ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

HIERONIM LESZCZYŃSKI

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH MAŁOWYNIOSŁYCH POWŁOK SPRĘŻYSTYCH (Komunikat)

Streszczenie. W pracy zajęto się problemem numerycznego rozwiązania zadania brzegowego, opisującego pole przemieszczeń małowyniosłych powłok sprężystych, poddanych działaniu obciążeń.

Zamieniając problem brzegowy na równoważne mu zadanie wariacyjne i minimalizując występujący w tym zadaniu funkcjonał (energia potencjalna), w klasie funkcji podobszarami liniowych, uzyskano równania algebraiczne - tak skonstruowanej metody przybliżonej.

1. Wstęp

Problem wyznaczania przemieszczeń i naprężeń w powłokach małowyniosłych, poddanych wpływom pola sił i temperatur jest zadaniem bardzo złożonym. W niniejszej pracy zagadnienie brzegowe tego problemu sprowadzono do równoważnego zadania wariacyjnego na minimum funkcjonału.

W pracy, minimum funkcjonału poszukuje się w klasie funkcji podobszarami liniowych, co prowadzi do zagadnienia minimalizacji funkcji kwadratowej wielu zmiennych; rozwiązanie doprowadzono do równań różnicowych, podanych w niejawnej postaci. Problemami szacowania uzyskanych rozwiązań przybliżonych zajmować się będziemy w dalszych pracach.

2. Sformułowanie problemu

Zadanie polega na wyznaczeniu układu funkcji $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$; $(x,y) \in D$, minimalizujących funkcjonał

$$I(u,v,w) = W(u,v,w) - \iint_D (Xu + Yv + Zw)dxdy - \int_{\partial D_1} f_1(u,v,w)dy -$$

$$- \int_{\partial D_2} f_2(u,v,w)dx, \qquad (2.1)$$

w którym wielkość W określona jest wzorem

$$W(u,v,w) = \frac{1}{2} C \iint_D \Big\{ \Big[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + (k_1 + k_2)w \Big]^2 -$$

$$- 2(1 - \nu)\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w\Big) - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\, k_{12} w\Big)^2 \Big] \Big\} dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2} D \iint_D \Big\{ \Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big]^2 - 2(1 - \nu)\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big)^2 \Big] \Big\} dxdy. \qquad (2.2)$$

Występujące w (2.1) funkcje $X(x,y)$, $Y(x,y)$, $Z(x,y)$ oraz $f_1(u, v, w)$, $f_2(u,v,w)$ są dane; C, D, ν przedstawiają wielkości stałe.

W zastosowaniach najczęściej spotyka się warunki brzegowe, w których funkcje $f_1(u,v,w)$, $f_2(u,v,w)$ posiadają postać taką jak to przedstawiono w tablicy 1.

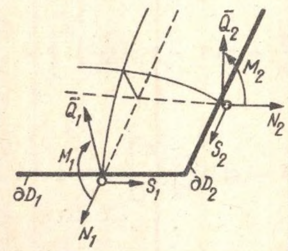
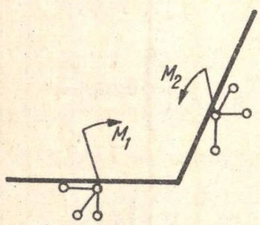
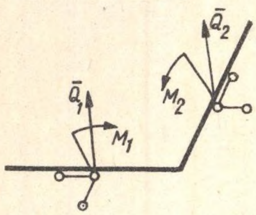
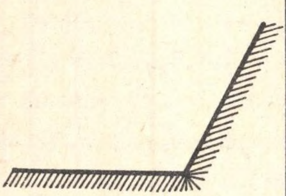
3. Metoda rozwiązywania zadania

W rozwiązaniu zadania (2.1) stosuje się metodę i sposób podejścia, odpowiednio uogólniony, taki jak to przedstawiono w pracach [2] ÷ [6], a w szczególności bazując na wynikach podanych w [5].

Zgodnie z określeniem metody zadanie (2.1) formułuje się w układzie:

$$(u,v,p,q) = \Big(u,v,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Big). \qquad (3.1)$$

Tablica 1

brzeg obciążony 	f_1	$N_1u + S_1v + Q_1w + M_1 \dfrac{\partial w}{\partial x}$
	f_2	$N_2v + S_2u + Q_2w + M_2 \dfrac{\partial w}{\partial y}$
zamocowanie przegub. 	f_1	$M_1 \dfrac{\partial w}{\partial x}$
	f_2	$M_2 \dfrac{\partial w}{\partial y}$
podparcie przegub. 	f_1	$Q_1w + M_1 \dfrac{\partial w}{\partial x}$
	f_2	$Q_2w + M_2 \dfrac{\partial w}{\partial y}$
utwierdzenie 	f_1	0
	f_2	0

Funkcjonał $I(u,v,w)$ przyjmuje wówczas przy dodatkowym założeniu $w(x,y) = 0$; $(x,y)\in\partial D$ następującą postać

$$I(u,v,p,q) = \iint_D \Big\{ C\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big] +$$

$$+ D\Big[\Big(\frac{\partial p}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial q}{\partial y}\Big)^2 + 2\nu \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} + 2(1-\nu)\Big(\frac{\partial p}{\partial y}\Big)^2\Big] -$$

$$- 2C(k_1 + \nu k_2)(up + vq) + 2Ck_{12}(1-\nu)(u \cdot q + v \cdot p) +$$

$$+ C(k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 + 2(1-\nu)k_{12}^2)\Big[\sum_{k=0}^{i} S_{kj}p_{kj}\Big]^2\Big\}dxdy -$$

$$- 2\iint_D \Big[Xu + Yv + \varphi p\Big]dxdy - 2\int_{\partial D_1}\Big[N_1u + S_1v + M_1p\Big]dy -$$

$$- 2\int_{\partial D_2}\Big[N_2v + S_2u + M_2q\Big]dx, \tag{3.2}$$

przy czym

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}; \tag{3.3}$$

funkcja $\varphi(x,y)$ występująca w (3.2) jest dana

$$S_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } k = 0,\ i \\ 1 & \text{dla } 0 < k < i, \end{cases} \qquad \text{gdzie} \qquad \begin{matrix} u = 0,1,2,\dots I \\ j = 0,1,2,\dots J. \end{matrix}$$

Zagadnienie minimalizacji funkcjonału (3.2) przy warunku (3.3) jest równoważne zagadnieniu minimalizacji funkcjonału postaci

$$J(u,v,p,q,\lambda) = I(u,v,p,q) + \iint_D \lambda(x,y)\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)dxdy. \qquad (3.4)$$

W stosowanej metodzie rozwiązania zadania (2.1) przyjmuje się dwa zbiory funkcji

$N_2^{(1)}$: zbiór funkcji liniowych i ciągłych w trójkątnych podobszarach obszaru D

$N_2^{(o)}$: zbiór funkcji stałych w trójkątnych podobszarach obszaru D

Minimum funkcjonału (3.4) poszukuje się dla (u,v,p,q) ze zbioru $N_2^{(1)}$ i $\lambda(x,y)$ należących do zbioru $N_2^{(o)}$. Dla tak przyjętych funkcji funkcjonał (3.4) staje się funkcją kwadratową wielu zmiennych.

Oznaczmy

$$J(u,v,p,q,\lambda)\Big|_{\substack{(u,v,p,q)\in N_2^{(1)} \\ \lambda \in N_2^{(o)}}} = S(u_{ij}, v_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, \lambda_{ij}). \qquad (3.5)$$

Równanie

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, S = 0 \qquad (3.6)$$

jest wówczas układem równań liniowych.

Funkcja (3.5) jest funkcją kwadratową wielu zmiennych, dodatnio określoną.

Warunek (3.6) jest zatem warunkiem koniecznym, a zarazem dostatecznym istnienia minimum tej funkcji.

Zasadnicze trudności w zastosowaniu przedstawionej metody do rozwiązania zadania (2.1) wystąpiły w sformułowaniu tegoż zadania w układzie (3.1) - co jest jednym z istotnych elementów metody. Trudności te były konsekwencją występowania w funkcjonale (2.1) drugiej potęgi funkcji $w(x,y)$ jak również iloczynów $u.w$ i $u.v$.

LITERATURA

1. Borkowski S.: Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967), Mech. Teor. Stos., 2, 7 (1969), 107-153.

2. Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie problemu brzegowego teorii naprężeń cieplnych, probl. 06.1.1, temat 04.1.09, maszynopis, Gliwice 1971.

3. Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie płaskich problemów brzegowych teorii naprężeń cieplnych, probl. 06.1.1, temat 04.1.09, maszynopis, Gliwice 1972.

4. Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych, Ogólnopolska Konf. Mat., Met. Numer., Solina 73.

5. Marszał J.: Metody numeryczne rozwiązywania zadań brzegowych termosprężystości. Met. Numer..., Konf., Rzeszów 1972, 29-34.

6. Leszczyński H.: Ilustracja metody podanej w[5]na przykładzie, Met. Numer..., Konf. Rzeszów 1972, 35-38.

7. Nowacki W.: Zagadnienia termosprężystości, Warszawa 1960.

8. Własow W.Z.: Obszczaja teorija obołoczek, Moskwa 1949.

9. Samarski A.A.: Wwiedienije w teoriju raznostnych schem, Moskwa 1971.