ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

MONIKA MAREK

Instytut Matematyki

WARIACYJNE UJĘCIE PROBLEMU BRZEGOWEGO ZGINANIA PRĘTA PROSTEGO DLA OŚRODKA NIELINIOWEGO FIZYCZNIE (Komunikat)

Streszczenie. W niniejszym komunikacie przedstawiono, w ujęciu dość ogólnym, zagadnienie zginania pręta prostego o zmiennym przekroju, dla którego modelem może być ośrodek nieliniowy fizycznie (ośrodek Ramberga-Osgooda).

1. Wstęp

W niniejszym komunikacie przedstawiono, w ujęciu bardzo ogólnym zagadnienie zginania pręta prostego o zmiennym przekroju, dla którego modelem może być ośrodek nieliniowy fizycznie; ośrodek taki opisuje np. równanie Ramberga-Osgooda.

Rozważania ogólne, w ramach mechaniki ośrodków odkształcalnych, odnoszące się do nieliniowości fizycznej przedstawiono w monografii H. KAUDERERA [3]; pewne szczególne problemy dotyczące analizowanego tutaj zadania rozpatrywali: J.A. BIGNOLI [1], T. NIKOLOVSKI [4], G.R. VENKATESVARA, A.V. MURTY KRISHNA [5]. Przedstawione tutaj ujęcie bazuje na sposobie podanym w komunikacie [2].

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy pręt o zmiennym przekroju, posiadający płaszczyznę symetrii przechodzącą przez oś pręta, która jest linią prostą: łączy ona środki ciężkości przekrojów prostopadłych do osi pręta. Przyjmować będziemy, że pręt jest wykonany z materiału, do którego modelem fizycznym będzie ośrodek Ramberga-Osgooda; w tym przypadku słusznym pozostanie następujące równanie konstytutywne

$$\sigma_x = E\varepsilon_x(1 + K\varepsilon_x^{M-1}) \tag{2.1}$$

zapisane zgodnie z układem podanym w pracy (5). W (2.1) przez σ_x oznaczono naprężenia normalne, przez ε_x - wydłużenie względne, a przez E, K, M - stałe materiałowe, które wyznacza się doświadczalnie. Przyjmować będziemy, że na pręt działają tylko siły leżące w płaszczyźnie symetrii, prostopadłe do osi pręta i przyłożone w tej osi; oznaczać je będziemy symbolicznie przez $q(x)$, dla $x \in L = \{x: 0 < x < l\}$, gdzie l będzie długością pręta. Oprócz wspomnianych obciążeń $q(x)$ [N/m] występować będą na brzegach pręta - siły skupione $P(x_i) = P_i$ [N] dla $x_i \in \partial L = \{x_o = 0\} \cup \ldots \cup \{x_k = l\}$, $k \geqslant 2$. Przez L (∂L) oznaczono: zbiór punktów osi pręta (brzegowych). Do wymienionych powyżej sił należy dołączyć jeszcze momenty zginające, które oznaczać będziemy przez $m(x)$ [Nm/m] $x \in L$; $M(x_i) = M_i$ [Nm], $x_i \in \partial L$ W przypadku, gdy między punktami brzegowymi występować będą siły lub momenty skupione, przyjmiemy: $q(x)\big|_{x=x_j} = Q_j\delta(x_j,\xi_j)$ $m(x)\big|_{x=x_j} = M_j\delta(x_j,\xi_j)$, gdzie $\delta(\ )$ oznacza dystrybucję (deltę Diraca).

Przyjmować będziemy teorię liniową geometrycznie, z której wynika, że wydłużenie względne $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,z)$ w przekroju pręta, przy założonej poprzednio symetrii i rodzaju obciążenia, wyrażać się będzie równaniem

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du}{dx} = -z\frac{d^2w}{dx^2}, \quad u = -z\frac{dw}{dx}. \tag{2.2}$$

Z każdym punktem osi pręta wiązać będziemy prawoskrętny, ortonormalny lokalny układ współrzędnych x, y, z: oś x pokrywać się będzie z osią pręta, oś z leżeć będzie w płaszczyźnie symetrii pręta. Przemieszczenie dowolnego punktu osi pręta (o współrzędnej x), w kierunku osi z oznaczać będziemy symbolem w; będzie ono tylko funkcją współrzędnej $x: w = w(x)$, $x \in [0,l]$.

3. Wariacyjne przedstawienie zadania

Do rozwiązania występujących w zadaniu problemów brzegowych, nieliniowych stosować będziemy podejście wariacyjne, por. [2]; z odpowiednich twierdzeń mechaniki ośrodków odkształcalnych wynika, że w stanie równowagi ośrodka, całkowita energia potencjalna ośrodka

$$V = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\varepsilon_{ij})dv - \int_{\mathcal{V}} X_i\, u_i\, dv - \int_{\partial\mathcal{V}} \hat{X}_i\, u_i\, df \tag{3.1}$$

osiąga ekstremum (minimum), czyli

$$\delta\,[V] = 0. \tag{3.2}$$

Oznaczenia występujące w (3.1) są analogiczne jak w [2].

W rozpatrywanym tutaj przypadku zginania pręta, energia odkształcenia zależeć będzie tylko od ε_x, skąd $\Phi(\varepsilon_{ij}) = \Phi(\varepsilon_x) = \int_0^{\varepsilon_x} \bar{\sigma}_x\, d\bar{\varepsilon}_x$; podstawiając do ostatniego równania związki (2.1) i wykonując proste przekształcenia uzyskamy

$$\Phi(\varepsilon_x) = \frac{1}{2} E\, \varepsilon_x^2 \left(1 + \frac{2K}{M+1}\, \varepsilon_x^{M-1}\right). \tag{3.3}$$

Podstawiając (2.2) do (3.3), a następnie tak otrzymany wynik do pierwszej całki w równaniu (3.1), uzyskujemy - po wprowadzeniu całki iterowanej $\int_{\mathcal{V}} (\ ) = \int_L (\ ) \int_F (\ )$:

$$\int_{\mathcal{V}} \Phi(\varepsilon_{ij})dv = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\varepsilon_x)dv = \frac{1}{2} E \int_L I_y \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right)^2 \left[1 + \mu \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^{M-1}\right] dx, \tag{3.4}$$

gdzie

$$I_y(x) = \int_F z^2 dydz, \quad I_y^{(M)} = \int_F (-z)^{M+1} dydz, \quad \mu = \frac{2K}{M+1}\, \frac{I_y^{(M)}}{I_y}.$$

Przejdziemy do przystosowania drugiej całki występującej w równaniu (3.1) do rozpatrywanego tutaj zadania szczególnego. W tym celu przyjmiemy, że siły masowe mają w pręcie następującą postać:

$$X_1 = m(x)\delta'(x;z,\xi), \quad X_2 = 0, \quad X_3 = q(x)\delta(x;z,\xi), \tag{3.5}$$

a odpowiadające im przemieszczenia mogą być określone równaniami

$$u_1 = u = -z\frac{dw(x)}{dx}, \; u_2 = v = 0, \quad u_3 = w(x), \tag{3.5}$$

gdzie występujące w (3.5) symbole δ, δ' oznaczają kolejno, dystrybucje zmiennej z oraz pochodną delty Diraca, względem zmiennej z.

Uwzględniając w drugiej całce wzoru (3.1) zależności (3.5), (3.5') a także wykorzystując własności delty Diraca i jej pochodnej ($\int_\Gamma \delta' z dF = 1$, $\int_F \delta dx = 1$), po uprzednim uwzględnieniu całki iterowanej, uzyskamy:

$$-\int_V X_1 u_1 \, dv = \int_L q(x)w(x)dx + \int_L m(x)\frac{dw(x)}{dx}dx. \tag{3.6}$$

W podobny sposób obliczymy trzecią całkę wzoru (3.1), przyjmując

$$\begin{gathered} \hat{X}_1 = M_1\delta'(x_1;z,\xi), \quad \hat{X}_2 = 0; \quad \hat{X}_3 = P_1\delta(x_1;z,\xi) \\ u_1 = -z\frac{dw(x_1)}{dx} = u_1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x_1) = w_1. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Podstawiając (3.7) do drugiej całki równania (3.1) i biorąc pod uwagę, że mamy do czynienia z siłami skupionymi otrzymamy

$$-\int_{\delta V} \hat{X}_1 u_1 \, dv = -\sum P_1 w_1 + \sum M_1 \frac{dw_1}{dx}. \tag{3.8}$$

Podstawiając (3.4), (3.6), (3.8) do równania (3.1) uzyskujemy związek określający całkowity potencjał belki zginającej, dla której modelem jest ośrodek Ramberga-Osgooda

$$V[w(x)] = \frac{1}{2} E \int_L I_y \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 \left[1 + \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^{M-1}\right] dx + \int_L m(x) \frac{dw(x)}{dx} dx -$$

$$- \int_L q(x) w(x) dx + \sum_i M_i \frac{dw_i}{dx} - \sum_i P_i w_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \ k \geqslant 2. \tag{3.9}$$

Minimalizacja funkcjonału (3.9) może być przeprowadzona tradycyjnymi metodami: uzyskamy wtedy nieliniowe równanie różniczkowe, a także warunki brzegowe lub też - po przyjęciu, w rozpatrywanym przedziale x, x + h, kształtu funkcji w(x), - wykonaniu całkowania możemy uzyskać macierz sztywności całego układu, co jest podejściem typowym dla metody elementów skończonych. Można wreszcie minimalizować funkcjonały iteracyjne, por. [2], sposobami wymienionymi poprzednio.

LITERATURA

1. Bignoli J.A.: Analisis matricial de estructures no lineales bajo corgas proporcionales, An. Acad. Nac. Cienc. Exact., Fis. y natur., Buenos Aires, 2, 1969, 181-230.
2. Borkowski S.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania problemów brzegowych ośrodków nieliniowych fizycznie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Mat.-Fiz.", 25, 1974, 181-188.
3. Kauderer H.: Nichlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.
4. Nikolovski T.: Trenutna matrica krutosti nelinearnog elementa tipa Ramberg-Osgood, Technika, 5, 27 (1972), 877-882.
5. Venkatesvara R.G., Murty Krishna A.V.: An alternate form of the Ramberg-Osgood formula for matrix displacement, Nucl.Eng. a.Design, 17, 1971, 297-308.