ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

BRUNON SZOCIŃSKI

ILOCZYN I PSEUDOILOCZYN SKALARNY W GEOMETRII KLEINA

Streszczenie. Praca ta zawiera definicję oraz podstawowe własności pseudoiloczynu skalarnego w pewnych podgeometriach geometrii afinicznej.

Wstęp

Zgodnie z ogólną definicją geometrii Kleina podaną w pracy [1], n-wymiarową geometrią opartą na grupie G_o będącej podgrupą ogólnej grupy liniowej $GL(n,R)$ nazywamy trójkę

$$(R^n, G_oA, f), \tag{1}$$

gdzie zbiór

$$G_oA = \left\{(A,a) : A \in G_o,\ a \in R^n\right\}$$

jest grupą, w której działanie wyraża się wzorem

$$(B,b) \circ (A,a) = (BA,\ Ba + b),$$

zaś f określone jest związkiem

$$f(x,g) = Ax + a$$

dla dowolnych $x \in R^n$ oraz $g = (A,a) \in G_oA$. W szczególności, gdy $G_o = GL(n,R)$ trójka (1) jest geometrią afiniczną. Geometrię opartą

na podgrupie G_o ogólnej grupy liniowej $GL(n,R)$ nazywamy podgeometrią geometrii afinicznej.

Abstrakcyjny wektor kontrawariantny geometrii (1), który określamy jako obiekt geometryczny (R^n, G_oA, F) o prawie transformacji

$$F(u,g) = Au, \quad u \in R^n, \quad g = (A,a), \quad A \in G_o$$

i o włóknie R^n, tworzy n-wymiarową przestrzeń wektorową V^n nad ciałem liczb rzeczywistych R([1], str. 272). Iloczyn skalarny (u,v) geometrii (1) jest komitantą skalarną ([1], str. 274) pary wektorów kontrawariantnych u oraz v spełniającą warunki:

I $$(u,v) = (v,u)$$

II $$(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha(u_1,v) + \beta(u_2,v), \quad \alpha, \beta \in R$$

III $$(u,u) \geqslant 0, \quad (u,u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

Ponieważ klasa geometrii, w których określony jest iloczyn skalarny jest stosunkowo wąska, uogólnimy pojęcie iloczynu skalarnego w następujący sposób:

<u>Definicja</u>. Pseudoiloczynem skalarnym geometrii (1) dwóch wektorów kontrawariantnych $u,v \in V^n$ nazywamy komitantę skalarną tej pary wektorów (tzn. funkcję

$$(u,v) : R^n \times R^n \longrightarrow R$$

taką, że związek

$$(u,v) = (Au, Av) \tag{2}$$

zachodzi dla dowolnej macierzy $A \in G_o$) spełniającą aksjomaty I oraz II.

W pracy tej zostały podane pewne ogólne własności pseudoiloczynu skalarnego (§§ 1, 2), a także ich zastosowania w geometrii podwójnie pseudostochastycznej (§§ 3, 4).

§ 1. Na wstępie rozpatrzmy następujący obiekt geometryczny abstrakcyjny geometrii centroafinicznej

$$(M, GL(n,R), F), \tag{1.1}$$

którego włóknem M jest zbiór macierzy ω symetrycznych n-tego stopnia o elementach rzeczywistych, zaś F określone jest związkiem

$$F(\omega, A) = A^T \omega A \tag{1.2}$$

dla dowolnych $\omega \in M$ oraz $A \in GL(n,R)$. Weźmy pod uwagę dowolny, ustalony punkt ω_0 włókna M oraz podgrupę stacjonarną (stabilności)

$$G(\omega_0, \omega) = \left\{A: \omega_0 = A^T \omega_0 A, \quad A \in GL(n,R)\right\} \tag{1.3}$$

obiektu ω w punkcie ω_0 (por. [2]). Posługując się pojęciem podgrupy stacjonarnej (1.3) podamy pewien warunek konieczny i dostateczny istnienia pseudoiloczynu skalarnego geometrii (1).

Oznaczmy przez

$$h_{ij} = (e_i, e_j)$$

pseudoiloczyny skalarne wektorów bazy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ przestrzeni wektorowej V^n. Wtedy na mocy aksjomatów I i II pseudoiloczyn skalarny dwóch dowolnych wektorów

$$u = u^i e_i \quad \text{oraz} \quad v = v^j e_j$$

tej przestrzeni wyraża się wzorem

$$(u,v) = h_{ij}\, u^i\, v^j, \quad h_{ij} = h_{ji},$$

czyli

$$(u,v) = u^T Hv, \tag{1.4}$$

gdzie $H = \left[h_{ij}\right]$ jest macierzą symetryczną. W myśl związku (2) otrzymujemy

$$u^T Hv = u^T A^T HAv.$$

Stąd i z dowolności wektorów u,v wynika, że

$$H = A^T HA, \tag{1.5}$$

a zatem funkcja (1.4) jest pseudoiloczynem skalarnym geometrii (1) dwóch wektorów $u,v \in V^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy symetryczna macierz H spełnia równanie (1.5) dla każdej macierzy $A \in G_o$.

Posługując się pojęciem podgrupy stacjonarnej (1.3) stwierdzamy więc że zachodzi następujące

<u>Twierdzenie 1.1</u>. Pseudoiloczyn skalarny geometrii (1) istnieje i wyraża się wzorem (1.4) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$G_o \subset G(H,\omega).$$

§ 2. W celu zapoznania się z pewnymi własnościami pseudoiloczynu skalarnego wyznaczmy włókna tranzytywne obiektu geometrycznego (1.1). Aby tego dokonać zauważmy przede wszystkim, że przy nieosobliwym przekształceniu zmiennych symetrycznej formy dwuliniowej macierze formy wyjściowej i przekształconej są związane równością postaci (1.2), a zatem ze znanego z algebry twierdzenia o sprowadzaniu symetrycznej formy dwuliniowej do postaci kanonicznej wynika natychmiast

Twierdzenie 2.1. Obiekt geometryczny (1.1) posiada $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ włókien tranzytywnych. Włókna te są wyznaczone przez elementy postaci

$$\omega_o = \left\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\ \gamma_1,\ldots,\gamma_r\right\},\quad p+q+r = n, \tag{2.1}$$

gdzie ω_o oznacza macierz diagonalną, której elementami są kolejno

$$\alpha_i = 1 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots p,$$

$$\beta_i = -1 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots q,$$

$$\gamma_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots r,$$

przy czym liczby p, q oraz r mogą być równe zeru.

Dowód. Istotnie, na mocy wspomnianego twierdzenia z algebry, macierz dowolnej symetrycznej formy dwuliniowej jest równoważna (kongruentna) jednej z macierzy diagonalnych (2.1), więc dowolny element $\omega \in M$ należy do dokładnie jednego z włókien tranzytywnych wyznaczonych przez macierze diagonalne (2.1). Liczbę włókien tranzytywnych można łatwo wyznaczyć posługując się wzorem na ilość kombinacji z powtórzeniami z trzech elementów (liczby 1, -1, 0) po n, a więc

$$N = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

c.n.d.

Z teorii obiektów geometrycznych wiadomo, że podgrupy stacjonarne w punktach tego samego włókna tranzytywnego są sprzężone (por. [2]). Stąd i twierdzenia 2.1 wynika, że zachodzi

Twierdzenie 2.2. Jeżeli ω_o oraz H są elementami tego samego włókna tranzytywnego obiektu (1.1), tzn. jeśli istnieje macierz $C \in GL(n,R)$ taka, że

$$\omega_o = C^T H C,$$

to grupy stacjonarne $G(\omega_0,\omega)$ oraz $G(H,\omega)$ są sprzężone, tzn. zachodzi równość

$$G(\omega_0,\omega) = C^{-1}\, G(H,\omega)C.$$

§ 3. Przy pomocy twierdzenia 1.1 można wyznaczać pseudoiloczyn skalarny geometrii (1) opartej na danej grupie G_0.

Dla przykładu rozpatrzmy grupę G_1 macierzy permutacji P_{ij} powstających z macierzy jednostkowej E przez zamianę miejscami i-tego oraz j-tego wiersza. Aby wyznaczyć pseudoiloczyn skalarny (1.4) geometrii opartej na tej grupie, wystarczy wyznaczyć taką macierz H, która spełnia równanie (1.5), czyli równanie

$$H\,A^{-1} = A^T H \tag{3.1}$$

dla dowolnej macierzy $A \in G_1$. Uwzględniając następujące własności macierzy permutacji

$$P_{ij} = P_{ij}^T = P_{ij}^{-1}$$

łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem równania (3.1) jest macierz $H = [h_{ij}]$, której elementy określone są związkami

$$h_{ij} = \begin{cases} \lambda \text{ dla } i = j \\ \mu \text{ dla } i \neq j \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in R. \tag{3.2}$$

Zachodzi więc następujące

<u>Twierdzenie 3.1</u>. W geometrii (1) opartej na grupie G_1 macierzy permutacji istnieje pseudoiloczyn skalarny postaci (1.4), przy czym elementy macierzy H są określone związkami (3.2).

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy natychmiast

<u>Wniosek</u>. Jeżeli w geometrii (1) opartej na dowolnej grupie G_0, której podgrupą jest G_1, istnieje pseudoiloczyn skalarny (1.4), to elementy macierzy H czynią zadość związkowi (3.2).

Postać pseudoiloczynu skalarnego geometrii podwójnie pseudostochastycznej (por. [4]), tzn. geometrii opartej na grupie DS (n,R) macierzy podwójnie pseudostochastycznych $A = [a_{ik}]$, $i, k = 1,2,\ldots,n$, $a_{ik} \in R$, określonych związkami

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1, \quad i,k = 1,2,\ldots,n,$$

podaje następujące

Twierdzenie 3.2. Pseudoiloczyn skalarny n-wymiarowej geometrii podwójnie pseudostochastycznej dwóch wektorów $u,v \in V^n$ wyraża się wzorem

$$(u,v) = C \cdot \sum_{i=1}^{n} u^i \cdot \sum_{j=1}^{n} v^j, \tag{3.3}$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą, zaś $n \geqslant 2$.

Dowód. Szukana macierz H występująca w związku (1.4) musi spełniać równanie (3.1) dla dowolnej macierzy $A \in DS(n,R)$, a więc także dla rozpatrywanych w pracy [4] macierzy podwójnie pseudostochastycznych elementarnych

$$F_{ij}(\alpha) = [a_{kl}], \quad i \neq j, \quad \alpha \neq 0,$$

których elementy a_{kl}, $k,l = 1,2,\ldots,n$, $n \geqslant 2$ określone są związkami

$$a_{ii} = a_{jj} = \frac{1+\alpha}{2}, \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{1-\alpha}{2}$$

$a_{kl} = \delta_{kl}$ w pozostałych przypadkach.

Ponieważ

$$F_{ij}^{-1}(\alpha) = F_{ij}(\tfrac{1}{\alpha})$$

oraz

$$F_{ij}(\alpha) = F_{ij}^{T}(\alpha),$$

więc równanie (3.1) przyjmuje postać

$$H\, F_{ij}(\tfrac{1}{\alpha}) = F_{ij}(\alpha) \cdot H.$$

Powyższe równości zachodzą, gdy

$$\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{2} h_{ii} + \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{2} h_{ij} = \frac{1+\alpha}{2} h_{ii} + \frac{1-\alpha}{2} h_{ji} \tag{3.4}$$

dla $i,j = 1,2,\ldots,n$, $\alpha \neq 0$. Po przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń równania (3.4) przyjmują postać

$$(\alpha^2 - 1)(h_{ii} - h_{ij}) = 0.$$

Stąd i dowolności α otrzymujemy

$$h_{ii} = h_{ij} = C \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

co w myśl (1.4) daje (3.3). Łatwo sprawdzić, że otrzymana funkcja (3.3) jest komitantą skalarną pary wektorów i spełnia postulaty I oraz II pseudoiloczynu skalarnego.

§ 4. Przypuśćmy, że dany jest pseudoiloczyn skalarny (1.4) pewnych geometrii postaci (1). Twierdzenie 1.1 pozwala wyznaczyć grupy G_o, na których oparte są te geometrie. W tym celu wystarczy znaleźć podgrupę stacjonarną $G(H,\omega)$ obiektu (1.1) lub co na jedno wychodzi, wystarczy w oparciu o równanie (1.5) określić postać macierzy A czyniących zadość temu równaniu, przy danej macierzy H.

Tym sposobem wyznaczmy geometrie, w których jest określony pseudoiloczyn skalarny (3.3). Łatwo sprawdzić, że jeśli w równaniu (1.5) przyjmiemy

$$H_o = \left[h_{ij}\right], \tag{4.1}$$

gdzie $h_{ij} = C \neq 0$ dla $i,j = 1,2,\ldots,n$, to suma elementów każdej kolumny macierzy A musi wynosić 1 lub suma elementów każdej kolumny tej macierzy musi wynosić -1. Zbiór takich macierzy nieosobliwych tworzy podgrupę stacjonarną $G(H_o,\omega)$. Rozpatrywana w poprzednim paragrafie grupa podwójnie pseudostochastyczna $DS(n,R)$ jest oczywiście podgrupą grupy $G(H_o,\omega)$.

Wyznaczmy jeszcze podgrupę stacjonarną $G(\omega_o,\omega)$, gdzie ω_o jest następującą macierzą diagonalną

$$\omega_o = \left\{\mathrm{Sgn}\ C,0,\ldots,0\right\}. \tag{4.2}$$

W tym celu rozpatrzmy równanie

$$\omega_o = A^T \omega_o A, \quad A \in GL(n,R). \tag{4.3}$$

Elementami macierzy $A^T \omega_o A$ są liczby b_{ik} postaci

$$b_{ik} = a_{1i}\, a_{1k},$$

a zatem na mocy (4.3) mamy

$$a_{11}^2 = 1, \quad a_{1k} = 0 \quad \text{dla} \quad k > 1,$$
$$a_{ik} - \text{dowolne dla} \quad i \neq 1, \tag{4.4}$$

co oznacza, że grupa $G(\omega_o,\omega)$ jest zbiorem nieosobliwych macierzy $[a_{ik}]$ o elementach określonych związkami (4.4).

Oznaczmy przez

$$A_o = \frac{\operatorname{Sgn} C}{\sqrt{|C|}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Bezpośrednim rachunkiem łatwo stwierdzić, że

$$\omega_o = A_o^T H_o A_o.$$

Równość ta oznacza, że ω_o oraz H_o są elementami tego samego włókna tranzytywnego obiektu (1.1), a zatem w myśl twierdzenia 2.2 zachodzi następujące

<u>Twierdzenie 4.1</u>. Podgrupy stacjonarne $G(H_o,\omega)$ oraz $G(\omega_o,\omega)$, gdzie macierze H_o i ω_o są określone odpowiednio związkami (4.1) i (4.2), są sprzężone, tzn. zachodzi równość

$$G(\omega_o,\omega) = A_o^{-1} G(H_o,\omega) A_o,$$

przy czym A_o jest macierzą (4.5).

LITERATURA

1. Jasińska E.J. und Kucharzewski M.: Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

2. Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych, Uniwersytet Śląski, Katowice 1969.

3. Kucharzewski M., Szociński B.: Über eine kanonische Form der regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen, Prace Naukowe U.Śl., Prace Mat. (w druku).

4. Szociński B.: Niezmienniki pary punktów geometrii podwójnie pseudostochastycznej, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. (w druku).

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПСЕВДОПРОИЗВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ КЛЕЙНА

Р е з ю м е

В этой работе даны некоторые свойства скалярного псевдопроизведения в геометрии Клейна. Полученные результаты были применены для определения скалярного псевдопроизведения во вдвайне псевдослучайной геометрии.

SCALAR PRODUCT AND PSEUDOPRODUCT IN KLEINIAN GEOMETRY

S u m m a r y

In this paper have been given some properties of a scalar pseudoproduct in Kleinian geometry. The results, which have been obtained, were applied to determine the scalar pseudoproduct in doubly pseudostochastic geometry.