ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JAN STOLARZ

O ROZWIĄZANIACH PEWNEGO EKSTREMALNEGO RÓWNANIA FUNKCYJNEGO

Streszczenie. W pracy niniejszej rozważa się ekstremalne równanie funkcyjne $f(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y)))$, $f(\Theta) = 0$, o którym przy założeniach H_1, H_2 udowadnia się trzy twierdzenia związane z istnieniem i strukturą rozwiązań.

Przedmiotem niniejszej pracy jest równanie funkcyjne

$$f(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y))), \quad f(\Theta) = 0, \tag{1}$$

gdzie $x = (x_1,\ldots,x_n) \in D \subset R^n$, $y = (y_1,\ldots,y_m) \in S(x) \subset R^m$, D jest danym podzbiorem przestrzeni R^n zawierającym wektor $\Theta = (0,\ldots,0) \in R^n$, S jest daną funkcją przyporządkowującą każdemu wektorowi $x \in D$ zbiór $S(x) \subset R^m$ zawierający wektor $\Theta' = (0,\ldots,0) \in R^m$; H jest daną funkcją, o wartościach z R^1, określoną w zbiorze

$$P = \Big\{(x,y,z) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,z) \in R^{n+m+1} : x \in D, y \in S(x), z \in R^1\Big\},$$

T jest daną funkcją, o wartościach ze zbioru D, określoną w zbiorze $Q = \Big\{(x,y) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \in R^{n+m} : x \in D,\ y \in S(x)\Big\}$, $f : D \to R^1$, jest funkcją poszukiwaną. Równanie (1) pełni podstawową rolę w programowaniu dynamicznym (p. [1]). W tej pracy będzie ono rozważane przy założeniach H_1 i H_2, które według znanej klasyfikacji R. Bellmana kwalifikują go do mało zbadanych równań trzeciego typu (p. [1],[2],[3]).

Założenia H_1

1° Istnieje wektor $A = (A_1,\dots,A_m) \in R^m$, $A \geqslant \Theta'$[1] i taka funkcja $w: R^1 \longrightarrow R^1$, niemalejąca i wypukła w przedziale $\langle 0,+\infty)$, $w(0) = 0$, że $H(x,y,z) \leqslant z + A \cdot W(y)$[2] dla każdego $(x,y,z) \in P$, gdzie W W jest funkcją przyporządkowującą każdemu wektorowi $y = (y_1,\dots,y_m) \in R^m$ wektor $W(y) = (w(y_1),\dots,w(y_m)) \in R^m$.

2° $H(x,\Theta', z) \geqslant z$ dla każdego $x \in D$ i $z \in R^1$.

3° Istnieje wektor $a = (a_1,\dots,a_m) \in R^m$, $\Theta' < a < J$, taki, że $\|T(x,y)\| \leqslant \|x\| + (a-J) \cdot y$ dla każdego $(x,y) \in Q$, gdzie $J=(1,\dots,1) \in R^m$, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

4° $T(x,\Theta) = x$ dla każdego $x \in D$.

5° Dla każdego $x \in D$
$$S(x) \subset S_1(x) = \left\{y \in R^m : y \geqslant \Theta',\ J \cdot y \leqslant \|x\|\right\}.$$

6° Funkcja H jest ciągła i niemalejąca względem z na całej osi liczbowej.

Założenia H_2

1° Istnieje wektor $B = (B_1,\dots,B_m) \in R^m$, $B \neq \Theta'$, $B \geqslant \Theta'$ i taka funkcja $v: R^1 \longrightarrow R^1$, posiadająca nieujemną i ciągłą pochodną w przedziale $(0,+\infty)$, $v'(0^+) = +\infty$, $v(0^+) = v(0) = 0$, $v\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{v(\alpha)}{v(\beta)}$ dla dowolnych liczb $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, że $H(x,y,z) \geqslant z + B \cdot V(y)$ dla każdego
$$(x,y,z) \in P_1 = \left\{(x,y,z) \in R^{n+m+1} : x \in D,\ y \in S_1(x),\ z \in R^1\right\},$$

[1] Nierówność między wektorami oznacza nierówność między odpowiadającymi sobie współrzędnymi tych wektorów.

[2] Symbol "." użyty między wektorami oznacza iloczyn skalarny tych wektorów.

gdzie V jest funkcją przyporządkowującą każdemu wektorowi $y = (y_1,\dots,y_m) \in R^m$ wektor $V(y) = (v(y_1),\dots,v(y_m)) \in R^m$, $S_1(x)$ jest zbiorem określonym w założeniu $H_1 5^o$.

2^o Istnieje wektor $b = (b_1,\dots,b_m) \in R^m$, $\Theta' < b < J$, taki że

$\|T(x,y)\| \geqslant \|x\| + (b - J) \cdot y$ dla każdego

$(x,y) \in Q_1 = \left\{(x,y) \in R^{n+m} : x \in D,\ y \in S_1(x)\right\}$.

3^o $S(x) \supset S_1(x)$ dla każdego $x \in D$.

4^o Dla każdego $x \in D$ istnieje wektor $y^o(x) \in S(x)$ taki, że

$H(x, y^o(x), z) \geqslant 0$ dla każdego $z \in R^1$.

5^o $D \neq \left\{\Theta\right\}$.

Twierdzenie 1

Jeżeli spełnione są założenia H_1 1^o-5^o, to każda funkcja $f(x) = M\, w(\|x\|)$, gdzie $M \in R^1$ i $M \geqslant \max\left\{\frac{A_i}{1-a_i} : i = 1,\dots,m\right\}$, jest rozwiązaniem równania (1) w zbiorze D.

Dowód

Niech x będzie dowolnym, ale chwilowo ustalonym, wektorem ze zbioru D. Z wypukłości funkcji w i zbioru $S_1(x)$ wynika wypukłość funkcji $G(y) = M\, w(\|x\| + (a-J) \cdot y) + A \cdot W(y)$ w zbiorze $S_1(x)$ domkniętym i ograniczonym, a z założenia $w(0) = 0$ i wypukłości funkcji w nierówność $W(\|x\| a) \leqslant w(\|x\|) a$. Zatem i na mocy określenia liczby M

$$\sup_{y \in S_1(x)} G(y) = \max\left\{M\, w(\|x\|),\ A_i\, w(\|x\|) + M\, w(a_i \|x\|) : i = 1,\dots,m\right\}$$

$$\leqslant w(\|x\|) \max\left\{M,\ A_i + M a_i : i = 1,\dots,m\right\} = M w(\|x\|).$$

Stąd i z założenia $H_1 5^o$ wynika nierówność $G(y) \leqslant M\, w(\|x\|)$ dla każdego $y \in S(x)$. Korzystając z założeń $H_1 1^o, 5^o$ oraz z ostatniej nierówności, otrzymujemy

$$H(x,y,M\, w(\|T(x,y)\|)) \leqslant M\, w(\|T(x,y)\|) + A\,.\, W(y) \leqslant G(y) \leqslant M\, w(\|x\|)$$

dla każdego $y \in S(x)$, co oznacza, że istnieje

$$\sup_y H(x,y,\, M\, w(\|T(x,y)\|)) \quad \text{w zbiorze} \quad S(x) \quad \text{i}$$

$$\sup_{y \in S(x)} H(x,y,\, M\, w(\|T(x,y)\|)) \leqslant M\, w(\|x\|).$$

Z założeń $H_1 2^o, 4^o$ wynika nierówność

$$\sup_{y \in S(x)} H(x,y,\, M\, w(\|T(x,y)\|)) \geqslant H(x,\Theta',\, M\, w(\|T(x,\Theta')\|)) \geqslant M\, w(\|x\|),$$

która wraz z nierównością poprzednią daje tezę twierdzenia. W dalszym ciągu zajmować się będziemy ciągiem kolejnych przybliżeń

$$f_n(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f_{n-1}(T(x,y))), \quad x \in D, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

gdzie funkcja $f_o : D \to R^1$ jest dowolnym przybliżeniem początkowym, równym zero dla $x = \Theta$ i ograniczonym z góry w zbiorze $D_c = \{x \in D : \|x\| \leqslant c\}$, gdzie c jest dowolną nieujemną liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia H_1, to ciąg kolejnych przybliżeń (2) jest monotonicznie zbieżny dla każdego $x \in D_c$ i jego granica jest rozwiązaniem równania (1) w zbiorze D_c.

Dowód

Rozważmy najpierw ciąg liczbowy $d_1 = \max\left\{A_i : i = 1,\dots,m\right\}$, $d_n = \max\left\{A_i + a_i\ d_{n-1} : i = 1,\dots,m\right\}$, $n = 2,3,\dots$, gdzie A_i oraz a_i są liczbami rzeczywistymi określonymi w założeniach H_1 $1^o,3^o$.
Łatwo sprawdzić (dowód indukcyjny), że ciąg $\{d_n\}$ jest niemalejący. Dla wykazania zbieżności ciągu $\{d_n\}$ udowodnimy nierówność

$$d_n \leqslant L = \max\left\{\frac{A_i}{1-a_i} : i = 1,\dots,m\right\}, \quad n = 1,2,\dots \qquad (3)$$

Z nierówności $A_i \leqslant \frac{A_i}{1-a_i}$, $i = 1,\dots,m$, wynika, że $d_1 \leqslant L$. Zakładając prawdziwość nierówności (3) dla pewnego $n \geqslant 1$, otrzymujemy

$$d_{n+1} = \max\left\{(1-a_i)\frac{A_i}{1-a_i} + a_i d_n : i = 1,\dots,m\right\}$$

$$\max\left\{(1-a_i)\ L + a_i L : i = 1,\dots,m\right\} = L,$$

co kończy dowód indukcyjny nierówności (3).
W następnej części dowodu wykażemy nierówności

$$f_n(x) \leqslant K + d_n\ w(\|x\|) \ \text{dla każdego}\ x \in D_c,\quad n = 1,2,\dots, \qquad (4)$$

gdzie K jest liczbą rzeczywistą ograniczającą z góry funkcję f_o w zbiorze D_c oraz

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \ \text{dla każdego}\ x \in D_c,\quad n = 1,2,\dots . \qquad (5)$$

Na mocy określenia funkcji w

$$\sup_{y \in S_1(x)} \left[A\ .\ W(y)\right] = d_1\ w(\|x\|) \ \text{dla każdego}\ x \in D \ \text{oraz} \qquad (6)$$

$$\sup_{y\in S_1(x)} \left[d_n \, w(\|x\| + (a-J) \cdot y) + A \cdot W(y)\right]$$

$$= \max\left\{d_n \, w(\|x\|),\ A_i \, w(\|x\|) + d_n \, w(a_i\|x\|) \quad i = 1,\dots,m\right\}$$

$$\leqslant w(\|x\|)\max\left\{d_n,\ A_i + a_i d_n \ : \ i = 1,\dots,m\right\} = d_{n+1} \, w(\|x\|) \qquad (7)$$

dla każdego $x \in D$, $n = 1,2,\dots$.

Weźmy wektor x ze zbioru D_c. Z założeń H_1 $3^o,5^o$ wynika, że $T(x,y)\in D_c$ dla każdego $y \in S(x)$. Korzystając z założeń H_1 $1^o,5^o$ oraz z (6) otrzymujemy

$$H(x,y,f_o(T(x,y))) \leqslant f_o(T(x,y)) +$$

$$+ A \cdot W(y) \leqslant K + A \cdot W(y) \leqslant K + d_1 w(\|x\|)$$

dla każdego $y \in S(x)$, co oznacza, że $f_1(x) \leqslant K + d_1 \, w(\|x\|)$ dla każdego $x \in D_c$. Zakładając prawdziwość nierówności (4) dla pewnego $n \geqslant 1$ i korzystając z założeń H_1 $1^o,3^o,5^o$ oraz z (7), mamy

$$H(x,y,f_n(T(x,y))) \leqslant f_n(T(x,y)) + A.W(y) \leqslant K + d_n \, w(\|T(x,y)\|) +$$

$$+ A \cdot W(y) \leqslant K + d_n \, w(\|x\| + (a-J).y) + A.W(y) \leqslant K + d_{n+1} \, w(\|x\|)$$

dla każdego $y \in S(x)$. Zatem $f_{n+1}(x) \leqslant K + d_{n+1} \, w(\|x\|)$ dla każdego $x \in D_c$, co kończy dowód indukcyjny zapowiedzianej nierówności (4). Na mocy założeń H_1 $2^o,4^o$

$$f_2(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f_1(T(x,y))) \geqslant H(x,\Theta',f_1(T(x,\Theta')))$$

$$\geqslant f_1(T(x,\Theta')) = f_1(x) \ \text{ dla każdego } \ x \in D_c.$$

Zakładając prawdziwość nierówności (5) dla pewnego $n \geqslant 1$, i korzystając z założeń H_1 $2^0, 4^0$, otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f_n(T(x,y))) \geqslant H(x,\Theta',f_n(T(x,\Theta')))$$

$$\geqslant f_n(T(x,\Theta')) = f_n(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in D_c,$$

co kończy dowód nierówności (5). Z (4) i (5) wynika istnienie funkcji f takiej, że $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in D_c$.

Przechodząc w (4) do granicy, otrzymujemy

$$f(x) \leqslant K + d\, w(\|x\|) \quad \text{dla każdego} \quad x \in D_c,$$

gdzie liczba d jest granicą ciągu $\{d_n\}$. Stąd oraz na mocy założeń H_1 $1^0, 3^0, 5^0$ i równości (6)

$$H(x,y,f(T(x,y))) \leqslant f(T(x,y)) + A \,.\, W(y) \leqslant K + d\, w(\|T(x,y)\|) +$$

$$+ A \,.\, W(y) \leqslant K + d\, w(\|x\|) + d_1\, w(\|x\|)$$

dla każdego $y \in S(x)$, $x \in D_c$, co oznacza istnienie $\sup_{y \in S(x)} H(x,y, f(T(x,y)))$ dla każdego $x \in D_c$. Korzystając z monotonicznej zbieżności ciągu $\{f_n(x)\}$ i z H_1 6^0, otrzymujemy nierówność $f_n(x) \leqslant \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y)))$ dla każdego $x \in D_c$, $n = 1,2,\ldots$, z której po przejściu do granicy wynika, że

$$f(x) \leqslant \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y))) \quad \text{dla każdego} \quad x \in D_c. \tag{8}$$

Z (2) wynika nierówność

$$f_n(x) \geqslant H(x,y,f_{n-1}(T(x,y))) \text{ dla każdego } y \in S(x),$$

$$n = 1,2,\dots, \quad x \in D_c,$$

która po przejściu granicznym daje nierówność

$$f(x) \geqslant H(x,y,f\ (T(x,y))) \text{ dla każdego } y \in S(x)$$

a z tej wynika, że

$$f(x) \geqslant \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y))) \text{ dla każdego } x \in D_c$$

co wraz z (8) kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 3

Jeżeli spełnione są założenia H_2, to równanie (1) nie posiada rozwiązania w zbiorze D[3].

Dowód

Niech r będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z określenia funkcji v wynika istnienie

$$\sup_p \left[B \ . \ V(p) + r\ v(1 + (b - J) \ . \ p)\right]$$

w zbiorze $S_o = \left\{p = (p_1,\dots,p_m) \in R^m : p \geqslant \Theta', \ p \ . \ J \leqslant 1\right\}$ oraz $\sup\limits_y \left[B.V(y) + r\ v(\|x\| + (b-J) \ . \ y)\right]$ w zbiorze $S_1(x)$ dla każdego $x \in D$.

[3]Przy założeniach H_2 1^o 2^o 3^o 5^o równanie (1) nie posiada rozwiązania w klasie funkcji nieujemnych - dowód analogiczny.

Zatem możemy określić ciąg liczbowy $\{C_n\}$, gdzie

$$C_1 = \sup_{p \in S_0} \left[B \cdot V(p)\right],$$

$$C_n = \sup_{p \in S_0} \left[B \cdot V(p) + C_{n-1}\, v(1 + (b-J) \cdot p)\right],\ n \geqslant 2,$$

i rozważyć następnie ciąg $\{g_n(x)\}$ dla $x \in D$, gdzie

$$g_1(x) = \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \cdot V(y)\right],\ g_n(x) =$$

$$= \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \cdot V(y) + g_{n-1}(\|x\| + (a-J) \cdot y)\right]\quad n \geqslant 2. \tag{9}$$

Udowodnimy najpierw, że

$$g_n(x) = C_n\, v(\|x\|) \text{ dla każdego } x \in D,\quad n = 1,2,\ldots. \tag{10}$$

Dla $x = \Theta$ powyższa równość jest oczywista. Weźmy wektor x ze zbioru $D - \{\Theta\}$. Przekształcenie $p = \frac{y}{\|x\|}$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru $S_1(x)$ na zbiór S_0.
Zatem

$$g_1(x) = v(\|x\|) \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \cdot V\left(\frac{y}{\|x\|}\right)\right] =$$

$$= v(\|x\|) \sup_{p \in S_0} \left[B \cdot V(p)\right] = C_1\, v(\|x\|).$$

Zakładając prawdziwość równości (10) dla pewnego $n \geqslant 1$, otrzymujemy

$$g_{n+1}(x) = \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \,.\, V(y) + C_n\, v(\|x\| + (b-J) \,.\, y)\right] =$$

$$= v(\|x\|) \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \,.\, V\left(\frac{y}{\|x\|}\right) + C_n\, v(\|x\| + (b-J) \,.\, \frac{y}{\|x\|})\right] =$$

$$= v(\|x\|) \sup_{p \in S_0} \left[B \,.\, V(p) + C_n\, v(1 + (b-J) \,.\, p)\right] = C_{n+1}\, v(\|x\|),$$

co kończy dowód równości (10). Z równości $v(0) = 0$ i $v(1) = 1$ wynika, że $C_n \geqslant C_{n-1}$ dla każdego $n \geqslant 2$, co wraz z (10) oznacza niemalenie ciągu $\{g_n(x)\}$ dla każdego $x \in D$. Przypuśćmy, że ciąg $\{C_n\}$ jest ograniczony z góry. Istnieje zatem liczba C taka, że

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} C_n\, v(\|x\|) = Cv(\|x\|) \quad \text{dla każdego} \quad x \in D.$$

Korzystając z monotonicznej zbieżności ciągu $\{g_n(x)\}$, otrzymujemy nierówność

$$g_n(x) \leqslant \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \,.\, V(y) + Cv(\|x\| + (b-J) \,.\, y)\right] \text{ dla każdego}$$

$$x \in D, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

z której po przejściu do granicy wynika, że

$$C\, v(\|x\|) \quad \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \,.\, V(y) + C\, v(\|x\| + (b-J) \,.\, y)\right] \text{ dla każdego } \quad x \in D. \tag{11}$$

Z (9) wynika nierówność

$$g_n(x) \geqslant B \,.\, V(y) + C_{n-1}\, v(\|x\| + (b-J) \,.\, y) \text{ dla każdego}$$

$y \in S_1(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ która po przejściu granicznym daje nierówność

$$C\,v(\|x\|) \geqslant B \cdot V(y) + C\,v(\|x\| + (b-J) \cdot y) \text{ dla każdego}$$

$y \in S_1(x)$, a z tej wynika, że

$$C\,v(\|x\|) \sup_{y \in S_1(x)} \left[B \cdot V(y) + C\,v(\|x\| + (b-J) \cdot y)\right] \text{ dla każdego } x \in D, \text{ co}$$

wraz z (11) oznacza, że

$$\sup_{y \in S_1(x)} \left[B \cdot V(y) + C\,v(\|x\| + (b-J) \cdot y)\right] = C\,v(\|x\|) \text{ dla każdego } x \in D.$$

Z określenia wektora B wynika istnienie takiej liczby naturalnej $k \in \{1,\dots,m\}$, że $B_k > 0$. Wyrażenie

$B \cdot V(y) + C\,v(\|x\| + (b-J) \cdot y)$ na odcinku $\bar{J} = \{y=(y_1,\dots,y_m) \in S_1(x):$ $y_i = 0$ dla $i \neq k\}$ przyjmuje wartości

$$F(y_k) = B_k\, v(y_k) + C\,v(\|x\| + (b_k-1)\,y_k), \quad 0 \leqslant y_k \leqslant \|x\|.$$

Na mocy określenia funkcji v, $F'(0^+) = +\infty$, co oznacza istnienie liczby $\bar{y}_k > 0$ takiej, że $F'(y_k) > 0$ dla $y_k \in (0,\bar{y}_k)$. Stąd oraz z równości $F(0^+) = F(0) = C\,v(\|x\|)$ wynika, że funkcja F jest silnie rosnąca w przedziale $\langle 0,\bar{y}_k)$.

Zatem

$$\sup_{0 \leqslant y_k \leqslant \|x\|} F(y_k) > C\,v(\|x\|),$$ co daje sprzeczność z (12) i oznacza, że $\lim_{n\to\infty} C_n = +\infty$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = +\infty \text{ dla każdego } x \in D - \{\Theta\}. \tag{13}$$

Niech $h_0 : D \to R^1$, $h_0(\Theta) = 0$, będzie funkcją taką, że dla każdego $x \in D$ istnieje $h_n(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f_{n-1}(T(x,y)))$, $n = 1,2,\dots$. Udowodnimy nierówność

$$h_n(x) \geqslant g_{n-1}(x) \text{ dla każdego } x \in D,\ n = 2,3,\ldots \qquad (14)$$

Na mocy założenia H_2 4^o

$$\sup_{y \in S(x)} H(x,y,h_o(T(x,y))) \geqslant H(x,y^o(x),\ h_o(T(x,y^o(x)))) \geqslant 0$$

dla każdego $x \in D$, co oznacza, że $f_1(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in D$. Stąd oraz z założeń H_2 $1^o,3^o$ wynika nierówność $h_2(x) \geqslant g_1(x)$ dla każdego $x \in D$.

Zakładając prawdziwość nierówności (14) dla pewnego $n \geqslant 2$ i korzystając z założeń H_2 $1^o,2^o$ oraz z (10), otrzymujemy

$$H(x,y,h_n(T(x,y))) \geqslant h_n(T(x,y)) + B \cdot V(y) \geqslant g_{n-1}(T(x,y)) + B \cdot V(y)$$

$$= C_{n-1}\ v(\|T(x,y)\|) + B \cdot V(y) \geqslant C_{n-1}\ v(\|x\| + (b-J) \cdot y) + B \cdot V(y)$$

$$= g_{n-1}(\|x\| + (b-J) \cdot y) + B \cdot V(y)$$

dla każdego $y \in S_1(x)$, $x \in D$. Zatem na mocy założenia H_2 3^o i (9) $f_{n+1}(x) \geqslant g_n(x)$ dla każdego $x \in D$, co kończy dowód nierówności (14). Z (13) i (14) wynika rozbieżność ciągu $\{h_n(x)\}$ dla każdego $x \in D - \{\Theta\}$ co wraz z założeniem H_2 5^o oznacza, że równanie (1) nie posiada rozwiązania w zbiorze D.

LITERATURA

1. Bellman R.: Dynamic programming, Princeton 1957.
2. Kwapisz M.: On a certain functional equation, Colloquium Mathematicum 18 (1967) p. 169-179.

3. Sobieszek W., Stolarz J.: O niejednoznaczności rozwiązań równania $f(x) = \sup_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[g(y_1) + h(y_2) + f(ay_1 + by_2 + y_1 - y_2)\right]$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: "Matematyka Fizyka", z. 15 (1970) s. 147-160.

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРОГО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассмотрено функциональное уравнение

$$f(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y))), \quad f(\Theta) = 0,$$

с котором при исходных H_1, H_2 доказываются три теоремы, связанные с существованием и структурой решений.

ON THE SOLUTIONS OF A CERTAIN FUNCTIONAL EXTREMAL EQUATION

Summary

The paper presents consideration of the functional equation

$$f(x) = \sup_{y \in S(x)} H(x,y,f(T(x,y))), \quad f(\Theta) = 0.$$

With assumptions H_1, H_2 there were proved the three theorems concerning the existence and structure of the solutions.