ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

KAROL PETHE

OSZACOWANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW A_4 i A_5 W ZALEŻNOŚCI OD $|A_2|$ W NIEPEŁNEJ KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH

Streszczenie. W pracy niniejszej podane są nierówności między $|A_5|$ i $|A_2|$ oraz $|A_4|$ i $|A_2|$ przy warunku $A_3 = 0$ funkcji jednolistnych w kole jednostkowym. Nierówności te mają postać

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + 2|A_2|^2 - \frac{3}{2}|A_2|^4, \quad |A_4| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{13}{12}|A_2|^3 - \frac{9}{16}|A_2|^4 \left(2 + |A_2|\right)^{-1}$$

w dowodzie wykorzystano ideę L.E. Ahlforsa [1], który opierając się na znanym twierdzeniu polowym G.M. Gołuzina [2] dla funkcji p-listnych, otrzymał w pełnej klasie funkcji jednolistnych nierówność $|A_4| \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}}\sqrt{11 + |A_2|^2}$.

Niech S jest klasą funkcji $f(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$ regularnych i jednolistnych w kole $K = \{z: |z| < 1\}$.

Niech $\sum_p$ będzie klasą funkcji $F(\zeta) = \sum\limits_{k=-p}^{\infty} \frac{C_k}{\zeta^k}$, $C_{-p} = 1$ meromorficznych i p-listnych w obszarze $K' = \{\zeta: |\zeta| > 1\}$.

G.M. Gołuzin 2 wykazał, że jeżeli $F(\zeta) \in \sum_p$, to

$$\sum_{k=-p}^{\infty} k|C_k|^2 \leqslant 0, \quad |C_{-p}| = 1. \tag{1}$$

Twierdzenie 1. Jeżeli $f(z) = z + A_2 z^2 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + \ldots \in S$, to

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{4}(2 - |A_2|^4)(1 + |A_2|^2)^2. \tag{2}$$

Dowód. Funkcja $F(\zeta) = f^{-1}(\frac{1}{\zeta}) \in \sum_1$ ma rozwinięcie

$$F(\zeta) = \zeta\left(1 + \frac{b_0}{\zeta} + \frac{b_1}{\zeta^2} + \frac{b_2}{\zeta^3} + \frac{b_3}{\zeta^4} + \ldots\right), \tag{3}$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_0 &= - A_2 \\ b_1 &= A_2^2 \\ b_2 &= - A_4 - A_3^3 \\ b_3 &= - A_5 + 2\, A_2\, A_4 + A_2^4. \end{aligned} \tag{4}$$

Zauważmy, że jeśli zastosujemy do funkcji (3) nierówność (1) $p = 1$, to otrzymamy dokładne oszacowanie współczynnika A_2 tj. $|A_2| \leqslant 1$, gdzie równość zachodzi dla funkcji

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\varphi} z + e^{2i\varphi} z^2} \in S. \tag{5}$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcję

$$W = F^2 + t \cdot F \in \sum_2, \quad t \text{ - parametr zespolony,} \tag{6}$$

gdzie

$$F^2 = \zeta^2\left(1 + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_0}{\zeta^2} + \frac{c_1}{\zeta^3} + \frac{c_2}{\zeta^4} + \ldots\right)$$

$$
\begin{aligned}
C_{-1} &= 2\,b_o \\
C_o &= 2\,b_1 + b_o^2 \\
C_1 &= 2\,b_2 + 2\,b_o b_1 \\
C_2 &= 2\,b_3 + 2\,b_o b_2 + b_1^2 .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Gdy z kolei zastosujemy (1), p = 2, do (6), to otrzymamy

$$
(1 - |b_1|^2 - 2|b_2|^2)\,|t|^2 + (\bar{C}_{-1} - \bar{C}_1 b_1 - 2\,\bar{C}_2 b_2)t +
$$

$$
+ (C_{-1} - C_1\bar{b}_1 - 2\,C_2\bar{b}_2)\bar{t} + 2 + |C_{-1}|^2 - |C_1|^2 - 2|C_2|^2 \geqslant 0.
$$

co oznacza, że pewna forma kwadratowa Hermite'a jest nieujemna.

Zatem

$$
|b_1|^2 + 2|b_2|^2 \leqslant 1 \tag{8}
$$

$$
|\bar{C}_{-1} - \bar{C}_1 b_1 - 2\bar{C}_2 b_2| \leqslant (1 - |b_1|^2 - 2|b_2|^2)(2 + |C_{-1}|^2 - |C_1|^2 - 2|C_2|^2). \tag{9}
$$

Pierwsza nierówność znana jest z twierdzenia polowego, druga daje nam warunek na C_2.

Warunek ten sprowadzamy do innej postaci, mianowicie

$$
- C_{-1}\bar{C}_1 b_1 - \bar{C}_{-1}C_1\bar{b}_1 - 2\,C_{-1}\bar{C}_2 b_2 - 2\,\bar{C}_{-1}C_2\bar{b}_2 + 2\,C_1\bar{b}_1\bar{C}_2 b_2 +
$$

$$
+ 2\,\bar{C}_1 b_1 C_2\bar{b}_2 \leqslant 2(1 - |b_1|^2 - 2|b_2|^2) - |C_1|^2 -
$$

$$
- 2|C_2|^2 - |C_{-1}|^2|b_1|^2 - 2|C_{-1}|^2|b_2|^2 + 2|C_1|^2|b_2|^2 + 2|C_2|^2|b_1|^2,
$$

a z wykorzystaniem (7) i (4) otrzymujemy

$$|c_2|^2(1-|b_o|^4) - 2\,b_o b_2 \bar{c}_2(1-|b_o|^4) - 2\,\bar{b}_o\bar{b}_2 c_2(1-|b_o|^4) +$$

$$+ 2\,\bar{b}_o^2 b_2^2 \bar{c}_2 + 2\,b_o^2\bar{b}_2^2 c_2 - 4\,b_o^3\bar{b}_2^2 b_2 -$$

$$- 4\,\bar{b}_o^3 b_2^2 \bar{b}_2 \leqslant 1 - |b_o|^4 - 2|b_2|^2 - 2|b_2|^2 + 4|b_2|^4 + 4|b_o|^6|b_2|^2.$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $|b_o| < 1$.
W przypadku $|b_o| = 1$ wobec (4) $|A_2| = 1$ i nierówność (2) twierdzenia (1) przechodzi w równość. Ostatnią nierówność po pomnożeniu obu stron przez nieujemne wyrażenie $1 - |b_o|^4$, sprowadzamy do postaci

$$\left|c_2(1-|b_o|^4) - 2\,b_o b_2(1-|b_o|^4) + 2\,\bar{b}_o^2 b_2^2\right| \leqslant (1 - |b_o|^4 - 2|b_2|^2)^2$$

stąd

$$\left|c_2 - 2\,b_o b_2 + \frac{2\bar{b}_o^2 b_2^2}{1-|b_o|^4}\right| \leqslant 1 - \frac{2|b_2|^2}{1-|b_o|^4}.$$

Na podstawie (7) i (4) znajdujemy

$$c_2 - 3\,b_o b_2 = 2\,b_3 + b_o^4 = -2\,A_5 + 4\,b_o b_2 - b_o^4,$$

więc

$$\left|-2\,A_5 + 4\,b_o b_2 - b_o^4 + \frac{2\bar{b}_o^2 b_2^2}{1-|b_o|^4}\right| \leqslant 1 - \frac{2|b_2|^2}{1-|b_o|^4},$$

stąd

$$|A_5| \leqslant \left| \frac{\bar{b}_o^2\, b_2^2}{1-|b_o|^4} + 2\, b_o b_2 - \frac{1}{2}\, b_o^4 \right| + \frac{1}{2} - \frac{|b_2|^2}{1-|b_o|^4}\,. \tag{10}$$

Jeżeli $b_o = 0$, wówczas $|A_5| \leqslant \frac{1}{2} - |b_2|^2 \leqslant \frac{1}{2}$, a więc tym bardziej zachodzi nierówność (2) twierdzenia, wobec tego możemy przyjąć $b_o \neq 0$. Przyjmijmy dalej, że $b_2 = \omega b_o^3$, wtedy nierówność (10) możemy zapisać

$$|A_5| \leqslant \left| \frac{|b_o|^4\, b_o^4}{1-|b_o|^4}\,\omega^2 + 2\, b_o^4 \omega - \frac{1}{2}\, b_o^4 \right| + \frac{1}{2} - \frac{|b_o|^6}{1-|b_o|^4}\,|\omega|^2$$

lub

$$|A_5| \leqslant \frac{|b_o|^6}{1-|b_o|^4} \left| \omega^2 + 2\,\frac{1-|b_o|^4}{|b_o|^4} - \frac{1-|b_o|^4}{2|b_o|^4} \right| + \frac{1}{2} - \frac{|b_o|^6}{1-|b_o|^4}\,|\omega|^2.$$

Oznaczając

$$\alpha = \frac{1-|b_o|^4}{|b_o|^4}\,, \quad \beta = \frac{1-|b_o|^4}{2|b_o|^4}\,. \tag{11}$$

otrzymamy

$$|A_5| \leqslant \frac{|b_o|^8}{1-|b_o|^4} \left| \omega^2 + 2\alpha\omega - \beta \right| + \frac{1}{2} - \frac{|b_o|^6}{1-|b_o|^4}\,|\omega|^2. \tag{12}$$

Oszacujemy teraz $|\omega^2 + 2\alpha\omega - \beta|$

$$|\omega^2 + 2\alpha\omega - \beta|^2 =$$

$$= |\omega|^4 + 4\alpha^2|\omega|^2 + 2\alpha(\bar{\omega} + \omega)(|\omega|^2 - \beta) - \beta(\bar{\omega}^2 + \omega^2) + \beta^2,$$

zauważmy, jeśli $u = \mathrm{Re}(\omega)$, to $\mathrm{Re}(\omega^2) = 2u^2 - |\omega|^2$ i wtedy

$$|\omega^2 + 2\alpha\omega - \beta|^2 =$$

$$= |\omega|^4 + 2(2\alpha^2 + \beta)(|\omega|^2 + 4\alpha(|\omega|^2 - \beta)u - 4\beta u^2 + \beta^2. \tag{13}$$

Prawa strona tej równości przy ustalonym $|\omega|$ jest funkcją kwadratową zmiennej U i osiąga maksimum dla

$$u = \frac{\alpha}{2\beta}(|\omega|^2 - \beta). \tag{14}$$

Jeżeli podstawimy (14) do (13), to otrzymamy

$$|\omega^2 + 2\alpha\omega + \beta|^2 \leqslant (1 + \frac{\alpha^2}{\beta})\ \omega|^4 + 2(\alpha^2 + \beta)\ \omega|^2 + \beta(\alpha^2 + \beta) =$$

$$= (1 + \frac{\alpha^2}{\beta})(|\omega|^2 + \beta)^2,$$

stąd

$$|\omega^2 + 2\alpha\omega - \beta| \leqslant (1 + \frac{\alpha^2}{\beta})^{\frac{1}{2}}(|\omega|^2 + \beta). \tag{15}$$

Wobec (11) i (15) z nierówności (12) otrzymujemy

$$|A_5| \leqslant \frac{|b_0|^8}{1 - |b_0|^4}\left(1 + \frac{\dfrac{(1 - |b_0|^4)^2}{|b_0|^8}}{\dfrac{1 - |b_0|^4}{2|b_0|^4}}\right)^{\frac{1}{2}} |\omega|^2 + \frac{1 - |b_0|^4}{2|b_0|^4} +$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{|b_0|^6}{1 - |b_0|^4}|\omega|^2,$$

$$|A_5| \leqslant \frac{|b_o|^2}{1 - |b_o|^4} (2 - |b_o|^4)^{\frac{1}{2}} (|\omega|^2 |b_o|^4 + \frac{1 - |b_o|^4}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{|b_o|^6}{1 - |b_o|^4} |\omega|^2. \tag{16}$$

Prawa strona nierówności (16) jako funkcja kwadratowa zmiennej $|\omega|$ jest funkcją rosnącą.

Istotnie, gdyż wobec $|b_o| < 1$

$$\frac{|b_o|^2}{1 - |b_o|^4} (2 - |b_o|^4)^{\frac{1}{2}} |\omega|^2 |b_o|^4 - \frac{|b_o|^6}{1 - |b_o|^4} |\omega|^2 =$$

$$= \frac{|b_o|^6}{1 - |b_o|^4} |\omega|^2 \left[(2 - |b_o|^4)^{\frac{1}{2}} - 1\right] > \frac{|b_o|^6}{1 - |b_o|^4} |\omega|^2 [1 - 1] = 0.$$

Ponieważ $|b_o|^4 + 2|b_2|^2 \leqslant 1$ oraz $b_2 = \omega b_o^3$, zatem

$$|\omega|^2 \leqslant \frac{1 - |b_o|^4}{2|b_o|^6}. \tag{17}$$

Wstawiając do (16) prawą stronę (17) otrzymamy

$$|A_5| \frac{|b_o|^2}{1 - |b_o|^4} (2 - |b_o|^4)^{\frac{1}{2}} (\frac{1 - |b_o|^4}{2|b_o|^2} + \frac{1 - |b_o|^4}{2}),$$

stąd

$$|A_5| \leqslant \frac{1}{2}(2 - |b_o|^4)^{\frac{1}{2}} (1 + |b_o|^2)$$

i wobec (4)

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{4}(2 - |A_2|^4)(1 + |A_2|^2)^2,$$

a więc nierówność (2) twierdzenia 1.

Nierówność (2) możemy również zapisać

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + |A_2|^2 + \frac{1}{4}|A_2|^4 - \frac{1}{2}|A_2|^6 - \frac{1}{4}|A_2|^8. \tag{18}$$

Dodając teraz do prawej strony (18) kolejno

$$\frac{1}{4}|A_2|^4(1 - |A_2|^2)^2 \text{ i } |A_2|^2(1 - |A_2|^2)^2$$

otrzymujemy

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + |A_2|^2 + \frac{1}{2}|A_2|^4 - |A_2|^6 \tag{19}$$

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + 2|A_2|^2 - \frac{3}{2}|A_2|^4. \tag{20}$$

Oszacowania (18), (19) i (20) są dokładne, gdy $|A_2| = 1$ i równość realizuje się dla współczynników funkcji

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2}.$$

Zauważmy jeszcze, że z (2) łatwo otrzymać oszacowanie

$$|A_5| \leqslant \frac{1}{32}\sqrt{14 + 2\sqrt{17}}\,(3 + \sqrt{17}) \sim 1{,}058.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli $f(z) = z + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots \in S$, to

$$|A_4| \leq \frac{2}{3} + \frac{13}{12}|A_2|^3 - \frac{9}{16}\frac{|A_2|^4}{2 + |A_2|}. \tag{21}$$

Dowód. Wiadomo, że funkcja $F(\zeta) = \left[f\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \in \Sigma$ i ma rozwinięcie

$$F = \zeta\left(1 + \frac{b_1}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \frac{b_5}{\zeta^5} + \dots\right),$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2}A_2 \\ b_3 &= \frac{3}{8}A_2^2 \\ b_5 &= -\frac{1}{2}A_4 - \frac{5}{16}A_2^3. \end{aligned} \tag{22}$$

Weźmy następnie pod uwagę funkcję 3-listną.

$$W = F^3 + tF, \quad t \text{ - parametr zespolony,} \tag{23}$$

gdzie

$$F^3(\zeta) = \zeta^3\left(1 + \frac{C_{-1}}{\zeta^2} + \frac{C_1}{\zeta^4} + \frac{C_3}{\zeta^6} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned} C_{-1} &= 3\,b_1 \\ C_1 &= 3\,b_3 + 3\,b_1^2 \\ C_3 &= 3\,b_5 + 6\,b_1 b_3 + b_1^3 \end{aligned} \tag{24}$$

i zastosujmy (1) do (23), wówczas otrzymamy

$$(1 - |b_1|^2 - 3|b_3|^2)\,|t|^2 + (\bar{c}_{-1} - \bar{c}_1 b_1 - 3\,\bar{c}_3 b_3)t +$$

$$+ (c_{-1} - c_1 b_1 - 3\,c_3 b_3)\bar{t} + 3 + |c_{-1}|^2 - |c_1|^2 - 3|c_3|^2 \geqslant 0.$$

Powyższa nierówność, jak w tw. 1, oznacza, że pewna forma Hermite'a jest nieujemna, zatem

$$|b_1|^2 + 3|b_3|^2 \leqslant 1$$

$$|\bar{c}_{-1} - \bar{c}_1 b_1 - 3\,c_3 b_3|^2$$

$$\leqslant (1 - |b_1|^2 - 3|b_3|^2)(3 + |c_{-1}|^2 - |c_1|^2 - 3|c_3|^2).$$

Pierwsza nierówność znana jest z twierdzenia polowego, druga daje warunek na c_3, który możemy po prostych rachunkach z wykorzystaniem (24) i (22), sprowadzić do postaci

$$\left|c_3(1 - |b_1|^2) - \frac{9}{2}\,b_1^3(1 - |b_1|^2) + \frac{27}{4}\,\bar{b}_1 b_1^4\right|^2 \leqslant 1 - |b_1|^2 - \frac{27}{4}|b_1|^4\,{}^2,$$

stąd

$$\left|c_3 - \frac{9}{2}\,b_1^3 + \frac{\frac{27}{4}|b_1|^2\,b_1^3}{1 - |b_1|^2}\right| \leqslant 1 - \frac{\frac{27}{4}|b_1|^4}{1 - |b_1|^2}.$$

Wobec związków (24) i (22) znajdujemy

$$c_3 - \frac{9}{2}\,b_1^3 = -\frac{3}{2}\,A_4 + 13\,b_1^2,$$

więc

$$\left| -\frac{3}{2} A_4 + 13\, b_1^3 + \frac{\frac{27}{4}|b_1|^2}{1-|b_1|^2}\, b_1^3 \right| \leqslant 1 - \frac{\frac{27}{4}|b_1|^4}{1-|b_1|^2},$$

stąd

$$|A_4| \leqslant \left| \frac{26}{3}\, b_1^3 + \frac{\frac{9}{2}|b_1|^2}{1-|b_1|^2}\, b_1^3 \right| + \frac{2}{3} - \frac{\frac{9}{2}|b_1|^4}{1-|b_1|^2}. \tag{25}$$

Nierówność (25) jest równoważna następującej nierówności

$$|A_4| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{26}{3}|b_1|^3 + \frac{\frac{9}{2}|b_1|^5}{1-|b_1|^2} - \frac{\frac{9}{2}|b_1|^4}{1-|b_1|^2} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{26}{3}|b_1|^3 - \frac{9}{2}\,\frac{|b_1|^4}{1+|b_1|},$$

z której wobec (22) otrzymujemy

$$|A_4| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{13}{12}|A_2|^3 - \frac{9}{16}\,\frac{|A_2|^4}{2+|A_2|},$$

a więc nierówność (21).

Prawa strona (21) jest funkcją rosnącą zmiennej $|A_2|$, więc osiąga największą wartość dla $|A_2| = 1$, a stąd wynika, że

$$|A_4| \leqslant \frac{25}{16}.$$

LITERATURA

1. Ahlfors L.E.: Nierawieństwo mieżdu koefficientami A_2 i A_4 odnolistnoj funkcji. Niekotorye probliemy matiematiki i miechaniki. Izd. Nauka Leningrad 1970. 71-74.

2. Gołuzin G.M.: Über p-valente Funktionen. Recueil Mathematique 8 (1940) 277-284.

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ A_4 И A_5
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ $|A_2|$ В НЕПОЛНОМ КЛАССЕ
ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В настоящей работе получены оценки коэффициентов A_5 и A_4 при условии $A_3 = 0$ однолистных функций в круге $|z|<1$. Эти оценки имеют следующую форму:

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + 2|A_2|^2 - \frac{3}{2}|A_2|^4;$$

$$|A_4| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{13}{12}|A_2|^3 - \frac{9}{16}|A_2|^4(2 + |A_2|^{-1}.$$

THE ESTIMATION OF COEFFICIENTS A_4 AND A_5
IN DEPENDENCE UPON A_2 IN THE SUBCLASS
OF THE UNIVALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper have been given the inequalities between A_5 and A_2 as well as A_4 and A_2 on condition $A_3 = 0$ for the univalent functions in the unit circle.

These inequalities have the following form:

$$|A_5|^2 \leqslant \frac{1}{2} + 2|A_2|^2 - \frac{3}{2}|A_2|^4; \quad |A_4| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{13}{12}|A_2|^3 - \frac{9}{16}|A_2|^4(2 + |A_2|)^{-1}.$$