ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JANINA ŚLADKOWSKA

NIERÓWNOŚCI WSPÓŁCZYNNIKOWE DLA FUNKCJI BIEBERBACHA-EILENBERGA

Streszczenie. Niech B oznacza rodzinę wszystkich funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym U, znikających w punkcie $z = 0$ i takich, że $f(z_1), f(z_2) \neq 1$ dla $z_1, z_2 \in U$. Funkcje rodziny B nazywają się funkcjami Bieberbacha-Eilenberga.

W [6] Hummel i Schiffer otrzymali układ nierówności współczynnikowych typu nierówności Grunsky'go dla funkcji należących do B. Zasadniczym wynikiem tej pracy jest uogólnienie nierówności Hummela-Schiffera zawarte w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie. Niech $f(z) \in B(d, 1/d)$, gdzie $B(d,1/d)$ oznacza podklasę złożoną z funkcji klasy B, które nie przyjmują wartości d i 1/d w U. Niech dalej współczynniki $\gamma_{mn}(d)$ będą zdefiniowane przy pomocy funkcji generującej

$$\log\left[\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)(1-f(z)f(\zeta))}\;\frac{(1+F(z)F(\zeta))^2}{(F(z)+F(\zeta))^2}\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_{mn}(d) z^m \zeta^n,$$

gdzie

$$F(z) = \sqrt{\frac{d-f(z)}{1-df(z)}},$$

przy czym ta sama gałąź pierwiastka kwadratowego jest wzięta w $F(z)$ i $F(\zeta)$; wówczas dla każdego rzeczywistego λ_0 i zespolonych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

$$(*)\qquad 2\lambda_0 \operatorname{Re}\{C_0\} + \sum_{m=1}^{\infty} m|C_m|^2 \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m}, \qquad (x)$$

gdzie

$$C_m = \sum_{n=0}^{N} \gamma_{mn}(d)\lambda_n, \quad m = 0,1,\ldots,$$

1. Niech B oznacza rodzinę funkcji $f(z)$ postaci

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \quad |z|<1, \quad b_1 > 0, \tag{1}$$

jednolistnych w kole $U = \{|z| < 1\}$ i spełniających warunek

$$f(z_1)\, f(z_2) \neq 1$$

dla każdej pary z_1, z_2, $|z_1|<1$, $|z_2|< 1$. Funkcje te były najpierw rozpatrywane przez Bieberbacha [1, 2], a następnie przez Eilenberga [3]. Odgrywają one dużą rolę w badaniu funkcji klasy S, tj. klasy funkcji postaci (1), $b_1 = 1$, jednolistnych w kole U. Istnieje mianowicie związek między funkcjami obu klas. I tak, jeśli $f(z)$ należy do B, to funkcja

$$g(z) = \frac{1}{b_1} \frac{f(z)}{(1 + f(z))^2} \tag{2}$$

należy do S i odwrotnie, jeśli $g(z)$ należy do S i $g(z) \neq d$, to funkcja

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - d^{-1} g(z)}}{1 + \sqrt{1 - d^{-1} g(z)}}$$

należy do B, przy czym $b_1 = \frac{1}{4d}$.

W [6] Hummel i Schiffer podali dla klasy B nierówność typu nierówności polowej Bieberbacha, z której wyprowadzili nierówności współczynnikowe typu nierówności Grunsky'ego. Spełnienie tych nierówności stanowi warunek konieczny i wystarczający przynależności funkcji do klasy B. Nierówności Hummela i Schiffera posłużyły do uzyskania na drodze elementarnej ważnych dla badania współczynników funkcji klasy S warunków Garabediana-Schiffera [4], otrzymanych pierwotnie przy pomocy metod wariacyjnych. Nierówność (31) z tej pracy jest uogólnieniem nierówności polowej (76) z [6]. Współczynniki funkcji $f(z)$ zostały w niej związane z liczbami d, które nie są wartościami tej funkcji. Z (31) wynikają dla rodziny B dwa układy nierówności typu nierówności Grunsky'ego, z których drugi jest identyczny z (79) z [6]. Z nierówności (39) uzyskane zostały nowe oszacowania współczynników a_2 i a_3, $a_n = b_n/b_1$, w klasie B, oszacowania wyrażone przy pomocy wartości nie przyjętej d.

Podobne nierówności dla funkcji jednolistnych ograniczonych otrzymał de Temple w [9] oraz Nehari w [7].

2. Niech $f(z) \in B$ i niech d będzie jakąkolwiek wartością, taką że

$$f(z) \neq d, \quad f(z) \neq 1/d, \quad d \neq \pm 1.$$

Takie własności ma w szczególności każdy punkt brzegu obszaru $f(U)$ różny od ± 1. Wówczas funkcja

$$F(z) = \sqrt{\frac{d - f(z)}{1 - df(z)}}$$

jest funkcją holomorficzną i jednolistną w kole U, o rozwinięciu

$$F(z) = \beta + \beta_1 z + \dots, \quad |z| < 1, \quad \beta = \sqrt{d},$$

przy czym spełnia ona warunek

$$F(z_1) + F(z_2) \neq 0 \tag{4}$$

dla każdych z_1, z_2, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, a więc jest funkcją Gelfera [5]. Ponieważ dalej, dla homografii

$$h(w) = \frac{d - w}{1 - dw}$$

zachodzi

$$h\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{h(w)}, \tag{5}$$

to funkcja $\varphi(z) = h(f(z))$ spełnia warunek

$$\varphi(z_1)\,\varphi(z_2) \neq 1 \quad \text{dla} \quad z_1,\ z_2 \in U.$$

Istotnie, gdyby $\varphi(z_1)\,\varphi(z_2) = 1$, to $h(f(z_1))\,h(f(z_2)) = 1$, a stąd

$$h(f(z_1)) = \frac{1}{h(f(z_2))}. \tag{6}$$

Ale na mocy (5) $\frac{1}{h(f(z_2))} = h\left(\frac{1}{f(z_2)}\right)$, skąd i z (6) $f(z_1) = \frac{1}{f(z_2)}$, wbrew temu, że $f(z) \in B$. Widzimy stąd, że funkcja $F(z) = \sqrt{\varphi(f(z))}$, oprócz warunku (4) spełnia także warunek

$$F(z_1)\,F(z_2) \neq \pm 1 \tag{7}$$

dla każdych z_1, z_2, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$.

Oznaczmy przez $G(\beta)$ rodzinę funkcji postaci (3), jednolistnych i spełniających warunki (4) i (7). Połóżmy $G = \bigcup_{\beta} G(\beta)$. Zajmiemy się obecnie poszukiwaniem w rodzinie $G(\beta)$ nierówności będącej odpowiednikiem nierówności polowej Bieberbacha, a następnie nierówności typu nierówności Grunsky'ego.

Połóżmy kolejno

$$\log \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,n=0}^{\infty} k_{mn} z^m \zeta^n, \tag{8}$$

$$-\log (F(z) + F(\zeta)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} l_{mn} z^m \zeta^n, \tag{9}$$

$$\log(1 + F(z)\, F(\zeta)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} z^m \zeta^n, \tag{10}$$

$$-\log(1 - F(z)\, F(\zeta)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} q_{mn} z^m \zeta^n. \tag{11}$$

Ze względu na jednolistność funkcji $F(z)$ oraz warunki (4) i (7) wszystkie szeregi występujące po prawych stronach równości (8) - (11) są zbieżne w bicylindrze $U \times U$. Macierze $[k_{mn}]$, $[l_{mn}]$, $[p_{mn}]$ i $[q_{mn}]$ są macierzami symetrycznymi.

Weźmy pod uwagę funkcję

$$\psi(\zeta, t) = \log \frac{1 - t\beta}{1 - tF(\zeta)}\,.$$

Przy ustalonym $t \neq \frac{1}{\beta}$ w dostatecznie małym otoczeniu punktu $\zeta = 0$ jest to funkcja holomorficzna zmiennej ζ; niech rozwinięcie jej ma postać

$$\log \frac{1 - t\beta}{1 - tF(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(t) \zeta^n.$$

Łatwo widać, że

$$\Phi_n(t) = F_n\left(\frac{t}{1-\beta t}\right) + C_n, \tag{12}$$

gdzie $F_n(\tau)$ jest n-tym wielomianem Fabera dla funkcji $[F(\zeta)-\beta]^{-1}$ a C_n - stałymi. Z (12) widać, że $\Phi_n(t)$ są funkcjami wymiernymi o jedynym biegunie w punkcie $t = \frac{1}{\beta}$.

Korzystając z (8) - (11), napiszmy następujące rozwinięcia

$$\log\frac{F(z)-\beta}{z} = \sum_{m=0}^{\infty} k_{mo}z^m, \tag{13}$$

$$z^{-n} - \Phi_n\left(\frac{1}{F(z)}\right) = n\sum_{m=0}^{\infty} k_{mn}z^m, \quad n \geqslant 1, \tag{14}$$

$$-\log(\beta + F(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{mo}z^m, \tag{15}$$

$$\Phi_n\left(-\frac{1}{F(z)}\right) = n\sum_{m=0}^{\infty} l_{mn}z^m, \quad n \geqslant 1, \tag{16}$$

$$\log(1+\beta F(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{mo}z^m, \tag{17}$$

$$-\Phi_n(-F(z)) = n\sum_{m=0}^{\infty} p_{mn}z^m, \quad n \geqslant 1, \tag{18}$$

$$-\log(1-\beta F(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{mo} z^m, \tag{19}$$

$$\Phi_n(F(z)) = n\sum_{m=0}^{\infty} q_{mn} z^m, \quad n \geqslant 1. \tag{20}$$

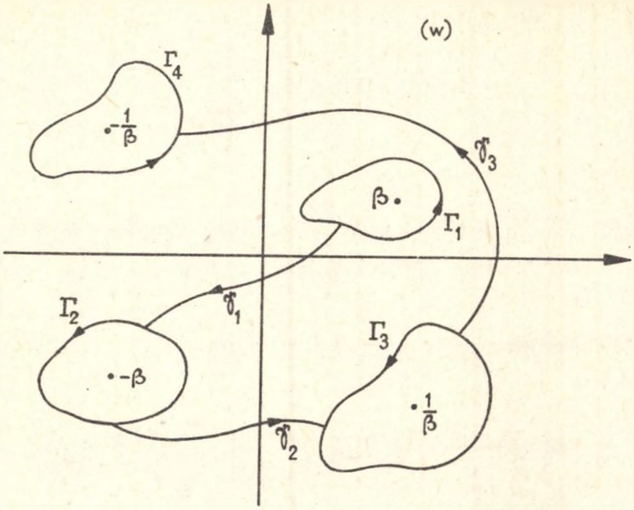
Połóżmy wreszcie

$$q(w) = x_o \log\frac{w-\beta}{1-\beta w} - y_o \log\frac{w+\beta}{1+\beta w} - \sum_{m=1}^{N}\frac{x_m}{m}\left[\Phi_m\left(\frac{1}{w}\right) - \Phi_m(w)\right] +$$

$$+\sum_{m=1}^{N}\frac{y_m}{m}\left[\Phi_m\left(-\frac{1}{w}\right) - \Phi_m(-w)\right], \tag{21}$$

gdzie x_o, y_o - rzeczywiste, a x_m, y_m, $m = 1,\dots,N$, dowolne zespolone. $q(w)$ jest funkcją analityczną wieloznaczną, jedynymi jej punktami rozgałęzienia typu logarytmicznego są punkty β, $-\beta$, $\frac{1}{\beta}$, $-\frac{1}{\beta}$. Punkt $w = \infty$ jest punktem holomorficzności i w każdym obszarze $|w| > R$, gdzie $R > \max(|\beta|, \frac{1}{|\beta|})$, istnieje gałąź jednoznaczna funkcji $q(w)$. Ponadto $\mathrm{Re}\{q(w)\}$ jest funkcją jednoznaczną.

Niech Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 będą zamkniętymi krzywymi analitycznymi zawierającymi w swoich wnętrzach odpowiednio punkty β, $-\beta$, $\frac{1}{\beta}$ i $-\frac{1}{\beta}$, takimi, że każda z nich leży na zewnątrz pozostałych. Połączmy ze sobą te krzywe kolejno łukami regularnymi γ_1, γ_2 i γ_3, nie przecinającymi się wzajemnie i nie mającymi, poza końcami, punktów wspólnych z $\Gamma_1 - \Gamma_4$, (rys. 1). Krzywe $\Gamma_1 - \Gamma_4$ łącznie z łukami $\gamma_1 - \gamma_3$ stanowią brzeg obszaru jednospójnego B_o, w którym istnieje gałąź jednoznaczna funkcji $q(w)$.



Rys. 1

Połóżmy

$$S_1(w) = \frac{w-\beta}{1-\beta w}, \quad S_2(w) = \frac{w+\beta}{1+\beta w},$$

$$S_3(w) = -\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\left[\Phi_m\left(\frac{1}{w}\right) - \Phi_m(w)\right] + \sum_{m=1}^{N} \frac{y_m}{m}\left[\Phi_m\left(-\frac{1}{w}\right) - \Phi_m(-w)\right].$$

Wówczas

$$q(w) = x_o \log S_1(w) - y_o \log S_2(w) + S_3(w),$$

a

$$\operatorname{Im} q(w) = x \quad \arg S_1(w) - y_o \arg S_2(w) + \operatorname{Im} S_3(w). \tag{22}$$

Łatwo widać, że zarówno wartości $\arg S_1(w)$ jak $\arg S_2(w)$ na dwóch przeciwnych brzegach każdej z krzywych γ_i, $i = 1,2,3$, różnią się o stałą, a wobec (22) to samo dotyczy $\operatorname{Im} q(w)$, a wreszcie samego $q(w)$, bo $\operatorname{Re} q(w)$ jest funkcją jednoznaczną. W rezultacie, to co przypada na oba brzegi łuku γ_i w całce

$$\int\limits_{\partial B_o} \mathrm{Re}\{q(w)\}d\{q(w)\}$$

jest równe zero. Niech dalej $\Gamma_o = \{|w| = R\}$, gdzie R jest na tyle duże by krzywe $\Gamma_1 - \Gamma_4$ i łuki $\gamma_1 - \gamma_3$ leżały wewnątrz Γ_o. Krzywe $\Gamma_o - \Gamma_4$ uważamy za zorientowane dodatnio względem swoich wnętrz. Niech B_1 oznacza obszar ograniczonymi krzywymi $\Gamma_o - \Gamma_4$ i łukami $\gamma_1 - \gamma_3$. Korzystając ze znanej wersji twierdzenia Greena, otrzymujemy

$$0 \leqslant \iint\limits_{B_1} |q'(w)|^2 \, d\sigma = \frac{1}{i} \int\limits_{\partial B_1} \{\mathrm{Re}\ q(w)\} d\{q(w)\} =$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\Gamma_j} \mathrm{Re}\{q(w)\}\,d\{q(w)\} + \frac{1}{i}\int\limits_{\Gamma_j} \mathrm{Re}\{q(w)\}d\{q(w)\}, \tag{23}$$

gdzie $d\sigma$ oznacza element powierzchniowy w płaszczyźnie (w). Biorąc pod uwagę fakt, że ze względu na holomorficzność funkcji $q(w)$ w punkcie $w = \infty$

$$\int\limits_{\Gamma_o} \mathrm{Re}\{q(w)\}d\{q(w)\} \longrightarrow 0, \text{ gdy } R \longrightarrow \infty,$$

otrzymujemy z (23) nierówność

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{i} \int\limits_{\Gamma_j} \mathrm{Re}\{q(w)\}d\{q(w)\} \leqslant 0, \tag{24}$$

z której skorzystamy za chwilę.

Wróćmy teraz do funkcji $F(z) \in G(\beta)$. Niech $0 < r < 1$ i niech

$$C_r: \quad w = F(re^{i\varphi}), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$C_r^-: \quad w = -F(re^{i\varphi}), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$\tilde{C}_r: \quad w = G(re^{i\varphi}) = \left[F(re^{i\varphi})\right]^{-1}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$\tilde{C}^-_r: \quad w = -\, G(re^{i\varphi}), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Oczywiście jest

$$\operatorname{ind}_{C_r} \beta = 1,$$

a wykonując proste rachunki i korzystając przy tym z własności (4) i (7) funkcji klasy $G(\beta)$, otrzymujemy

$$\operatorname{ind}_{C_r}(-\beta) = \operatorname{ind}_{C_r} \beta^{-1} = \operatorname{ind}_{C_r}(-\beta^{-1}) = 0,$$

$$\operatorname{ind}_{C^-_r}(-\beta) = 1, \quad \operatorname{ind}_{C^-_r} \beta = \operatorname{ind}_{C^-_r} \beta^{-1} = \operatorname{ind}_{C^-_r}(-\beta^{-1}) = 0,$$

$$\operatorname{ind}_{\tilde{C}_r} \beta^{-1} = 1, \quad \operatorname{ind}_{\tilde{C}_r} \beta = \operatorname{ind}_{\tilde{C}_r}(-\beta) = \operatorname{ind}_{\tilde{C}_r}(-\beta^{-1}) = 0,$$

$$\operatorname{ind}_{\tilde{C}^-_r}(-\beta^{-1}) = 1, \quad \operatorname{ind}_{\tilde{C}^-_r} \beta = \operatorname{ind}_{\tilde{C}^-_r}(-\beta) = \operatorname{ind}_{\tilde{C}^-_r} \beta^{-1} = 0.$$

Krzywe C_r, C^-_r, $\tilde{C}_r$ i $\tilde{C}^-_r$ tworzą więc układ krzywych zawierających w swoich wnętrzach odpowiednio β, $-\beta$, β^{-1}, $-\beta^{-1}$, wzajemnie nie przecinających się i takich, że każda leży na zewnątrz wszystkich pozostałych - te ostatnie dwie własności wynikają z własności (4) i (7) funkcji klasy $G(\beta)$. Z uwagi na (24), mamy

$$\frac{1}{i}\int_{C_r} \operatorname{Re}\{q(w)\}\, d\{q(w)\} + \frac{1}{i}\int_{C^-_r} \operatorname{Re}\{q(w)\}\, d\{q(w)\}$$

$$+ \frac{1}{i}\int_{\tilde{C}_r} \operatorname{Re}\{q(w)\}\, d\{q(w)\} + \frac{1}{i}\int_{\tilde{C}^-_r} \operatorname{Re}\{q(w)\}\, d\{q(w)\} \leqslant 0. \tag{25}$$

Oznaczając kolejne składniki lewej strony nierówności (25) przez J_1, J_2, J_3 i J_4, mamy

$$\sum_{j=1}^{4} J_j \leqslant 0. \tag{26}$$

Celem obliczenia $J_1 - J_4$, znajdziemy najpierw $q(F(z))$, $q(-F(z))$, $q(G(z))$ i $q(-G(z))$. I tak, korzystając z (13) - (21), mamy

$$q(F(z)) = x_0 \log z - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{nz^n} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m, \tag{27}$$

gdzie

$$A_m = \sum_{n=0}^{N} \left[(k_{mn} + q_{mn})x_n + (l_{mn} + p_{mn})y_n\right], \quad m = 0,1,\ldots, \tag{28}$$

$$q(-F(z)) = -y_0 \log z + \sum_{n=1}^{N} \frac{y_n}{nz^n} - \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m + (\text{stała czysto urojona}),$$
$$m = 0,1,\ldots, \tag{29}$$

gdzie

$$B_m = \sum_{n=0}^{N} \left[(l_{mn} + p_{mn})x_n + (k_{mn} + q_{mn})y_n\right], \quad m = 0,1,\ldots . \tag{30}$$

Ponadto łatwo zauważyć, że

$$q(G(z)) = -q(F(z)) \quad \text{i} \quad q(-G(z)) = -q(-F(z)),$$

a stąd oczywiście

$$J_3 = J_1 \quad \text{i} \quad J_4 = J_2.$$

Wystarczy zatem policzyć J_1 i J_2. I tak, ze względu na (27) i (29), po łatwym rachunku

$$J_1 = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=r} \mathrm{Re}\{q(F(z))\}\, d\{q(F(z))\}$$

$$= 2\pi x_0^2 \log r - \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}|x_n|^2 r^{-2n} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|^2 r^{2n} + 2\pi x_0 \mathrm{Re}\{A_0\},$$

$$J_2 = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=r} \mathrm{Re}\{q(-F(z))\} d\{q(-F(z))\}$$

$$= 2\pi y_0^2 \log r - \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}|y_n|^2 r^{-2n} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|B_n|^2 r^{2n} + 2\pi y_0 \mathrm{Re}\{B_0\},$$

co, po wstawieniu do (26) i po przejściu do granicy przy $r \to 1$, daje nierówność

$$2x_0 \mathrm{Re}\{A_0\} + 2y_0 \mathrm{Re}\{B_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left[|A_n|^2 + |B_n|^2\right] \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left[|x_n|^2 + |y_n|^2\right]. \tag{31}$$

Kładąc

$$\lambda_m = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \quad \mu_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n), \tag{32}$$

$$a_{mn} = k_{mn} + l_{mn}, \quad \alpha_{mn} = k_{mn} - l_{mn}, \tag{33}$$

$$b_{mn} = q_{mn} + p_{mn}, \quad \beta_{mn} = q_{mn} - p_{mn}, \tag{34}$$

otrzymujemy

$$C_m = \frac{1}{2}(A_m + B_m) = \sum_{n=0}^{N}\left[(a_{mn} + b_{mn})\lambda_n\right] \tag{35}$$

i

$$D_m = \frac{1}{2}(A_m - B_m) = \sum_{n=0}^{N}\left[(\alpha_{mn} + \beta_{mn})\mu_n\right]. \tag{36}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$x_o A_o + y_o B_o = 2\lambda_o C_o + 2\mu_o D_o. \tag{37}$$

Wstawiając teraz (32) - (37) do (31) i stosując prawo równoległoboku: $\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[|a|^2 + |b|^2\right]$, otrzymujemy

$$2\lambda_o \operatorname{Re}\{C_o\} + 2\mu_o \operatorname{Re}\{D_o\} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left[|C_n|^2 + |D_n|^2\right] \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left[|\lambda_n|^2 + |\mu_n|^2\right], \tag{38}$$

gdzie C_n zależą już tylko od układu $\{\lambda\}$, a D_n - tylko od układu $\{\mu\}$ i zerują się wraz z zerowaniem tych układów. Kładąc zatem kolejno $\{\mu\} = \{0\}$ i $\{\lambda\} = \{0\}$, otrzymujemy nierówności

$$2\lambda_o \operatorname{Re}\{C_o\} + \sum_{n=1}^{\infty} n|C_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{|\lambda_n|^2}{n} \tag{39}$$

i

$$2\mu_o \operatorname{Re}\{D_o\} + \sum_{n=1}^{\infty} n|D_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{|\mu_n|^2}{n}. \tag{40}$$

Znaki równości w (39) i (40) dla niebanalnych układów $\{\lambda\}$ i $\{\mu\}$ zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy znak równości ma miejsce w nierówności otrzymanej po przejściu do granicy przy $r \to 1$ w nierówności (25), a więc wtedy i tylko wtedy gdy dopełnienie sumy obszarów $F(U)$, $-F(U)$, $G(U)$, $-G(U)$ jest zbiorem miary zero. Udowodniliśmy zatem następujące

Twierdzenie 1. Jeśli $F(z) \in G(\beta)$, a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$ i $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$ są dwoma dowolnymi układami liczb zespolonych, przy czym λ_0 i μ_0 rzeczywiste, to

$$2\lambda_0 \operatorname{Re}\{C_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} n|C_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} \tag{41}$$

i

$$2\mu_0 \operatorname{Re}\{D_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} n|D_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_m|^2}{n}, \tag{42}$$

gdzie C_n i D_n, $n = 0,1,\dots$, określone są wzorami (35) i (36).

Równość dla układu niebanalnego $\{\lambda\}$ w (41) i dla układu niebanalnego $\{\mu\}$ w (42) zachodzi jedynie, gdy dopełnienie sumy obszarów $F(U)$, $-F(U)$, $G(U)$ i $-G(U)$ jest zbiorem miary zero.

3. Rozważmy teraz funkcjonał

$$\Phi(F) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N} \left[(a_{mn} + b_{mn})\lambda_m\lambda_n\right]\right\}.$$

Ze względu na nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m=1}^{N} \lambda_n C_n\right\} \leqslant \left|\sum_{m=1}^{N} \lambda_m C_m\right|,$$

nierówność Schwarza, nierówność

$$\sum_{n=1}^{N} n|c_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2,$$

nierówność (41) oraz nierówność $(A^2 - 2\,AB)^{1/2} \leqslant A - B$, mamy

$$\Phi(F) = \lambda_0 \,\mathrm{Re}\{\bar{c}_0\} + \mathrm{Re}\left\{\sum_{m=1}^{N} \lambda_m c_m\right\}$$

$$\leqslant \lambda_0 \,\mathrm{Re}\{c_0\} + \left[\left(\sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m}\right)\left(\sum_{m=1}^{N} m|c_m|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \lambda_0 \,\mathrm{Re}\{c_0\} + \left[\left(\sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m}\right)^2 - 2\lambda_0 \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m} \cdot \mathrm{Re}\{c_0\}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \lambda_0 \,\mathrm{Re}\{c_0\} + \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m} - \lambda_0 \,\mathrm{Re}\{c_0\} = \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m}.$$

Otrzymamy stąd

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N} \left[(a_{mn} + b_{mn})\lambda_m \lambda_n\right]\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n},$$

przy czym znak równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy we wszystkich stosowanych wyżej nierównościach zachodzi znak równości. Prowadzi to do wniosku, że równość jest możliwa jedynie, gdy

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N} \left[(a_{on} + b_{on})\lambda_n\right]\right\} = 0, \tag{43}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left[(a_{mn}+b_{mn})\lambda_n\right]=\frac{\bar{\lambda}_m}{m}, \quad m=1,\ldots,N, \tag{44}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left[(a_{mn}+b_{mn})\lambda_n\right]=0, \quad m=N+1,\ N+2,\ldots, \tag{45}$$

i w tym wypadku dopełnienie sumy obszarów $F(U)$, $-F(U)$, $G(U)$ i $-G(U)$ do całej płaszczyzny ma pole równe zero.

I tak udowodniliśmy

Twierdzenie 2. Niech $F(z)\in G(\beta)$ i niech

$$\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{(F(z)+F(\zeta))(z-\zeta)}=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}z^m\zeta^n, \tag{46}$$

$$\log\frac{1+F(z)\,F(\zeta)}{1-F(z)\,F(\zeta)}=\sum_{m,n=0}^{\infty}b_{mn}z^m\zeta^n; \tag{47}$$

wówczas dla każdego λ_0 rzeczywistego i $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ zespolonych zachodzi nierówność

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N}\left[(a_{mn}+b_{mn})\lambda_m\lambda_n\right]\right\}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{|\lambda_n|^2}{n}. \tag{48}$$

Równość jest możliwa jedynie, gdy spełnione są warunki (43) - (45). W analogiczny sposób można udowodnić

Twierdzenie 3. Niech $F(z)\in G(\beta)$ i niech

$$\log\frac{F^2(z)-F^2(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\alpha_{mn}z^m\zeta^n, \tag{49}$$

$$- \log(1 - F^2(z)\, F^2(\xi)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \beta_{mn} z^m \xi^n, \tag{50}$$

wówczas dla każdego μ_o rzeczywistego i $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ zespolonych zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N} \left[(\alpha_{mn} + \beta_{mn})\mu_m \mu_n\right]\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\mu_n|^2}{n}. \tag{51}$$

Równość jest możliwa jedynie, gdy spełnione są warunki

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N} \left[(\alpha_{on} + \beta_{on})\mu_m\right]\right\} = 0, \tag{52}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left[(\alpha_{mn} + \beta_{mn})\mu_n\right] = \frac{\bar{\mu}_m}{m}, \quad m = 1, \dots, N, \tag{53}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left[(\alpha_{mn} + \beta_{mn})\mu_n\right] = 0, \quad m = N+1,\ N+2, \dots; \tag{54}$$

i w tym wypadku dopełnienie sumy obszarów $F(U)$, $-F(U)$, $G(U)$, $-G(U)$ do całej płaszczyzny ma pole równe zero.

4. Zastosowania do rodziny $G(\beta)$. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie 4. Niech

$$F(z) = \beta(1 + \alpha_1 z + \dots) \in G(\beta),$$

to

$$|\alpha_1| \leqslant 2\left|\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right|. \tag{55}$$

Równość zachodzi tylko dla funkcji $F_o(z)$ spełniającej związek

$$\frac{F_o(z)-\beta}{1-\beta F_o(z)}\cdot\frac{1+\beta F_o(z)}{F_o(z)+\beta} = \varepsilon z, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{56}$$

Dowód. Niech $\lambda_o = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 0$. Wówczas dla każdej funkcji $F(z) \in G(\beta)$ mamy

$$\operatorname{Re}\left\{a_{oo} + b_{oo}\right\} = \log\frac{|\alpha_1|}{2} + \log\left|\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right| \leqslant 0,$$

skąd wynika nierówność (55). Aby ponadto w (55) zachodziła równość musi być, na mocy (43) - (45),

$$C_o = a_{oo} + b_{oo} = \text{l. czysto urojona}, \quad C_m = a_{mo} + b_{mo} = 0, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Odejmując (29) od (27) i biorąc pod uwagę, że $y_n = x_n$, $n = 0,1,\ldots$, $x_n = 0$ dla $n \geqslant 1$ i $A_o + B_o$ - liczba czysto urojona, $B_m = -A_m$, $m = 1,2,\ldots$, otrzymamy

$$q(F_o(z)) - q(-F_o(z)) = 2\log z + (\text{liczba czysto urojona}). \tag{57}$$

Z drugiej strony z (21) mamy

$$q(F_o(z)) - q(-F_o(z)) = 2\log\frac{F_o(z)-\beta}{1-\beta F_o(z)}\cdot\frac{1+\beta F_o(z)}{F_o(z)+\beta} + (\text{l. czysto urojona}). \tag{58}$$

Porównując (57) z (58), wnioskujemy, po wzięciu części rzeczywistej, że

$$\log\left|\frac{F_o(z)-\beta}{1-\beta F_o(z)}\cdot\frac{1+\beta F_o(z)}{F_o(z)+\beta}\,\frac{1}{z}\right| = 0.$$

skąd otrzymujemy związek (56).

Zauważmy jeszcze, że związek (56) jest równoważny związkowi

$$\frac{[F_o(z)]^2}{(1+[F_o(z)]^2)^2} = \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta}\right)^2\left(\frac{\varepsilon z-1}{\varepsilon z+1}\right)^2\right]^{-1}. \tag{59}$$

W przypadku β rzeczywistego istnieje więc funkcja ekstremalna i jest nią funkcja

$$F_o(z) = \left[K^{-1}\left(\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta}\right)^2\left(\frac{\varepsilon z-1}{\varepsilon z+1}\right)^2\right]^{-1}\right)\right]^{1/2},$$

gdzie $K(\omega) = \dfrac{\omega}{(1+\omega)^2}$ jest dobrze znaną funkcja Koebego, a K^{-1} oznacza odpowiednio dobraną gałąź funkcji do niej odwrotnej. W przypadku $0<\beta<1$ funkcja $F_o(z)$ odwzorowuje zatem koło U na półkole $|w|<1$, $\operatorname{Re} w>0$, a w przypadku $\beta>1$ - koło U na obszar $|w|>1$, $\operatorname{Re} w>0$. Wnioskiem z twierdzenia 4 jest

Twierdzenie 5. Jeśli $F(z)\in G$, to

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right|\left|\frac{1+F^2(z)}{1-F^2(z)}\right| \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}. \tag{60}$$

Równość w (60) dla $z=z_o\in U$ zachodzi jedynie dla funkcji

$$F^o(z) = F_o\left(\frac{z-z_o}{1-\bar{z}_o z}\right), \tag{61}$$

gdzie $F_o(z)$ jest funkcją z (56).

Dowód. Niech $F(z) \in G$ i niech $z_0 \in U$. Utwórzmy funkcję

$$F_1(z) = F\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right).$$

Oczywiście $F_1(z) \in G(F(z_0))$ i $F_1'(0) = F'(z_0)(1 - |z_0|^2)$. Stosując twierdzenie 4 do $F_1(z)$, otrzymujemy nierówność (60) i funkcję ekstremalną w postaci (61).

Wnioskiem z twierdzenia 5 jest

Twierdzenie 6. Jeśli $F(z) \in G(\beta)$, to

$$\left|\log \left(\frac{F(z)}{\beta} \frac{1 - \beta^2}{1-F^2(z)}\right)\right| \leqslant \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \tag{62}$$

i w szczególności

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqslant \left|\frac{\beta}{1 - \beta^2}\left(\frac{1}{F(z)} - F(z)\right)\right| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

i

$$\left|\arg \frac{\beta}{1 - \beta^2}\left(\frac{1}{F(z)} - F(z)\right)\right| \leqslant \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

Dowód. Nierówność (62) otrzymujemy całkując $\frac{1 + F^2}{1 - F^2}\frac{dF}{F}$ po odcinku $[0,z]$ i stosując nierówność (60).

5. Zastosowania do rodziny B. Jeśli $f(z) \in B$ i $f(z) \neq d$, $f(z) \neq \frac{1}{d}$, $d \neq \pm 1$ - warunki te spełnione są np. w przypadku, gdy d należy do brzegu obszaru $f(U)$ -, to kładąc w (46), (47), (49) i (50)

$$F(z) = \sqrt{\frac{d - f(z)}{1 - df(z)}}, \tag{63}$$

otrzymujemy

$$\log\left[\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{1}{1-f(z)f(\zeta)}\;\frac{\left(1+\sqrt{\frac{d-f(z)}{1-df(z)}}\sqrt{\frac{d-f(\zeta)}{1-df(\zeta)}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{d-f(z)}{1-df(z)}}+\sqrt{\frac{d-f(\zeta)}{1-df(\zeta)}}\right)^2}\right]$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(a_{mn}+b_{mn})z^m\zeta^n + \text{(liczba czysto urojona)}, \tag{64}$$

$$\log\left[\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{1}{1-f(z)f(\zeta)}\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}(\alpha_{mn}+\beta_{mn})z^m\zeta^n. \tag{64'}$$

Z (64') widać, że nierówność (42) jest identyczna z nierównością (76) [6], a nierówność (51) z nierównością (79) z tejże pracy, gdzie $\gamma_{mn} = \alpha_{mn}+\beta_{mn}$. Zauważmy ponadto, że nierówność (64) przechodzi w nierówność (64') dla $d = \pm 1$, zakładanie zatem w dalszym ciągu, że $d \neq \pm 1$ jest zbyteczne. Z nierówności (64) otrzymujemy

Twierdzenie 6. Jeżeli $f(z) \in B$, $f(z) \neq d, \frac{1}{d}$, to dla każdego układu liczb zespolonych $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N, \lambda_0$ - rzeczywiste, zachodzą nierówności (41) i (48), gdzie $a_{mn}+b_{mn}$ jest współczynnikiem rozwinięcia lewej strony (64).

Stosując teraz twierdzenie 4 do funkcji (2) i biorąc pod uwagę, że $|b_1| \leqslant 1$, [6], otrzymujemy

Twierdzenie 7. Jeśli $f(z) \in B$, $f(z) \neq d, \frac{1}{d}$, to

$$b_1 \leqslant 4\,\frac{|d|}{|1+d|^2}. \tag{65}$$

Równość w (65) zachodzi jedynie dla funkcji

$$f_o(z) = \frac{d - F_o^2(z)}{1 - dF_o^2(z)},$$

gdzie $F_o(z)$ jest funkcją spełniającą warunek (56).

Prosty rachunek wykazuje, że funkcja $f_o(z)$ spełnia związek

$$\frac{f_o(z)}{(1 + f_o(z))^2} = \frac{4d}{(1 + d)^2} \frac{\varepsilon z}{(1 + \varepsilon z)^2}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{66}$$

W przypadku, gdy $0 < d < 1$ funkcja $f_o(z)$ odwzorowuje koło U na koło U, z którego usunięto odcinek $[d, 1)$, a w przypadku $d > 1$, na koła U, z którego usunięto odcinek $(\frac{1}{d}, 1]$. Wynika to z (66), gdyż w przypadku d rzeczywistego

$$f_o(z) = K^{-1}\left[\frac{4\,d}{(1 + d)^2} \frac{\varepsilon z}{(1 + \varepsilon z)^2}\right],$$

gdzie K^{-1} jest odpowiednio dobraną gałęzią funkcji odwrotnej do funkcji Koebego. W przypadku d rzeczywistego mamy dalej, że

$$|d| \geqslant \frac{b_1}{2 - b_1 + 2\sqrt{1 - b_1}}. \tag{67}$$

Istotnie, w przypadku d dodatniego nierówność (67) otrzymamy wprost z nierówności (65). W przypadku $d < 0$ stosujemy nierówność (65) do funkcji $-f(-z)$, która jest także funkcją klasy B. Z (67) wynika, że przedział osi rzeczywistej $\left(-\frac{b_1}{2 - b_1 + 2\sqrt{1 - b_1}}, \frac{b_1}{2- b_1 + 2\sqrt{1 - b_1}}\right)$ należy do obszaru $f(U)$. Dla porównania zauważmy, że dla funkcji jednolistnych postaci (1), spełniających warunek $|f(z)| < 1$, wiadomo, że koło

$$|w| < \frac{b_1}{2 - b_1 + 2\sqrt{1 - b_1}}$$

należy do obszaru $f(U)$.

Wyniki przedstawione wyżej można otrzymać również posługując się związkiem (2) i twierdzeniem Koebego o pokryciu dla funkcji klasy S.

Zajmijmy się obecnie zastosowaniem nierówności (41) i (42) do szacowania współczynników funkcji klasy B.

Niech $f(z) \in B$ i niech

$$f(z) = b_1(z + a_2 z^2 + \ldots). \tag{68}$$

Kładąc w nierówności $2\mu_o \operatorname{Re}\{D_o\} + |D_1|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\mu_n|^2}{n}$, wynikającej z nierówności (42), $\mu_o = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \ldots = \mu_N = 0$, otrzymujemy

$$|\alpha_{11} + \beta_{11}| \leqslant 1, \tag{69}$$

a ponieważ

$$\alpha_{11} = a_3 - a_2^2, \quad \beta_{11} = b_1^2,$$

z (69) dostajemy nierówność

$$|a_3 - a_2^2 + b_1^2| \leqslant 1, \tag{70}$$

która jest odpowiednikiem dla funkcji klasy B dobrze znanej w klasie S nierówności Bieberbacha: $|a_3 - a_2^2| \leqslant 1$.

Zauważmy dalej, że jeżeli $f(z) \in B$, to $\varphi(z) = [f(z^2)]^{1/2} \in B$, i pisząc nierówność (70) dla funkcji $\varphi(z)$, otrzymujemy

$$|a_2 + 2\, b_1| \leqslant 2,$$

a nawet, biorąc pod uwagę, że wraz z funkcją $f(z)$ do klasy B należy również funkcja $-f(-z)$, nierówność

$$|a_2 \pm 2\, b_1| \leqslant 2. \tag{71}$$

Nierówność ta wynika także z (2) i z oszacowania Bieberbacha: $|a_2| \leqslant 2$. Nierówności (70) i (71) są ostre i równości zachodzą dla współczynników funkcji określonej związkiem

$$\frac{f(z)}{(1+f(z))^2} = b_1 \frac{z}{(1+z)^2}. \tag{72}$$

Zastosujmy z kolei do funkcji (63) wynikającą z nierówności (41) nierówność

$$2\lambda_0 \operatorname{Re}\{C_0\} + |C_1|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} \tag{73}$$

i połóżmy w niej $\lambda_0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, $\lambda_1 = 1$. Otrzymujemy

$$|a_{11} + b_{11}| \leqslant 1. \tag{74}$$

Wyrażając współczynniki a_{11} i b_{11} przez współczynniki funkcji $F(z) \in G(\beta)$, mamy najpierw

$$\left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{1}{4}\alpha_1^2 + 2\beta^2\alpha_1^2 \frac{1+\beta^4}{(1-\beta^2)^2}\right| \leqslant 1. \tag{75}$$

Kładąc następnie

$$F(z) = \sqrt{\frac{d^{1/2} - \varphi(z)}{1 - d^{1/2}\varphi(z)}}, \quad \varphi(z) = \left[f(z^2)\right]^{1/2},$$

gdzie $f(z) \neq d$, $f(z) \neq \frac{1}{d}$, $d \neq \pm 1$ i przyjmując

$$\frac{d^{1/2} - \varphi(z)}{1 - d^{1/2}\varphi(z)} = d^{1/2}(1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots),$$

mamy

$$F(z) = d^{1/4}(1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots)^{1/2}$$

$$= d^{1/4}(1 + \frac{1}{2}\beta_1 z + (\frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_1^2)z^2 + (\frac{1}{2}\beta_3 - \frac{1}{4}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{16}\beta_1^3)z^3 + \dots),$$

skąd

$$\beta = d^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_1^2), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(\beta_3 - \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{8}\beta_1^3).$$

Nierówność (75) przejdzie wówczas w nierówność

$$\left| \frac{\beta_3}{\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} + \frac{1}{2} d^{\frac{1}{2}} \frac{1 + d}{(1 - d)^2} \beta_1^2 \right| \leq 1. \qquad (76)$$

Następnie, biorąc pod uwagę, że

$$\varphi(z) = b_1^{1/2}(z^2 + a_2 z^4 + \dots)^{1/2} = b_1^{1/2}(z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots)$$

i, wyrażając β_1, β_2 i β_3 przy pomocy współczynników funkcji $f(z)$, mamy

$$\beta_1 = \frac{d - 1}{d^{1/2}} b_1^{1/2}, \quad \beta_2 = \frac{d - 1}{d^{1/2}} \cdot b_1^{1/2} \cdot d^{1/2} \cdot b_1^{1/2}, \quad \beta_3 = \frac{d - 1}{d^{1/2}} b_1^{1/2}(\frac{1}{2}a_2 + d \cdot b_1),$$

i ostatecznie nierówność (76) przyjmie postać

$$\left|a_2 + \left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right)b_1\right| \leqslant 1. \tag{77}$$

W przypadku d rzeczywistego dodatniego oszacowanie jest dokładne, funkcja ekstremalna spełnia związek

$$\frac{f(z)}{(1 + f(z))^2} = \frac{4\sqrt{d}}{(1 + \sqrt{d})^2} \frac{z}{(1 + z)^2}, \tag{78}$$

a więc w przypadku $0 < d < 1$ odwzorowuje koło U na koło U, z którego usunięto odcinek $\left[\sqrt{d}, 1\right)$, a w przypadku $d > 1$ - koło U na koło U, z którego usunięto odcinek $\left[\frac{1}{\sqrt{d}}, 1\right)$.

Jeśli teraz oznaczymy przez $B(b_1)$ rodzinę wszystkich funkcji klasy B o rozwinięciu (1), a przez $B(d, \frac{1}{d})$ rodzinę wszystkich funkcji klasy B nie przyjmujących wartości d i $\frac{1}{d}$, to otrzymane wyżej wyniki, dotyczące współczynnika a_2, można zebrać w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 8. Jeśli $f(z) \in B(b_1)$, to

$$\left|a_2 \pm 2 b_1\right| \leqslant 2,$$

przy czym równość zachodzi dla funkcji (72).

Jeśli $f(z) \in B(d, \frac{1}{d})$, to

$$\left|a_2 + \left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right)b_1\right| \leqslant 2.$$

W przypadku $d > 0$ oszacowanie jest dokładne, przy czym równość zachodzi dla funkcji określonej związkiem (78').

Zajmiemy się obecnie zastosowaniem nierówności (73) do oszacowania współczynnika a_3 w klasie B. W nierówności tej przyjmijmy $\lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 0$. Należy zatem obliczyć współczynniki a_{00}, b_{00}, a_{10}, b_{10}, a_{11} i b_{11}. I tak,

$$a_{00} = \log \frac{\alpha_1}{2}, \quad b_{00} = \log \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2},$$

$$a_{10} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{2}\alpha_1, \quad b_{10} = \frac{2\beta^2\alpha_1}{1-\beta^4},$$

$$a_{11} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{1}{4}\alpha_1^2, \quad b_{11} = 2\beta^2\alpha_1^2 \frac{1+\beta^4}{(1-\beta^4)^2},$$

a nierówność (73) przyjmie postać

$$2\lambda_0 \operatorname{Re}\left[\lambda_0 \log\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)\right] + \lambda_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{2\beta^2\alpha_1}{1-\beta^4}\right)\frac{\alpha_1}{2} +$$

$$+\left|\lambda_0\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{2\beta^2\alpha_1}{1-\beta^4}\right) + \lambda_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{1}{4}\alpha_1^2 + 2\beta^2\alpha_1^2\frac{1+\beta^4}{(1-\beta^4)^2}\right)\right|^2$$

$$\leq |\lambda_1|^2.$$

Chcąc przejść teraz w powyższej nierówności do współczynników funkcji $f(z) \in B(d,\frac{1}{d})$ związanej z funkcją $F(z) \in G(\beta)$ wzorem (63), połóżmy najpierw

$$\frac{d - f(z)}{1 - df(z)} = d(1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \ldots), \tag{80}$$

a stąd

$$F(z) = d^{1/2}(1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \ldots)^{1/2}$$

$$= d^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\gamma_1 z + \left(\frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{8}\gamma_1^2\right)z^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{16}\gamma_1^3\right)z^3 + \ldots\right],$$

skąd dalej

$$\beta = d^{1/2},\quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\gamma_1,\quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_1^2),\quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(\gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{8}\gamma_1^3)$$

i nierówność (79) przejdzie na nierówność

$$2\lambda_0 \operatorname{Re}\left[\lambda_0 \log(\frac{1+d}{1-d}\frac{\gamma_1}{4}) + \lambda_1(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{d\cdot\gamma_1}{1-d^2})\right] +$$

$$+\left|\lambda_0(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{d\cdot\gamma_1}{1-d^2}) + \lambda_1(\frac{\gamma_3}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} + \frac{1}{2}d\frac{1+d^2}{(1-d^2)^2}\gamma_1^2)\right|^2 \leqslant |\lambda_1|^2. \tag{81}$$

Następnie, wyrażając z (80) współczynniki γ_1, γ_2 i γ_3 przy pomocy współczynników funkcji $f(z)$, otrzymujemy

$$\gamma_1 = \frac{d^2-1}{d}b_1,\quad \gamma_2 = \frac{d^2-1}{d}b_1(a_2 + d\cdot b_1),$$

$$\gamma_3 = \frac{d^2-1}{d}b_1(a_3 + 2db_1a_2 + d^2b_1^2), \tag{82}$$

a, wstawiając (82) do (81), nierówność

$$2\lambda_0 \operatorname{Re}\left\{\lambda_0 \log\left[\frac{(1+d)^2}{4d}b_1\right] + \lambda_1(a_2 + b_1(t-1))\right\} + \left|\lambda_0(a_2 + b_1(t-1)) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1(a_3 - a_2^2 + tb_1^2)\right|^2 \leqslant |\lambda_1|^2, \tag{83}$$

gdzie $t = \frac{1}{2}(d + d^{-1})$. Połóżmy teraz

$$X = a_2 + b_1(t-1)$$

i załóżmy, że $d > 0$. Dobierzmy λ_0 tak, by

$$\lambda_0 \log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right] + \mathrm{Re}\left\{\lambda_1 X\right\} = 0,$$

a więc przyjmijmy

$$\lambda_0 = -\frac{\lambda_1 X + \bar{\lambda}_1 \bar{X}}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}. \tag{84}$$

Jest to możliwe, ponieważ na mocy (65)

$$\frac{(1+d)^2}{4d} b_1 < 1,$$

jeśli tylko funkcja $f(z)$ nie jest postaci (66). Wstawiając (84) do (83), otrzymamy

$$\left|\lambda_1(a_3 - a_2^2 + tb_1^2) - \frac{\lambda_1 X^2 + \bar{\lambda}_1 |X|^2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right| \le |\lambda_1|,$$

a następnie, ponieważ

$$X^2 = a_2^2 + 2b_1(t-1)a_2 + b_1^2(t^2 - 2t + 1),$$

$$a_2^2 - tb_1^2 = X^2 - 2b_1 a_2(t-1) - b_1^2(t^2 - t + 1)$$

$$= X^2 - 2b_1(t-1)X + b_1^2(t^2 - 3t + 1),$$

mamy

$$\left|\lambda_1\left[a_3 - X^2 + 2b_1(t-1)X - b_1^2(t^2-3t+1)\right] - \frac{\lambda_1 X^2 + \bar{\lambda}_1 |X|^2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right| \leqslant |\lambda_1|^2. \tag{85}$$

Kładąc teraz kolejno $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_1 = i$ w (85) i biorąc pod uwagę, że

$$|W| \leqslant 1 \Longrightarrow \begin{array}{l} |\mathrm{Re}\, W| \leqslant 1, \\ |\mathrm{Im}\, W| \leqslant 1, \end{array}$$

otrzymujemy następujące oszacowania

$$\mathrm{Re}\, a_3 \leqslant 1 + b_1^2(t^2 - 3t + 1) - 2b_1 \,\mathrm{Re}\left[(t-1)X\right] - (\mathrm{Im}\, X)^2$$

$$+ \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\mathrm{Re}\, X)^2,$$

$$\mathrm{Re}\, a_3 \geqslant -1 + b_1^2(t^2 - 3t + 1) - 2b_1 \,\mathrm{Re}\left[(t-1)X\right] + (\mathrm{Re}\, X)^2$$

$$- \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\mathrm{Im}\, X)^2,$$

z których wynikają oszacowania słabsze

$$\mathrm{Re}\, a_3 \leqslant 1 + b_1^2(t^2 - 3t + 1) - 2b_1 \,\mathrm{Re}\left[(t-1)X\right] + \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\mathrm{Re}\, X)^2, \tag{86}$$

$$\operatorname{Re} a_3 \geqslant -1 + b_1^2(t^2-3t+1) - 2b_1 \operatorname{Re}\left[(t-1)X\right] - \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\operatorname{Im} X)^2, \tag{87}$$

przy czym równość w (86) zajść może jedynie, gdy $\operatorname{Im} X = 0$, a w (87) - jedynie, gdy $\operatorname{Re} X = 0$.

Jeżeli $f(z) \in B$, to można zawsze przyjąć w (86) i (87) $t = 1$, co jest konsekwencją tego, że $d = 1$, i otrzymamy wówczas podwójną nierówność

$$-2 - \left(1 - \frac{2}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Im} a_2)^2 \leqslant \operatorname{Re}\{a_3\} - (1-b_1^2) \leqslant \left(1 - \frac{2}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)^2, \tag{88}$$

przy czym równość w nierówności prawej może mieć miejsce tylko wtedy, gdy $\operatorname{Im} a_2 = 0$, a w nierówności lewej - gdy $\operatorname{Re} a_2 = 0$. Warto zauważyć, że prawa nierówność (88) jest taka sama jak dla funkcji klasy $S(b_1)$, gdzie $S(b_1)$ oznacza klasę funkcji jednolistnych, postaci (1), spełniających warunek $|f(z)| < 1$, [8].

Postępując podobnie możemy otrzymać następujące oszacowania $\operatorname{Im} a_3$, a mianowicie

$$\operatorname{Im} a_3 \leqslant 1 - 2b_1 \operatorname{Im}\left[(t-1)X\right] + 2\left(1 + \frac{1}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right) \cdot (\operatorname{Re} X)(\operatorname{Im} X),$$

$$\operatorname{Im} a_3 \geqslant -1 - 2b_1 \operatorname{Im}\left[(t-1)X\right] + 2\left(1 + \frac{1}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right) \cdot (\operatorname{Re} X) \cdot (\operatorname{Im} X).$$

Przyjmując i w tym wypadku $t = 1$, otrzymujemy

$$-1 + 2\left(1 - \frac{1}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)(\operatorname{Im} a_2) \leqslant \operatorname{Im} a_3 \leqslant 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)(\operatorname{Im} a_2).$$

Powyższe wyniki zbierzmy na koniec w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 9. Jeśli $f(z) \in B(b_1) \cap B(d, \frac{1}{d})$ i d rzeczywiste, to

$$\operatorname{Re} a_3 \leqslant 1 + b_1^2(t^2-3t+1) - 2b_1 \operatorname{Re}\left[(t-1)X\right] + \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\operatorname{Re}X)^2,$$

$$\operatorname{Re} a_3 \geqslant -1 + b_1^2(t^2-3t+1) - 2b_1 \operatorname{Re}\left[(t-1)X\right] - \left(1 + \frac{2}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\operatorname{Im}X)^2,$$

i

$$\operatorname{Im} a_3 \leqslant 1 - 2b_1 \operatorname{Im}\left[(t-1)X\right] + 2\left(1 + \frac{1}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\operatorname{Re}X)(\operatorname{Im}X),$$

$$\operatorname{Im} a_3 \geqslant -1 - 2b_1 \operatorname{Im}\left[(t-1)X\right] + 2\left(1 + \frac{1}{\log\left[\frac{(1+d)^2}{4d} b_1\right]}\right)(\operatorname{Re}X)(\operatorname{Im}X).$$

W szczególności, dla każdej funkcji $f(z) \in B(b_1)$ mamy

$$-2 - \left(1 - \frac{2}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Im} a_2)^2 \leqslant \operatorname{Re}\left\{a_3\right\} - (1 - b_1^2) \leqslant \left(1 - \frac{2}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)^2$$

i

$$-1 + 2\left(1 - \frac{1}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)(\operatorname{Im} a_2) \leqslant \operatorname{Im} a_3 \leqslant 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\log b_1^{-1}}\right)(\operatorname{Re} a_2)(\operatorname{Im} a_2).$$

LITERATURA

1. Bieberbach L.: Über Koeffizienten derjenigen Potenzreihen welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsberichte 1916, 940-955.

2. Bieberbach L.: Über einige Extremalprobleme im Gebiet der konformen Abbildung, Math. Ann. 77 (1916), 153-172.

3. Eilenberg S.: Sur quelques propriétes topologiques de la surface de sphere, Fund. Math. 25 (1935), 267-272.

4. Garabedian P.R., Schiffer M.: The local maximum theorem for the coefficients of univalent functions, Arch. Rational. Mech. Anal. 26 (1967), 1-32.

5. Gelfer S.A.: On the class of regular functions which do not take on any pair of values w and -w, Mat. Sb. 19(61) (1946), 33-46.

6. Hummel J.A., Schiffer M.: Coefficient [illegible]qualities for Bieberbach-Eilenberg functions, Arch. Rational M[illegible] Anal. 32 (1969), 87-99.

7. Nehari Z.: Inequalities for the coefficient of univalent functions, Arch. Rational. Mech. Anal. 34 (1969), 301-330.

8. Tammi O.: On Green's inequalities for the third coefficient of bounded univalent functions, Ann. Acad. Sc. Fenn., Ser. A. I Mathematica 481 (1971), 1-10.

9. De Temple D.W.: Grunsky-Nehari inequalities for a subclass of bounded univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 317-328.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ БИБЕРБАХА-АЙЛЕНБЕРГА

Р е з ю м е

Предположим, что B обозначает класс функции $f(z)$ регулярных и однолистных в единичном кругу U, $f(0) = 0$ и имеющих собственность $f(z_1)f(z_2) \neq 1$ для всякой пары точек $z_1, z_2 \in U$. B называется классом функций Бибербаха-Айленберга.

В [6] Гуммель и Шиффер получили коэффициентные неравенства типа Грунского для функций, принадлежащих к B. Главным результатом настоящей работы есть обобщение неравенств Гуммеля-Шиффера, которое изображено в следующей теореме:

Теорема. Если $f \in B(d,\frac{1}{d})$, где $B(d,\frac{1}{d})$ обозначает класс всяких функций принадлежащих к B, которые не принимают d ни $\frac{1}{d}$ в U, если коэффициенты $\gamma_{mn}(d)$ определены производящей функции

$$\log\left[\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)(1-f(z)f(\zeta))}\cdot\left(\frac{1+F(z)F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\right)\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\gamma_{m,n}(d)\, z^n\zeta^n,$$

где

$$F(z)=\sqrt{\frac{d-f(z)}{1-df(z)}},$$

и одна ветвь квадратного корня принимается в $F(z)$ и тоже в $\overline{F(\zeta)}$, то для всякого вещественного λ_0 и комплексных $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$:

$$(*)\qquad \lambda_0\,\mathrm{Re}\left\{C_0\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}m|C_m|^2\leqslant\sum_{m=1}^{n}\frac{|\lambda_n|^2}{m},$$

где

$$C_m=\sum_{n=0}^{N}\gamma_{mn}(d)\lambda_n,\quad m=0,1,2,\ldots$$

и

$$(**)\qquad \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N}\left[\gamma_{mn}(d)\lambda_m\lambda_n\right]\right\}\leqslant\sum_{m=1}^{N}\frac{|\lambda_m|^2}{m}.$$

COEFFICIENT INEQUALITIES FOR BIEBERBACH-EILENBERG FUNCTIONS

S u m m a r y

Let B denote the class of all functions $f(z)$ which are regular and univalent in the unit disk U, vanish at the origin, and have the property $f(z_1)f(z_2) \neq 1$ for all pairs of points $z_1, z_2 \in U$. B is called the class of Bieberbach-Eilenberg functions.

In [6] Hummel and Schiffer derived a set of coefficient inequalities of Grunsky type for the functions belonging to B. The aim of the present paper is to generalize Hummel-Schiffer's result into the following Theorem. Let $f(z) \in B(d, \frac{1}{d})$, where $B(d, \frac{1}{d})$ denote the subclass of B consisting of all functions of B, which do not take the values d and $\frac{1}{d}$ in U. Let the coefficients $\gamma_{mn}(d)$ be defined by the generating function

$$\log\left[\frac{f(z) - f(\zeta)}{(z - \zeta)(1 - f(z)f(\zeta))} \cdot \frac{(1 + F(z)F(\zeta))^2}{(F(z) + F(\zeta))^2}\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_{mn}(d) z^m \zeta^n,$$

where

$$F(z) = \sqrt{\frac{d - f(z)}{1 - df(z)}},$$

and the same branch of the square root is to be taken in $F(z)$ and $F(\zeta)$. Then for any real λ_0 and complex $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$:

$$(*) \qquad 2\lambda_0 \operatorname{Re}\{C_0\} + \sum_{m=1}^{\infty} m|C_m|^2 \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda_m|^2}{m},$$

where

$$C_m = \sum_{n=0}^{N} \gamma_{mn}(d)\lambda_n, \quad m = 0,1,\ldots,$$

and

$$(**) \qquad \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N}\left[\gamma_{mn}(d)\lambda_m\lambda_n\right]\right\} \leqslant \sum_{m=1}^{N}\frac{|\lambda_m|^2}{m}.$$