ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

SZCZEPAN BORKOWSKI
Instytut Matematyki

NIEKTÓRE PROBLEMY WARIACYJNEGO FORMUŁOWANIA ZADAŃ BRZEGOWYCH OŚRODKÓW FIZYCZNIE NIELINIOWYCH
(Komunikat)

Streszczenie. W pracy podano funkcjonały iteracyjne dla problemów brzegowych ośrodka nieliniowego fizycznie; punktem wyjściowym są zasady wariacyjne mechaniki ośrodków nieliniowych, które zostały sformułowane w pracy H. Kauderera.

1. Wstęp

Problematyka nieliniowa fizycznie, czy też geometrycznie lub przy uwzględnieniu obydwu aspektów łącznie, jest przedmiotem dużego zainteresowania badaczy; wynika to z wielu przyczyn, szczegółowe ich omówienie znajduje się w materiałach sesji naukowej jaka odbyła się w Argentynie w 1968 r., por. J.A. BIGNOLI [1], [2], L.M. MACHADO [6]. Istotnym czynnikiem umożliwiającym rozwiązanie złożonych zadań brzegowych wspomnianych teorii są odpowiednio dobrane metody przybliżone; te z kolei - jak wykazały ostatnie badania (metoda elementów skończonych) - najwygodniej jest budować sprowadzając problem brzegowy do równoważnego zadania wariacyjnego (metody wariacyjno-różnicowe). Wiadomo, że taki sposób umożliwia względnie proste zbudowanie równań algebraicznych metody, a także podanie oszacowania (rzędu zbieżności) rozwiązań przybliżonych.

Z prac dotyczących matematycznego ujęcia interesujących nas tutaj problemów możemy wymienić publikację [4], w której autorzy zajmowali się problemami brzegowymi, lecz przy uwzględnieniu tylko drugiego warunku brzegowego (naprężeniowe warunki brzegowe) oraz pracę J.T. ODENA

[7], w której rozpatrzono szereg ogólnych problemów związanych z zastosowaniem metody elementów skończonych do nieliniowych problemów początkowo-brzegowych.

W niniejszym komunikacie zajęto się jednym z aspektów problemu przedstawionego powyżej: zbudowaniem funkcjonałów iteracyjnych dla problemów brzegowych ośrodka Kauderera (nieliniowość fizyczna); jako równania wyjściowe przyjęto zasady wariacyjne mechaniki ośrodków fizycznie nieliniowych, które zostały podane w monografii H. KAUDERERA [5]. Wprawdzie istnieje obecnie ogólniejsza teoria nieliniowa fizycznie, podana przez A. CARDONA [3], lecz w tej chwili trudno mówić o możliwościach jej zastosowań.

2. Zasady wariacyjne

Zasady wariacyjne mechaniki ośrodków fizycznie nieliniowych sprowadzają się, najczęściej, do twierdzeń o minimum energii potencjalnej i minimum sprzężonej energii potencjalnej, por. [5]. Zasady te ujmiemy w cztery poniższe twierdzenia

Twierdzenie 1. Jeżeli: 1) funkcja zwana właściwą energią odkształcenia jest określona równaniem

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = 9K\int_0^{\varepsilon} \varepsilon\Psi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{4G}{3}\int_0^{e} e\chi(e^2)de; \tag{2.1}$$

2) określona jest dopuszczalna rodzina pól przemieszczeń U_i, to z wszystkich elementów tej rodziny jedynie pole statycznie dopuszczalne: $u_i(x) \in U_i$ ekstremalizuje funkcjonał

$$V = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\varepsilon_{ij})dx - \int_{\mathcal{V}} X_i u_i dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{X}_i u_i dx, \tag{2.2}$$

zwany całkowitą energią potencjalną.

Twierdzenie 2. Jeżeli 1) związki konstytutywne opisane będą równaniami

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma}{3K} = \varepsilon\Psi(\varepsilon), \quad \underline{s} = \frac{s}{2G} = e\chi(e^2); \tag{2.3}$$

2) pochodne funkcji $\underline{\sigma}$, $\underline{s}$, kolejno, względem zmiennych ε, e będą dodatnie, to funkcjonał V - rów. (2.2) - realizować będzie na elemencie $u_i(x) \in U_i$ minimum.

Twierdzenie 3. Jeżeli 1) funkcja, zwana energią dopełniającą jest określona równaniem

$$\overset{U}{\Phi}(\sigma_{ij}) = 9K\int_0^{\sigma} \underline{\sigma}\,(\underline{\chi})d\underline{\sigma} + \frac{4G}{3}\int_0^{s} \underline{s}\,\eta(\underline{s}^2)d\underline{s}; \tag{2.4}$$

2) określona jest dopuszczalna rodzina pól naprężeń Σ_{ij}, to pole statycznie dopuszczalne $\sigma_{ij} \in \Sigma_{ij}$ ekstremalizuje funkcjonał

$$\overset{*}{V} = \int_{\tilde{V}} \overset{U}{\Phi}(\sigma_{ij})dx - \int_{\partial\tilde{V}} \tilde{X}_i u_i dx, \tag{2.5}$$

zwany sprzężoną, całkowitą energią potencjalną lub krótko: energią całkowitą uzupełniającą.

Twierdzenie 4. Jeżeli: 1) związki konstytutywne opisane będą równaniami

$$\varepsilon = \underline{\sigma}\chi(\underline{\sigma}), \quad e = \underline{s}\eta(\underline{s}^2); \tag{2.6}$$

2) pochodne funkcji ε, e, kolejno, względem zmiennych $\underline{\sigma}$, $\underline{s}$ będą dodatnie, to funkcjonał $\overset{*}{V}$ - rów. (2.5) - realizować będzie na elemencie statycznie dopuszczalnym $\sigma_{ij} \in \Sigma_{ij}$ minimum.

Rozważania przeprowadzone w pracy Kauderera, w tradycyjnym zapisie, zestawiono tutaj w zapisie wskaźnikowym oraz ujęto w wyżej przytoczone cztery twierdzenia.

Przez σ, (ε) oznaczono średnią wartość naprężeń normalnych, (wydłużeń względnych)

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \tag{2.7}$$

natomiast symbolami s, (e) oznaczono intensywność dewiatora naprężeń,(odkształceń)

$$s^2 = \frac{3}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3\sigma^2) =$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2),$$

$$e^2 = \frac{3}{2}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - 3\varepsilon^2) = \tag{2.8}$$

$$= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_x\varepsilon_z + \frac{3}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2).$$

Funkcje $X_i(x)$, $\tilde{X}_i(x)$, $\hat{X}_i(x)$ oznaczają, kolejno siły masowe $(x \in \mathcal{V})$, siły powierzchniowe określone na zbiorze zadanych przemieszczeń brzegowych $(x \in \partial\tilde{\mathcal{V}})$, siły powierzchniowe określone na zbiorze zadanych naprężeń $(x \in \partial\tilde{\tilde{\mathcal{V}}})$; σ_{ij}, (ε_{ij}) oznacza tensor naprężenia (odkształcenia). W całej pracy obowiązuje konwencja sumacyjna po powtarzających się dolnych, prawych indeksach alfabetu łacińskiego. Funkcje $\psi(\varepsilon)$, $\chi(e^2)$ nazywamy, kolejno funkcją wydłużenia względnego i funkcją odkształcenia postaciowego, są one wyznaczane doświadczalnie; najczęściej przyjmuje się ich postać wielomianową

$$\psi(\varepsilon) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_{2\alpha}\varepsilon^{2\alpha}, \quad \chi(e^2) = 1 + \sum_{\beta=1}^{M} \chi_{2\beta}e^{2\beta}. \tag{2.9}$$

Podobnie, przedstawia się funkcję średniego naprężenia normalnego $\varkappa(\underline{\sigma})$ i funkcję intensywności dewiatora naprężeń $\gamma(\underline{s}^2)$

$$\varkappa(\underline{\sigma}) = 1 + \sum_{\mu=1}^{P} \varkappa_{2\mu}\underline{\sigma}^{2\mu}, \quad \gamma(\underline{s}^2) = 1 + \sum_{\nu=1}^{Q} \gamma_{2\nu}\underline{s}^{2\nu}, \tag{2.10}$$

gdzie współczynniki $\psi_{2\alpha}, \chi_{2\beta}, \varkappa_{2\mu}, \gamma_{2\nu}$ ustala się, np. metodą najmniejszych kwadratów, z badań doświadczalnych.

3. Funkcjonały iteracyjne

Mając reprezentacje wielomianowe funkcji $\psi, \chi, \varkappa, \gamma$ (rów.(2.9), (2.10) możemy uzyskać wzory określające energię odkształcenia i energię uzupełniającą jako funkcje wielomianowe niezmienników stanu odkształcenia czy też naprężenia; podstawiając (2.9), (2.10), kolejno do (2.1), (2.4) uzyskamy

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{9}{2} K\varepsilon^2\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\psi_{2\alpha}}{1+\alpha}\varepsilon^{2\alpha}\right) + \frac{2G}{3} e^2\left(1 + \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\chi_{2\beta}}{1+\beta} e^{2\beta}\right),$$

$$\overset{U}{\Phi}(\sigma_{ij}) = \frac{9}{2} K\underline{\sigma}^2\left(1 + \sum_{\mu=1}^{P} \frac{\varkappa_{2\mu}}{1+\mu}\underline{\sigma}^{2\mu}\right) + \frac{2G}{3}\underline{s}^2\left(1 + \sum_{\nu=1}^{Q} \frac{\gamma_{2\nu}}{1+\nu}\underline{s}^{2\nu}\right). \tag{3.1}$$

Podstawiając $(3.1)_1$ do (2.2), a $(3.1)_2$ do rów. (2.5), uzyskujemy końcową postać funkcjonałów

$$V = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{9}{2} K\varepsilon^2(1 + a) + \frac{2G}{3} e^2(1 + b)\right] dx - \int_{\mathcal{V}} X_i u_i dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{X}_i u_i dx,$$

$$\overset{*}{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{9}{2} K\underline{\sigma}^2(1 + c) + \frac{2G}{3}\underline{s}^2(1 + d)\right] dx - \int_{\partial\tilde{\mathcal{V}}} \tilde{X}_i u_i dx, \tag{3.2}$$

gdzie

$$a = \underline{\frac{1}{2}\psi_2\varepsilon^2} + \sum_{\alpha=2}^{M} \frac{1}{1+\alpha}\psi_{2\alpha}\varepsilon^{2\alpha}, \quad b = \underline{\frac{1}{2}\chi_2 e^2} + \sum_{\beta=2}^{N} \frac{1}{1+\beta}\chi_{2\beta}e^{2\beta},$$

$$c = \underline{\frac{1}{2}\varkappa_2\underline{\sigma}^2} + \sum_{\mu=2}^{P} \frac{1}{1+\mu}\varkappa_{2\mu}\underline{\sigma}^{2\mu}, \quad d = \underline{\frac{1}{2}\vartheta_2\underline{s}^2} + \sum_{\nu=2}^{Q} \frac{1}{1+\nu}\vartheta_{2\nu}\underline{s}^{2\nu}. \tag{3.3}$$

W dalszych rozważaniach, w wyrażeniach (3.3), zachowamy tylko wyrazy podkreślone.

Minimalizację funkcjonałów (3.2) możemy przeprowadzić metodami tradycyjnymi uzyskując wtedy z warunków koniecznych - nieliniowe problemy brzegowe; o ile w pewnych przypadkach szczególnych można w ten sposób postępować, to w ogólnym ujęciu prowadzi to do bardzo skomplikowanych równań nieliniowych problemu (nieliniowe równania przemieszczeniowe Lamégo lub - naprężeniowe Beltramiego-Michella). W zastosowaniach istnieją dwie możliwości: pierwsza polegać będzie na wykorzystaniu metody elementów skończonych do układów (3.2), druga na wprowadzeniu funkcjonałów iteracyjnych

$$V^{(n)} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{9}{2} K\varepsilon^{(n)2}(1 + a^{(n-1)}) + \frac{2G}{3} \overset{(n)}{e}{}^2 (1 + b^{(n-1)})\right] dx - \int_{\mathcal{V}} X_i u_i^{(n)} - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{X}_i u_i^{(n)} dx, \tag{3.4}$$

$$\overset{*}{V}{}^{(n)} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{9}{2} K \overset{(n)}{\underline{\sigma}}{}^2 (1 + c^{(n-1)}) + \frac{2G}{3} \overset{(n)}{\underline{s}}{}^2 (1 + d^{(n-1)})\right] dx - \int_{\partial\tilde{\mathcal{V}}} \tilde{X}_i u_i^{(n)} dx,$$

gdzie

$$a^{(n-1)} \cong \frac{1}{2}\psi_2 \overset{(n-1)}{\varepsilon^2}, \quad b^{(n-1)} \cong \frac{1}{2}\chi_2 \overset{(n-1)}{e^2}, \quad c^{(n-1)} \cong \frac{1}{2}\varkappa_2 \overset{(n-1)}{\underline{\sigma}^2},$$

$$d^{(n-1)} \cong \frac{1}{2}\vartheta_2 \overset{(n-1)}{\underline{s}^2}, \tag{3.5}$$

co prowadzi do n $(n = 1,2,\ldots)$, warunków na minimum dla funkcjonałów liniowych $V^{(n)}$ lub $\overset{*}{V}{}^{(n)}$, tj. do równań

$$\delta\left[V^{(n)}\right] = 0, \quad \delta\left[\overset{*}{V}{}^{(n)}\right] = 0 \quad (n = 1,2,\ldots).$$

W związku z postawionym tutaj problemem pojawiają się następujące zadania: 1) należy wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \delta\left[V^{(n)}\right] = \delta[V] = 0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} \delta\left[\overset{*}{V}{}^{(n)}\right] = \delta[V] = 0$; 2) istnienie i jednoznaczność tak określonego ciągu iterat $V^{(n)}$ lub $\overset{*}{V}{}^{(n)}$; 3) podać oszacowanie n-tego przybliżenia, w sensie wybranej normy $\left\|u_i^{(n)} - u_i\right\| \leqslant O(h^p)$ lub $\left\|\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}\right\| \leqslant O(h^q)$. Problemami tymi, będącymi przedmiotem opracowania, zajmować się w niniejszym komunikacie nie będziemy.

LITERATURA

1. Bignoli J.A.: Palabras de apertura de las seciones sobre "Problemas no lineales de la mecanica estructural", An. Acad. Nac. Cienc. Exact. Fis. y Natur., Buenos Aires, 2, 1969, 121-133.
2. Bignoli J.A.: Analisis matricial de estructures no lineales bajo corgas proporcionales, An. Acad. Nac. Ciec. Exact., Fis. y Natur., Buenos Aires, 2, 1969, 181-230.
3. Cardan A.: Non-linear elastic constitutive equations, Intern. J. Non-linear Mech., 4, 7 (1972), 347-352.
4. Kolarov D., Bogdanowa N., Baltov A.: On the solution of a nonlinear variational problem associated with the finite element method, Izw. Inst. Tech. Mech., Bułg. A.N., 8, 1971, 21-30.

5. Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

6. Machado L.M.: Problemas tridimensionales nolineales, An. Acad. Nac. Cienc. Exact, Fis. y Natur, Buenos Aires, 2, 1969, 308-355.

7. Oden J.T.: Some results of finite element applications in finite elasticity, Comp. a Struct., 1, 3 (1973), 175-194.