ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

CZESŁAW KLUCZNY

O PEWNEJ POSTACI MACIERZY e^{At}

Streszczenie. W pracy opisano pewną metodę, która prowadzi prawie natychmiast do nowej postaci macierzy e^{At}. Metoda ta związana z teorią równań różniczkowych jest bardzo prosta, a do obliczania współczynników w otrzymanym wzorze można stosować ETO. Podano tu także praktyczne wskazówki jak otrzymać wielomian minimalny macierzy. W końcu pracy podano nowy niezwykle prosty dowód twierdzenia Hamiltona-Cayley'a o postaci kanonicznej macierzy.

1. Niech A oznacza macierz kwadratową $n \times n$ stałą, a

$$X' = A X \tag{1}$$

równanie różniczkowe macierzowe.

Jeżeli $L(p)$ jest dowolnym wielomianem zerującym macierzy A, czyli $L(A) = 0$, a $X(t)$ dowolnym rozwiązaniem równania (1), to oczywiście

$$L(A) \cdot X(t) = 0 \tag{2}$$

a że $A^k X(t) = X^{(k)}(t)$, gdzie $X^{(k)}(t)$ oznacza k-tą pochodną macierzy $X(t)$ lub inaczej $X^{(k)}(t) = p^k X(t)$, gdzie p oznacza teraz operator różniczkowania, to oznaczając przez L operator różniczkowy wielomianowy o wielomianie $L(p)$ mamy

$$L[X(t)] = 0. \tag{3}$$

Znaczy to w szczególności, że każdy element $x(t)$ macierzy $X(t)$, czyli każda składowa równania wektorowego

$$\hat{x}' = A\,\hat{x} \tag{1'}$$

spełnia równanie różniczkowe

$$L[x(t)] = 0. \tag{3'}$$

Oczywiście, że i pochodne $x'(t)$, $x''(t)$,..., spełniają równanie (3').

Niech m oznacza stopień wielomianu $L(p)$. Będziemy to zaznaczali pisząc zamiast $L(p)$ i L odpowiednio $L_m(p)$ i L_m.

Niech dalej funkcje

$$w_1(t),\ w_2(t),\dots,w_m(t)$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań równania (3) taki, że macierz kwadratowa

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t),\ w_2(t),\dots,w_m(t) \\ w_1'(t),\ w_2(t),\dots,w_m'(t) \\ \vdots \\ w_1^{(m-1)}(t),\ w_2^{(m-1)}(t),\dots,w_m^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

spełnia warunek $W(0) = J$, gdzie J - macierz jednostkowa.

Ponieważ każdy element macierzy $W(t)$ spełnia równanie (3') to sama macierz spełnia równanie (3), czyli

$$L_m[W(t)] = 0.$$

Jeżeli $X(t) = e^{At}$, to

$$X(0) = J \quad \text{i} \quad X^{(k)}(0) = A^k, \; k = 1,2,\ldots.$$

Z drugiej strony e^{At} jest rozwiązaniem równania (3), a każde rozwiązanie tego równania jest wyznaczone przez warunki początkowe, które wobec poprzedniego mają postać

$$X(0) = J, \quad X^{(k)}(0) = A^k, \quad k = 1,2,\ldots,m-1.$$

Łatwo widać, że rozwiązaniem takim jest

$$X(t) = \sum_{k=1}^{k=m} A^{k-1} \; w_k(t),$$

gdzie $A^0 = J$, a zatem

$$e^{At} = J \cdot w_1(t) + A \cdot w_2(t) + \ldots + A^{m-1} \cdot w_m(t). \qquad \otimes$$

Jest to zapowiedziany na początku wzór na e^{At}.

Uwaga 1. Jeżeli mamy równanie wektorowe (1'), to mamy i wielomian charakterystyczny $L_n(p)$ macierzy A i dla równania (3') łatwo podać układ fundamentalny rozwiązań.

Jeżeli

$$u_1(t), \; u_2(t), \ldots, u_n(t) \tag{6}$$

jest takim układem, a $U(t)$ macierzą $n \times n$ zbudowaną z funkcji (6) w analogiczny sposób jak macierz (5) z funkcji (4), to macierz $W(t)$, która w tym przypadku ma wymiar $n \times n$ ma postać

$$W(t) = U(t) \cdot U^{-1}(0)$$

i aby podać wzór $\otimes$, w którym teraz $m = n$ wystarczy wykonać odwracanie macierzy $U(0)$ i potęgowanie macierzy A aż do uzyskania stopnia $n-1$, co przy dużych n można bez większych trudności wykonać za pomocą maszyny cyfrowej.

Jeżeli m jest stopniem wielomianu minimalnego macierzy A i $m<n$, to oczywiście rachunki będą wielokrotnie mniejsze, jeżeli dla uzyskania wzoru $\otimes$ wyjdziemy od tego właśnie wielomianu. Dlatego znajomość wielomianu minimalnego jest sprawą ważną dla praktyki. Dla uzyskania go może być pomocna wskazówka, którą podajemy niżej odsyłając czytelnika szukającego jej uzasadnienia do pracy [1].

Jeżeli

$$L_n(p) = (p - s_1)^{\alpha_1} (p - s_2)^{\alpha_2} \dots (p - s_k)^{\alpha_k}$$

a

$$L_m(p) = (p - s_1)^{\beta_1} (p - s_2)^{\beta_2} \dots (p - s_k)^{\beta_k},$$

gdzie $L_n(p)$ i $L_m(p)$ są odpowiednio wielomianami charakterystycznym i minimalnym to oczywiście $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ $i = 1,2,\dots,k$ i dla określenia $L_m(p)$ wystarczy określić liczby β_i. W [1] podano twierdzenie, które mówi, że każda z liczb β_i $i = 1,2,\dots,k$ jest najmniejszą z liczb naturalnych r takich, że $\operatorname{rz} A_i^r = n - i$, gdzie $A_i = A - s_i J$, przy czym wiadomo, że

$$n > \operatorname{rz} A_i > \operatorname{rz} A_i^2 > \dots > \operatorname{rz} A_i^r = \operatorname{rz} A_i^{r+v}, \; v = 1,2,\dots .$$

Ponadto różnice $\operatorname{rz} A_i^{j-1} - \operatorname{rz} A_i^j$ nie rosną ze względu na j. Na tej podstawie otrzymujemy następującą tabelkę, z której wynika, że np. aby określić β_i, gdy $\alpha_i \leqslant 5$, wystarczy zbadać co najwyżej rzędy macierzy A_i i A_i^2, a gdy $\alpha_i \leqslant 3$ tylko rząd A_i.

A oto tabelka, o której mowa

α_i	rz A_i	rz A_i^2	β_i	α_i	rz A_i	rz A_i^2	β_i
1			1	5	n-1		5
2	n-1		2	5	n-2	n-3	4
2	n-2		1	5	n-2	n-4	3
3	n-1		3	5	n-2	n-5	2
3	n-2		2	5	n-3	n-4	3
3	n-3		1	5	n-3	n-5	2
4	n-1		4	5	n-4		2
4	n-2	n-3	3	5	n-5		1
4	n-2	n-4	2				

Tak np. jeżeli $L_n(p) = (p - s_1)(p - s_2)^3$ i $rz(A - s_2 J) = 2$ to $L_m(p) = (p - s_1)(p - s_2)^2$.

Uwaga 2. Na pierwszy rzut oka może się wydawać niezrozumiałe, że ta sama macierz e^{At} może być przedstawiona dwoma lub więcej wzorami postaci (x) różniącymi się liczbą składników. Staje się jednak zrozumiałe, gdy przypomnimy sobie, że w przypadku, gdy $m < n$, to potęgi A dla $v \geqslant m$ wyrażają się przez potęgi A^j, $j = 0,1,2,\ldots,m-1$. Jeżeli więc dla m mamy wzór (x) a dla n wzór

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{i=n} A^{i-1} u_i(t), \tag{xx}$$

to $w_i(t)$ wyrażają się liniowo przez $u_i(t)$ i jeżeli z kolei do $u_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$ wchodzą kombinacje liniowe funkcji $t^v e^{s_j t}$, $v = 0,1,\ldots,\alpha_j-1$, a do $w_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$ $t^v e^{s_j t}$ z $v = 0,1,\ \beta_j-1$, to we wzorze (xx) muszą zniknąć $t^v e^{s_j t}$ dla $v = \beta_j,\beta_j+1,\ldots,\alpha_j-1$.

Przykład

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 1, & 1, & 2 \end{bmatrix}$$

$L_3(p) = (p-1)^3$, $rz(A - J) = 1 = n - 2$ i z tabelki $\beta = 2$ czyli wielomian minimalny $L_2(p) = (p-1)^2$.
Biorąc za wyjściowy układ fundamentalny rozwiązań dla równania $L_2[x(t)] = 0$ funkcje $v_1 = e^t$ i $v_2 = t\,e^t$, dla równania $L_3[x(t)] = 0$ jeszcze $v_3 = t^2 e^t$, otrzymamy w pierwszym przypadku $w_1 = e^t - t\,e^t$, $w_2 = t\,e^t$ a w drugim

$$u_1 = \frac{1}{2}(2\,e^t - 2\,t\,e^t + t^2 e^t), \quad u_2 = t\,e^t - t^2 e^t, \quad u_3 = \frac{1}{2} t^2 e^t$$

co w obu przypadkach prowadzi do wzoru $e^{At} = J(e^t - te^t) + A\,t\,e^t$ i chociaż do funkcji $u_i(t)$ wchodzą składniki $t^2 e^t$, to w ostatecznym rachunku znoszą się.

2. Pokażemy jeszcze jak, poprzez teorię równań różniczkowych liniowych można wykazać, że wielomian charakterystyczny macierzy jest jej wielomianem zerującym. W tym celu równanie wektorowe (1') zapiszmy w postaci operatorowej $(A - p\,J)\,x = 0$, gdzie p - operator różniczkowania lub rozpisując

$$\begin{aligned} (a_{11}-p)x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n &= 0 \\ a_{21}\,x_1 + (a_{22}-p)x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots + (a_{nn}-p)x_n &= 0 \end{aligned} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Niechaj $\left[d_{ij}(p)\right]$ będzie macierzą dopełnień algebraicznych macierzy $A-p\,J$, D_{ij} wielomianowym operatorem różniczkowym o wielomianie $d_{ij}(p)$. Jeżeli k jest jedną z liczb $1,2,\ldots,n$ to mnożąc operatorowo równania układu (I) kolejno przez

$$D_{1k}, D_{2k}, \ldots, D_{nk}$$

i dodając otrzymamy $L_n\left[x_k(t)\right] = 0$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Ponieważ każda kolumna równania macierzowego (1) spełnia równanie (1'), to dla każdego rozwiązania $X(t)$ równania (1) jest spełnione równanie $L_n\left[X(t)\right] = 0$. Wynika stąd jak na początku pkt 1 związek: $L_n(A) \cdot X(t) = 0$, a stąd dla $X = e^{At}$ przy $t = 0$ otrzymujemy $L_n(A)J = L_n(A) = 0$.
Wykazaliśmy w ten sposób twierdzenie znane jako twierdzenie Hamiltona-Cayle'a. Ze sposobu w jaki to uczyniliśmy jest także jasne, że jeżeli $\varphi(p)$ jest wspólnym podzielnikiem wszystkich dopełnień algebraicznych macierzy $A - p\,J$, to wielomian $L_n(p)$ jest podzielny przez $\varphi(p)$, a ich iloraz jest także wielomianem zerującym macierzy A. Jak wiadomo, w przypadku gdy $\varphi(p)$ jest największym wspólnym podzielnikiem wszystkich $d_{ij}(p)$, iloraz ten przedstawia wielomian minimalny macierzy.

LITERATURA

1. Kluczny Cz.: Pewien dowód twierdzenia Jordana o postaci kanonicznej macierzy, Zeszyty Naukowe, Sekcja Matematyki WSP, 2, Katowice 1958.

О НОВОЙ ЗАПИСИ МАТРИЦЫ e^{At}

Р е з ю м е

В статье описан метод позваляющий получить новую запись матрицы e^{At}. Приводится также палезная информация для практического нахождения минимального многочлена матрицы.

ON SOME FORMALA OF THE MATRIX e^{At}

S u m m a r y

In this paper it has been described a method to obtain some new form of the matrix e^{At}. There have been also given some information of practical value, when we have to determine the minimal polynom of the matrix.