ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JANIEC BARBARA, JAMA DANUTA

PEWNE WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ PARABOLICZNYCH RZĘDU DRUGIEGO O WSPÓŁCZYNNIKACH STOCHASTYCZNYCH

Streszczenie. W pracy podamy kilka własności procesów stochastycznych będących rozwiązaniem równań parabolicznych rzędu drugiego o współczynnikach losowych i z losowymi warunkami brzegowymi.

Na bazie tych własności dla tego typu równań wyprowadzimy warunki stabilności rozwiązania zerowego I zagadnienia brzegowego.

1. Wstęp

Przedmiotem naszych rozważań będzie równanie typu parabolicznego postaci

$$L(u) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t,\omega)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t,\omega)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,\omega), \qquad (1)$$

gdzie $a_{ij}(x,t,\omega)$, $b_i(x,t,\omega)$, $c(x,t,\omega)$, $f(x,t,\omega)$ są procesami losowymi czasowo-przestrzennymi o realizacjach rzeczywistych $a_{ji} = a_{ij}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\omega)L_i L_j > 0 \text{ przy } \sum_{i=1}^{n} L_i^2 > 0 \text{ z prawdop. } 1$$

Równanie (1) jest określone w obszarze ograniczonym $\bar{D}$ zawartym w (n+1) wymiarowej przestrzeni euklidesowej $D = D_o \times \Delta$, gdzie D_o obszar na płaszczyźnie $t = 0$

$$\Delta = [0,T) \quad \Gamma \text{ brzeg obszaru } D \quad S = \Gamma / D_o$$

ω jest elementem przestrzeni probabilistycznej $\{\Omega, \sigma, P\}$.
Rozwiązaniem pierwszego zagadnienia brzegowego dla równania (1) w obszarze D z warunkami

$$u/t = 0 = \varphi(x) \tag{2}$$

$$u/S = \Psi(x,t,\omega) \tag{3}$$

nazywamy proces losowy $u(x,t,\omega)$ ciągły w $\bar{D}$ dla prawie każdego ω i spełniający równanie (1) w $\bar{D}\setminus\Gamma$ i warunki (2) (3) na Γ, gdzie proces stochastyczny $\Psi(x,t,\omega)$ ma ciągłe realizacje, a $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą.

2. Własności rozwiązań I zagadnienia brzegowego

Twierdzenie 1

Jeżeli $u(x,t,\omega)$ jest rozwiązaniem równania (1) i w $\bar{D}\setminus\Gamma$ spełniona jest nierówność $L(u) \leqslant 0$ dla prawie wszystkich ω oraz $c(x,t,\omega) < M$ z prawdopod. 1
(M - pewna stała), to

$P\{\omega : u(x,t,\omega) \geqslant 0\} = 1$, jeśli na Γ zachodzi

$u(x,t,\omega) \geqslant 0$ z prawdopodobieństwem 1.

Dowód

Przypuśćmy że $u(x,t,\omega)$ w obszarze $\bar{D}$ osiąga wartości ujemne. Zatem istnieje punkt Po (x^o,t^o) taki, że w prawdop. 1 zachodzi $u(x^o,t^o,\omega) < u(x,t,\omega)$ dla $(x,t) \in \bar{D}$.

Punkt. P_o może leżeć tylko wewnątrz obszaru D lub wewnątrz wierzchniej podstawy przy $t = T$. Niech $M < 0$, $c(x,t,\omega) < M < 0$.
W punkcie P_o (x^o,t^o) $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1,2..n)$ $\frac{\partial u}{\partial t} \leqslant 0$ c u > 0 oraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0.$$

Zatem $L(u) > 0$ z prawdopodobieństwem 1
dla $(x^o\ t^o) \in \bar{D}\setminus\Gamma$, co jest sprzeczne z założeniem. Czyli $u(x,t,\omega) \geqslant 0$ dla prawie wszystkich ω. Gdy $c(x,t,\omega) < M$ i $M > 0$ przez podstawienie $u(x,t,\omega) = v(x,t,\omega)e^{Mt}$ przypadek ten sprowadzamy do przypadku I.
Proces $v(x,t,\omega)$ spełnia równanie (1) z ujemnym współczynnikiem przy v. Zatem z udowodnionego wcześniej wynika

$$P\left\{\omega:\ v(x,t,\omega) \geqslant 0\right\} = 1.$$

Tym samym proces $u(x,t,\omega)$ ma również nieujemne realizacje.

Twierdzenie 2

Jeżeli: 1) $u(x,t,\omega)$ jest procesem o ciągłych realizacjach w $\bar{D}$ i w $\bar{D}\setminus\Gamma$ spełnia równanie (1)
2) Proces $f(x,t,\omega)$ jest ograniczony z prawdopodobieństwem 1

$$|f(x,t,\omega)| \leqslant N$$

3) $c(x,t,\omega) \leqslant 0$ dla prawie wszystkich ω
4) $P\left\{\omega:\ |u|\big|_{\Gamma} = |u(x,t,\omega)| \leqslant m\right\} = 1$, to

$$\bigwedge_{x,t,\ \in \bar{D}} \quad \text{zachodzi} \quad P\left\{\omega:\ |u(x,t,\omega)| < Nt + m\right\} = 1.$$

Dowód

Rozpatrzmy w $\bar{D}$ procesy określone wzorem

$$W^{\pm}(x,t,\omega) = Nt + m \pm u(x,t,\omega). \tag{4}$$

Realizacje procesów (4) są nieujemne na Γ, a w $\bar{D}\setminus\Gamma$ na podstawie założenia (3) mamy prawdziwą z prawdopodobieństwem 1 nierówność

$$L(W^{\pm}) = -N + NCt + cm \pm L(u) \leqslant -N + |f| \leqslant 0. \tag{5}$$

Z (5) i twierdzenia 1 wynika

$$W^{\pm}(x,t,\omega) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad (x,t) \in \bar{D} \quad \text{z prawdopod. 1.}$$

Zatem

$$P\left\{\omega: \begin{matrix} u(x,t,\omega) \leqslant Nt + m \\ (x,t) \in \bar{D}. \end{matrix}\right\} = 1$$

Uwaga

Z twierdzenia 2 wynika, że przy $f(x,t,\omega) = 0$

$$E(u(x,t,\omega)) \leqslant \max_{\Gamma} E|u(x,t,\omega)| \quad \text{dla} \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Twierdzenie 3

Jeżeli:

1) proces $u(x,t,\omega)$ spełnia równanie (1) i jego realizacje są ciągłe

2) $P\left\{\omega: |f(x,t,\omega)| < N\right\} = 1$

3) $|u(x,t,\omega)|_{\Gamma} \leqslant m$ z prawdopodob. 1

4) $c(x,t,\omega) \leqslant -c_0 < 0$ z prawdopodobieństwem 1 to wszędzie w $\bar{D}$

$$|u(x,t,\omega)| \leqslant \max\left\{\frac{N}{c_0}, m\right\} \quad \text{dla prawie wszystkich } \omega.$$

Dowód

Oznaczmy $\max\left\{\frac{N}{c_o}, m\right\}$ przez N_1 i rozpatrzmy w $\bar{D}$ proces

$$W^{\pm}(x,t,\omega) = N_1 \pm u(x,t,\omega).$$

Procesy te są nieujemne na Γ a w $\bar{D}\setminus\Gamma$ spełniają z prawdopod. 1 nierówność

$$L(W^{\pm}) = N_1 c \pm f \leqslant - N_1 c_o + N \leqslant 0.$$

Zatem na podstawie twierdzenia 1 $W^{\pm}$ są dla prawie wszystkich nieujemne w D, czyli

$$|u(x,t,\omega)| \leqslant \max\left\{\frac{N}{c_o}, m\right\} \text{ dla każdego } \omega.$$

Uwaga

Z twierdzenia 3 łatwo wynika oszacowanie

$$E|u(x,t,\omega)| \leqslant \max\left\{\frac{N}{c_o}, m\right\}. \tag{6}$$

Definicja 1

Rozwiązanie zerowe zagadnienia (1) - (3) jest stabilne względem wielu norm, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta_1\delta_2} \Big\{\Big[\|\varphi(x,t,\omega)\|_o < \delta_1; \ \|f(x,t,\omega)\|_1 < \delta_2\Big] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|u(x,t,\omega)\|_2 < \varepsilon\Big\}$$

gdzie

$$\|\quad\|_{0,1,2} = \sup_{x,t} E|\quad|$$

Twierdzenie 4

Rozwiązanie trywialne zagadnienia (1) - (3) jest stabilne w sensie definicji 1 przy założeniach twierdzeń (1-3).

Dowód

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć $\delta_1 = \varepsilon\delta_2 = c_o\varepsilon$, aby na podstawie twierdzenia 3 otrzymać

$$\|u(x,t,\omega)\|_2 = \sup_{x,t} E\,|u(x,t,\omega)| \leqslant \max\left(\delta_1, \frac{\delta_2}{c_o}\right) = \varepsilon ,$$

co dowodzi stabilności równania 1.

LITERATURA

1. Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: "Automatyka" Zeszyt 20, Gliwice 1972.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Москва 1964.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦЕНТАМИ

Р е з ю м е

В работе показаны некоторые свойства стохастических процессов, которые являются решениями параболических уравнений со случайными коэффицентами.

В заключении работы показаны условия устойчивости тривяльного решения первой краевой задачи для этих уравнений.

ON SOME PROPERTIES OF PARABOLLIC EQUATIONS SOLUTIONS SECOND ORDER WITH RANDOM COEFICIENTS

S u m m a r y

In this paper we give some properties of random processes which are solutions of porabollic equations of second order with random coefficients and random boundary conditions. Basing upon these properties we investigae the stability conditrons for solutions of the first boundaury value problem.