ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

ADAM CZECH, DANUTA JAMA,
BARBARA JANIEC, EWA SZOCIŃSKA

ASYMPTOTYCZNE WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH NA PŁASZCZYŹNIE

Streszczenie. W pracy przy pomocy kilku metod bada się stabilność pewnych typów równań cząstkowych rzędu II o współczynnikach stochastycznych i niezerowych warunkach brzegowych.

1. Uwagi wstępne

Przedmiotem naszych rozważań będą pewne jakościowe własności układów mechanicznych opisanych równaniami różniczkowymi rzędu drugiego o pochodnych cząstkowych z losowymi warunkami brzegowymi. Zakładamy, że układ posiada następujące własności:

1. Układ zajmuje pewien obszar D na płaszczyźnie z brzegiem ∂D.

2. Układ opisany jest zbiorem M funkcji $u(x,t)$ należących do pewnej przestrzeni funkcyjnej U; $t \in [0,T]$ spełniających stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe

$$a_1(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ a_5(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + R(\omega,u,x,t) = 0 \tag{1}$$

ω jest elementem pewnej przestrzeni probabilistycznej $\{\Omega, \sigma, P\}$

z warunkami początkowymi $u(x,0) = u_0(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$

i brzegowymi warunkami losowymi $u(x,t) = \bar{S}(t,\omega)$ dla $x \in \partial D$ (2)

$\bigwedge_{\omega\in\Omega}$ istnieje i jest jednoznacznie określone rozwiązanie zagadnienie (1) z warunkami (2) i (3). (3)

Rozważanie nasze ograniczymy do przypadku, gdy warunki początkowe są ustalone, a jedynie będziemy badać efekty zmian warunków brzegowych. W pracy za [1] przyjmujemy następujące definicje stabilności rozwiązań.

Definicja 1

Rozwiązanie $u(x,t) = 0$ równania (1) jest lokalnie stabilne stochastycznie względem dwu norm $\| \ \|_0$, $\| \ \|_1$ jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{r>0} \|u(x,0)\|_0 < r \Longrightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega : \|u(x,t)\| > \varepsilon\right\} < \delta .$$

Definicja 2

Rozwiązanie $u(x,t) = 0$ jest asymptotycznie lokalnie stabilne stochastycznie, gdy spełniony jest warunek z definicji 1 oraz

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{r>0} \|u(x,0)\|_0 < r \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} P\left\{\omega : \|u(x,t)\| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Definicja 3

Rozwiązanie $u(x,t) = 0$ równania (1) jest stabilne stochastycznie przy stale działających zaburzeniach losowych, jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{r>0}\left[\|u(x,0)\|_0 + \|\xi(t,\omega)\|_1 + \|R(x,t,u,\omega)\|_2\right] < r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega : \|u(x,t\|_3 > \delta\right\} < \varepsilon .$$

Definicja 4

Rozwiązanie $u(x,t) = 0$ równania (1) jest asymptotycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1, jeśli $\lim_{t\to\infty} (|u(x,t,w)| = 0$ z prawdop. 1.

Uwaga 1

Rozwiązanie zerowe problemu (1) traktujemy w sposób formalny i rozumiemy przez to, że układ (1) przy $t\to\infty$ dąży do ustalonego stanu równowagi.

Uwaga 2

Przez $\| \ \|_0$, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_3$ oznaczamy normę w odpowiednich przestrzeniach. W niektórych przypadkach normy te mogą być sobie równe, a także mogą być funkcjami czasu spełniającymi postulaty normy.

2. Zastosowanie całki energetycznej do badania stabilności rozwiązań

Rozpatrzmy równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{4}$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = \xi(t,\omega) \tag{5}$$

i początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{6}$$

Załóżmy, że

$$|p(1)| < M_1 \tag{i}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)\right\| \leqslant M_2. \tag{ii}$$

Udowodnimy, że rozwiązanie $u(x,t,\omega)$ jest stabilne w sensie następującej definicji:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(x)\|_0 + \|\psi(x)\|_0 + \|\xi(t,\omega)\|_1 < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t>0} \|u(x,t,\omega)\|_2 < \varepsilon .$$

Energia układu (4) dana jest wzorem

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[r(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx.$$

Stąd po wykorzystaniu warunków brzegowych mamy

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left[p(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)\frac{\partial u}{\partial t}(1,t) - p(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)\right] dt.$$

Wykorzystując założenia (i) (ii) dostajemy następujące oszacowanie

$$E(t) \leqslant E(0) + M\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(1,t)dt = E(0) + M\, u(1,t) = E(0) + M\xi(t)$$

$$M = M_1 \cdot M_2 .$$

Z warunków początkowych (6) wynika

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{r(x)\psi^2(x) + p(x)[\varphi'(x)]^2\right\} dx.$$

Rozważając całkę

$$\int_x^1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = u(1,t) - u(x,t) = \xi(t,\omega) - u(x,t,\omega)$$

$$u(x,t,\omega) = \xi(t,\omega) - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

i przechodząc do oszacowania modułu otrzymamy

$$|u(x,t,\omega)| \leqslant |\xi(t,\omega)| + \int_x^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx = |\xi(t,\omega)| +$$

$$+ \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sqrt{p(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx \leqslant \left[\int_x^1 \frac{dx}{p(x)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_x^1 p(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + |\xi(t,\omega)|.$$

Jeżeli

$$\|\varphi'(x)\|_o = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)| < \frac{\delta}{3} \qquad \|\psi(x)\|_o = \sup_{x\in[0,1]} |\psi(x)| \leqslant \frac{\delta}{3}$$

to

$$E(0) \leqslant M\, 1 \frac{\delta^2}{g}$$

a zatem tym bardziej

$$\int_x^1 p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant \int_0^1 p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 2E(0) \leqslant M_3\, 1 \frac{\delta^2}{g},$$

gdzie

$$M_3 = 2\, M.$$

Uwzględniając te oszacowania mamy

$$|u(x,t,\omega)| \leqslant k\sqrt{M_3 1}\,\frac{\delta}{3} + |\xi(t,\omega)| \qquad k > \left[\int_x^1 \frac{dx}{p(x)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Przyjmując

$$\|Z(t,\omega,x)\| = \sup_{x\in(0,1)} E|Z(t,\omega,x)|$$

otrzymamy przy założeniu $\|\xi(t,\omega)\|_1 < \delta$, że

$$\|u(x,t,\omega)\|_2 \leqslant [M_4 + 1]\delta \qquad M_4 = \frac{k\sqrt{M_3 1}}{3}.$$

Przyjmując

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M_4 + 1}$$

otrzymujemy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta=\frac{\varepsilon}{M_3+1}} \left(\|\varphi(x)\|_0 + \|\psi(x)\|_0 + \|\xi(t,\omega)\|_1 < \delta \Longrightarrow \bigwedge_t \|u(x,t,\omega)\|_2 < \varepsilon\right.$$

3. Zastosowanie klasycznej metody Fouriera do badania stabilności stochastycznej równań cząstkowych

Rozważmy równanie struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad m < \frac{\pi a}{1}, \tag{7}$$

której kształt i prędkość punktów w chwili początkowej jest równa zero tzn.

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{8}$$

Na końcach tej struny działają zadane procesy stochastyczne, czyli

$$u(0,t) = \xi_1(t,\omega)$$

$$u(1,t) = \xi_2(t,\omega). \tag{8}$$

Procesy stochastyczne $\xi_1(t,\omega)$, $\xi_2(t,\omega)$ są dwukrotnie średniokwadratowo różniczkowalne oraz spełniają warunki zgodności

$$\xi_1(0,\omega) = \xi_1'(0,\omega) = \xi_2(0,\omega) = \xi_2'(0,\omega) = 0.$$

Przy pewnych dodatkowych założeniach odnośnie procesów losowych

$$\xi_1(t,\omega), \quad \xi_2(t,\omega), \quad \xi_1'(t,\omega), \quad \xi_2'(t,\omega)$$

udowodnimy stabilność asymptotyczną i stabilność lokalnie asymptotyczną rozwiązania zerowego równania (7).
Zagadnienie (7) z warunkami (8), (8') sprowadzamy przez transformację

$$u(x,t) = v(x,t) + \xi_1(t,\omega) + \frac{x}{l}\left[\xi_2(t,\omega) - \xi_1(t,\omega)\right]$$

do postaci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \xi_1''(t,\omega) - \frac{x}{l}\left[\xi_2''(t,\omega) - \xi_1''(t,\omega)\right] -$$

$$- 2m\left[\xi_1'(t,\omega) + \frac{x}{l}\left[\xi_2' - \xi_1'\right]\right].$$

Oznaczając procesy

$$\eta_1(t,\omega) = -\xi_1'' - 2m\xi_1'$$

$$\eta_2(t,\omega) = -(\xi_2'' - \xi_1'') - 2m(\xi_2' - \xi_1')$$

otrzymujemy równanie stochastyczne postaci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_1(t,\omega) + \frac{x}{l}\eta_2(t,\omega) \tag{9}$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi zerowymi.
Rozwiązanie zagadnienia (9) znajdujemy w postaci

$$v(x,t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t,\omega)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

Funkcja losowa (10) spełnia warunki brzegowe zerowe, a początkowe będzie spełniać, gdy na niewiadomy proces $\gamma_k(t,\omega)$ narzucimy $\gamma_k(0) = \gamma_k'(0) = 0$. Wstawiając (10) do równania (9) otrzymamy następujące równanie różniczkowe na wyliczenie $\gamma_k(t,\omega)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k''(t,\omega) + 2m\gamma_k'(t,\omega) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\gamma_k(t,\omega) = \eta_1(t,\omega) + \frac{x}{l}\eta_2(t,\omega). \tag{11}$$

Rozwijając proces $\eta_1(t,\omega) + \frac{x}{l}\eta_2(t,\omega)$ w szereg postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k(t,\omega)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

gdzie

$$q_k(t,\omega) = \frac{2}{k\pi}\underbrace{\left[2\eta_1(t,\omega) + l(-1)^{k+1}\eta_2(t,\omega)\right]}_{g(t,\omega)}.$$

Równanie (11) przyjmuje postać

$$\gamma_k''(t) + 2m\gamma_k'(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\gamma_k(t) = \frac{2}{k\pi}g(t,\omega).$$

Stąd otrzymujemy

$$\vartheta_k(t) = e^{-mt}\left[A_k(t)\cos h_k t + B_k(t)\sin h_k t\right] \qquad h_k = \sqrt{\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 - m^2}.$$

Uznając stałe

$$\vartheta_k(t,\omega) = e^{-mt}\left\{\left[-\int_0^t \frac{2g(t,\omega)\sin h_k t}{k\pi h_k}\,dt\right]\cos h_k t + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^t \frac{2g(t,\omega)\cos h_k t}{k\pi h_k}\,dt\right]\sin h_k t\right\},$$

zatem rozwiązanie równania (9) ma postać

$$v(x,t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{-mt}\left[\cosh_k t\int_0^t \frac{-2g(t,\omega)\sinh_k t}{k\pi h_k}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \sinh_k t\int_0^t \frac{2g(t,\omega)\cosh_k t}{k\pi h_k}\,dt\right\}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$|v(x,t,\omega)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} e^{-mt}\frac{u}{k\pi h_k}\int_0^t |g(t,\omega)|\,dt \leqslant e^{-mt}\, S\int_0^t |glt,\omega)|\,dt,$$

gdzie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\,l}{k\pi^2 a^2\sqrt{k^2-1}}$$

$$|u(x,t,\omega)| = \left|v(x,t,\omega) + \xi_1(t,\omega) + \frac{x}{l}\left[\xi_2(t,\omega) - \xi_1(t,\omega)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant |v(x,t,\omega)| + |\xi_1(t,\omega)| +$$

$$+ \frac{x}{l}\left|\xi_2(t,\omega) - \xi_1(t,\omega)\right| \leqslant e^{-mt} S \int_0^t |g(t,\omega)| dt + 2|\xi_1(t,\omega)| + \xi_2(t,\omega)| \tag{12}$$

z tego oszacowania przy założeniu $\lim_{t\to\infty} |\xi_1(t,\omega)| = 0$, $\lim_{t\to\infty} |\xi_2(t,\omega)| = 0$ $\int_0^\infty E|g(t,\omega)| < \infty$ wynika, że $u(x,t,\omega) \equiv 0$ równania (7) jest asymptotycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1 (def. 4). Na podstawie oszacowania (12) i nierówności Czebyszewa łatwo udowodnić można następujące twierdzenie.

Jeśli $E|\xi_1(t)| = 0$ i $E|\xi_2(t)| = 0$, to rozwiązanie równania (7) z warunkami (8) i (8) jest lokalnie asymptotycznie stabilne (patrz definicja 2).

4. Zastosowanie zasady maximum do badania stabilności wewnętrznego stochastycznego zadania Dirichleta

Rozważmy równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{w obszarze } D \text{ o brzegu } \partial D$$

z warunkami brzegowymi postaci

$$u(x,y) = \xi(x,\omega) \text{ na } \partial D, \text{ gdzie } \xi(x,\omega) \text{ pole losowe.}$$

Do równania tego prowadzi między innymi zagadnienie skręcania jak i zagadnienie ugięcia pryzmatycznego pręta. Przez funkcję tę i jej pochodne można prosto wyrazić powstające napięcia i deformacje.

Twierdzenie

Rozwiązanie $u(x,y,\omega)$ jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 w sensie następującej definicji:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0} \|\xi(x,\omega)\|_0 < \delta \Longrightarrow \|u(x,y)\|_1 < \varepsilon \text{ dla prawie wszystkich } \omega.$$

Dowód

W oparciu o zasadę maximum dla równań Laplacea dostajemy

$$\max_{\bar{D}} |u_\omega(x,y)| < \max_{\partial D} |\xi_\omega(x)| \quad \text{dla każdego } \omega$$

przyjmując

$$\bigwedge_{\omega} \|\xi_\omega(x)\|_0 = \max_{x\in\partial D} |\xi_\omega(x)|$$

$$\bigwedge_{\omega} \|u_\omega(x,y)\|_1 = \max_{x,y\in D} |u_\omega(x,y)|$$

mamy

$$\|u_\omega(x,y)\|_1 \leqslant \|\xi_\omega(x)\|_0 \quad \text{dla każdego } \omega.$$

Powyższa nierówność jest spełniona dla każdej realizacji z prawdopodobieństwem 1.

Przyjmując w definicji stabilności $\delta = \varepsilon$ otrzymujemy

$$\|u(x,y)\|_1 < \varepsilon \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

5. Zastosowanie zasady maximum do badania stabilności stochastycznej równań typu parabolicznego

Rozpatrzmy równanie postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dla obszaru} \quad [0,1]\times[0,\infty) \tag{13}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \xi_1(t,\omega) \\ u(1,t) &= \xi_2(t,\omega) \end{aligned} \tag{14}$$

i zerowymi warunkami początkowymi

$$u(x,0) = u_0 = 0. \tag{15}$$

Funkcje $a(t,x) \geqslant a_0 > 0$ i $b(x,t)$ są ustalonymi funkcjami ciągłymi w zbiorze $[0,1] \times [0,\infty)$.

Definicja

Rozwiązanie trywialne układu (13) - (15) jest stabilne z prawdop. 1, jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \left(\|\xi_1(t,\omega)\|_0 + \|\xi_2(t,\omega)\|_1\right) < \delta \Rightarrow \|u_\omega(t,x)\|_2 < \varepsilon \bigwedge_{\omega} .$$

Twierdzenie

Rozwiązanie powyższego równania przy działających zaburzeniach na brzegu jest stabilne z prawdop. 1, w sensie podanej definicji.

Dowód

Rozważmy pewne realizacje $\xi_1(t,\omega)$ i $\xi_2(t,\omega)$ przy ustalonym ω. Zgodnie z zasadą maximum dla równań parabolicznych odpowiednia realizacja $u_\omega(t,x)$ osiąga maximum na łamanej S składającej się z trzech boków prostokąta: $t = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

A więc

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ t\in[0,\infty)}} |u_\omega(t,x)| \leqslant \max_{x\in[0,1]}|u(x,0)| + \max_t |u(0,t)| + \max_t |u(1,t)|$$

$$\max_{x\in[0,1]}|u(x,0)| = 0.$$

Wprowadzając następujące normy

$$\bigwedge_\omega \|\xi_1(t,\omega)\|_0 = \|u(0,t)\|_0 = \max_t |u_\omega(0,t)|$$

$$\bigwedge_\omega \|\xi_2(t,\omega)\|_1 = \|u(1,t)\|_1 = \max_t |u_\omega(1,t)|$$

$$\bigwedge_\omega \|u(t,x,\omega)\|_2 = \max_{\substack{x\in[0,1]\\ t\in 0,\infty)}} |u(1,t,x)|$$

otrzymujemy, że dla każdego ω zachodzi

$$\|u_\omega(t,x)\|_2 \leqslant \|\xi_1(t,\omega)\|_0 + \|\xi_2(t,\omega)\|_1.$$

Powyższe równanie jest spełnione dla każdej realizacji z prawdop. 1. Kładąc $\delta = \varepsilon$ w definicji dostajemy tezę.

LITERATURA

1. Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria "Automatyka" z. 20, Gliwice 1972.

2. Czech A., Janiec B.: O asymptotycznych własnościach rozwiązań problemu brzegowego dla równania struny. Zbiór referatów. Sympozjon pod hasłem metody stochastyczne w mechanice, Szczyrk 1973.

3. Kozin F.: On the Almst sure stability of linear systems with rondon we fficints "Journal of Mathematies and Physics", ud 42 Nr 1/1963.

4. Tichonow, Samarski: Równania fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1968.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается стабильность решений уравнений второго порядка со стохастимескими параметрами при неограниченном возрастании времени.

THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF RANDOM
BOUNDARY PROBLEMS ON THE PLANE

S u m m a r y

In this paper we apply direct for method Liapunow investigation of the solutions of random boundary problems on the plane.