ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JÓZEF JOACHIM TELEGA

DYWERGENCJA ILOCZYNOWEJ GĘSTOŚCI TENSOROWEJ

Streszczenie. W pracy podano aksjomatyczną definicję dywergencji iloczynowej gęstości tensorowej o wadze (-p,-q). Sformułowano również twierdzenie, z którego wynika postać tej dywergencji.

1. Wstęp

Z ideą obiektów iloczynowych spotykamy się, po raz pierwszy jak się wydaje, w pracy MICHAL'a [10]. Ściśle rzecz biorąc, w myśl terminologii zaproponowanej w [16], były to tensory wielopunktowe, czyli obiekty geometryczne określone na iloczynie kartezjańskim danej rozmaitości skończoną liczbę razy po kartezjańsku przez siebie mnożonej. Jeśli rozpatrujemy obiekty na iloczynie kartezjańskim rozmaitości przez siebie, wówczas obiekty takie nazywamy obiektami podwójnymi [16] por. [1, 2, 3, 12, 13, 14, 15-20].

Ścisłą definicję obiektów iloczynowych, opartą na teorii obiektów geometrycznych, zaproponował KUCHARZEWSKI [4] (por. [1, 3, 7, 11, 14]. Obiekty te są określone na iloczynie kartezjańskim dwu rozmaitości: n-wymiarowej M^n i $\bar{n}$-wymiarowej $M^{\bar{n}}$. W pracy [4] podana również została definicja tzw. obiektów rozdwojonych (łącznikowych), z którymi mamy do czynienia w przypadku gdy jedna rozmaitość jest podzbiorem drugiej (np. w geometrii przestrzeni zanurzonych).

Konstrukcja liniowych, jednorodnych obiektów klasy pierwszej: iloczynowych, podwójnych i rozdwojonych jest taka sama [4, 16]. Prawa transformacji tych trzech rodzajów obiektów są takie same. Korzystając z tych analogii wystarczy rozważań tylko obiekty iloczynowe, a otrzymane rezultaty można przenieść na obiekty podwójne i rozdwojone, oczywiście odpowiednio wyniki interpretując.

W pracy [18] podano aksjomatyczną definicję pochodnej kowariantnej tzw. $(H,\bar{H})$-tensorów iloczynowych, będących jednorodnymi obiektami iloczynowymi klasy pierwszej. Podano tam również postać tej pochodnej, zaś w pracy [17] rozważono pewne przypadki szczególne. Aksjomatyka podana w [18] stanowi uogólnienie prac KUCHARZEWSKIEGO [5, 6].

Problemy różniczkowania tensorów podwójnych zostały również omówione w pracach [1, 13], ale przeprowadzone tam rozważania nie mają charakteru ogólnego.

Celem niniejszej pracy jest rozważenie problemu dywergencji tensorowej gęstości iloczynowej, tzn. iloczynowego obiektu geometrycznego klasy pierwszej o prawie transformacji

$$t^{i'\alpha'} = \varphi(J)\psi(\bar{J})A^{i'}_{i}B^{\alpha'}_{\alpha}t^{i\alpha}. \tag{2.1}$$

Objaśnienia do powyższego wzoru podane zostały w punkcie drugim naszej pracy.

W pracach [8, 9] przedstawiono aksjomatyczne podejście do zagadnienia dywergencji dowolnej gęstości wektorowej o wadze -p. Jednakże rozważono tylko gęstości wektorowe "klasyczne", tzn. określone w punkcie danej rozmaitości.

Naszym celem będzie uogólnienie tej aksjomatyki na przypadek iloczynowej gęstości tensorowej (2.1) o wadze (-p,-q).

Dla jasności dalszych wywodów podamy w punkcie drugim pewne wiadomości o obiektach iloczynowych.

W punkcie trzecim podamy aksjomatyczną definicję dywergencji iloczynowej gęstości tensorowej (2.1). Udowodnimy również twierdzenie, które określa kształt tak zdefiniowanej dywergencji.

2. Pewne wiadomości o obiektach iloczynowych

Niech dane będą dwie rozmaitości: n-wymiarowa M^n i $\bar{n}$-wymiarowa $M^{\bar{n}}$. Przez x^i, y^α, $i = 1,\dots,n$, $\alpha = 1,\dots,\bar{n}$ oznaczać będziemy współrzędne punktów odpowiednio $x \in M^n$, $y \in M^{\bar{n}}$. Oczywiście są to współrzędne w pewnych układach współrzędnych. Współrzędne tych punktów w dowolnych innych, dopuszczalnych układach współrzędnych oznaczać będziemy przez $x^{i'}$, $y^{\alpha'}$.

Zakładamy, iż wskaźniki łacińskie przebiegają od $1,\dots,n$, natomiast greckie $-1,\dots,\bar{n}$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad A^{i'}_{jk} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j}, \quad J = \det\|A^{i'}_i\|,$$

$$B^{\alpha'}_\alpha = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}, \quad B^{\alpha'}_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 y^{\alpha'}}{\partial y^\gamma \partial y^\beta}, \quad \bar{J} = \det\|B^{\alpha'}_\alpha\|.$$

Geometryczny obiekt iloczynowy t nazywamy iloczynową gęstością tensorową jeśli jego prawo transformacji ma postać [4, 16]

$$t^{i'\alpha'} = \varphi(J)\psi(\bar{J})A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha}, \tag{2.1}$$

przy czym

$$\varphi(J) = |J|^p \quad \text{lub} \quad \varphi(J) = (\operatorname{sgn} J)|J|^p,$$

$$\psi(\bar{J}) = |\bar{J}|^q \quad \text{lub} \quad \psi(\bar{J}) = (\operatorname{sgn} \bar{J})|\bar{J}|^q.$$

Mamy więc w tym przypadku zasadniczo cztery typy obiektów

$$t^{i'\alpha'} = |J|^p|\bar{J}|^q A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha}, \tag{2.2}$$

$$t^{i'\alpha'} = |J|^p(\operatorname{sgn} \bar{J})|\bar{J}|^q A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha}, \tag{2.3}$$

$$t^{i'\alpha'} = (\operatorname{sgn} \bar{J})|J|^p|\bar{J}|^q A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha}, \tag{2.4}$$

$$t^{i'\alpha'} = (\operatorname{sgn} J)\,|J|^p(\operatorname{sgn}|\bar{J}|)|\bar{J}|^q\, A^{i'}_{i}B^{\alpha'}_{\alpha}\, t^{i\alpha}. \tag{2.5}$$

Iloczynowe obiekty geometryczne o prawach transformacji (2.2) - (2.5) nazywamy odpowiednio: $(W,\bar{W})$, $(W,\bar{G})$, $(G,\bar{W})$, $(G,\bar{G})$ iloczynową gęstością tensorową o wadze $(-p,-q)$.

Geometryczny obiekt iloczynowy σ nazywamy skalarem iloczynowym, jeśli jego prawo transformacji ma postać [16, 18]

$$\sigma'(x^{i'},y^{\alpha'}) = \sigma(x^{i},y^{\alpha}). \tag{2.6}$$

Przyjmijmy jeszcze następujące oznaczenia:

$$\sigma_{,k} = \frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial x^k},$$

$$\sigma_{,\alpha} = \frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial y^{\alpha}},$$

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}.$$

Przez $F_{i\alpha}$ oznaczać będziemy pochodną kowariantną skalara iloczynowego (2.6). Pochodna ta ma postać [18]

$$F_{i\alpha} = C_{\alpha}\sigma_{,i} + D_i\sigma_{,\alpha}. \tag{2.7}$$

W ogólności obiekty C_{α}, D_i zależą od x oraz y, tzn. $C_{\alpha} = C_{\alpha}(x,y)$ $D_i = D_i(x,y)$. Prawa transformacji tych obiektów iloczynowych są następujące

$$C_{\alpha'}(x^{k'},y^{\beta'}) = B^{\alpha}_{\alpha'}(x^{k},y^{\beta}), \tag{2.8}$$

$$D_{i'}(x^{k'},y^{\alpha'}) = A^{i}_{i'}D_i(x^{k},y^{\alpha}). \tag{2.9}$$

3. Dywergencja iloczynowej gęstości tensorowej

Dywergencję iloczynowej gęstości tensorowej (2.1) określimy uogólniając aksjomatykę podaną w pracach [8, 9].

DEFINICJA 3.1. Dywergencją iloczynowej gęstości tensorowej (2.1) nazywamy każdą funkcję f, spełniającą następujące postulaty:

1° f zależy tylko od $t^{i\alpha}$, $\partial_j t^{i\alpha}$, $\partial_\beta t^{i\alpha}$, tzn.

$$f = f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}),$$

2° dla dwu dowolnych iloczynowych gęstości tensorowych $t_1^{i\alpha}, t_2^{i\alpha}$ spełniony jest warunek addytywności

$$f(t_1^{i\alpha} + t_2^{i\alpha}, \partial_j(t_1^{i\alpha} + t_2^{i\alpha}), \partial_\beta(t_1^{i\alpha} + t_2^{i\alpha})) = f(t_1^{i\alpha}, \partial_j t_1^{i\alpha}, \partial_\beta t_1^{i\alpha}) + $$

$$+ f(t_2^{i\alpha}, \partial_\beta t_2^{i\alpha}, \partial_\beta t_2^{i\alpha}),$$

3° jeśli σ jest skalarem iloczynowym to spełniona jest reguła Leibniza:

$$f(\sigma t^{i\alpha}, \partial_j(\sigma t^{i\alpha}), \partial_\beta(\sigma t^{i\alpha})) = \sigma f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}) + F_{i\alpha} t^{i\alpha},$$

4° f jest gęstością iloczynową o wadze (-p,-q), czyli

$$f(t^{i'\alpha'}, \partial_{j'} t^{i'\alpha'}, \partial_{\beta'} t^{i'\alpha'}) = (J)\psi(\bar{J}) f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}).$$

Powstaje teraz problem istnienia i jednoznaczności dywergencji zdefiniowanej postulatami 1°-4°. Odpowiedzi na te pytania udziela

TWIERDZENIE 3.1. Każda dywergencja iloczynowej gęstości tensorowej (2.1), spełniająca postulaty 1°-4°, ma postać

$$f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}) = K_{i\alpha} t^{i\alpha} + C_\alpha \partial_i t^{i\alpha} + D_i \partial_\alpha t^{i\alpha}, \qquad (3.1)$$

gdzie stałe C_α, D_i są takie jak we wzorach (2.7) - (2.9), natomiast stałe $K_{i\alpha}$ nie zależą od $t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}$ i mają następujące prawo transformacji

$$K_{i'\alpha'} = A^i_{i'} B^\alpha_{\alpha'} (K_{i\alpha} - C_\alpha(p+1)(\ln|J|)_{,i} - D_i(q+1)(\ln|\bar{J}|)_{,\alpha}). \tag{3.2}$$

Dowód. Połóżmy $\sigma = \mathrm{const}$. Wówczas z postulatu 3° otrzymujemy

$$f(\sigma t^{i\alpha}, \partial_j(\sigma t^{i\alpha}), \partial_\beta(\sigma t^{i\alpha})) = \sigma f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}). \tag{3.3}$$

Związek (3.3) oznacza jednorodność. Stąd i z postulatu 1° wnioskujemy, iż funkcja f jest liniowa. Z liniowości otrzymujemy

$$f(t^{i\alpha}, \partial_j t^{i\alpha}, \partial_\beta t^{i\alpha}) = K_{i\alpha} t^{i\alpha} + L^j_{i\alpha} \partial_j t^{i\alpha} + M^\beta_{i\alpha} \partial_\beta t^{i\alpha}, \tag{3.4}$$

gdzie $L^j_{i\alpha}$, $M^\beta_{i\alpha}$ oznaczają stałe, niezależne od $t^{i\alpha}$, $\partial_j t^{i\alpha}$, $\partial_\beta t^{i\alpha}$.

Uwzględniając (2.7) i (3.4) w 3° mamy

$$K_{i\alpha}(\sigma t^{i\alpha}) + L^j_{i\alpha}\partial_j(\sigma t^{i\alpha}) + M^\beta_{i\alpha}\partial_\beta(\sigma t^{i\alpha}) =$$

$$= \sigma(K_{i\alpha} t^{i\alpha} + L^j_{i\alpha}\partial_j t^{i\alpha} + M^\beta_{i\alpha}\partial_\beta t^{i\alpha}) + C_\alpha \sigma_{,i} t^{i\alpha} + D_i \sigma_{,\alpha} t^{i\alpha}.$$

Stąd, po prostych przekształceniach, otrzymujemy

$$L^j_{i\alpha} = C_\alpha \delta^j_i, \tag{3.5}$$

$$M^\beta_{i\alpha} = D_i \delta^\beta_\alpha. \tag{3.6}$$

Wstawiając (3.5) i (3.6) do (3.4) otrzymujemy następujący wzór na dywergencję iloczynowej gęstości tensorowej

$$f(t^{i\alpha},\ \partial_j t^{i\alpha},\ \partial_\beta t^{i\alpha}) = K_{i\alpha} t^{i\alpha} + C_\alpha \partial_i t^{i\alpha} + D_i \partial_\alpha t^{i\alpha}. \tag{3.7}$$

Ostatnia zależność dowodzi pierwszej części twierdzenia 3.1, czyli wzoru (3.1).

Przejdźmy do dowodu części drugiej, czyli wyprowadzenia wzoru (3.2). Z postulatu 4^0 i wzoru (3.7) otrzymujemy

$$K_{i'\alpha'} t^{i'\alpha'} + C_{\alpha'} \partial_{i'} t^{i'\alpha'} + D_{i'} \partial_{\alpha'} t^{i'\alpha'} =$$

$$= \varphi(J)\psi(\bar{J})(K_{i\alpha} t^{i\alpha} + C_\alpha \partial_i t^{i\alpha} + D_i \partial_\alpha t^{i\alpha}). \tag{3.8}$$

Łatwo wykazać, iż spełnione są związki (por. [3, 14])

$$\partial_{k'} t^{i'\alpha'} = \varphi(J)\psi(\bar{J})\Big[p(\ln|J|)_{,k'} A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha} +$$

$$+ A^k_{k'} A^{i'}_{ik} B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha} + A^{i'}_i A^k_{k'} B^{\alpha'}_\alpha \partial_k t^{i\alpha}\Big] \tag{3.9}$$

$$\partial_{\beta'} t^{i'\alpha'} = \varphi(J)\psi(\bar{J})\Big[q(\ln|\bar{J}|)_{,\beta'} B^{\alpha'}_\alpha A^{i'}_i t^{i\alpha} +$$

$$+ B^\beta_{\beta'} B^{\alpha'}_{\alpha\beta} A^{i'}_i t^{i\alpha} + A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha B^\beta_{\beta'} \partial_\beta t^{i\alpha}\Big] \tag{3.10}$$

$$A^k_{i'} A^{i'}_{ik} = (\ln|J|)_{,i},\quad B^\beta_{\alpha'} B^{\alpha'}_{\alpha\beta} = (\ln|\bar{J}|)_{,\alpha}. \tag{3.11}$$

Uwzględniając zależności (3.9) - (3.11) we wzorze (3.8) dostajemy

$$\varphi(J)\psi(\bar{J})\Big[K_{i'\alpha'} A^{i'}_i B^{\alpha'}_\alpha t^{i\alpha} + C_\alpha (p+1)(\ln|J|)_{,i} t^{i\alpha}) +$$

$$+ D_i((q+1)(\ln|\bar{J}|)_{,\alpha} t^{i\alpha} + \partial_\alpha t^{i\alpha})\Big] = \varphi(J)\psi(\bar{J})(K_{i\alpha} t^{i\alpha} + C_\alpha \partial_i t^{i\alpha} + D_i \partial_\alpha t^{i\alpha}).$$

Ze względu na dowolność iloczynowej gęstości tensorowej $t^{i\alpha}$ otrzymujemy stąd po prostych przekształceniach

$$K_{i'\alpha'} = A^{i}_{i'}B^{\alpha}_{\alpha'}\left[K_{i\alpha} - C_{\alpha}(p+1)(\ln|J|)_{,i} - D_{i}(q+1)(\ln|\bar{J}|)_{,\alpha}\right]. \qquad (3.12)$$

W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

WNIOSEK 3.1. Z (3.12) wynika, iż w ogólności geometryczny obiekt iloczynowy $K_{i\alpha}$ nie jest tensorem iloczynowym. Gdy natomiast $p=q=-1$, to

$$K_{i'\alpha'} = A^{i}_{i'}B^{\alpha}_{\alpha'}K_{i\alpha}. \qquad (3.13)$$

Dla dwu innych przypadków szczególnych

1) $p = -1, \quad q \neq -1$
2) $p \neq -1, \quad q = -1$

z (3.12) otrzymujemy odpowiednio

$$K_{i'\alpha'} = A^{i}_{i'}B^{\alpha}_{\alpha'}\left[K_{i\alpha} - D_{i}(q+1)(\ln|\bar{J}|)_{,\alpha}\right] \qquad (3.14)$$

$$K_{i'\alpha'} = A^{i}_{i'}B^{\alpha}_{\alpha'}\left[K_{i\alpha} - C_{\alpha}(p+1)(\ln|J|)_{,i}\right]. \qquad (3.15)$$

Jeśli $t^{i\alpha}$ jest tensorem iloczynowym, to $p = q = 0$. Wówczas wzór (3.12) przechodzi w

$$K_{i'\alpha'} = A^{i}_{i'}B^{\alpha}_{\alpha'}\left[K_{i\alpha} - C_{\alpha}(\ln|J|)_{,i} - D_{i}(\ln|\bar{J}|)_{,\alpha}\right]. \qquad (3.16)$$

Na zakończenie chciałbym podziękować Drowi M. Lorensowi za możliwość skorzystania z maszynopisów prac [8, 9].

LITERATURA

1. Neda Bokan: Some properties of fundamental bipoint tensor. Математички Весник, 8(23), (1971), 367-371.
2. Ericksen J.L.: Double tensor fields. Encyclopedia of Physics, III 1, Springer-Verlag 1960.
3. Gołąb S.: Rachunek tensorowy, Warszawa 1966.
4. Kucharzewski M.: Objekte des Kartesischen Produktes zweier Mannigfaltigkeiten Ann. Pol. Math., 20 (1968), 215-221.
5. Kucharzewski M.: Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten, Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat., 1 (1969), 61-70.
6. Kucharzewski M.: Kovariante Ableitung von Tensordichten. Ann. Pol. Math., 24 (1970), 45-54.
7. Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych, Katowice 1969.
8. Kurcius E., Lorens M.: Some remarks on divergence. Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat. (w druku).
9. Lorens M.: Extended divergence of the contravariant vector density. Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat. (w druku).
10. Michal A.D.: Functionals of R-dimensional manifolds admitting continuous groups of point transformations. Trans. Am. Math. Soc., 29 (1927), 612-644.
11. Michal A.D.: Matrix and tensor calculus with applications to mechanics, elasticity and aeronautics. N.Y., John Wiley and Sons, 1957.
12. Schimming R.: Zur Gültigkeit des Huygenschen Prinzips bei einer speziellen Metrik, ZAMM, No 3, 51 (1971), 201-208.
13. Scholten W.B., Gaggioli R.A.: Differentiation of tensor fields. SIAM Review, No 2, 14 (1972), 271-277.
14. Schouten J.A.: Ricci-Calculus, Springer-Verlag 1954.
15. Telega J.J.: Przestrzenie translatorowe. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, z. 16, "Matematyka-Fizyka", (1971), 3-13.
16. Telega J.J.: Pewne typy liniowych, jednorodnych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych), ibid., 15-30.
17. Telega J.J.: Covariant derivative of product tensors. Ann. Pol. Math., 27 (1972), 67-72.
18. Telega J.J.: On covariant derivative of product scalars and $(H,\bar{H})$-product tensors. Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat., 3, (1973), 87-96.

19. Telega J.J.: On some generalizations of shifter spaces. Dem. Math. (w druku).

20. Telega J.J.: Shifter spaces and spaces with telleparallelism. Shifter in Riemannian spaces. Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat. (w druku).

ДИВЕРГЕНЦИЯ ТЕНЗОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Р е з ю м е

В работе дано аксиоматическое определение дивергенции тензорной плотности произведения многообразий. Сформулирована также теорема, которая определяет вид этой дивергенции.

DIVERGENCE OF PRODUCT TENSOR DENSITY

S u m m a r y

In the paper the axiomatic definition of the divergence of product tensor density of valence (-p,-q) has been given. Besides that the theorem has been formulated, which determines the form of this divergence.