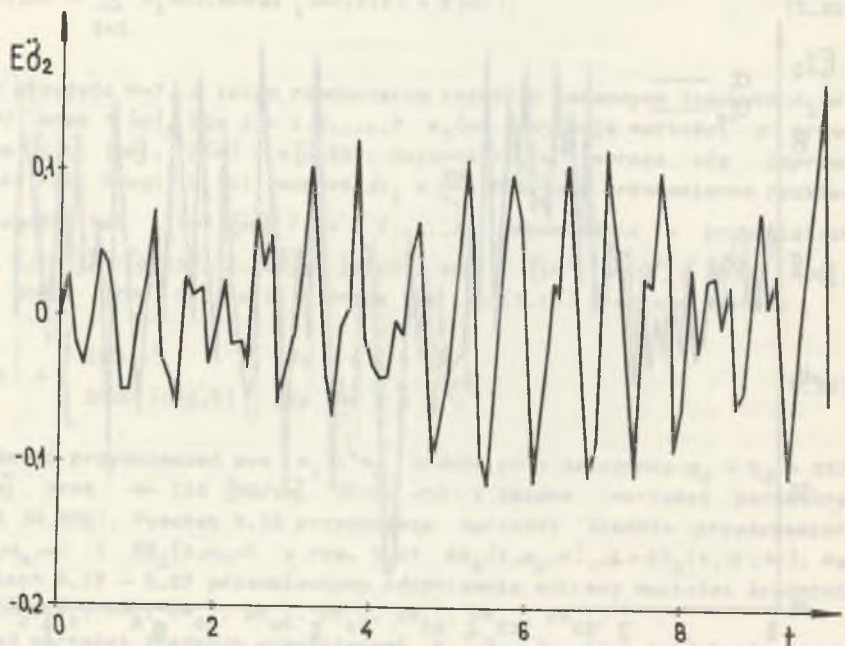
Rys. 5.16



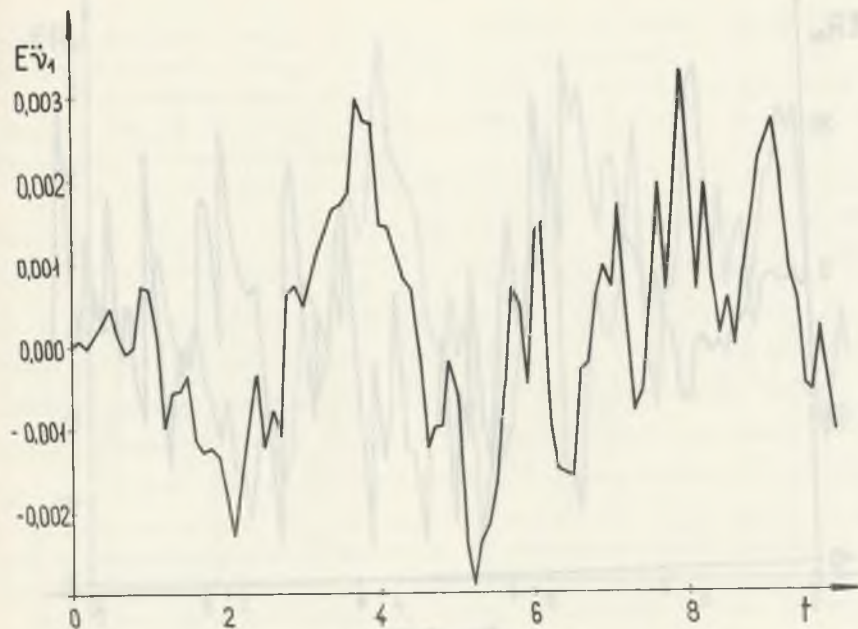
Rys. 5.17



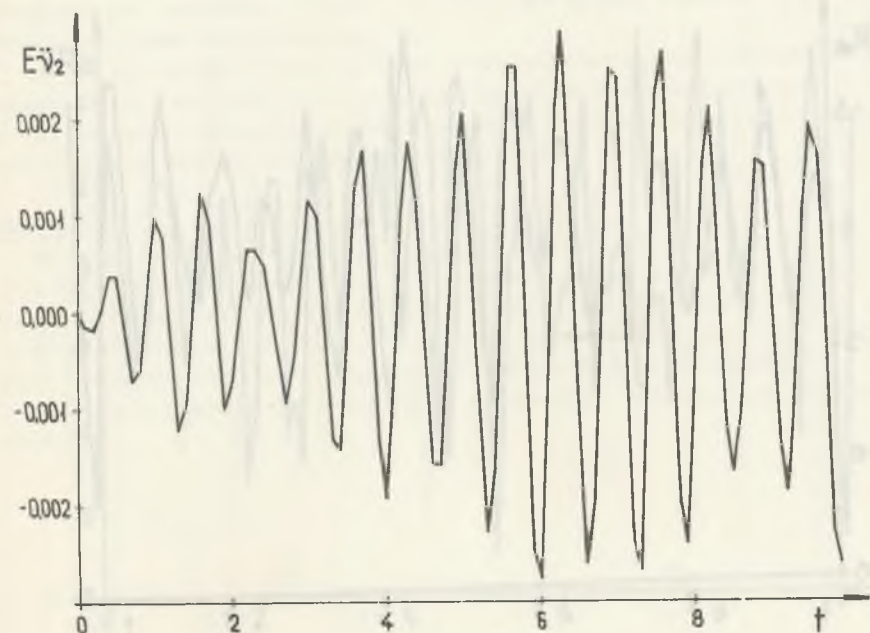
Rys. 5.18



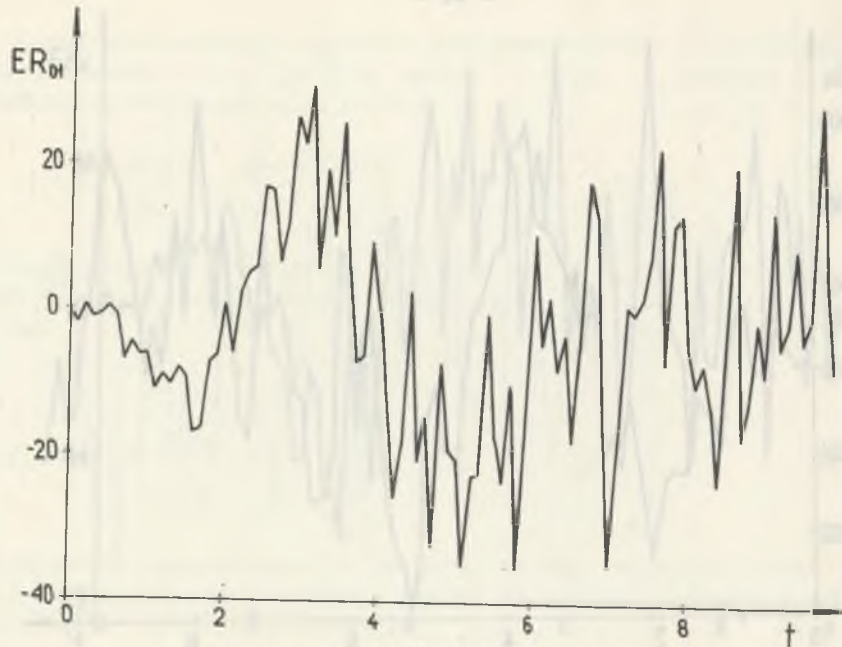
Rys. 5.19



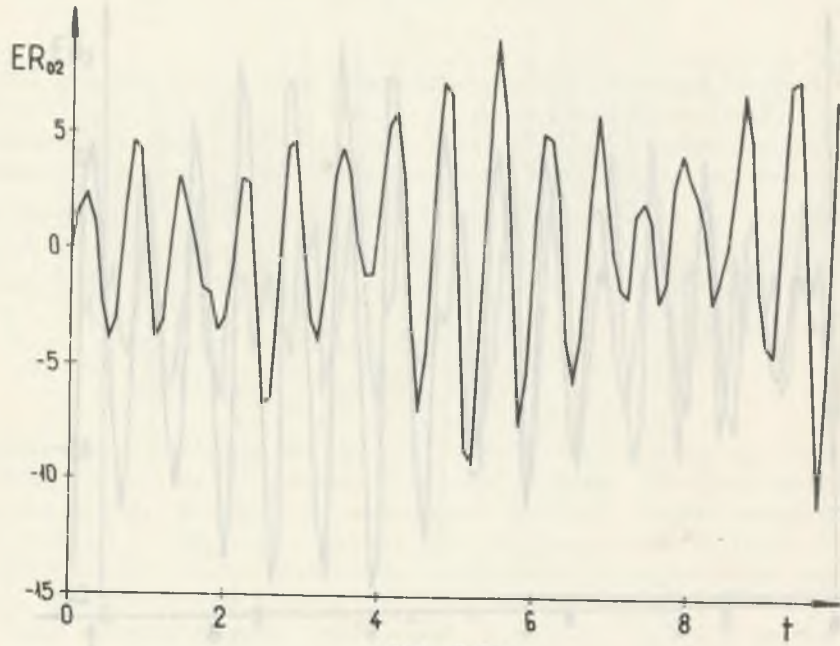
Rys. 5.20



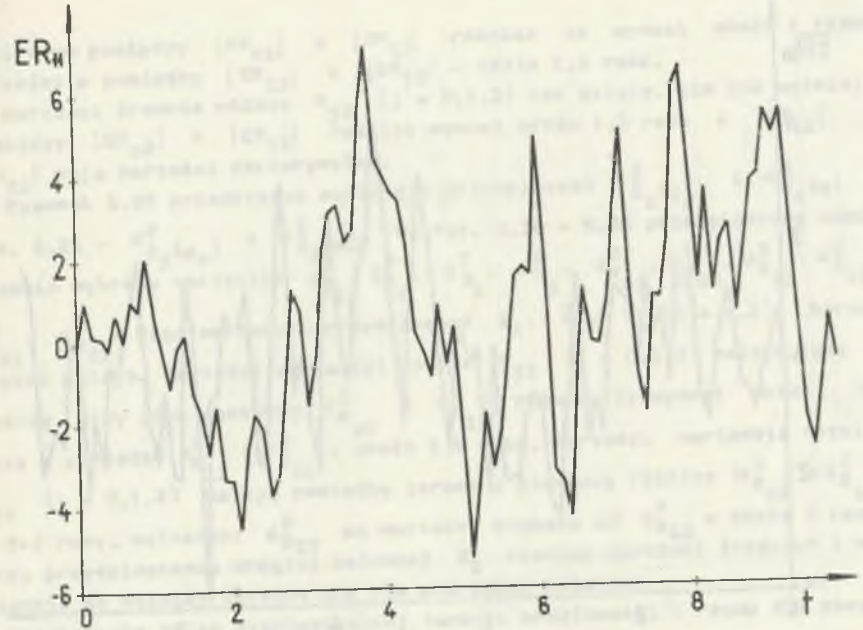
Rys. 5.21



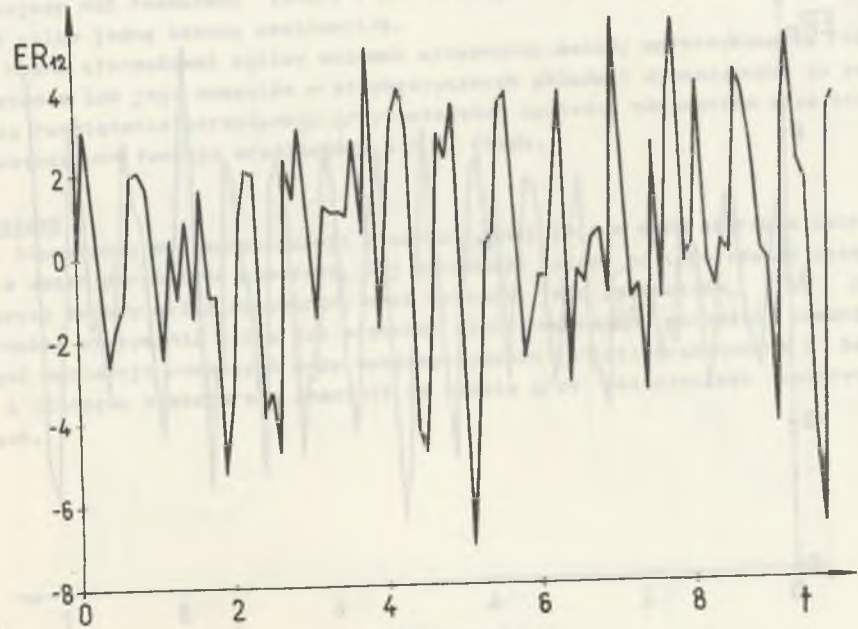
Rys. 5.22



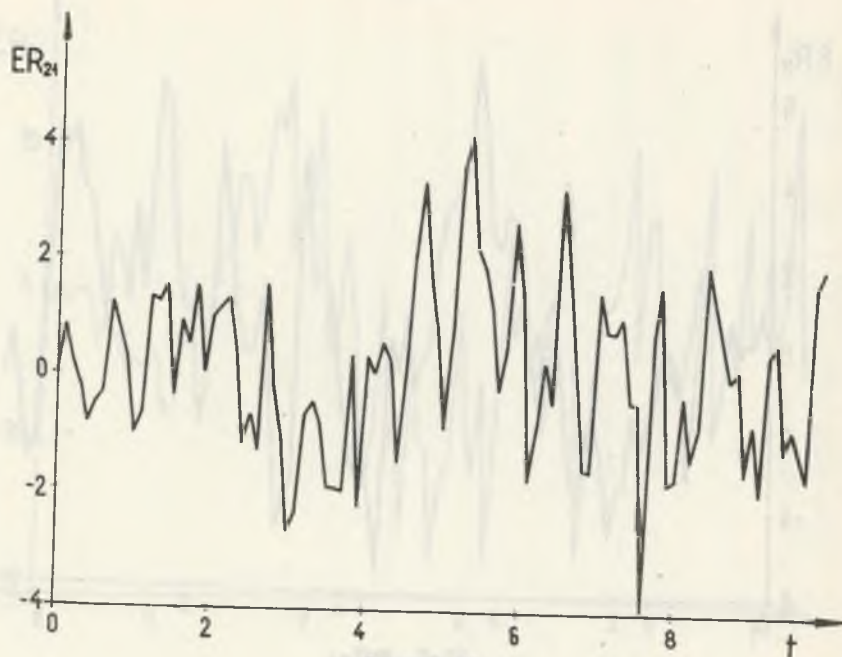
Rys. 5.23



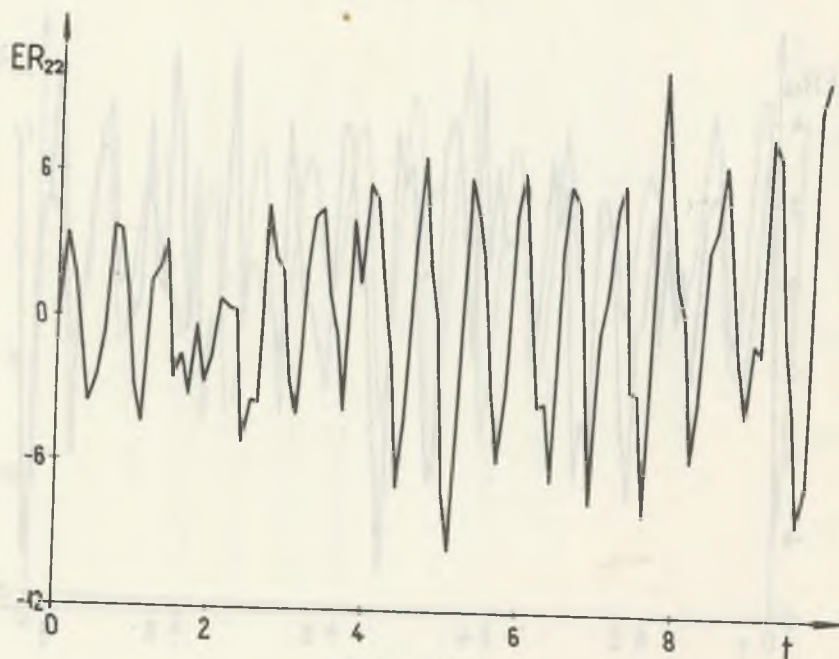
Rys. 5.24



Rys. 5.25



Rys. 5.26



Rys. 5.27

przy czym pomiędzy $|ER_{01}|$ i $|ER_{11}|$ różnica ta wynosi około 1 rzędu wartości a pomiędzy $|ER_{11}|$ i $|ER_{12}|$ - około 1,5 raza.

Wartości średnia różnic R_{j2} ($j = 0,1,2$) też maleją, ale już wolniej. Pośród $|ER_{02}|$ i $|ER_{12}|$ różnica wynosi około 1,5 raza a $|ER_{12}|$ i $|ER_{22}|$ mają wartości porównywalne.

Rysunek 5.28 przedstawia wariancje przyspieszeń $\sigma_{z_1}^2(\alpha_0)$ i $\sigma_{z_1}^2(\alpha)$ a rys. 5.29 - $\sigma_{z_2}^2(\alpha_0)$ i $\sigma_{z_2}^2(\alpha)$. Na rys. 5.30 - 5.39 przedstawiono odpowiednio wykresy wariancji $\sigma_{\phi_1}^2, \sigma_{\phi_2}^2, \sigma_{\psi_1}^2, \sigma_{\psi_2}^2, \sigma_{R_{01}}^2, \sigma_{R_{02}}^2, \sigma_{R_{11}}^2, \sigma_{R_{12}}^2, \sigma_{R_{21}}^2, \sigma_{R_{22}}^2$. Rząd wariancji przyspieszeń z_1, ϕ_1, ψ_1 ($i = 1,2$) bardzo szybko maleje. Wartości wariancji różnic R_{j1} ($j = 0,1,2$) maleją, gdy j rośnie, przy czym pomiędzy $\sigma_{R_{01}}^2$ i $\sigma_{R_{11}}^2$ różnica ta wynosi około 300 razy a pomiędzy $\sigma_{R_{11}}^2$ i $\sigma_{R_{21}}^2$ - około 1,5 raza. Wartości wariancji różnic R_{j2} ($j = 0,1,2$) maleją pomiędzy zerową a pierwszą różnicą ($\sigma_{R_{02}}^2$ i $\sigma_{R_{12}}^2$) o 2-3 razy, natomiast $\sigma_{R_{22}}^2$ ma wartości większe od $\sigma_{R_{12}}^2$ o około 2 razy. Przy przyspieszeniu drugiej zmiennej z_2 różnice wartości średnich i wariancji są wolniej zbliżone niż dla pierwszej zmiennej.

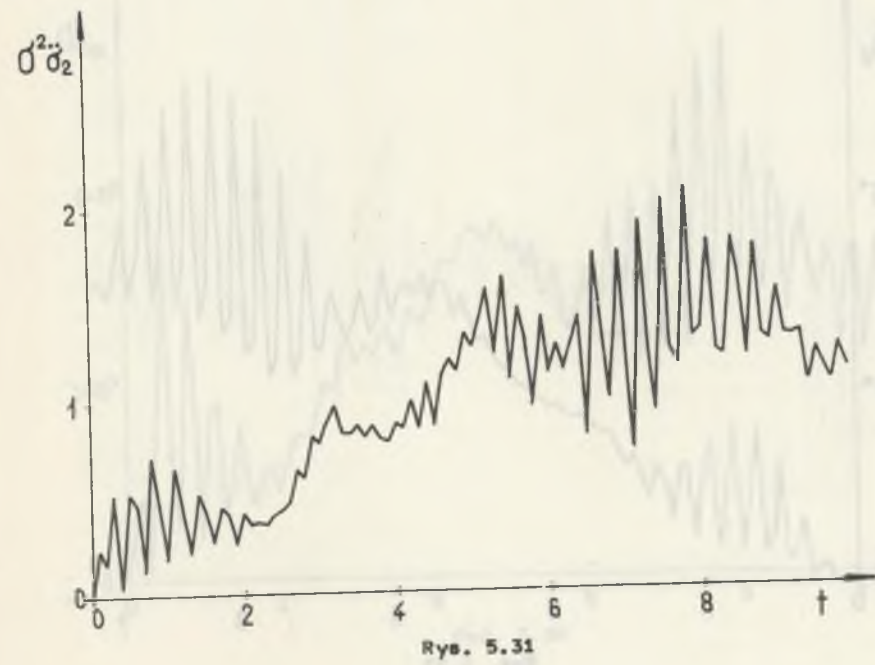
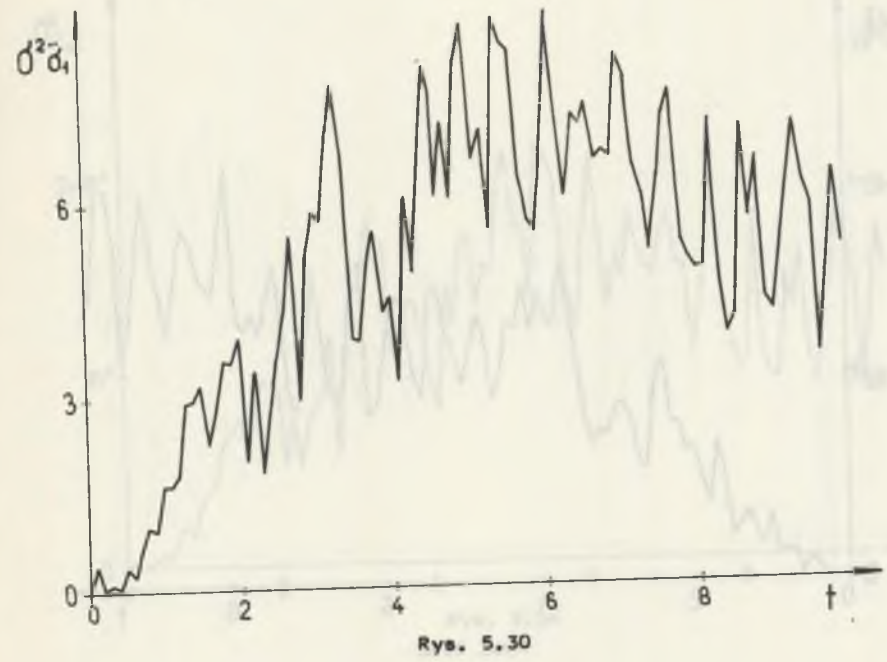
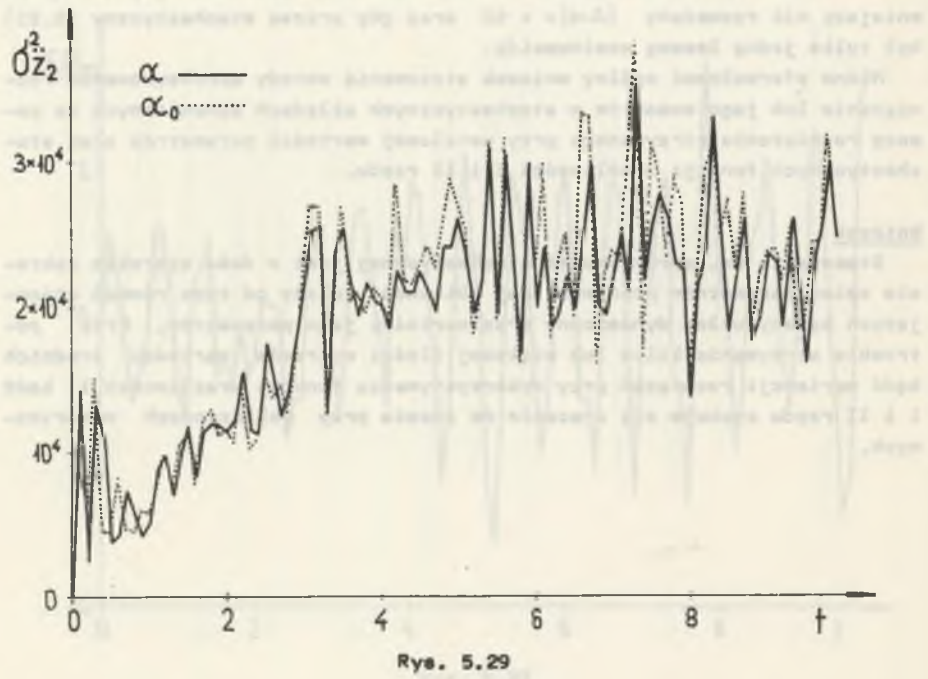
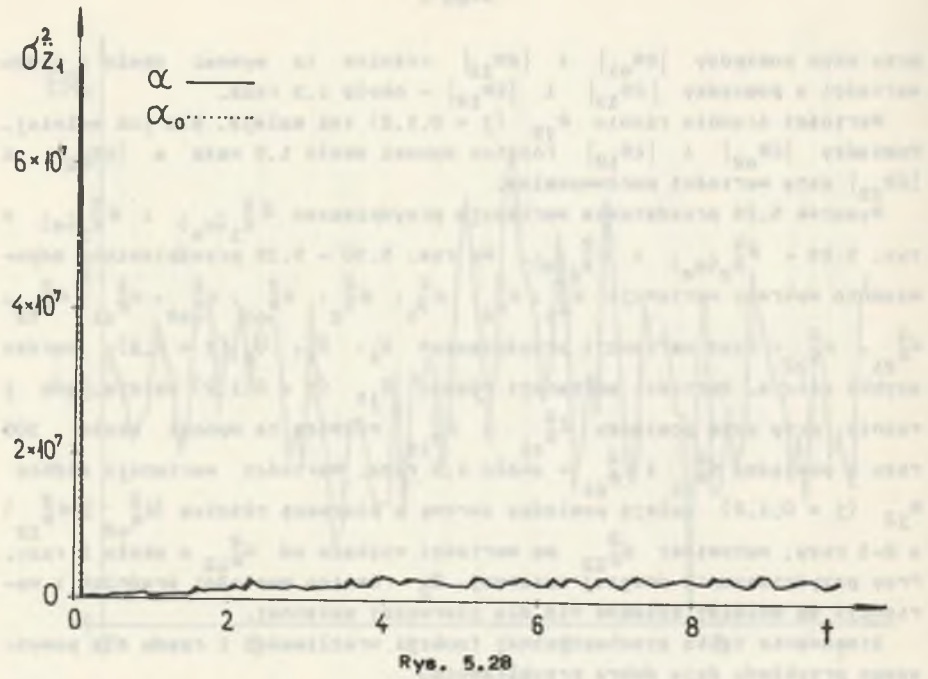
Stosowanie tylko stochastycznej funkcji wrażliwości I rzędu dla powyższego przykładu daje dobre przybliżenia.

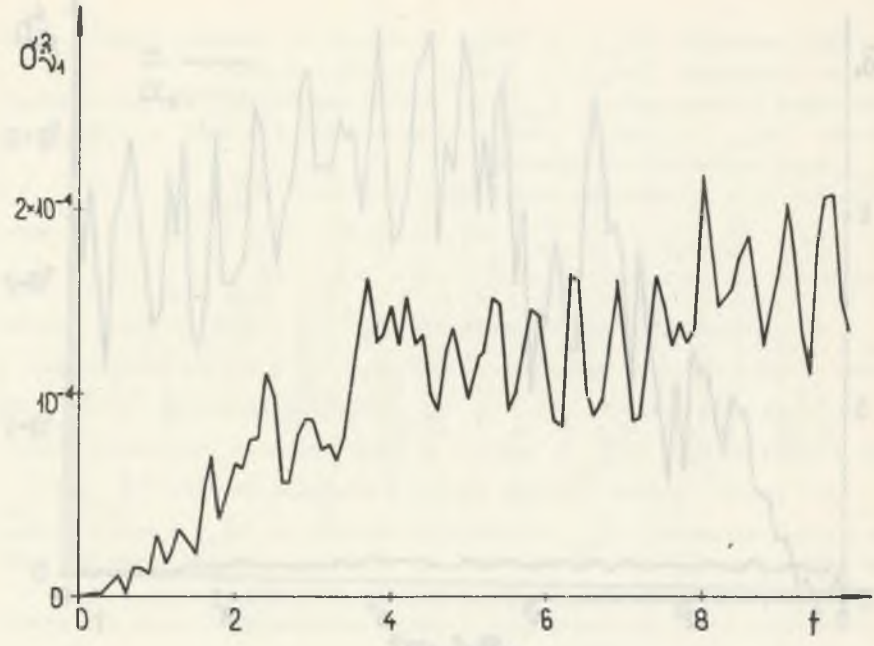
Wniosek ten potwierdzają badania numeryczne przypadków, gdy $|\Delta\alpha|$ był mniejszy niż rozważany $|\Delta\alpha| = +50$ oraz gdy proces stochastyczny (5.21) był tylko jedną losową cosinusoidę.

Można sformułować ogólny wniosek stosowania metody aproksymowania rozwiązania lub jego momentów w stochastycznych układach dynamicznych za pomocą rozwiązania otrzymanego przy ustalonej wartości parametrów oraz stochastycznych funkcji wrażliwości I i II rzędu.

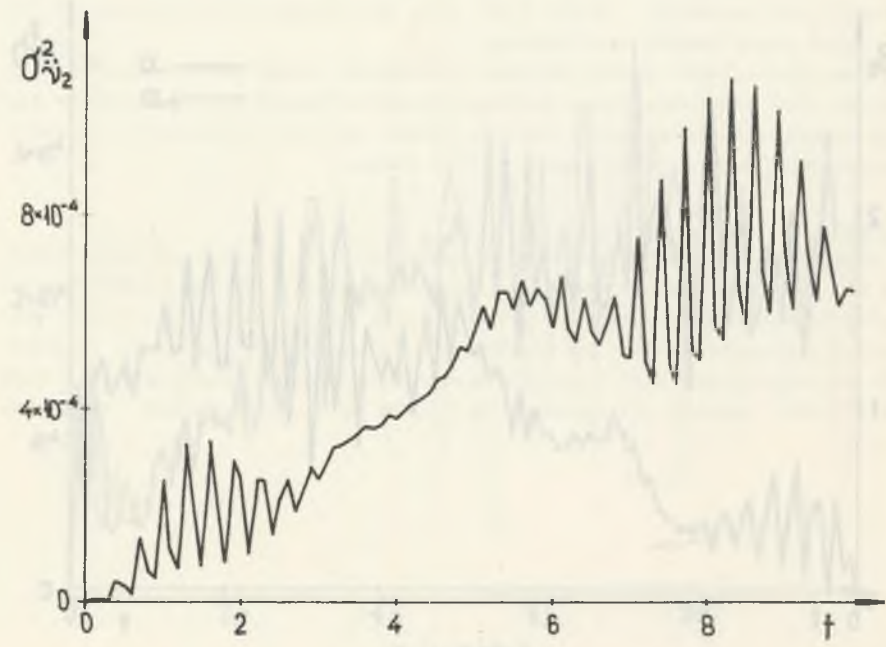
Wniosek

Stosowanie ww. aproksymacji stochastycznej jest w dość szeroki zakresie zmian parametrów poprawna. Jej zbliżność zależy od typu równań opisujących badany układ dynamiczny oraz wartości jego parametrów. Przy potrzebie otrzymania kilku lub większej ilości wykresów wartości średnich bądź wariancji rozwiązań przy wykorzystywaniu funkcji wrażliwości I bądź I i II rzędu zyskuje się znacznie na czasie przy obliczeniach numerycznych.

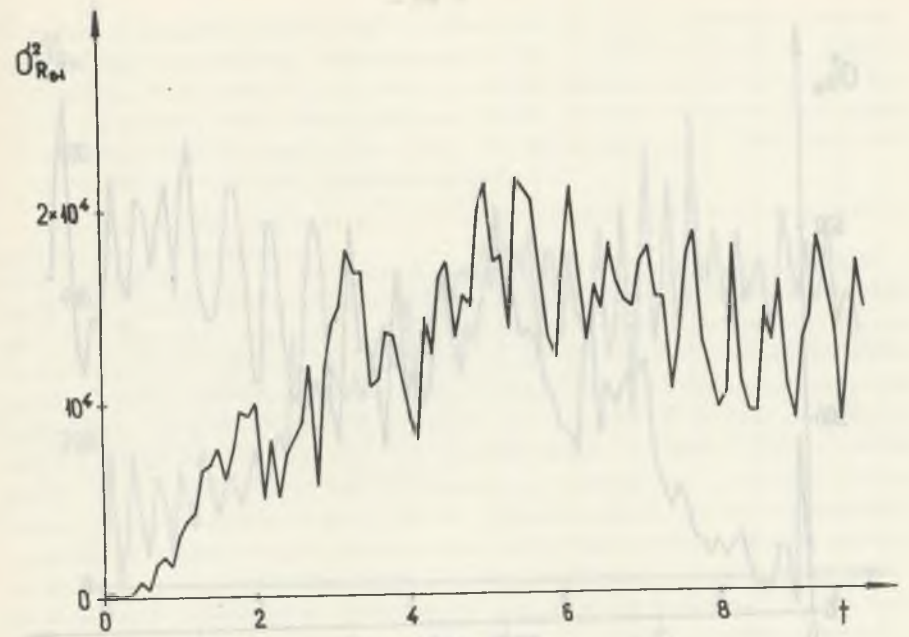




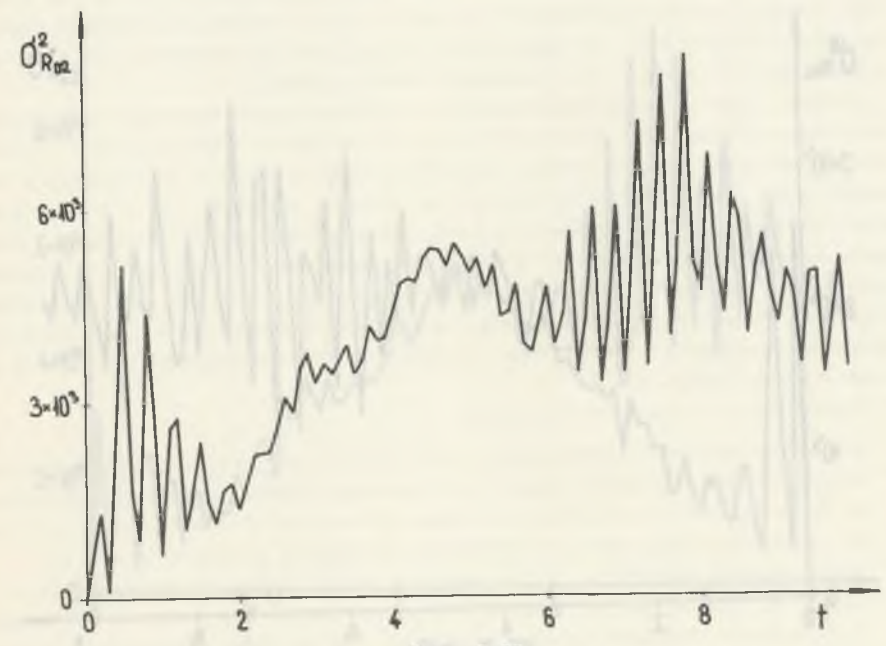
Rys. 5.32



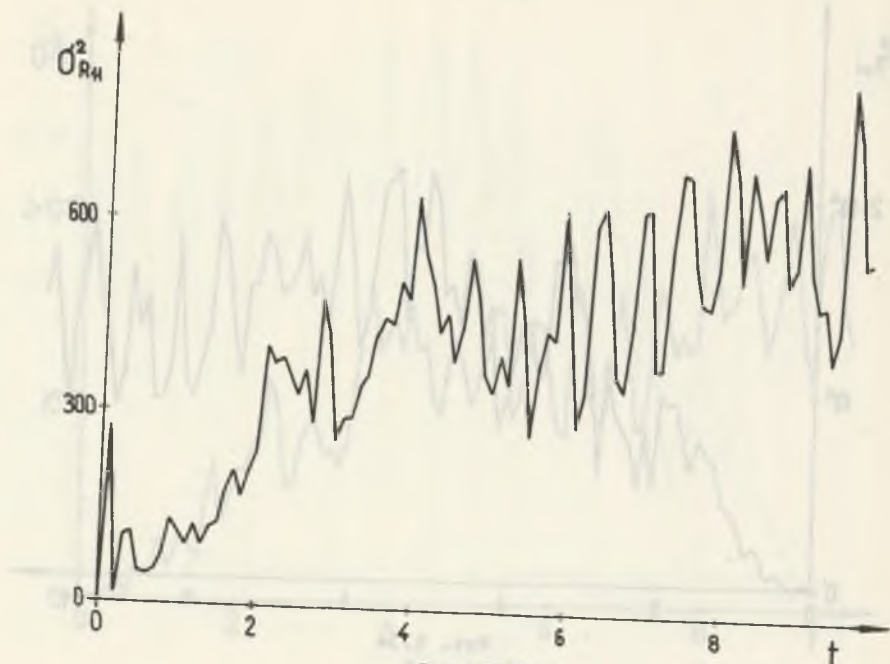
Rys. 5.33



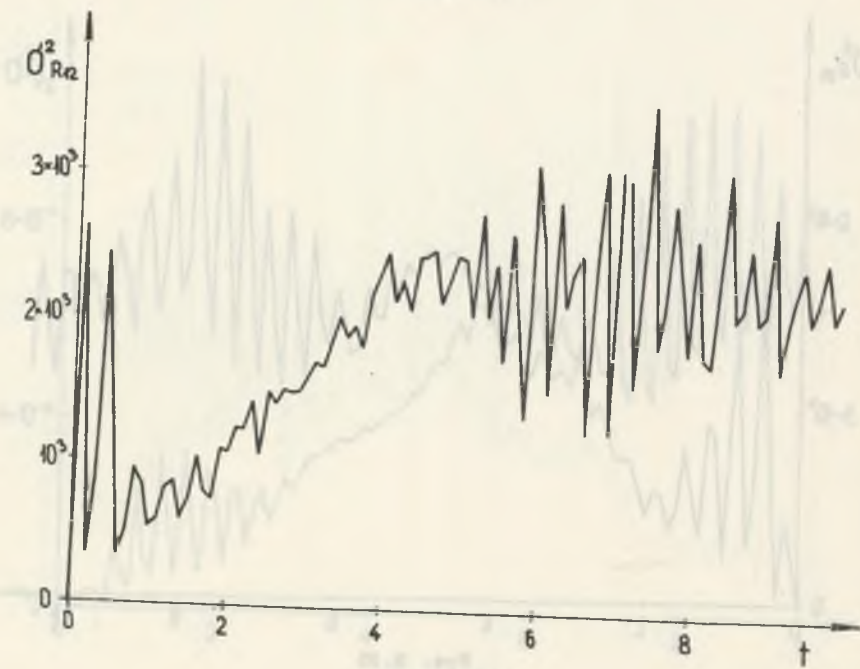
Rys. 5.34



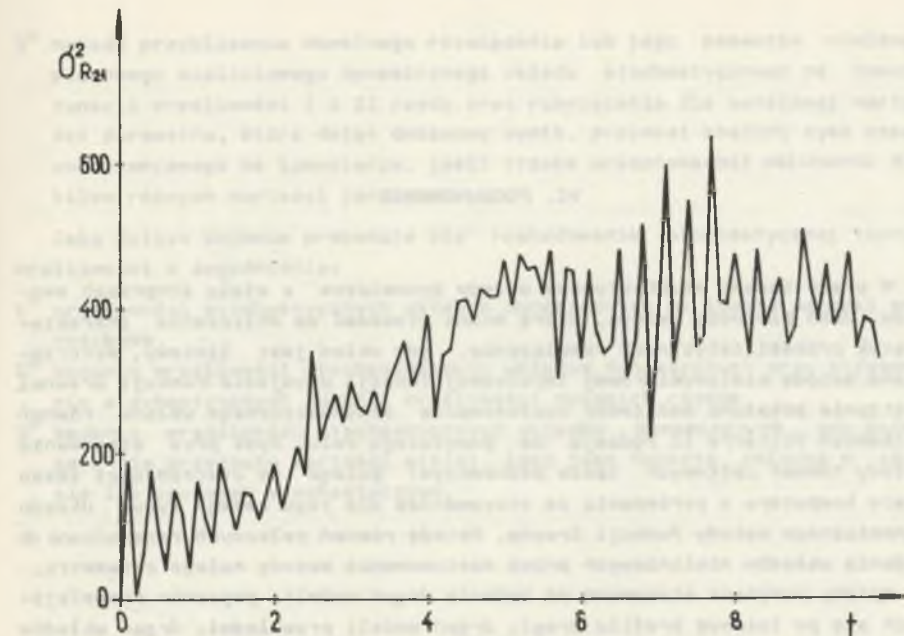
Rys. 5.35



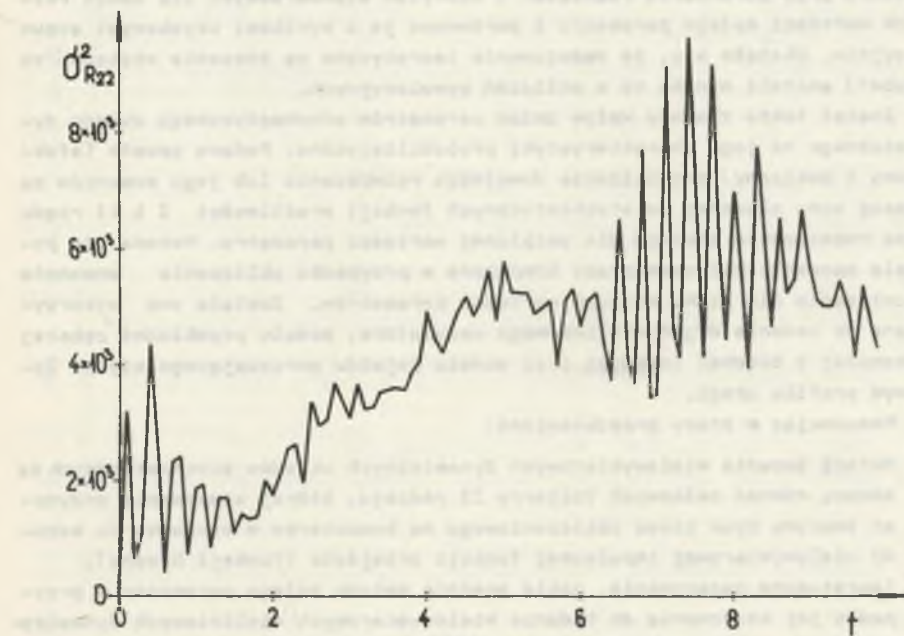
Rys. 5.36



Rys. 5.37



Rys. 5.38



Rys. 5.39

VI. PODSUMOWANIE

W pracy badano stochastyczne układy dynamiczne o wielu stopniach swobody. Jako pierwszą metodę, którą można stosować do obliczenia charakterystyk probabilistycznych rozwiązania, gdy układ jest liniowy, wykorzystano metodę wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greens). Następnie pokazano możliwość zastosowania stochastycznego układu równań całkowych Volterra II rodzaju do powyższego celu. Zysk przy stosowaniu metody równań całkowych (poza poznawczym) polega na oszczędności czasu pracy komputera w porównaniu ze stosowaniem dla tego samego typu układu dynamicznego metody funkcji Greens. Metodę równań całkowych rozszerzono do badania układów nieliniowych przez zastosowanie metody małego parametru.

Metody powyższe stosowano do badania drgań modeli pojazdów poruszających się po losowym profilu drogi, drgań modeli przekładni, drgań układów o zmiennej masie i innych.

Wyprowadzono teoretyczne oszacowania, jakie spełnia metoda małego parametru przy porównaniu rozwiązań i odchyleń standardowych dla dwóch różnych wartości małego parametru i porównano je z wynikami uzyskanymi symulacyjnie. Okazało się, że oszacowania teoretyczne są znacznie większe ("za grube") aniżeli wyniki to z obliczeń symulacyjnych.

Został także zbadany wpływ zmian parametrów stochastycznego układu dynamicznego na jego charakterystyki probabilistyczne. Podano sposób (efektywny i dokładny) przybliżenia dowolnego rozwiązania lub jego momentów za pomocą sumy złożonej ze stochastycznych funkcji wrażliwości I i II rzędu oraz rozwiązania znanego dla ustalonej wartości parametru. Metoda ta pozwala zaoszczędzić czas pracy komputera w przypadku obliczenia momentów rozwiązania dla kilku różnych wartości parametrów. Została ona wykorzystana do badania drgań nieliniowego oscylatora, modelu przekładni zębatej wykonanej z błędami losowymi oraz modelu pojazdu poruszającego się po losowym profilu drogi.

Reasumując w pracy przedstawiono:

- 1^o Metodę badania wielowymiarowych dynamicznych układów stochastycznych za pomocą równań całkowych Volterra II rodzaju, której stosowanie przynosi znaczny zysk czasu obliczeniowego na komputerze w stosunku do metody wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greens).
- 2^o Teoretyczne oszacowania, jakie spełnia metoda małego parametru w przypadku jej stosowania do badania wielowymiarowych nieliniowych dynamicznych układów stochastycznych. Wykazano, że są one znacznie większe od rezultatów otrzymanych na drodze dokładnych obliczeń symulacyjnych.

- 3^o Metodę przybliżania dowolnego rozwiązania lub jego momentów wielowymiarowego nieliniowego dynamicznego układu stochastycznego za pomocą funkcji wrażliwości I i II rzędu oraz rozwiązania dla ustalonej wartości parametru, która dając dokładny wynik, przynosi znaczny zysk czasu obliczeniowego na komputerze, jeżeli trzeba przeprowadzić obliczenia dla kilku różnych wartości parametru.

Jako dalsze badania proponuje się rozbudowanie stochastycznej teorii wrażliwości o zagadnienia:

- 1^o wrażliwości stochastycznych układów dynamicznych na losowe warunki początkowe,
- 2^o badanie wrażliwości stochastycznych układów dynamicznych przy stosowaniu stochastycznych funkcji wrażliwości wysokich rzędów,
- 3^o badanie wrażliwości stochastycznych układów dynamicznych, gdy parametr nie przyjmuje wartości stałej, lecz jest funkcją zmienną w czasie lub procesem stochastycznym.

LITERATURA

[1] Adomian G.: Random Operator Equations in Mathematical Physics. Journal of Mathematical Physics, cz. I - t. 11, Nr 3, 1970, 1069-1084, cz. II - t. 12, Nr 9, 1971, 1944-1948, cz. III - t. 12, Nr 9, 1971, 1948-1955.

[2] Bayn W.-J.: Die konvergenz der diskreten Greenachen Funktionen beim gewöhnlichen Differenzenverfahren. ZAMM, t. 59, 1979, T47-T49.

[3] Bharucha-Reid A.T.: Random Integral Equations. Academic Press, New York and London, 1972.

[4] Bobrowski D.: Losowa równania różniczkowe zwyczajne. Politechnika Poznańska, skrypt, 1980.

[5] Diekhens G.: Numerische Simulation von parametererregten Getriebeschwingungen. Rheinisch - Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1981.

[6] Dinča F., Teodosiu C.: Nonlinear and Random Vibrations. Academic Press New York and London 1973.

[7] Eicher N.: Einführung in die Berechnung parametererregter. Technische Universität Berlin, 1981.

[8] Eicher N.: Schwingungsuntersuchungen an Zahnradgetrieben. ZAMM, t. 61, 1981, T30-T32.

[9] Filatow A.N.: Metody usrednienija w differencjalnych i integro-differencjalnych urawnienijach. Izd. "Fan" Uzbekskoj SSR, Tazskent 1971

[10] Frank P.M.: Introduction to system sensitivity theory. Acad. Press, N.Y., 1978.

[11] Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[12] Gryboś R.: Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej. Rozprawy Inżynierskie, t. 20, z. 1, 1972, ss. 3-17.

[13] Gryboś R.: Parametryczne drgania przekładni z uwzględnieniem zderzeń międzyzębnych. Rozprawy Inżynierskie, t. 28, z. 4, 1980, ss.529-541.

[14] Gutowski R.: Równania różniczkowe zwyczajne. WNT, Warszawa 1971.

[15] Gutowski R.: Wrażliwość rozwiązań równania liniowych drgań płyty na zmiany współczynników równania. Archiwum Budowy Maszyn, t. 28, z. 2, 1981, ss. 105-113.

[16] Kamiński E.: Dynamika pojazdów i teoria zawieszzeń. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, skrypt, Warszawa 1977.

[17] Kamiński E., Osiński J.: Drgania parametryczne modelu jednostopniowej przekładni zębatej uwzględniającej tłumienie i stałe obciążenie. Archiwum Budowy Maszyn, t. 28, z. 1, 1981, ss. 55-68.

[18] Kreuzer E., Rill G.: Vergleichende unterauchung von Fahrzeugeschwingungen an räumlichen Ersatzmodellen. Ingenieur - Archiv t. 52, 1982, ss. 205-219.

[19] Küçükay F.: Über das dynamische Verhalten von einstufigen Zahnradgetrieben. Fortschrittberichte der VDI Zeitschriften. Reihe 11, Nr 43, 1981.

[20] Macvean D.B.: Response of Vehicle Accelerating over Random Profile. Ingenieur - Archiv t. 49, 1980, ss. 375-380.

[21] Maekysiuk M.: Analiza probabilistyczna dwóch dyskretnych stochastycznych modeli jednostopniowej przekładni zębatej o zębach prostych. Rozprawy Inżynierskie, t. 25, z. 1, 1977, ss. 63-81.

[22] Mark W.D.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems - Basic theory. J. Acoust. Soc. Amer. t. 63 z. 5, 1978, 1409-1430.

[23] Maeri S.F.: Response of a Multidegree-of-Freedom System to Nonstationary Random Excitation. Journal of Applied Mechanics, t. 45 z. 3, 1978, ss. 649-656.

[24] Michajłow F.A., Tierajew E.D. (i inni): Dinamika nestacionarnych linejnych sistem. Izd. Nauka, Moskwa 1967.

[25] Mitschke M.: Dynamika samochodu. WKŁ, Warszawa 1977.

[26] Möllers W.: Parametererregte Schwingungen in einstufigen Zylinder-radgetrieben. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen 1982.

[27] Müller L.: Przekładnie zębate, projektowanie. WNT, Warszawa 1979.

[28] Müller P.C., Popp K.: Kovarianzanalyse von Linearen Zufallschwingungen mit Zeitlich Verschobenen Erregerprozessen. Z. Angew. Math. Mech. t. 59, z. 5, 1979, T 144 - T 146.

[29] Müller P.C., Popp K., Schiehlen W.O.: Berechnungsverfahren für stochastische Fahrzeugeschwingungen. Ingenieur - Archiv, t. 49, 1980, ss. 235-254.

[30] Müller P.C., Schiehlen W.O.: Forced Linear Vibrations. CISM - Springer Verlag Volume Nr 172, 1973.

[31] Nadolski W.: Modelowanie dynamiczne przekładni zębatej jednostopniowych. IPPT PAN 14/1972.

[32] Nadolski W.: Siły dynamiczne występujące między zębami kół przekładni jednostopniowej o osiach równoległych. Rozprawy Inżynierskie, t. 19, z. 3, 1971, ss. 451-465.

[33] Najfie A.H.: Metody wozauzczonij. Izd. Mir, Moskwa 1976.

[34] Osiński J.: Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej jako układu o dwóch stopniach swobody, uwzględniającego tłumienia i stałe obciążenie. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1978.

[35] Osiński Z.: Teoria drgań. PWN, Warszawa 1978.

[36] Padgett W.J., Taokos Ch.P.: A random Fredholm integral equation. Proc. Amer. Math. Soc., t. 33, z. 2, 1972, ss. 534-542.

[37] Padgett W.J., Taokos Ch.P.: On a stochastic integral equation of the Volterra type in telephone traffic theory. Journal Appl., Prob. t. 8, 1971, ss. 269-275.

[38] Pękała W., Szopa J.: Drgania podwójnego wahadła ze zmienną długością i masą, poddanego wymuszeniom stochastycznym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat.-Fiz. (w druku).

[39] Pękała W., Szopa J.: Numeryczne badania stochastycznych drgań modeli pojazdów o wielu stopniach swobody. VI Konf.: Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji. Białystok 1983, ss. 75-80.

[40] Pękała W., Szopa J.: The application of Green's function to the investigation of the response of vehicle accelerating over random profile. Rev. Roum. des Sciences Techn. Mécanique Appliquée, t. 28, nr 3, 1983, ss. 295-310.

[41] Pękała W., Szopa J.: The application of Green's function to the investigation of the stochastic Nadolski's model of gear. XIII Międzynarodowa Konferencja Dynamiki Maszyn Interdynamice'81 Jadwisin k. Warszawy, 1981, ss. 377-381.

[42] Pękała W., Szopa J.: The application of Green's multi - dimensional function to investigate the stochastic vibrations of dynamical systems. Ingenieur - Archiv t. 54, 1984, 91-97.

[43] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1971.

- [44] Piskorz Z.: Przypadkowe drgania nieliniowego układu o dwóch stopniach swobody. *Archiwum Budowy Maszyn*, t. 26, z. 1, 1979, ss. 83-101.
- [45] Piszczek K.: Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1982.
- [46] Pokojski J.: Polioptymalizacja liniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody przy wymuszeniu stochastycznym. III Konf. Metody i Środki Projektowania Automatycznego. Warszawa, 1981, ss. 189-196.
- [47] Rill, G.: Grenzen der Kovarianzanalyse bei Weissem Geschwindigkeitsrauschen. *ZAMM*, t. 62, 1982, ss. T 70 - T 72.
- [48] Rill G.: Discussion related to the paper of D.B. Macvean: Response of Vehicle Accelerating over Random Profile in Ing. - Arch. 49, 1980, 375-380. *Ingenieur-Archiv*, t. 52, 1982, ss. 91-94.
- [49] Saaty T.L.: Modern nonlinear equations. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1967.
- [50] Sakata M., Kimura K.: The Use of Moment Equations for Calculating the Mean Square Response of a Linear System to Nonstationary Random Excitation. *Journal of Sound and Vibrations*, t. 67, z. 3, 1979, ss. 383-393.
- [51] Samuels J.C., Eringen A.C.: On stochastic linear systems. *Journal of Mathematics and Physics*, t. 38, 1959, ss. 83-103.
- [52] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN, Warszawa 1972.
- [53] Skrzypczyk J.: Stabilność układów dynamicznych opisanych stochastycznymi równaniami całkowymi. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1975.
- [54] Smirnow W.I.: Matematyka wyższa. T. IV, PWN, Warszawa 1962.
- [55] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa 1973.
- [56] Sobczyk K., Macvean D.B.: Non-stationary random vibrations of Road Vehicle with Variable Velocity. Symposium on Stochastic Problems in Dynamics, University of Southampton, U.K., July 19th to 23 rd, 1976, 21.1 - 21.6.
- [57] Sobczyk K., Macvean D.B., Robson J.D.: Response to Profile - Imposed Excitation with Randomly Varying Traversal Velocity. *Journal of Sound and Vibration*, t. 52, z. 1, 1977, ss. 37-49.
- [58] Solodow A.W., Petrow F.S.: Liniejnyje awtomatyczeskije sistemy s pieriemennymi paramietrami. Izd. Nauka, Moskwa 1971.
- [59] Sołodownikow W.W.: Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1964.
- [60] Stiepanow W.W.: Równania różniczkowe. PWN, Warszawa 1964.
- [61] Szabelski K., Hawrylecki W.: Zagadnienie syntezy nieliniowych układów drgających o skończonej liczbie stopni swobody. *Archiwum Budowy Maszyn*, t. 28, z. 1, 1981, ss. 3-11.
- [62] Szeplińska-Stupnicka W.: Zagadnienia drgań parametrycznych w dynamice maszyn. Współczesne Zagadnienia dynamiki maszyn Oseolineum, 1976.
- [63] Szopa J.: Application of Volterra Stochastic Integral Equations of the II-nd Kind to the Analysis of Dynamic Systems of Variable Inertia. *Journal of Technical Physics* t. 17, z. 4, 1976, ss. 423-433.
- [64] Szopa J.: Badanie wrażliwości układów dynamicznych o losowych parametrach. IV Konf. Metody i Środki Projektowania Automatycznego, Warszawa, 1983, ss. 339-344.
- [65] Szopa J.: Metoda wyznaczania funkcji momentów wyjścia stochastycznych liniowych układów niestacjonarnych. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, t. 22, z. 4, 1977, ss. 359-374.
- [66] Szopa J.: O wyznaczaniu wariancji stochastycznych układów dynamicznych za pomocą stochastycznych równań całkowych przy uwzględnieniu

- jednego wyrazu rezolwenty. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat-Fiz.*, z. 28, 1977, ss. 187-202.
- [67] Szopa J.: Response of a Multidegree-of-Freedom System of Variable Coefficients to Random Excitation. *ZAMM*, t. 62, z. 7, 1982, ss. 321-328.
- [68] Szopa J.: Response of stochastic linear system. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM1*, 1981, ss. 1-11.
- [69] Szopa J.: The Analysis of Dynamic Systems of Variable Inertia Described by the Nonlinear Stochastic Differential Equations. VIII ICNO Conference, Prague, 11-15 Sept. 1978.
- [70] Szopa J.: The estimates in stochastic problems. *ZAMM (w druku)*.
- [71] Szopa J., Kondrat A.: The probabilistic analysis of some models of toothed gears. International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, W. Brytania, 1980, ss. 147-155.
- [72] Szopa J., Wojtylak M.: Numeryczne metody obliczeń charakterystyk probabilistycznych w układach o zmiennej inercji. II Konf. Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji. PTMTiS PAN Gdańsk - listopad 1975.
- [73] Szopa J., Wojtylak M.: Numeryczne problemy wyznaczania charakterystyk probabilistycznych rozwiązań stochastycznych układów dynamicznych o zmiennej inercji i losowych warunkach początkowych. V Konf.: Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Wrocław 1981, ss. 207-211.
- [74] Szopa J., Wojtylak M.: Numeryczne problemy wyznaczania charakterystyk probabilistycznych rozwiązań w nieliniowych stochastycznych układach dynamicznych o zmiennej inercji. *Mechanika i Komputer*, t. 4, 1981, ss. 405-417.
- [75] Szopa J., Wojtylak M.: Opredeljanije probablisticzeskich charakteristik dla stochasticeskich dynamiczeskich sistem o sluczajnych naczalnych usłowijach. Matematyczeskije metody i fiziko-mechaniceskije pola (w druku).
- [76] Szopa J., Wojtylak M.: O wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, t. 17, z. 2, 1979, ss. 237-245.
- [77] Szopa J., Wojtylak M.: Wariancja stochastycznych układów dynamicznych w fazie rozruchu przy wolnych zmianach parametrów. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej s. Mat.-Fiz.*, z. 28, 1977, ss. 203-208.
- [78] Szopa J., Wojtylak M., Kondrat A., Pękała W.: Stochastic analysis of coefficient of dynamical load on toothed gear. IX ICNO Conference Kijów 1981 (w druku).
- [79] Szopa J., Wojtylak M., Pękała W.: Some problems of stochastic model of toothed gear. IX ICNO Conference Kijów 1981 (w druku).
- [80] Tomovic R., Vukobratovic M.: Obeszczaja teoria czuwetwitelnosti. Izd. Sovietskije Radio, Moskwa 1972.
- [81] Tsokos Ch.P.: On a Stochastic Integral Equation of the Volterra Type. *Math. Systems Theory*, t. 3, Nr 3, 1969, ss. 222-231.
- [82] Tsokos Ch.P., Padgett W.J.: Random Integral Equations with Applications to Stochastic Systems. Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [83] Tylikowski A.: Drgania układu liniowego wywołane procesem przypadkowym o jednostajnie zmiennej częstotliwości. *Rozprawy Inżynierskie*, t. 17, z. 2, 1969, ss. 269-280.
- [84] Wicher J.: On a certain method for parameter estimation of a mechanical system with sensitivity model application. *Rozprawy Inżynierskie*, t. 30, z. 1, 1982, ss. 67-75.

- [85] Wicher J.: Zjawisko tłumienia dynamicznego w układzie znajdującym się pod działaniem wymuszenia losowego. IPPT 32/1974.
- [86] Wojtylak M.: Numeryczne problemy obliczania wariancji dla układów opisanych stochastycznym równaniem całkowym Voltarry II rodzaju. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz., z. 28, 1977, ss. 241-246.

METODY BADANIA I WRAZLIWOŚĆ DYNAMICZNYCH UKŁADÓW STOCHASTYCZNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy badano metody analizy dynamicznych układów stochastycznych oraz wrażliwość takich układów. Przedstawiono metodę wielowymiarowej impulsowej funkcji przejścia (funkcji Greensa) oraz metodę równań całkowych. Stosowano je w najogólniejszych przypadkach, gdy dla układu liniowego warunki początkowe są losowe a wymuszenia są procesami stochastycznymi. W przypadku metody równań całkowych zbadano istnienie i jednoznaczność rozwiązania, wykazano, że przy jej stosowaniu zyskuje się znacznie na czasie pracy komputera w stosunku do metody funkcji Greensa oraz oszacowano błąd, z jakim oblicza się wariancję, gdy rezolwenta jest podana w sposób przybliżony. Stosując metodę małego parametru rozszerzono metodę równań całkowych na przypadek małych nieliniowości.

Podano teoretyczne oszacowania, jakie wynikają dla stochastycznych nieliniowych układów dynamicznych ze stosowania metody małego parametru. Otrzymane rezultaty porównano z wynikami symulacyjnymi, z których wynika, że oszacowania te są za wielkie, "za grube". Zbadano wpływ zmian parametrów wielowymiarowego stochastycznego układu dynamicznego na jego rozwiązanie oraz momenty rozwiązania, proponując przybliżenie rozwiązań dla dowolnego parametru przez rozwiązania dla ustalonego parametru oraz stochastyczne funkcje wrażliwości I i II rzędu. Metoda ta przynosi zysk czasu przy obliczeniach na komputerze.

Opisane wyżej metody stosowano do badania drgań modeli przekładni zębatych o losowych parametrach, drgań modeli pojazdów poruszających się ze zmienną prędkością po losowym podłożu oraz oscylatorów nieliniowych, układów o zmiennej masie itp.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Резюме

В работе были исследованы методы анализа динамических стохастических систем а также их чувствительность. Показан метод многомерной импульсной переходной функции (функции Грина) и метод интегральных уравнений. Методы применялись в наиболее общих случаях, когда для линейной системы начальные условия являлись случайными а возмущения являлись случайными процессами. В случае метода интегральных уравнений исследовано существование и устойчивость решения. Показано, что при применении этого метода уменьшается время компьютера по сравнению с методом функции Грина. Оценена неточность в вычислении среднеквадратической ошибки, в случае когда резольвента похожа в приближении. Применяя метод малого параметра расширен метод интегральных уравнений для случая небольших нелинейностей. Даны теоретические оценки для стохастических динамических нелинейных систем, вытекающие из применения метода малого параметра. Полученные результаты сравнены с результатами симуляции. Из этого сравнения следует, что полученные оценки весьма песимистичны. Исследовано влияние изменений параметров многомерной стохастической динамической системы на её решение а также моментные функции решения, предлагая приближение решений для любого параметра, путём решения для установленного параметра и стохастических функций чувствительности I и II порядка. Метод этот даёт уменьшение машинного времени.

Описанные методы применялись для исследования колебаний модели зубчатых передач со случайными параметрами, колебаний моделей машин движущихся с переменной скоростью по случайной дороге а также нелинейных осцилляторов систем с переменной массой и т.п.

METHODS OF ANALYSIS AND SENSITIVITY OF DYNAMIC STOCHASTIC SYSTEMS

Summary

In the paper methods of analysis of dynamic stochastic systems and their sensitivity has been considered. A method of multivariable impulse transfer functions (Green's functions) and a method of integral equations have been presented. They are used in the most general cases in which initial conditions are random variables and input signals are stochastic processes. The problem of existence and uniqueness of solution in the method of integral equations is considered. Its application saves computing time in comparison to the method of Green's functions. The error of the variance connected with approximation of a resolvent kernel is found. A method of small parameters is used for the systems with small nonlinearities.

Theoretical estimations for nonlinear stochastic systems are given for the small parameter method. The results are compared with simulation results and the comparison shows that they are overestimated. The effect of perturbation of a multivariable dynamic stochastic system for its solution and its moments has been investigated. Solutions for an arbitrary parameter are proxied by solutions for a given parameter and stochastic sensitivity functions of the first and second order. This method saves much computing time.

The methods have been used to investigate vibrations of models of toothed gears with random parameters, vehicles driving on a random base with varying speed, nonlinear oscillators, systems with varying mass etc.



3359/85/45

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYC W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę
Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.