ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

ROBERT WÓJCIK

Instytut Matematyki

WARIACYJNE UJĘCIE PROBLEMU BRZEGOWEGO TEORII SKRĘCANIA PRĘTÓW DLA OŚRODKA NIELINIOWEGO FIZYCZNIE
(Komunikat)

Streszczenie. W komunikacie przedstawiono wariacyjne ujęcie problemów brzegowych teorii skręcania prętów prostych, dla których modelem fizycznym jest nieliniowy ośrodek Kauderera.

1. Wstęp

Przedstawiono tutaj wariacyjne ujęcie problemów brzegowych teorii skręcania prętów prostych, dla których modelem fizycznym jest nieliniowy ośrodek Kauderera.

Podstawy klasycznej, de Saint Venantowskiej, teorii skręcania prętów wyczerpująco omówione są w monografii N.Ch. ARUTJUNIANA, B.Ł.ABRAMJANA [1], natomiast sposób wariacyjnego ujęcia przyjmujemy zgodnie z [3], [4]. Podstawowe równania mechaniki ośrodków fizycznie nieliniowych wyprowadzone zostały przez H. KAUDERERA [5].

Pewne szczególne problemy nieliniowe, odnoszące się do skręcania prętów, przedstawiono w pracach: J.A. BARGA, W.I. MISZEWA [2] (pręt o przekroju prostokątnym); H. KAUDERERA [5] (przekrój kołowy i eliptyczny); O.S. KOSMODAMIANSKIEGO, N.E. ZIMY [6] (przekrój eliptyczny z dwoma wtrąceniami); N.E. ZIMY [7] (przekrój eliptyczny z ekscentrycznym walcowym wycięciem).

2. Sformułowanie zadania

Analizować będziemy zagadnienie skręcania pręta o stałym przekroju jednospójnym, którego oś jest linią prostą, przechodzącą przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta (oś z-tów). Przyjmować będziemy klasyczne założenia w stronie geometrycznej teorii, z których wynika, że przemieszczenia w kierunku osi x, (y), tj. funkcje u(y, z), (v(x, z)) mogą być określone przez

$$u = -\Theta yz, \quad v = \Theta xz; \tag{2.1}$$

podobnie w stronie statycznej przyjmiemy zgodnie z [1]:

$$\begin{gathered} \tau_{xz} = G\Theta \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\Theta \frac{\partial F}{\partial x}; \\ K = 2G\Theta \iint_{\Gamma} F(x,y)\,dx\,dy, \quad F(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma} = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Natomiast w stronie fizycznej zadania przyjmować będziemy, że modelem pręta jest ośrodek Kauderera; w tym przypadku kąty odkształcenia postaciowego γ_{xz}, γ_{yz} określone są związkami

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\,\gamma(\underline{S}^2)\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\,\gamma(\underline{S}^2)\tau_{yz}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\gamma(\underline{S}^2) \approx 1 + \gamma_2 \underline{S}^2, \quad \underline{S} = \frac{S}{2G}, \quad S^2 = 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 3G^2\Theta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right].$$

W (2.1) - (2.3) F(x,y) przedstawia funkcję naprężeń, S - intensywność naprężeń, K - moment skręcający, działający w przekroju brzegowym $z = l$, Θ - jednostkowy kąt skręcenia, Γ - zbiór punktów przekroju pręta, G, γ_2 - stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie. Rozpatrywany pręt będzie walcem: $\mathcal{V} = \Gamma \times l = \{(x,y)\} \times \{z:\ 0 \leqslant z \leqslant l\}$; brzeg obszaru Γ oznaczamy przez $\partial\Gamma$.

3. Wariacyjne przedstawienie zadania

Rozwiązanie problemów brzegowych teorii skręcania prętów dla ośrodka nieliniowego fizycznie, sprowadzimy do ekwiwalentnego zadania wariacyjnego por. [3], [4]; z odpowiednich twierdzeń mechaniki ośrodka stałego odkształcalnego wynika, że w stanie równowagi statycznej ośrodka całkowita, sprzężona energia potencjalna ośrodka

$$\overset{*}{V} = \int_{\mathcal{V}} \overset{u}{\Phi}(\sigma_{ij})dv - \int_{\partial\mathcal{V}} \tilde{X}_i\, \tilde{u}_i\, df \tag{3.1}$$

osiąga ekstremum (minimum), czyli

$$\delta\left[\overset{*}{V}\right] = 0. \tag{3.2}$$

Przy występującym tutaj stanie naprężenia, określonym naprężeniami stycznymi τ_{xz}, τ_{yz} (rów. $(2.2)_1$) oraz przybliżoną wartością funkcji $\gamma_2(\underline{S}^2)$ (rów. $(2.3)_3$), pierwsza całka występująca we wzorze (3.1), por. [3], ma postać

$$\int_{\mathcal{V}} \overset{u}{\Phi}(\sigma_{ij})dv = \frac{2G}{3}\int_{\mathcal{V}} \underline{S}^2(1+\alpha)dv, \tag{3.3}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma_2\, \underline{S}^2 = \frac{3}{8}\gamma_2\Theta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right].$$

Ponieważ występujący stan naprężenia jest określony funkcją dwu zmiennych (x,y), przeto przedstawiając całkę objętościową (3.3) jako iterowaną oraz uwzględniając rów. $(2.3)_2$, możemy po prostych przekształceniach uzyskać

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \overset{u}{\Phi}(\sigma_{ij})dv = \frac{1}{2}\, G\Theta^2 l \iint\limits_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]\left\{1 + \frac{3}{8}\,\gamma_2\,\Theta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]\right\} dxdy. \tag{3.3'}$$

Przystąpimy do przekształcenia drugiej całki równania (3.1); występujące w niej wielkości $\tilde{X}_i$ $(i = 1,2,3)$ oraz $\tilde{u}_i$ są kolejno siłami działającymi w miejscach zadanych przemieszczeń. Ponieważ w przypadku skręcania prętów przyjmować będziemy, że pręt jest utwierdzony w przekroju $z = 0$ przeto dla $z = 0$ mamy $u_1 = u = 0$, $u_2 = v = 0$, $u_3 = w = 0$. Na powierzchniach tworzących walca nie występują obciążenia, zatem $X_i = 0$, dla $(x,y,z)\in\partial\mathcal{V} \setminus (\{z = 0\} \cup \{z = l\})$. Jedynie w przekroju $z = l$ wystąpią zadane przemieszczenia, które określają wzory (2.1)

$$u_1 = u\big|_{z=l} = -\Theta yl, \quad u_2 = v\big|_{z=l} = \Theta xl, \quad u_3 = w. \tag{3.4}$$

Odpowiadające przemieszczeniom (3.4) siły określimy równaniami

$$X_1 = \tau_{zx}\delta(z,\xi), \quad X_2 = \tau_{zy}\,(z,\xi), \quad X_3 = 0. \tag{3.5}$$

W (3.5) $\delta(\ )$ jest dystrybucją (deltą Diraca).
Podstawiając (3.4), (3.5) do drugiej całki (3.1) oraz uwzględniając związki $(2.2)_1$ i pisząc całkę iterowaną uzyskamy

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{V}} \tilde{X}_i\, \tilde{u}_i\, df = G\Theta^2 l \iint\limits_{\Gamma}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)dxdy. \tag{3.6}$$

Stosując do ostatniego wzoru przekształcenie Greena dla obszarów jednospójnych oraz uwzględniając $(2.2)_4$ otrzymamy

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{V}} \tilde{X}_i\, \tilde{u}_i\, df = -\,2G\Theta^2 l\iint\limits_{\Gamma} F(x,y)dxdy = \Theta Kl. \tag{3.6'}$$

Wzór (3.6') jest taki sam jak przy zadaniu liniowym, co jest konsekwencją przyjęcia niezmienionej strony geometrycznej i statycznej. Podstawiając (3.3'), (3.6') do równania (3.1) uzyskujemy równanie określające sprzężoną energię potencjalną skręcanego pręta dla ośrodka nieliniowego fizycznie:

$$\overset{*}{V}\left[F(x,y)\right] = \frac{1}{2} G\Theta^2 l \iint\limits_{\Gamma} \left[\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]\left\{1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{8}\Theta^2 \gamma_2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]\right\} - 4 F(x,y)\right] dxdy. \qquad (3.7)$$

Porównując (3.7) z analogicznym funkcjonałem dla zadania liniowego por. [4], widzimy, że jego postać jest bardzo złożona, powiększona o człon zawierający mnożnik γ_2; gdy przyjmiemy $\gamma_2 = 0$ (zadanie liniowe) uzyskujemy wtedy funkcjonał liniowy, stosowany przy rozwiązaniach przybliżonych teorii skręcania.

Minimalizacja funkcjonału (3.7) przeprowadzona metodą tradycyjną daje w wyniku nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe, które może być rozwiązane z kolei metodą iteracyjną. Do zminimalizowania funkcjonału (3.7) może być też stosowana metoda elementu skończonego lub minimalizacja iterowanych funkcjonałów, por. [3], co sprowadza problem do minimalizacji funkcjonałów liniowych, przy wykorzystaniu metody kolejnych przybliżeń.

LITERATURA

1. Arutjunian N.Ch., Abramjan B.Ł.: Kruczenije uprugich tieł, Fizmatgiz 1963.

2. Barg J.A., Miszew W.N.: Kruczenije prizmaticzeskich stierżniej iz nieliniejnogo uprugogo materiała, Izw. Wuzow, Str. i Arch., 9, 1972 42-46.

3. Borkowski S.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania problemów brzegowych ośrodków nieliniowych fizycznie, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Matematyka-Fizyka", 1973.

4. Chi-Ten Wang: Apphed elasticity, Mc Graw-Hill Publ. Comp. New Jork 1953.

5. Kauderer H.: Hichlineare Mechanik, Spr. Verl., 1958.

6. Kosmodamiancki O.S., Zima N.E.: Kruczennja fizyczno-nieliniejnich armowannych stierżniw, Dopowidi AN URSR, 9, A, 1971, 804-807.

7. Zima N.E.: Kruczennja fizyczno-nelinijnogo elipticznogo stierżnja z ekscentricznoju pozdowinoju krugowod porożninoju, Teor. i Prikł. Mech., wyp. 2, 1971, 78-82.