ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JADWIGA JĘDRZEJCZYK
Instytut Matematyki

WARIACYJNE FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH PŁYT DLA OŚRODKÓW NIELINIOWYCH FIZYCZNIE
(Komunikat)

Streszczenie. Stosując klasyczne założenia w stronie geometrycznej i statycznej teorii płyt cienkich oraz wprowadzając równania konstytutywne Kauderera otrzymano przybliżoną postać funkcjonału określającego całkowitą energię potencjalną. Przybliżenie to wynika z faktu przyjęcia dwu wyrazów w reprezentacji wielomianowej funkcji odkształcenia postaciowego i funkcji wydłużenia względnego.

1. Wstęp

Zagadnienie zginania płyt dla ośrodka fizycznie nieliniowego lub przy uwzględnieniu dużych ugięć, czy wreszcie łącznego traktowania nieliniowości fizycznej i geometrycznej było przedmiotem wielu prac; przegląd tych wyników można znaleźć w publikacjach [1],[2], [7], [8]. W pracy Ł.G. Odnorała [5] zagadnienie zginania płyty kołowej, obciążonej siłą skupioną, przy uwzględnieniu równań konstytutywnych Kauderera [4] sprowadzono do równania różniczkowo-całkowego; równanie to rozwiązano metodą małego parametru. Interesujących nas prac matematycznych, odnoszących się do analizowanej tutaj problematyki, do tej pory nie spotkaliśmy; pokrewne zadania matematyczne zostały omówione w [3].

W niniejszym komunikacie sformułowano problem brzegowy płyt cienkich sprężystych, dla ośrodka nieliniowego Kauderera, w ujęciu wariacyjnym. Nieliniowość w równaniach konstytutywnych uwzględniono zachowując dwa człony, por. [3], w wielomianowych reprezentacjach odpowiednich funkcji. Przedstawioną tutaj problematykę najwygodniej jest badać

stosując metody wariacyjno-różnicowe i tym celom służyć będzie przedstawione wariacyjne sformułowanie zadania.

2. Założenia

Przedmiotem naszych rozważań będą małe ugięcia płyty o stałej grubości h, małej w porównaniu do jej pozostałych wymiarów. Analizę ugięcia płyt cienkich przeprowadzimy w oparciu o przybliżoną teorię Kirchhoffa zginania płyt obciążonych poprzecznie.

Przyjmujemy więc następne założenia, por. [6]:

1. Płaszczyzna środkowa płyty nie ulega odkształceniu.
2. Słuszna jest hipoteza elementu normalnego.

Jako układ odniesienia przyjmujemy kartezjański układ współrzędnych (x,y,z), z płaszczyzną z = 0 pokrywającą się z nieodkształcalną powierzchnią środkową płyty.

Na podstawie powyższych założeń, składowe przemieszczenia (u, v), punktów elementu normalnego wyrażają się przez ugięcie w = w(x,y) płyty, wzorami

$$u = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}. \tag{2.1}$$

Ograniczając rozważania tylko do ośrodków geometrycznie liniowych składowe stanu odkształcenia - na podstawie (2.1) i założeń Kirchhoffa - będą określone przez związki, por. [6]

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.2}$$

Następnie przyjmujemy, że modelem płyty będzie ośrodek fizycznie nieliniowy Kauderera. Zgodnie z tym założeniem związki konstytutywne dla płyty mieć będą postać, por. [4]

$$\sigma_x = 3K\Psi(\varepsilon_m)\varepsilon_m + 2G\chi(e_i^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_m), \tag{2.3}$$

$$\sigma_y = 3K\psi(\varepsilon_m)\varepsilon_m + 2G\chi(e_i^2)(\varepsilon_y - \varepsilon_m),$$

$$\tau_{xy} = G\chi(e_i^2)\gamma_{xy}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$e_i^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2.$$

We wzorach (2.3) przyjęto

$$\psi(\varepsilon_m) = 1 + \psi_2\,\varepsilon_m^2,$$

$$\chi(e_i^2) = 1 + \chi_2\,e_i^2. \tag{2.4}$$

W (2.3) i (2.4): $\psi(\varepsilon_m)$ jest funkcją wydłużenia względnego; $\chi(e_i^2)$ funkcją odkształcenia postaciowego; σ_x, σ_y, τ_{xy} - współrzędnymi tensora naprężeń; ε_x, ε_y, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ - współrzędnymi tensora odkształcenia; ε_m - średnim wydłużeniem względnej; e_i - intensywnością tensora odkształcenia; K, G - stałymi materiałowymi.

3. Wariacyjne ujęcie problemu

Obliczenie rozkładu naprężeń w płacie sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego, czwartego rzędu, które łącznie z warunkami brzegowymi definiuje ugięcie $w = w(x,y)$. Równoważną metodą rozwiązania tego problemu jest metoda wariacyjna polegająca na poszukiwaniu minimum funkcjonału, zwanego całkowitą energią potencjalną. Zgodnie z odpowiednim twierdzeniem, całkowita energia potencjalna ośrodka

$$V = \int_{\vartheta} \Phi d\vartheta - \int_{\vartheta} X_i \, u_i \, d\vartheta - \int_{\partial\vartheta} \hat{X}_i \, u_i \, df \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

w stanie równowagi statycznej, osiąga minimum, czyli

$$\delta(V) = 0. \tag{3.2}$$

Pierwszy składnik prawej strony równania (3.1) przedstawia energię odkształcenia. Dla ośrodka nieliniowego fizycznie energia ta, por. [4], określona jest wzorem

$$\Phi = \Phi(\underset{m}{\varepsilon}, e_i^2) = {}^{V}\Phi(\underset{m}{\varepsilon}) + {}^{F}\Phi(e_i^2) =$$

$$= 9\,K \int_0^{\underset{m}{\varepsilon}} \varepsilon\,\psi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{4}{3}\,G \int_0^{e_i} e\chi(e^2)de. \tag{3.3}$$

Uwzględniając w (3.2) równania (2.4) określające funkcję odkształcenia postaciowego i funkcję wydłużenia, otrzymamy

$$\Phi(\underset{m}{\varepsilon}, e_i^2) = \frac{9}{2}\,K(\underset{m}{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2}\psi_2 \underset{m}{\varepsilon}^4) +$$

$$+ \frac{2}{3}\,G(e_i^2 + \frac{1}{2}\chi_2\, e_i^4). \tag{3.4}$$

Druga i trzecia całka w związku (3.1) określa odpowiednio energię potencjalną sił działających w powierzchni środkowej płyty oraz na brzegu. Jeżeli energię potencjalną tych sił w stanie nienaprężonym przyjęto równą zeru, to w płycie całki te przechodzą na

$$\int_{\vartheta} X_i \, u_i \, d\vartheta + \int_{\partial\vartheta} \hat{X}_i \, u_i \, df = \iint_D qw \, dxdy + \int_{\partial D} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds + \int_{\partial D} \bar{\Theta} w \, ds, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\bar{\Theta} = \Theta_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}.$$

W równaniach (3.5) q oznacza obciążenie poprzeczne rozłożone na powierzchni D płyty, M_n, $\bar{\Theta}$ momenty zginające i siły poprzeczne rozłożone wzdłuż brzegu ∂D płyty, n normalną do brzegu.

Podstawiając równania (3.3) - (3.5) do (3.1), dalej uwzględniając (2.3) i (2.2), a następnie całkując otrzymamy

$$V = \iint_D \left\{ \frac{1}{24} K h^3 \left[1 + \frac{1}{120} \psi_2 h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{18} G h^3 \left[1 + \frac{3}{40} \chi_2 h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right]^2 \cdot$$

$$\left. \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]^2 \right\} dxdy +$$

$$- \iint_D qw \, dxdy + \int_{\partial D} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\partial D} \bar{\Theta} w \, ds. \tag{3.6}$$

Powyższy związek przedstawia poszukiwaną całkowitą energię potencjalną płyty w teorii nieliniowej fizycznie.

LITERATURA

1. Bergan G.P.: Nonlinear analysis of plates considering geometric and material effects, Rept. Statikk. NTH, Univ. Trondheim, 1.VI.1972.

2. Bergan S.: Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates, Rept. Inst. Statikk. NTH Univ. Trondheim, 1.IX.1973.

3. Borkowski S.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, "Matematyka-Fizyka" 1973.

4. Kauderer H.: Nichlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

5. Odnorał Ł.G.: Izgib krugłoj nieliniejno-uprugoj płastiny sosredotoczennej siłoj, Prikł. Mech., 2, 9 (1973), 74-79.

6. Timoszenko S.: Teoria płyt i powłok, "Arkady" 1959.

7. Ponomariew B.W.: Razczet priamougolnych płastin iz nieliniejno uprugich materiałow pri małych progibach, Stierżni i płastinki, Wyp. 4, Moskwa 1963, 89-102.

8. Proskurina W.M.: Bolszyje progiby płastin iz nieliniejno uprugich materiałow, Stierżni i płastinki, wyp. 44, Moskwa 1963, 77-88.